

分类号：
学 号：2021220261

密 级：公开
单位代码：10764

伊犁师范大学

硕 士 学 位 论 文

指向模型意识提升的小数学习题课教学实践 研究

Research on the Teaching Practice of Mathematics Exercise in Primary
School Pointing to the Enhancement of Model Consciousness

学 位 申 请 人	刘晨洁
指 导 教 师	冯利 教授
	蔡万茹 高级教师
申 请 学 位 类 别	教育硕士
专 业 学 位 领 域	小学教育
研 究 方 向	小学数学
所 在 学 院	教育科学学院

中国·新疆·伊宁

2024 年 5 月

摘要

2022 年颁布的《义务教育数学课程标准》将模型意识列为小学数学核心素养之一，模型意识是形成模型观念、建模能力的基础，其提升有利于增强学生对数学的应用、加强数学与生活的联系、提高学生的数学学习兴趣、形成正确的数学学习观。从长远角度来看，模型意识的提升对学生的数学学习有非常重要的作用。小学数学习题课以问题为载体，在问题解决过程中巩固知识、提高问题解决能力，而模型意识也与生活问题密不可分，需主动从生活情境出发发现问题，表达与简化关系并解决问题，同时需用数学模型解释生活中的现象、发现能用其解决的生活问题。因此，了解模型意识的内涵、分析与建构指向模型意识提升的小学数学习题课教学的模式，对小学生模型意识的提升和小学数学习题课教学质量的提高有重要的意义。

首先，本研究利用文献分析法，在现有理论及《义务教育数学课程标准（2022）》的基础上对指向模型意识提升的小学数学习题课教学进行理性探讨，梳理模型意识的内涵、提升特点及过程表现，分析指向模型意识提升的小学数学习题课教学的可行性，厘清模型意识与小学数学习题课教学的内在关联；其次，基于数学模型理论、建构主义理论、现实数学教育理论建构指向模型意识提升的小学数学习题课的教学模式，具体包括教学目标、教学程序、教学策略、辅助条件和教学评价；再次，利用教育实验法和测试法以小学五年级的学生为研究对象实践此模式，并通过模型意识的测试卷检验学生的模型意识提升情况；最后，利用 SPSS 软件分析数据，得到结论和不足，提出教学建议。

实验研究表明，实验前测两个班级无显著差异，而后测成绩有显著性差异，且后测实验班成绩有所提高，因此本研究所构建的指向模型意识提升的小学数学习题课教学模式对学生模型意识的提升有正向效果。通过具体分析可以发现实验班学生在模型的表征（D2）、解释（D3）、列举（D4）水平有明显地提高，但是由于此教学模式尚未完全成熟，因此在实际教学实践中还存在一些问题。为了有效实施此教学模式，本研究提出四点教学建议：关注与挖掘情境资源，加强学生对同类问题的感知；关注学生对模型的认知与应用，逐步形成自主意识；注重变式问题的阶梯性，循序渐进提升模型意识；引导学生自主归纳，加深对模型的普适性感悟。

关键词：模型意识；教学实践；小学数学

Abstract

The Mathematics Curriculum Standard for Compulsory Education promulgated in 2022 lists model consciousness as one of the core qualities of primary school mathematics. Model consciousness is the basis of forming model concept and modeling ability, and its promotion is conducive to enhancing students' application of mathematics, strengthening the connection between mathematics and life, improving students' interest in mathematics learning and forming a correct concept of mathematics learning. In the long run, the cultivation of model consciousness plays a very important role in students' mathematics learning. Math exercises in primary schools take problems as the carrier, and consolidate knowledge and improve problem-solving ability in the process of problem-solving. Model consciousness is also closely related to life problems, so it is necessary to actively find problems from life situations, express and simplify relationships and solve problems, and at the same time, use mathematical models to explain the phenomena in life and find life problems that can be solved by them. Therefore, it is of great significance to understand the connotation of model consciousness, analyze and construct the teaching mode of primary school mathematics exercise class which points to the cultivation of model consciousness, and to improve the model consciousness of primary school students and the teaching quality of primary school mathematics exercise class.

First of all, based on the existing theory and the Compulsory Education Curriculum Standard (2022), this study makes a rational discussion on the teaching of primary school mathematics exercises aiming at improving model consciousness, combs the connotation, characteristics and process performance of model consciousness, analyzes the feasibility of primary school mathematics exercises teaching aiming at improving model consciousness, and clarifies the internal relationship between model consciousness and primary school mathematics exercises teaching; Secondly, based on mathematical model theory, constructivism theory and realistic mathematical education theory, the teaching mode of primary school mathematics exercise class is constructed, which points to the improvement of model consciousness, including teaching objectives, teaching procedures, teaching strategies, auxiliary conditions and teaching evaluation. Thirdly, this model is practiced by using educational experiments and tests with fifth-grade primary school students as the research object, and the improvement of students' model consciousness is tested through the test paper of model consciousness; Finally, using SPSS software to analyze the data, get conclusions and shortcomings, and put forward teaching suggestions.

The experimental research shows that there is no significant difference between the two classes before the experiment, but there is a significant difference in the post-test scores, and the results of the post-test experimental class have improved. Therefore, the teaching mode of primary school mathematics exercises which aims at improving the model consciousness has a positive effect on improving the students' model consciousness. Through concrete analysis, it can be found that the students in the experimental class have obviously improved the level

of representation (D2), explanation (D3) and enumeration (D4) of the model. However, because this teaching model is not fully mature, there are still some problems in actual teaching practice. In order to effectively implement this teaching mode, this study puts forward four teaching suggestions: paying attention to and tapping situational resources to strengthen students' perception of similar problems; Pay attention to students' cognition and application of the model, and gradually form a sense of autonomy; Pay attention to the ladder of variant problems and improve the model consciousness step by step; Guide students to induce independently and deepen their understanding of the universality of the model.

Key words: model consciousness; teaching practice; primary school mathematic.

目录

摘要	I
Abstract	II
第一章 绪论	1
一、研究缘起	1
(一) 模型意识是解决实际问题的必要条件	1
(二) 习题课教学是提升模型意识的重要载体	2
(三) 模型意识是提高习题课教学质量的必然要求	2
二、研究意义	3
(一) 理论意义	3
(二) 实践意义	3
三、文献综述	4
(一) 关于模型意识的研究	4
(二) 关于习题课教学的研究	8
(三) 指向模型意识提升的教学实践研究	10
(四) 文献述评	11
四、研究问题与研究内容	11
(一) 研究问题	12
(二) 研究内容	12
五、研究思路与研究方法	13
(一) 研究思路	13
(二) 研究方法	13
第二章 概念界定及理论基础	15
一、概念界定	15
(一) 数学模型	15
(二) 模型意识	15
(三) 习题课教学	15
二、理论基础	16
(一) 数学模式理论	16
(二) 现实数学教育理论	16
(三) 建构主义理论	17
第三章 指向模型意识提升的小学数学习题课教学的理性审视	18
一、模型意识	18
(一) 模型意识的内涵	18
(二) 模型意识的过程表现	19

(三) 模型意识的提升特点	20
二、数学习题课教学	22
(一) 数学习题课教学的内涵	22
(二) 数学习题课教学的原则	22
三、指向模型意识提升的小学数学习题课教学的可行性分析	23
(一) 习题可以为模型意识的提升提供载体	23
(二) 习题课教学的问题解决过程可以为模型意识的提升提供路径	24
(三) 习题课教学的实施过程符合模型意识的提升特征	24
第四章 指向模型意识提升的小学数学习题课教学模式的建构	25
一、建构方式	25
二、指向模型意识提升的小学数学习题课教学模式要素分析	25
(一) 教育理念	25
(二) 教学目标	26
(三) 教学程序	26
(四) 教学策略	28
(五) 辅助条件	29
(六) 教学评价	30
三、指向模型意识提升的小学数学习题课教学模式图	30
四、指向模型意识提升的小学数学习题课教学案例	31
第五章 指向模型意识提升的小学数学习题课教学的实验研究	44
一、实验设计	44
(一) 实验目的	44
(二) 实验假设	44
(三) 实验对象	44
(四) 实验变量	45
(五) 实验方法	45
(六) 实验工具	45
二、实施过程	52
(一) 实验前测阶段	52
(二) 实验实施阶段	53
(三) 实验后测阶段	55
第六章 指向模型意识提升的小学数学习题课教学实验数据与结果分析	56
一、实验数据分析	56
(一) 实验前测数据分析	56
(二) 实验后测数据分析	57
(三) 实验数据具体分析	58

二、实验结论与反思	59
(一) 实验结论	59
(二) 实验反思	60
第七章 指向模型意识提升的小学数学学习题课的教学建议	61
一、挖掘与关注情境资源, 加强学生对同类问题的感知	61
二、关注学生对模型的认知与应用, 逐步形成自主意识	61
三、注重变式问题的阶梯性, 循序渐进提升模型意识	62
四、引导学生自主归纳, 加深对模型的普适性感悟	62
第八章 指向模型意识提升的小学数学学习题课教学的研究结论与讨论	63
一、研究结论	63
(一) 厘清了模型意识的内涵及其在小学数学习题课教学提升的可行性	63
(二) 建构了指向模型意识提升的小学数学习题课教学模式	63
(三) 构建了模型意识的测评工具并验证了此教学模式的有效性	63
二、研究讨论	63
(一) 本研究从心理学和外显性表现两方面确定模型意识的内涵	64
(二) 本研究关注在教学中以多种方式提升学生的模型意识	64
(三) 本研究构建了完整的模型意识测评工具	65
结语	66
参考文献	67
致谢	71
附录	72

第一章 绪论

一、研究缘起

2014年在《关于全面深化教育改革落实立德树人根本任务的意见》文件中正式提出“核心素养”概念^①，此后各学科课程标准对核心素养都做了要求，并将其融入到各学段中，构建了适合我国的核心素养体系^②，这一教育体系的提出标志着我国教育目的、育人模式、评价形式的转型，从而进一步推进我国基础教育的深度发展。

2022年中华人民共和国教育部颁布了《义务教育数学课程标准（2022年版）》（以下简称新课标），其明确提出小学数学核心素养的主要表现之一是模型意识，属于“三会”中的“会用数学语言表达现实世界”；同时也指出“数学是对现实世界的抽象，通过对数量和数量关系、图形和图形关系的抽象，从而得到数学研究对象和关系，进而基于抽象结构，通过符号运算、形式推理和模型建构，形成结论和方法”^③。可见，数学与现实世界息息相关、紧密相连，只是它们的表达方式有所不同，现实生活以汉字的、繁琐的文字进行说明与诠释，而数学世界是以精确的、明了的数字进行解释，且数学世界所用的方式更利于人们掌握其内部关系，找出问题与现象的本质，即数学模型，而抓住本质，主动用数学模型表达和解决问题，即模型意识。模型意识的发展对小学生数学自信心的培养、数学应用能力的提高、学生数学观的发展有重大意义。

习题课教学是以习题为载体的教学，是数学学科教学的课型之一，也是数学学科教学最典型的课型。习题课教学可以帮助学生巩固所学概念、公式或定理，促进知识系统建构，加强数学知识与现实生活的联系，提升学生的应用意识，从而达到掌握解题方法与思想、提高数学能力与素养等目的。

（一）模型意识是解决实际问题的必要条件

学习的目的是适应未来社会的发展趋势，在社会快速发展的时代下能应用所学知识解决各种新的问题，进而建构新的知识。大量实际问题都与数学有关，简单的实际问题需要个体提取相应数学知识并应用进而解决，而复杂的问题则需要个体探究问题的内部结构，根据所学知识、概念、性质等分析结构并解决。无论哪种问题，都离不开对数学知识、数学性质、数学关系的认知、提取与应用，此过程模型意识便是不可忽视的重要条件。

新课标提出模型意识指对运用数学模型实际问题有清晰的认识，它是连

① 中华人民共和国教育部. 教育部关于全面深化课程改革落实立德树人根本任务的意见[EB]/[OL].

(2014-4-8) [2023-4-14]. http://www.moe.gov.cn/srcsite/A26/jcj_kcjcgh/201404/t20140408_167226.html.

② 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017年版）[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2017.

③ 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准（2022年版）[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.

接学生数学世界与现实世界的桥梁，包括学生要知道数学模型可解决一类问题，这些问题的内部结构、所用知识、背后的思想方法等相同；能认识到现实生活大量的问题都与数学有关；在实际生活中，学生在真实情境中发现、提出、分析、解决问题的过程需要以模型意识为必要条件，又在此过程中不断发展学生的模型意识。由此可知，模型意识的发展对学生感悟数学与生活之间的联系、提高应用意识、抽象能力、创新意识等核心素养、发展模型思想、模型观念有不可替代的意义。因此，模型意识的发展对学生解决现实问题有不可替代的作用，是解决现实问题的必要条件。

（二）习题课教学是提升模型意识的重要载体

新课标指出小学阶段模型意识要求学生知道数学模型可以用来解决一类问题，了解生活中大量问题与数学有关。由此可知，模型意识与问题息息相关，模型意识也注重发展学生的应用意识、问题分析与解决能力。提升模型意识需要以学生为主体，充分发挥学生的主动意识，让学生主动搜寻与提取与问题有关的概念、相关知识、模型或者自主建立新的模型应用到此问题中，从而达到解决问题的目的，此过程培养了学生自主应用数学知识或方法解决问题的能力。

数学习题课作为重要的数学课型之一，主要以问题为载体进行学习与教学。学生通过习题课深入理解知识、巩固所学内容、学会解决问题、应用数学知识、同时发展模型意识、数学推理等数学核心素养。教师通过习题课教学，发挥启发与引导作用，帮助学生内化数学知识、建构知识结构、理清知识脉络，提升学生数学核心素养、提高数学能力、达成教学目标。因此，习题课是提升模型意识的载体，通过习题课教学提升模型意识是至关重要的。

（三）模型意识是提高习题课教学质量的必然要求

根据时代的发展和社会的需求，所颁布的新课标以核心素养为导向，注重促进核心素养的落实，以提升学生的核心素养能力，达成课程育人的目的。但是，现阶段的小学数学教学却受传统教学方式的牵绊，存在轻学生重教材、轻过程重结论、轻创造重模仿、轻思维重知识等诟病，学生在课堂中只能被动接受所学知识，这导致其缺少思考时间、缺失主动意识、缺乏分析与转化问题的能力，不能有效建构起系统的知识体系。这与当前课程改革的动向和课程标准的要求相违背，不利于模型意识等核心素养的提升。

模型意识是小学数学核心素养之一，且对其他素养有促进作用。一方面，模型意识提高了学生在习题课中的数学语言表达能力，其注重让学生用已有知识解释现象，使解决问题的过程更加清晰，课堂更加完整，并逐渐让学生形成以理服人的观念，从而变课堂重结果为重过程的走向；另一方面，为有效的数学习题课教学提供新思路，在当前以核心素养为导向的新课堂，以模型意识为目的之一进行习题课教学符合当前的课程理念，使学生发现数学价值，掌握数学问题本质，

也可为提高习题课教学质量提出新的思路,因此,模型意识的提升是提高习题课质量的现实需求。

综上所述,为了适应社会的发展学生必须能够用数学模型解决实际问题,而习题课则以问题为载体进行教学,同时,要想提高习题课的教学质量,必然离不开模型意识的提升,而习题课教学又会促进学生模型意识的提升,两者相辅相成,互相促进。

二、研究意义

(一) 理论意义

1. 探讨在数学习题课教学提升模型意识的理论机制

模型意识与实际情境问题密切相关。它从实际情境问题出发,抽象出数学模型,再将这些模型应用回实际情境中。因此,提高模型意识需要通过分析和解决实际情境问题,并将模型应用于日常生活中;而解决实际情境问题则需要模型意识的指导和辅助。习题课作为一种通过解决问题和练习习题来提高数学能力、巩固基础知识的教学方式,与模型意识相辅相成。然而通过梳理模型意识与习题课教学的已有研究,发现当前通过数学习题课提升小学生模型意识的研究较为匮乏。因此,本研究针对模型意识之内涵、特征、过程表现等进行系统论述与研究,进而探讨数学习题课教学中提升模型意识的理论机制。

2. 丰富小学数学模型意识提升的教学理论

习题课教学是数学教学课型之一,习题课教学不仅要完成知识的学习和技能的提高,还要培养学生的合作探究精神、积极探索意识和自主思考能力。通过对指向模型意识提升的小数学习题课教学进行研究,能够更深入地解析习题课的意义和价值。本研究基于对习题课教学与模型意识文献的梳理,了解并概括了数学习题课教学以及模型意识等概念。通过分析模型意识在数学学科中的特征,结合习题课教学的原则和特点,以新课标中对模型意识的要求为导向,设计了一种促进学生模型意识提升的小数学习题课教学方法。丰富了小学阶段数学模型意识提升的数学习题课程与教学理论。

(二) 实践意义

1. 为教师提升学生的模型意识提供实践路径

模型意识作为小学数学核心素养之一,应该在各个环节,尤其是重要的习题课教学中落实,才能更好地实现核心素养的提升,并达到数学课程育人的目的。通过对新课标提出的模型意识内涵及相关文献的分析,了解小学阶段模型思想的具体内容、要求及可行性分析,并基于此实施习题课教学,为教师提升学生的模型意识提供实践的路径。

2.为教师对学生模型意识的测评提供评价指标

模型意识于 2022 年在新课标中正式提出, 通过对学生模型意识的测评可了解学生的模型意识现状。经文献梳理发现已有研究注重对模型意识的教学策略研究, 而模型意识的测评框架及评价指标还较少。本研究通过对模型意识的内涵、基本要素、培养要求进行深入了解与分析, 并基于此确定模型意识的过程表现及评分标准, 通过此测评框架及指标有助于教师了解学生的不足, 并得出针对性的改进措施促进学生的模型意识, 激发学生主动应用数学知识与方法解决生活问题, 提高分析问题与解决问题的能力, 为初中模型观念的培养奠定基础, 积累经验。

三、文献综述

了解当前已有的研究成果有助于更好地进行此研究, 研究者对国内外有关模型意识、习题课等相关文献进行查阅, 发现指向模型意识提升的相关研究较少, 这可能是由于新课标才提出模型意识的原因, 但是小学是学习阶段中的奠基与支撑阶段, 此阶段对学生的发展与学习有不可忽视的作用; 其次, 提升小学生的模型意识能提高学生的问题解决能力、应用能力、抽象能力与综合能力等等, 习题课又以问题为主, 因此, 两者具有一致性, 都以问题为载体, 但是国内外将模型意识提升与习题课教学相结合的研究较为匮乏, 更多研究主要围绕习题课的类型与教学策略、数学模型在高中与大学阶段的价值等。

基于本研究的研究主题, 通过查阅国内外相关的文献资料, 对国内外有关模型意识、习题课教学等文献进行梳理, 进一步说明本研究的必要性。

(一) 关于模型意识的研究

《普通高中数学课程标准》提出建模能力是数学学科核心素养之一^①, 新课标提出模型观念是初中数学应培养的数学核心素养, 模型意识是小学应培养的数学核心素养, 可见各个学段的课程标准都注重模型意识及其培养, 但为了体现培养的阶段性和侧重点, 在各个阶段对其进行了划分。可以看出, 模型意识的发展是为模型观念的培养奠定基础, 而模型观念的发展是为了培养学生的数学建模能力, 数学建模的培养则是为了落实培养学生的核心素养^②。在小学阶段提升模型意识, 不仅为了达成教学目标, 更是为了促进学生的发展, 为模型观念培养奠定基础。不少学者认为在小学阶段提升模型意识, 能提高学生的问题转化能力、领悟数学模型的意义^③, 影响学生的综合能力, 思维方式和行为方式, 学生的数学学习兴趣与数学能力, 从而影响学生的终身学习^④。

① 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准 (2017 年版) [S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2017.

② 丁丹平. 小学数学教学中渗透模型思想的现状及策略研究——以第二学段为例[D]. 杭州师范大学, 2021.

③ 沈丹丹. 开展数学建模活动 促进小学教学改革[J]. 宁波大学学报(教育科学版), 2002(05): 119-121.

④ 齐磊. 浅谈小学数学教学中发展学生模型思想的提问策略[J]. 小学教学研究, 2016(29): 74-76.

1. 模型意识的历史发展

关于模型意识的发展史,已有研究主要分为三个阶段,分别为建模能力的初步探究阶段、建模能力的深度发展阶段和模型意识的正式提出阶段。

第一阶段,建模能力的初步探究阶段。我国认为数学是研究数量关系与空间形式的科学。因此,在数学学习与教学离不开数学模型。数学建模的发展源远流长,在古代中国已经有相关著述与研究,只是并未以“建模”命名。公元1世纪我国已经形成了《九章算术》,这本书记载了战国、秦、汉时期的数学成就,其中提到的数学运算、数学问题的解决都属于数学建模,古代的《周髀算经》中的问题集也属于建模的相关范畴^①。我国的数学建模最早是在大学课程中出现的。1992年,中国举办了全国大学生建模竞赛,这标志着建模在大学中逐渐开始发展起来。

相对于国内,国外也有相关的研究,如中世纪的托勒密及哥白尼先后提出的“地心说”及“日心说”都涉及几何模型的相关知识,且外国更早正式提出数学建模。为了更好地培养建模能力,相关学者在教学中渗透模型思想。19世纪,国外初步提出关于数学模型思想发展的相关教学论与课程论。1990年美国组织了国际大学生建模大赛,1998年,国际数学教育大型会议系统关注建模与模型,提出主要研究课题之一是建模与问题解决,此次会议的举行标志着数学模型与建模的正式诞生。2009年举行了第14届数学建模与应用教学的国际性会议^②,此次会议有三十个国家一百余位数学研究者参与^③,弗赖登塔尔也在其著作《作为教育任务的数学》提出“数学起源于应用,它在此时比任何以往时候都要重要”^④。这时,数学模型与建模正式受到各国的关注与研究。

第二阶段,建模能力的深度发展阶段。随着经济、科技、时代的不断发展,机械的、封闭的人才已经不能适应当前世界的发展,掌握基本知识与基本技能也无法满足当前时代的需求。创新意识、实践能力、问题解决能力、批判能力等已然成为当前时代的需求。相对于我国,其他欧美等发达国家早已意识到核心素养、数学核心能力和数学品质的重要性。在很多国家,数学建模和模型思维已被视为重要的数学核心素养之一。由OECD组织的测评项目PISA认为数学核心素养是意识到数学的价值,用数学解决问题的能力,包括数学论证、数学交流、数学建模、问题提出与解决、表征、符号化、数学思考与推理等八个方面^⑤。自20世纪中期以来,德国十分关注培养学生的数学建模能力,哲尔博特与科特利对数学建

① 刘兴旻.基于模型思想的小学乘法教学研究——以《乘法运算定律》为例[D].中南民族大学,2021.

② 袁红. 尝试数学建模,发展学生数学应用能力——从西方国家小学数学建模教学的一则案例谈起[J]. 外国中小学教育, 2009(05): 56-61.

③ Kaiser G, Blum W, Ferri RB, Stillman G. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling(ICTMA 14)[M]. Dordrecht: Springer, 2011:37-40.

④ 张思明著,中国教育报刊社人民教育家研究院组编.张思明与中学数学建模[M].北京:北京师范大学出版社,2015:186-191.

⑤ OECD 2004.Learning for Tomorrow's World First Results from PISA 2003 [EB/OL]. (2000) [2023-10-15]. <http://www.pisa.oecd.org>.

模的发展与观点进行归类与梳理,得出数学建模能力已经成为必须培养的数学能力与素养之一^①,德国数学家菲利克斯克莱因在 20 世纪撰写了《数学课程大纲》,强调将建模与应用纳入高等数学教育体系内部^②。

20 世纪末期,我国一部分数学研究者也关注到建模的价值,并开始研究建模在数学、应用数学以及基础数学的作用,经过一系列的研究与分析,提出数学应关注学生的未来发展,应该注重对数学核心能力和素养的培养,让学生在学习过程中提高理性精神、应用意识以及实践能力等。数学建模在各个领域均有涉及,在教育中,大学、高中乃至中小学阶段都有研究,可见在数学教育领域,各个教育阶段都十分注重建模能力的培养,但是建模主要集中在中高等教育阶段,基础教育阶段的相关研究较少。

第三阶段,模型意识的正式提出。数学研究者基于对学生认知和心理发展的理解,认为在中小学阶段应该引入模型思想。同时,模型思想也开始作为数学模型与建模的基础受到关注。2007 年第 9 届国际数学改革的重点是“信息技术”、“数学应用”,这也逐渐被各个国家所关注,将其作为数学课程内容,莱蒙通过对已有文献进行分析,发现数学模型可以促进数学经验的发展。而我国中小学引入数学建模、模型思想等是 2011 年所颁布的《义务教育数学课程标准(2011 年)》^③(以下简称旧课标)中提到 10 个关键词,并提出在中小学课程与教学要关注模型思想,注重数学思想的渗透。为了更好实现数学模型的培养,2022 年新课标提出在小学阶段注重提升模型意识,为培养模型思想与建模能力奠定基础,这时,模型意识才被作为小学阶段应培养的数学核心素养正式提出来,并在新课标中明确了其内涵、作用。有学者从不同角度论述模型意识的内涵,章勤琼^④与费岭峰^⑤学者更关注从建模过程论述模型意识的内涵,崔铭允^⑥则更关注从心理学角度论述其内涵。

2.小学生数学建模能力现状的研究

小学数学建模能力的水平制约着教师的教学方式与教学内容,同时教师的教学情况也会不断影响学生建模能力的水平,因此,了解学生的数学建模水平对教师进行针对性教学,促进学生建模能力发展有积极作用。

通过文献梳理发现,学者们对小学数学建模能力现状的研究主要集中在四、

① Greefrath G, Vorhölter K. Teaching and Learning Mathematical Modelling[D]. ICME-13 Topical Surveys. Cham: Springer, 2016.

② Schukajlow S, Kaiser G, Stillman G. Empirical Research on Teaching and Learning of Mathematical Modelling:a Survey on the Current state-of-the-art[J]. Springer Berlin Heidelberg, 2018, 50(1-2): 5-18.

③ 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2011 年版)[S]. 北京:北京师范大学出版社, 2011.

④ 章勤琼,陈肖颖. 小学数学模型意识的内涵、表现与教学——兼论核心素养的表现性目标[J]. 课程. 教材. 教法, 2024, 44(01): 106-113.

⑤ 费岭峰. 发展小学生模型意识的内涵及其教学思考[J]. 教学月刊小学版(数学), 2024, (Z1): 15-18.

⑥ 崔铭允. 小学“数与代数”中模型意识的提升策略研究[D]. 华中师范大学, 2023.

五、六年级,陈灵^①、程安琪^②、范思琪^③都从建模能力与年龄相关性、性别相关性等方面分析学生的建模能力,发现数学建模水平与性别不相关,与年级有关,但是他们的分析角度存在差异。

学界关于小学数学建模能力现状的研究,主要从主客观问题解决情况角度分析学生建模能力的差异性、学生所处建模水平情况差异及学生在各内容领域数学建模能力的差异三个角度展开。第一类是从主客观问题解决情况角度出发,陈灵发现第二学段学生在处理客观问题的成绩高于主观问题能力,且学生的数学建模能力与语文成绩呈正相关;第二类是从学生所处建模水平角度分析,程安琪发现小学高年级学生的建模水平处于第一水平与第二水平间,建模水平与数学成绩相关和年级存在正相关,但范思琪发现小学高年级学生的建模水平处于第二水平与第三水平间,且六年级与五年级的建模水平差异不大;第三类是从各数学内容领域的角度分析,陈聪^④发现在数与代数、综合与实践领域,六年级学生的建模能力处于第二水平,在图形与几何领域,六年级学生的建模能力多处于第一水平。

可见,学生的建模能力是逐渐提高的,需要教师给予更多的指导与帮助,同时,对文字的理解(语文成绩)也会影响到学生建模能力水平,此外,学生在图形与几何领域的建模能力有待提高。

3.数学建模教学过程

由于建模能力的提高是提升模型意识的目的,因此,教师多是通过采取数学建模的过程方法提高学生的模型意识。学生在经历了数学建模的整体过程,才能更好的提高模型意识,但是受小学生学习内容和学生的认知水平的限制,小学的数学模型建构过程并不严格。

在学术界数学建模没有固定的模式和步骤,因此不同的学者对数学建模教学提出不同的步骤,但是他们都是基于构建现实与数学世界联系的角度划分具体教学步骤,只是步骤详细程度存在差异,具体分为三类教学步骤。第一类,葛洛丹孚日等学者提出四步教学步骤,分别为确定问题,提出假设,建构模型和检验模型,此步骤突出假设与验证的过程,注重学生的科学探究意识;第二类,米歇尔在此基础上增加了解答模型的步骤,提出五步教学流程,分别为确定问题、选择方法、建构模型、解答模型、回归问题;第三类,布鲁默和雷波尔等学者在此基础上进行补充,提出七步教学法,分别为确定问题,发现情境模型;情境简化,形成现实模型;现实模型数学化;选择数学方法解决模型;数学模型现实化,解决现实问题;解释与交流解决方案七步教学法^⑤。

① 陈灵. 第二学段学生数学建模能力的调查研究——以南京市 A 小学为例[D]. 南京师范大学, 2017.

② 程安琪. 小学高年级学生数学建模能力水平的调查研究——以南京市 L 小学为例[D]. 南京师范大学, 2020.

③ 范思琪. 小学生数学建模能力的现状调查——以南京市 N 小学高年级为例[D]. 南京师范大学, 2019.

④ 陈聪. 小学六年级学生数学建模能力的调查研究[D]. 上海师范大学, 2021.

⑤ Giordano FR, Weir MD, Fox WP. A first course in mathematical modeling[M]. 3thed. [S.L]Brooks/Cole, 2003:26-31.

虽然各学者对建模步骤持不同观点,但从总体上说,建模过程都包括:确定情境问题;情境问题数学表征;建构数学模型;求解数学模型;解释模型;验证与应用数学模型。关于建模步骤的研究,多数学者都提出要在情境问题基础上转化数学问题,通过建构、求解、验证最终解决情境问题,同时提出多注重变式问题巩固模型的应用和迁移。

4.数学建模能力水平测评框架

实施数学建模能力教学的目的是提高学生的建模能力,如何鉴别学生的建模能力处于什么阶段,也是各学者主要关注的问题。学者们对数学建模能力水平的划分主要包括三水平和六水平划分。

第一类是三水平划分,持三水平划分学者的划分标准也存在差异,赫宁和昆勒从学生对数学建模的掌握程度将数学建模水平分为三水平,分别为水平 1:了解数学建模、水平 2:自主构建数学模型和水平 3:自主验证反思建模过程^①,三个水平体现出学生对数学建模的掌握程度逐级递增;而喻平学者从知识的角度,基于目标分类理论、SOLO 理论等将数学建模能力分为三水平,分别为水平 1:知识理解、水平 2:知识迁移、水平 3:知识创新,此水平划分体现出学生在不同难度的知识或问题中灵活建构模型的能力水平^②。

第二类是六水平划分,徐斌艳和路德维希根据数学建模每个步骤出现的障碍,将数学建模能力分为 0 水平-5 水平共六个水平,分别为水平 0:不能理解实际问题、水平 1:无法转化成数学问题、水平 2:转化的问题与原问题不一致、水平 3:不能对模型求解、水平 4:未检验其合理性、水平 5:体验建模全过程^③。

(二) 关于习题课教学的研究

1.习题课教学中问题解决的研究

习题课以问题为载体,以解决问题为主,因此,习题课的相关研究离不开解决问题的研究^④,关于数学问题的解决,学界的研究主要从问题解决的阶段、问题解决的步骤和问题解决的策略等方面进行研究。

问题解决的四阶段主要从教师教学角度、学生具体解题步骤角度划分,沃拉斯从教师教学的角度提出教师的习题教学要完成准备、思考、启迪与验证四个阶段^⑤;著名的数学家波利亚立足于学生的具体解题步骤角度,在《怎样解题》中提出解题要经过弄清问题、制定计划、实施计划、总结回顾四个阶段^⑥,在 1981

① Henning H,Keune M.Levels of modelling competencies[M].Modelling and applications in mathematics education.Springer,Boston,MA,2007:225-237.

② 喻平.数学核心素养评价的一个框架[J].数学教育学报,2017,26(02):19-23+59.

③ Ludwig M,Xu B.A Comparative Study of Modelling Competencies Among Chinese and German Students[J].Journal für Mathematik-Didaktik,2010,31(1):77-97.

④ 陈钰.高中数学习题课教学的有效性研究[D].贵州师范大学,2015.

⑤ 喻平.数学教学心理学[M].北京:北京师范大学出版社,2010:289-301.

⑥ 波利亚.数学的发现[M].北京:北京科学出版社,1987:112-113.

年海斯完善了波利亚提出的解题四阶段,提出发现问题、表征问题、制定计划、实施计划、评价过程、收获总结,这使得解题过程更加完整^①。

20世纪初,杜威基于问题自身的特点,指出问题解决要经历五步骤:感受问题存在、确定问题性质、思考解决问题的方法、考察解决方法的结果、确定最有效的解决方法并解决^②。

罗增儒基于解决数学问题的具体方法和策略,提出10个问题解决策略,分别为映射化归、模式识别、差异分析、数形结合、分和并用、有效增设、进退互化、以美启真、正反相辅、动静转化^③。

2010年张景中与张奠宙在《数学习题教学研究》中提出数学习题教学要遵循分层、典型、统一、有序的原则^④。

2.习题课教学类型的研究

学界关于习题课的分类主要根据习题课的学习内容、课程目标和价值作用等角度进行。

第一,根据习题课教学与学习内容的时间关系,吴亚萍将其分为课堂习题课与单元习题课,根据习题的内容特点分类,分为简单习题课与综合习题课^⑤;第二,根据习题课达成的目标分类,何月丰将小学习题课分为单一型习题课、专题型习题课、综合型习题课^⑥;第三,根据习题课发挥的作用,关秀玉将小学数学习题课分为巩固型、综合型、拓展型、补充型练习课^⑦,韩素琴根据习题特征将习题课分为概念复习型、问题解决型、讲评结合型、综合型习题课^⑧。

3.习题课教学环节的研究

关于习题课教学环节的研究,学界主要从教师与学生任务的角度、习题练习流程的角度、知识的巩固应用角度出发进行研究。

第一,习题课教学三环节。罗伯特、马扎诺等学者从教师与学生任务的角度在《培育智慧才能:学习的维度教师手册》提出习题课教学包括三环节,分别为教师指导、学生练习、评价与交流三个环节,其中学生练习是此节课的重点^⑨。

第二,习题课教学六环节。邱兴华等学者从习题练习流程的角度出发提出习题课教学包括六环节,分别为第一环节,基础练习,主要练习重点与难点所需的前提性知识相关问题;第二环节,明确提出练习要求与内容;第三环节,前期指

① 朱坤燕.高中生数学解题反思能力的培养研究[D].南京师范大学,2017.

② 李玉光.试论缄默知识在拟定解题计划过程中的运用[J].集美大学学报(教育科学版),2008(04):68-71.

③ 罗增儒.数学解题学引论[M].西安:陕西师范大学出版社,2001:77-79.

④ 张景中,张奠宙.数学习题教学研究[M].上海:上海教育出版社,2010.116-118.

⑤ 吴亚萍.中小学数学教学课型研究[M].福州:福建教育出版社,2016:371.

⑥ 何月丰.谈小学数学练习课的目标定位[J].小学数学教师,2017(03):71-74.

⑦ 关秀玉.小学数学高年级练习课设计与实施研究[D].东北师范大学,2012.

⑧ 戴素琴.高中数学习题课教学的课堂研究[D].上海师范大学,2012.

⑨ (美)罗伯特·J.马扎诺,(美)黛布拉·J.皮克林.培育智慧才能:学习的维度教师手册[M].盛群力译.福州:福州教育出版社,2015:58.

导,说明练习所需用的知识、内容,以及注意点;第四环节,自主练习,教师要及时巡视,发现问题;第五环节,习题讲评;第六环节,反思总结^①。苏桂琴、李秀珍则从知识的巩固应用角度出发提出习题课应该包括情境创设,激发兴趣;复习旧知,明确内容;基础训练,巩固知识;拔高训练,提高能力;正向评价,提高动机;课后练习,巩固提升六个环节^②。

综上所述,学者们对习题课教学的教学环节有不同的看法。总体来看,以上研究者认为习题课应该包含六个环节:第一环节,复习旧知,主要复习此节习题课需要的前提性和基础知识,这些知识通过知识体系或习题呈现皆可;第二环节,教师辅导,针对将要练习的习题进行典型例题的讲解,并指出注意事项;第三环节,学生自主练习,是此课型的重点环节,根据习题特点以自主思考或合作交流的方式开展;第四环节,习题的讲评,对学生的练习情况进行讲解和评价;第五环节,分享与交流,主要交流自己在此次课所收获的内容;第六环节,布置变式习题。

(三) 指向模型意识提升的教学实践研究

自模型意识被提出以来,中小学数学教师和研究者也开始关注如何在教学中针对性、有效性提高学生的模型意识,从而提高学生的抽象能力、应用意识、解决问题的能力,学界关于教学设计的研究主要基于注重情境问题等原型模型的使用、注重变式训练和实际应用、关注多种表征三方面设计新授课。

第一,注重情境问题等原型模型的使用。如李晓梅等对路程、时间与速度进行重新设计,教学过程历经尝试计算、抽象关系、建构模型、变式训练、知识应用、模型总结六步,期望通过数学教学回归概念本质,渗透模型意识^③。第二,提升模型意识要注重变式训练和实际应用,如王祥表注重通过初中几何教学提升学生的模型意识,提出几何教学中提升模型意识需要经历现实问题-建立模型-验证模型-变式训练-实践应用的五步教学模式^④;邱玲提出从过程性变式问题出发,让学生在变式问题的解决中感受其中的变与不变,进而感知模型能解决一类问题,进而主动迁移所学模型^⑤;赵世龙提出情境创设、挖掘本质、变式应用、循序渐进四个策略^⑥。第三,张维国和王立都提出通过多元表征提升学生的模型意识,王维国提出通过线段图、表格、算式等方式表征并解决问题^⑦;王立所提出用图

① 邱学华,张良朋.怎样用尝试教学法上课[M].南昌:江西人民出版社,2016:134.

② 苏桂芹,李秀珍.小学数学练习课六步教学模式的探索[J].小学数学教育,2015(09):16-17.

③ 李晓梅,李雅杰;王井.回归概念本质 渗透模型意识——“路程、时间与速度”教学设计与说明[J].小学数学教育,2021,(19):41-44.

④ 王祥表.利用模型思想 提升模型意识——一道选择压轴题的命制与说题过程[J].中学数学,2017,(10): 37.

⑤ 邱玲.过程性变式应用于小学数学模型意识提升的实践研究[D].浙江师范大学,2023.

⑥ 赵世龙.小学数学模型意识提升常态化实施的研究[J].中小学课堂教学研究,2024,No.91(02):16-20.

⑦ 张维国.在多元表征中促进模型意识的主动形成——以“租船”一课为例[J].小学教学(数学版), 2024, No.7 46(01):37-40.

式、表格、言语等具象和抽象表达相结合的方式表征并解决问题^①。

综上所述,指向模型意识提升的教学实践研究较少,然而模型意识有助于应用意识和四能的发展,理应渗透在各种教学活动和问题解决过程中,以更好地促进学生模型意识的发展。此外,指向数学模型意识提升的教学设计研究仅关注新授课型,而如何通过习题课有效地提升模型意识的研究相对较少。

(四) 文献述评

通过对文献的梳理和分析可以看出数学模型对学生树立正确的数学观、发展抽象思维、问题解决能力、应用意识、符号意识有不可替代的作用,这些价值已得到一线教师与相关研究者的认可,学者们也期望能通过教学等方式培养数学模型素养,但是还存在一些不足之处,具体来说,有以下几个方面:

1.关于模型意识提升的教学案例及经验较多,模型意识的理论研究较少

从已发表的文献可以看出,已有关于模型意识的文献大多是一线老师对模型意识在某课堂中直接渗透的教学案例,他们有大致的方向和形式提升模型意识。有学者认为模型意识不被重视是由于教师自身的素质与对模型意识的理解不够。而已有的相关研究集中在经验基础上,缺乏理论支撑,因此对小学模型意识提升的理论研究应该成为深入研究的重点。

2.模型意识提升与渗透的研究学段多为初、高中学段

通过对已有相关文献进行梳理,发现已有研究的学段涵盖较为全面,涉及小、初、高三学段,但是对研究学段进行分类与统计,发现数学模型意识提升的相关研究的学段多为初高中学段,作为基础性教育阶段的小学研究数量较少。有学者认为模型意识在小学较为隐形与效果显微、对模型思考与建构弱化是模型意识缺乏的原因,而小学阶段作为终身发展的基础阶段与重要阶段,对后续学习影响重大。因此,应该注重在小学阶段注重模型意识的提升,提高学生对数学模型的感悟。

3.指向模型意识提升的习题课教学实践研究较为匮乏

从已有研究的分析不难发现,由于习题课没有明确的要求和目标,一线教师也不易掌控习题课的教学过程,因此,学者们对模型意识的提升研究主要集中在新授课教学中,而在习题课中提升模型意识的相关研究却较为匮乏。

但是,模型意识作为小学数学的核心素养,其提升对学生的应用意识、符号意识以及用语言表达现实世界的能力都具有不可忽视的价值。其发展是一个长期的过程,需要经过多次逐渐形成。而模型意识与习题课教学密切相关,两者相辅相成。通过提升模型意识可以提高习题课教学的效果,而在习题课教学中培养数学模型意识,也会促进学生对数学模型的理解与应用。因此,指向模型意识的提

^① 王立.经历多元表征,发展模型意识——以人教版教材三年级上册“归一问题”应用练习为例[J].教学月刊小学版(数学),2024,No.686No.689(Z1):26-29.

升如何实践在习题课教学中是当前小学数学教育研究者应该重视、思考和研究的问题。

四、研究问题与研究内容

（一）研究问题

1.指向模型意识提升的小数学习题课教学是否可行？

探讨模型意识与习题课的内涵、特征及理论基础，并对指向模型意识提升的小数学习题课教学进行理性审视，分析两者的契合之处，此外，对指向模型意识提升的小数学习题课进行可行性分析。

2.如何建构指向模型意识提升的小数学习题课教学模式？

了解教学模式的要素，通过对各要素的分析及模型意识的内涵、过程表现进行理解与分析，建构指向模型意识提升的教学模式要素，确定指向模型意识提升的小数学习题课的教学模式。

3.指向模型意识提升的小数学习题课教学的实践效果如何？

建构了教学模式，其实际教学效果如何，是否对学生的模型意识等有所提高。在此需要根据指向模型意识提升的小数学习题课教学进行实施，并编制模型意识的测试卷，进行测试，进而了解教学模式的实践效果。

（二）研究内容

1.指向模型意识提升的小数学习题课教学的理论研究

在对模型意识与习题课教学内涵、特征、理论基础等相关文献梳理的基础上，深入分析模型意识与习题课教学的内涵、特点，探索习题课教学提升模型意识的可行性。

2.指向模型意识提升的小数学习题课教学模式研究

在了解相关理论等基础上，思考如何通过习题课提高小学生的模型意识，进而探讨在数学习题课设计提升模型意识的教学目标、教学程序、教学策略、教学评价等，最终确定指向模型意识提升的小数学习题课教学的模式、教师教学行为、学生学习行为等。

3.指向模型意识提升的小数学习题课教学实践研究

指向模型意识提升的习题课教学方案与流程，对小数学习题课重新设计，并在小数学习题课进行实践。为了了解实践效果，在教学实践前后进行前、后测，并进行数据分析，了解实践实效，得出实验结论。

4.提出指向模型意识提升的小数学习题课教学的实施建议

根据模型意识的特点、习题课的设计流程、实施情况等，对教学实践过程提

供可行性建议,帮助一线数学教师了解指向模型意识的习题课教学如何设计与实施,从而促进模型意识的提升,进而加强数学核心素养的落实。

五、研究思路与研究方法

(一) 研究思路

为了顺利开展基于模型意识提升的小数学习题课教学实施研究,本研究的具体步骤为:

第一步:采取文献分析法对模型意识、数学习题课等相关文献进行梳理,了解研究现状与成果,掌握相关理论,并对其做可行性分析。

第二步:建构指向模型意识提升的小数学习题课教学模式。

第三步:进行指向模型意识提升的习题课教学实施的准实验研究。

第四步:得出实验结果与结论,并提出可行性的教学建议。

具体研究思路如图 1-1 所示。

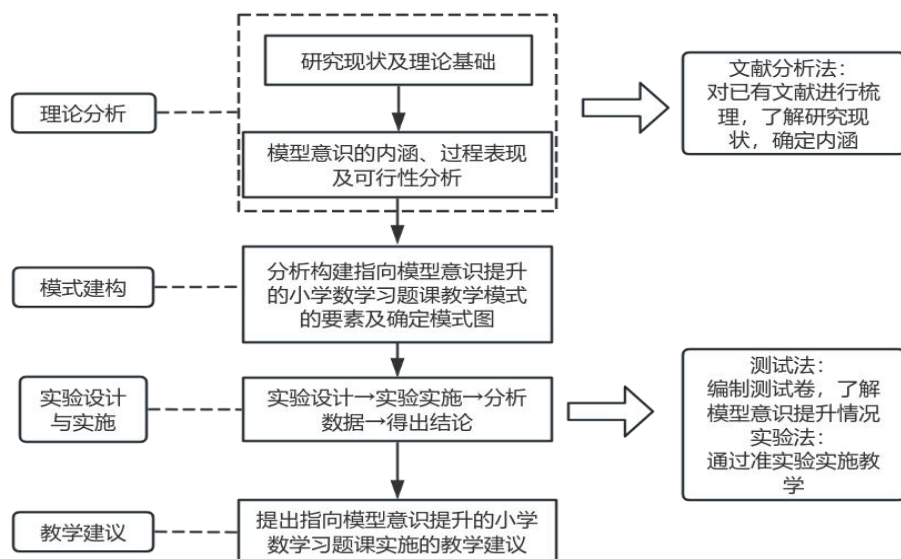


图 1-1 研究思路图

(二) 研究方法

通过对已有相关文献的分析,借鉴相关研究,并结合研究内容与目的,研究主要采取:文献分析法、测试法、教育实验法。

1.文献分析法

文献分析法即对某方面的文献进行收集,分析,从而了解相关研究动向及现状,在此基础上进而提出自己研究观点的方法。此类研究方法可帮助研究者快速把握相关研究的动态。

在此研究正式进行前,对国内外有关模型意识、数学习题课教学、指向数学模型提升的小数数学教学等相关文献进行查阅,分类、汇总和梳理,了解相关学者对数学模型、模型意识的内涵界定、数学习题课研究现状等。在此过程中确定

自己的研究主题，了解有关的理论基础，并基于研究问题与已有相关文献，进行指向模型意识提升的小数学学习题课实践的可行性分析，确定指向模型意识提升的习题课教学模式。

2.测试法

测试法是指研究者为了量化被研究者的在某些方面的水平或情况，研究者根据研究内容编制出信效度良好的测试卷对被研究者进行测试的方法。本研究基于模型意识的内涵并借鉴其他学者信效度良好的测试卷，编制出信效度良好的模型意识测评卷，据此对学生的模型意识进行测评，从而了解此模式的可行性及学生模型意识的提升情况。

3.教育实验法

教育实验法是指研究者运用科学原理和方法，基于教育理论及假设，有目的的控制某些教育因素和条件，通过分析教育现象变化结果分析其实际效果，揭示活动规律。

本研究选取实验法是想了解与分析所确定的指向模型意识提升的习题课教学模式与实践是否能提高学生的模型意识。本研究将在同一所小学，选择两个班级对学生进行模型意识的前测，然后通过控制变量选取对照组与实验组进行实验。实验组为运用指向模型意识提升的习题课教学，对照组为传统的习题课教学，实验后进行后测，最后分析结果。

第二章 概念界定及理论基础

一、概念界定

（一）数学模型

已有学者对数学模型的解释分为狭义与广义两种。徐利治学者认为狭义的数学模型是反映或描述具体问题或事物的关系结构^①，广义的数学模型即数学领域内所有的理论体系、算法、概念等，因为这些都是从现实模型抽象出的，简而言之数学就是一门关于数学模型的科学^②。史宁中学者基于小学数学教材内容及数学模型的概念，将小学数学中的数学模型归为四类，分别为总量模型、工程模型、路程模型、植树模型^③。

研究者认为数学模型是联系现实世界与数学世界的桥梁，主要包括问题的关系结构、数学知识与方法等，其中，问题的关系结构是指通过抽象、概括、构建的用数学语言或数学形式所呈现出的能反映问题本质的比较抽象、简洁的数学关系，这些数学关系可以用数学语言、数学符号、算术式、数学图表等表示。这是一种脱离情境、体现本质的形式。

（二）模型意识

在模型意识的内涵方面，章勤琼及陈肖颖学者认为其主要包含结构模型和过程建模，其形成需要经历识别情境、情境数学化、解决同类问题三步，具体表现为识别、表征、抽象及概括四个层次^④；费岭峰认为模型意识更侧重建模过程，关注模型解释及模型应用^⑤；崔铭允是个体在解决现实问题与数学模型之间的敏感反应，突出其主动的心理倾向和行为倾向^⑥。由此可知，章勤琼、费岭峰学者更关注从建模过程论述模型意识的内涵，崔铭允则更关注从心理学角度论述其内涵。

研究者认为模型意识既要关注心理学角度，又要关注其过程性表现，因此，研究者认为模型意识是指学习者在数学思维的引导下，对实际情境问题与数学模型主动互相转化的积极状态，主要表现为两个方面，第一，在面对各种情境问题时自主将其转化为内部关系结构、回忆相关知识并积极解决，第二，在看到关系式、线段图、数学知识等模型时主动寻找能够用此解决的其他实际问题。

（三）习题课教学

研究者认为，习题课教学为教师根据学生的学习掌握情况、所学的重点与难点知

① 徐利治.数学方法论选讲[M].湖北:华中师范大学出版社,2000:11-13.

② 王宪昌主编.数学思维方法(第二版)[M].北京:人民教育出版社,2010:186.

③ 史宁中.数学思想概论:第5辑:自然界中的数学模型[M].长春:东北师范大学出版社,2012:53.

④ 章勤琼,陈肖颖.小学数学模型意识的内涵、表现与教学——兼论核心素养的表现性目标[J].课程.教材.教法,2024,44(01):106-113.

⑤ 费岭峰.发展小学生模型意识的内涵及其教学思考[J].教学月刊小学版(数学),2024,No.686No.689(Z1):15-18.

⑥ 崔铭允.小学“数与代数”中模型意识的提升策略研究[D].华中师范大学,2023.

识或者需要培养的能力等选编一系列匹配的习题,进而以习题为载体,帮助学生理解知识、完善知识体系、提高能力与素养的有计划、有目的的教学形式。

习题课教学有如下特点:在授课时间方面,数学习题课教学在新授课之后进行;在意义方面,数学习题课教学能补充新授课的不足,提供足够的时间加强学生的理解与应用;在形式方面,数学习题课教学是通过练习与讲评相结合的方式促进学生对知识的理解,引导学生激活所学知识,从而将知识与实际问题相结合,进而解决问题、提高应用意识与综合能力,发展核心素养,适应社会发展。

二、理论基础

本研究的理论基础主要应用于指向模型意识的习题课教学模式建构中,具体包括数学模式理论、现实数学教育理论及建构主义理论。

(一) 数学模式理论

1940年左右,英国著名的数学家 A.Whitehead 提出“数学是关于模式的科学”,并指出数学的研究对象是建构关于数量变化关系的过程,数学是基于量化开展的研究。之后我国数学学者徐利治和郑毓信受其影响,在研究数学哲学的基础上出版了《数学模式论》,这本著作深刻探讨了数学的真理性问题,包含三种解释,一为同构说,即反映各种客观、现实事件或事物间的普遍抽象关系与结构,这也体现出人脑抽象的思维形象与客观世界所存在的关系结构具有同构关系;二为数学共同体判决说,即人们由经验、推演所总结的数学概念、公式、性质必须是被人们普遍接受,且是客观的、准确的;三为联系说,即数学的相关知识,如基础概念、定理等与个体的生活及经验息息相关,这点也说明了有部分数学能够应用于实际生活中,高度抽象的基础数学知识与现实世界有直接或间接关系^①,这些关于数学真理性的相关论述对本研究有重要的指导作用。该理论对本研究的启示如下:

一是在教学活动开始前,教师需呈现与学生实际或未来生活息息相关的问题情境。问题发生的背景与自己所学的知识息息相关,学生能用已学的知识解决新的、不同的各种问题,学生便会对所学知识产生兴趣,并以积极主动的心态接受问题,解决生活中的实际问题的过程即体现了联系说。

二是教学所呈现的情境背后都需基于一个特定的数学模型。模型意识的提升从各种情境开始,学生在此情境中确定问题,寻找其中的数量关系与问题内部结构,应用所学知识解决实际问题,这些情境多样的问题的内部结构却是一样的,学生在多次问题解决过程后,通过自主发现与总结,了解其内部结构的一致性,并基于此数学模型用其数学眼光发现生活中的同模型问题,逐步感受数学的同构说及联系说。

(二) 现实数学教育理论

弗赖登塔尔是世界著名的数学教育者,他突破传统“灌输式”的教育和“题海术式”的学习,注重学生在教与学过程中的主体地位,同时强调数学教育应从其自身出发,

^① 徐利治,郑毓信.数学模式论[M].南宁:广西教育出版社,1993:7-11.

关注学生的“现实数学”，经历“数学化”、“再创造”的过程，期望提高学生的数学能力与水平。其中，“数学现实”指实际生活中、现实情境中的数学知识、数学问题，其关注现实背景，这些现实背景可为虚拟但需符合生活情况，数学知识来源于现实生活，现实生活又要应用数学知识，且形式各种各样；“数学化”指对客观世界进行认知与理解，并对其进行符号化、抽象化的过程，这个过程即将现实世界与数学世界进行联系与相互转化的过程，即学生所进行的学习及问题都是符合实际生活的；“再创造”是指学生应该像科学家一样再次经历知识获得与总结知识、得出答案的过程，在这个过程中，学生会像科学家一样思考与探究，教师应作为引导者注重引导^①。现实数学教育理论对于本研究的启示如下：

一是关注学生在学习过程中的主动性，给予学生机会让其参与到学习的全过程中，从而让学生在积极的学习氛围中感受知识中的乐趣，从而激发其探究性和积极性。

二是教学前在教材或者习题册中选择与实际生活息息相关的、知识呈现方式多样的问题，这样学生的学习与生活是息息相关的，有利于学生的发展。

三是在教学活动过程中，教师作为引导者的角色，应该让学生感受到数学方式的简洁性和便捷性，同时提醒学生在看到实际生活问题时注重将繁琐的文字信息转化为数学语言，感受数学与生活问题的关系。

（三）建构主义学习理论

建构主义针对传统教学的诸多弊端而提出，自 20 世纪 80 年代中期，建构主义在教育领域产生了深刻影响。建构主义观点主要包括知识观、学生观、学习观。在知识方面，建构主义质疑知识的客观性和确定性，强调知识的动态性和再创造性；在学生方面，建构主义质疑学生无经验说，强调学生经验的多样性以及差异性，注重从学生的经验基础上找到新知识的生长点；在学习方面，建构主义质疑被动性学习、封闭式思考，注重学习的主动建构性、社会互动性和社会情境性。即建构主义注重个体的主动性、引导学生从已有经验出发，在此基础上建构新的知识，而这个过程需要个体的社会性参与和教师的引导^②。建构主义理论对于本研究的启示如下：

一是所呈现的知识和问题是情境化的，情境化的问题不仅能激发学生的积极性和主动建构性，而且能让学生在丰富的问题情境中灵活地使用知识。

二是在教学活动过程中，教师提供轻松、探究的学习氛围，让学生自主建构知识、增长解题经验，因此教师应让学生自主参与探究与解题的全过程，提高学生的积极建构能力。

三是教师应作为引导者、合作者，多提供给学生相互合作与交流的机会，让学生在交流与合作中探索与解决问题，学生在学习的过程中多次积极参与，进行思维碰撞，有利于学生主动获取知识、提升素养。

① 弗赖登塔尔.数学教育再探--在中国的讲学[M].刘意竹、杨刚等译.上海:上海教育出版社.1999.

② 陈琦.教育心理学(第三版)[M].上海:高等教育出版社.2020:151-156.

第三章 指向模型意识提升的小学数学学习题课教学的理性审视

一、模型意识

（一）模型意识的内涵

徐利治学者提到,广义说数学就是一门关于数学模型的科学,狭义讲只有反映出特定的问题的关系或结构的才是数学模型。搜狗百科指出数学模型的种类颇多,由数字、字母等数字符号构成的等式或不等式结构、以图表、图像、表格等形式描述的事物内部结构或与外界联系的模型等都属于数学模型^①。

小学主要发展学生的模型意识,这也是培养数学建模能力的基础阶段,其中,关于小学模型意识的内涵有以下观点:

第一,突出模型意识的心理性特征。新课标的小学数学核心素养部分提出小学模型意识内涵具体包含两点,第一点为“知道数学模型可以解决一类问题,是数学应用的基本途径”,第二点为“能够认识到现实生活中大量的问题都与数学有关,有意识用数学概念和方法进行解决”,此阐述主要从意识的、内隐性的角度论述模型意识,更关注从心理倾向解释模型意识,而模型意识是动态的,是可提高的素养,因此,模型意识必然具有外显性、可观测的行为,此观点忽视其外显性。

第二,认为模型意识是一种外显的模型建构过程。关于中小学数学模型意识、数学模型观念测评与维度的相关研究,多数学者主要从建构数学模型的角度出发,关注外显性的建构数学模型的过程,具体包括模型准备、建立模型、求解模型和应用模型四步骤^②,这种观点忽视了心理学角度的意识方面。

基于以上分析,数学模型意识既有心理性特征,具有主动的倾向性,又具有外显性的行为,能够表现出来,因此,数学模型意识具有双重性。本研究将从心理学与数学模型两个视角出发,得出模型意识的内涵。

1.关于模型意识的心理学视角

“意识”一词决定了数学模型意识带有心理倾向。在心理学中,“意识”是指“感觉、觉察、观念”^③,具有主动性、创造性等特点,而数学模型意识中的意识与心理学的意识存在差异,其更关注学生的感悟及应用等。新课标提到的“用数学模型解决一类问题”即学习者的心理状态是抽象出各类情境问题中的数学模型;“有意识地用数学概念给予解释”即学习者的心理状态是唤醒已有数学模型;“对数学模型普适性的感悟”指学习者的心理状态是感悟模型的普遍适用,以心理学名词代之,即数学模型的抽象、数学模型的唤醒、数学模型的感悟,但是,要达到这些心理状态,学习者首先需对现实情境问题认识与感知,即情境问题的认知。因此,从模型意识的心理学视角看,模型意识

① 搜狗百科.“数学模型”词条[EB]/[OL].(2022-3-13) [2023-4-14].<https://baike.baidu.com/item/%E6%95%B0%E5%AD%A6%E6%A8%A1%E5%9E%8B/137690>.

② 宋玉涵.基于数学模型思想的“简易方程”教学设计研究[D].扬州大学,2022.

③ 李艳琴;宋乃庆.小学低段数学符号意识的培养策略研究[J].数学教育学报,2016,25(05):28-31.

需学习者经历认知、抽象、唤醒、感悟四个心理过程，此视角更关注学生看到相关现象或实际问题时在数学思维的引导下对数学模型的主动唤起与应用。

2.关于模型意识的数学模型视角

《简明不列颠百科全书》中指出数学模型是指在现实世界中的任何情境，能用定量方式表达或描述的，就能建立模型探析其中的规律^①。从前文的分析可知，数学模型的解释分为狭义与广义两种。狭义的数学模型是反映或描述具体问题或事物的关系结构，广义的数学模型即数学领域内所有的理论体系、算法、概念等。对数学模型的解释包含两个特点，一是这些数学模型是以一种脱离问题本身形成的本质结构，二是这种结构反映了具体问题中的内部关系。

此文中的数学模型主要包含两点，其一指通过抽象、概括构建的用数学语言或数学形式所呈现出的能反映情境问题本质的内部关系，如数学表达式、线段图、表格等，其二指数学知识和概念、方法等。这些数学模型虽是抽象的，却有外显表现，与心理学视角相对应：心理状态处于认知时，学习者表现为将理解实际情境；心理状态处于抽象时，学习者表现为将问题情境转化为数学模型；心理状态处于唤醒时，学习者表现为用知识、概念、公式等表达其想法；心理状态处于感悟时，学习者表现为列举出其他能用此模型解决的生活问题。

概括而言，模型意识的外显性表现为理解、转化、表达、列举。

3.模型意识内涵的确定

综合心理学与数学模型两个视角的分析，模型意识是指学习者在数学思维的引导下，对现实情境问题与数学模型进行互相转化的一种积极主动的心理认知活动（内在性），通过现实问题的领会与理解、转化与解决、用数学模型表达与解释、列举生活中的同模型问题等呈现出的与数学模型有关的行为表现（外显性表现）。

（二）模型意识的过程表现

新课标对模型意识的学业要求为“能在解决问题的过程中，体会解决问题的道理，解释计算结果的实际意义，感悟数学与现实世界的关联，形成初步的模型意识”^②。进一步分析各学段目标及要求可以发现，第一学段需学生能感受数学与生活的联系；第二学段是经历用多样化的方式表达问题，解决问题并解释结果的合理性；第三学段要求则更高，运用所学解决问题，从感悟到探究，从学习方法到自主判断，从合作探究到灵活运用，对模型意识的要求层层递进。具体体现在以下方面：①知道生活情境含有很多数学问题、关系等都是实际经验数学化的结果；②能读懂现实情境，理解信息，识别关系，表征信息，用数学方式表达，进行结构关联，并用模型解释；③知道一个关系-解决问题-结果解释的过程初步感悟建模的意义。^③

章勤琼、陈肖颖在此基础上认为模型意识有如下过程表现，需要经历识别现实情境，

① 中国大百科全书出版社编辑部. 简明不列颠百科全书(第10卷) [M]. 北京:中国大百科全书出版社,1985:543.

② 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版) [S]. 北京:北京师范大学出版社,2022.

③ 史宁中,曹一鸣. 义务教育数学课程标准(2022年版)解读[M]. 北京:北京师范大学出版,2022:28+186-201.

进行数学化后建构关系，经过一般后用以解决同类问题。^①而研究者根据对上述学业要求的分析，认为在建构关系后还需要用数学知识、方法等解释自己的解题过程及思路，同时认为生活世界与数学世界的桥梁是互相建立的，因此学生在遇到数学表达式等模型时也能将转化为能用之解决的生活问题。综上所述，结合章勤琼、陈肖颖学者对模型意识的过程表现进行分析，形成模型意识的过程表现如图 3-1 所示。

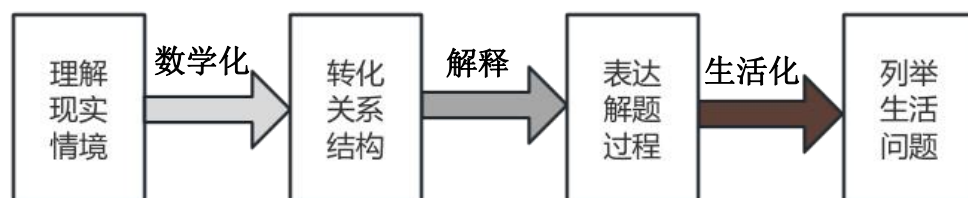


图 3-1 模型意识过程表现图

经过上述及对模型意识内涵的分析可知，模型意识的外显性表现与其过程表现为对应的关系。第一，问题的理解即学习者在看到现实问题时主动感知问题并勾画出重要的信息，对应理解现实情境；第二，数学模型转化指学习者在面对问题时能抽象出其数学模型并在纸上转化为图、表、关系式等，进而解决，对应转化关系结构；第三，数学模型的表达指学习者唤醒相关的知识与概念并表达自己的解题思路，对应表达解题过程；第四，问题的列举，即学习者感悟模型在各种问题中的普适性并列举出能用此模型解决的其他问题，对应列举生活问题。在此过程中，只有学习者理解清楚题意后，才能将模型抽象与转化，后唤醒与表达自己的解题思路，进而感悟与列举同模型的各种问题。

（三）模型意识的提升特点

小学阶段是提升模型意识的关键期。从学段来看，小学处于基础教育阶段，对学生未来学习与发展有奠基作用；从学习内容来看，小学阶段的数学知识还较为简单，易于理解，多与生活问题、生活现象相结合，学生易理解将现实模型转化为数学模型的过程；从模型意识内涵来看，模型意识就是主动运用数学模型解决实际问题，用数学表达现象，感悟数学模型的普适性，建立现实世界与数学世界的桥梁。基于以上分析与总结，模型意识的提升具有以下特点：

1. 持续性

模型意识的提升遵循持续性特点。任何能力与素养的提升都是长久的过程，需要坚持不懈，模型意识的提升也是如此。首先，20 世纪初，克拉夫基、认知心理学等指出知识与能力的关系，即知识是能力产生的本源^②，核心素养也属于关键能力，因此知

① 章勤琼,陈肖颖.小学数学模型意识的内涵、表现与教学——兼论核心素养的表现性目标[J].课程.教材.教法,2024,44(01):106-113.

② 瞿葆奎,施良方.“形式教育”论与“实质教育”论[M].上海:华东师范大学出版社 1988,(1):9;(2):27.

识也是核心素养的本源^①。数学知识的习得过程是渐进的、持续性的过程，知识间环环相扣、联系紧密，这也导致素养提升需要在知识的习得过程中渐渐提升；其次，模型意识的内涵之一是培养学生主动运用数学模型的意识，意识在心理学领域是个人的主观现象，而主动意识即自主、自发的，这便需要教师能持续引导和提醒学生，从而让学生形成主动地、自动化运用模型的习惯。因此，模型意识的提升需要教师长期坚持，不能操之过急，期望在短时间内达到目标是不可行的，而要根据学生的认知发展、数学知识以及学生的情况制定长期的计划，持续、渐进提升模型意识才能让学生形成自主应用数学模型的习惯，有效提升学生的模型意识。

2. 引导性

模型意识的提升需要学生自主运用数学模型表达现实世界、解决实际问题，感悟现实世界与数学世界的联系，这就要求教师扮演好引导者的角色，引导学生用数学语言表达与解释数学现象、用数学概念与模型分析与解决问题。在实际教学过程中，教师可以主动引导学生用数学语言表达实际问题，分享与交流自己的思考过程与所用到的知识、方法，也可以引导学生用已有的数学模型解释生活中的实际现象、创编新的问题等。通过这些方式提升学生的模型意识，教师需在教学中呈现赋有实际情境的问题，使学生在用数学语言简化表达、分析问题、解决问题的过程中提升模型意识，帮助学生建立数学世界与现实世界的桥梁，感悟数学模型的普适性。

3. 实践性

模型意识的提升具有实践性，需要个体不断应用与实践数学模型才能促进模型意识的提升。首先，数学模型是由现实模型中转化而来，是从现实生活与实际问题的产生，即为满足实践、服务实践的需求而产生，这也是数学教学的立足点；其次，模型意识的提升离不开对数学模型的应用，在提升模型意识时，必须不断应用数学模型，学生只有在应用数学模型中才能不断提高模型意识。例如买两本书需要拿多少钱？这个问题既是一个真实问题，又是现实模型，需要将其转化成数学问题解决，可以用加法，也可以用乘法，加法和乘法就是数学模型，模型意识的提升不能只停留在此问题，还要能发现用此模型的其他生活问题，能解决用此模型的其他问题，即数学模型从实践中来，又回到实践中去，模型意识的提升必须与实践结合。

4. 主体性

模型意识的提升具有主体性，要充分发挥学生的主体性。首先，相较于旧课标提出的模型思想，新课标提出的模型意识突出核心素养的阶段性与整体性，在小学阶段更注重学生对经验的感悟，主体性指人在实践中表现出的能力和个人看法等，即人的自主、主动、能动，可见，充分发挥学生的主体性有利于学生感悟；其次，由内涵分析可知模型意识需要培养学生自主应用数学模型解决现实问题、用数学知识与方法解释生活现象，这十分注重学生的自主应用意识和主体性，因此在数学教学过程要充分

① 喻平.数学核心素养评价的一个框架[J].数学教育学报,2017,26(02):19-23+59.

给予学生表达数学信息、交流解决方法、解释思考过程的时间,提供给学生应用数学模型、感悟数学模型普适性的机会,才能加强对学生模型意识的提升。

二、数学习题课教学

(一) 数学习题课教学的内涵

根据教学内容差异,小学数学课堂类型分为不同的类型,包括概念习得课、公式推导课、习题练习课等,其中,数学习题课教学是一种重要的数学教学课型,戴再平教授指出“解题是最基本的数学教学活动形式,各种新授知识的获得,都离不开对问题的解决。”^①在数学教学中,新授课需要通过习题练习与讲解帮助学生巩固与理解知识;在章节和学期授课结束后,需要安排习题课教学检测学生知识习得情况、查漏补缺、提高能力,由此可见,习题课教学占据了课堂的大部分时间。

此研究的习题主要指能够促进学生理解、内化知识、提高模型意识、数学能力等可以进行实际操作和练习的问题,不局限于教材上的题目。数学习题课教学为根据学生的学习掌握情况、所学的重点、难点知识或者需要培养的能力等选编一系列匹配的习题,以习题为载体,帮助学生理解知识、完善知识体系、提高能力与素养的有计划、有目的的教学形式。因此,在授课时间方面,数学习题课教学在新授课之后进行;在意义方面,数学习题课教学能补充新授课的不足,提供足够的时间加强学生的理解与应用;在形式方面,数学习题课教学是通过练习与讲评相结合的方式促进学生对知识的理解,引导学生激活所学知识,从而将知识与实际问题相结合,进而解决问题、提高应用意识与综合能力,发展核心素养,适应社会发展。

(二) 数学习题课教学的原则

1. 目的性原则

目的性原则是指教学要有清晰的教学目标,教学活动围绕教学目标展开,它是实施教学过程的重要元素,制定教学目标是教学设计的必要环节。清晰的教学目标在教学活动中起着导向、调控、测评、激励等作用。任何教学活动都是有目的、有组织、有计划地对人的身心发展、全面发展起重要作用的活动。习题课教学也不例外,每节习题课教学都需确定教学重点和目标,习题的设计、教学过程及课后反思等都要依据所确定的目的为主线,促进目标的达成。确定教学目的需要教师综合学生的水平、具体的数学知识等方面精心设计。习题课教学目标有助于提高教学质量、学习效率。

2. 阶梯性原则

阶梯性原则又可称为层次性原则。依据教育心理学的知识,个体的身心发展规律是有顺序性的,是由低级到高级、简单到复杂、由量变到质变的连续过程,而教学对象是人,因此教学过程也需要循序渐进,遵循阶梯性。阶梯性原则是指要设计有坡度、有层次的问题和过程,使学生经历从基础题逐步延伸、深化和优化的过程,从而增加

^① 戴再平.数学习题理论[M].上海:上海教育出版社,1996:10.

学生的思考、发展学生的思维、激发学生的内在探究。在习题选编方面,遵循阶梯性原则需教师根据教学目标和习题的难度精心设置习题,使各习题环环相扣、循序渐进;在教学过程中,引导学生从应用基本知识到创造、灵活性应用知识。基于阶梯性原则设计习题课教学有助于学生循序渐进进步、提高学生的思维能力、感受数学的趣味。

3.量力性原则

量力性原则又称可接受原则,是指教学内容、教学流程与问题数量、进度要适合学生的认知发展与最近发展区,教学内容的水平要高于学生的现有水平,又低于学生跳一跳却达不到的高度,从而促使学生向最近发展区发展。如果只关注习题数量而忽视质量,反而会达到事倍功半的效果,甚至产生事与愿违的影响,其次,量力性原则不仅指内容学生是否可接受,而且关注学生的思维与能力的水平。因此,习题的选择要精而非多,精是指能够促进学生掌握学习方法、提高思维能力与核心素养等;其次,要考虑知识的灵活使用与问题变式,让学生在解题过程中达到思维拓展、经历审题、析题、思考、灵活应对的过程,促使学生的全面发展。

4.趣味性原则

趣味性原则是指教学的全过程要激起学生的兴趣。正所谓“兴趣是学生最好的教师。”兴趣是学习的内在动机,也是开展好教学活动的关键所在,而且处于小学阶段的学生还比较好玩,如果学习方式和学习内容枯燥乏味,难免会使学生失去学习的兴趣,导致教学质量低下、学习效率降低,而趣味性的习题、学习、教学方式,会激发学生的学习兴趣,从而提高学习效率与教学质量,使学生爱学、喜欢学。因此,要更关注数学教学的趣味性,首先,在问题选编时要更关注与生活情境息息相关的、学生可能会产生探究兴趣的问题,其次,在学习方法上要提倡交流、合作、操作等多样化的方法,提高学生的参与性,最后,在教学方式上,教师要组织有趣的形式进行教学,如小组间的竞赛等。

三、指向模型意识提升的小学数学习题课教学的可行性分析

指向模型意识提升的小学数学习题课教学是否可行,以下从三点论述其可行性。

(一) 习题可以为模型意识的提升提供载体

模型意识的内涵包括知道一个模型可以解决一类问题、认识到生活中的多数问题都需要用数学知识解决以及主动用数学模型解决问题,可见,模型意识的提升围绕问题进行,只有学生体会到生活问题与数学模型之间的密切联系、不断将数学模型应用于现实问题中,才能逐渐提高模型意识。首先,习题课教学中的问题基于现实素材,不同问题的情境存在差异,这些不同情境的问题更符合现实生活,注重让学生理解数学知识在实际生活中的应用,使数学模型与现实模型构建桥梁;其次,这些问题又具有体系性,不同问题虽然情境呈现差异,但内在的数学关系、所用数学方法却相同,这些问题使学生突破问题本身,挖掘问题本源、探究现象背后的本质,感悟到这些问题模型的一致性;最后,习题课教学中的问题解决都依赖于数学知识的掌握与应用,

而知识的背后又是对一系列结论的模型化体现,即用数学模型解决问题的过程就是应用数学模型的过程。以问题为载体,能激发学生兴趣、动机、探究意识、自主思考、合作交流,还能不断加深学生对数学价值的理解、达成“学与做合一”,感悟数学知识、关系的一致性。

(二) 习题课教学的问题解决过程可以为模型意识的提升提供路径

模型意识的提升和习题课教学中的问题解决都需要学生主动应用数学知识,达成“知行一致”的效果。对于习题课教学的问题解决,在问题出现后,学生要从数学角度出发,主动利用数学知识、方法、思维、公式,采取思考、猜想、假设、验证等方法分析问题,并解决问题,提高学生的知识应用能力和问题分析与解决能力。对于模型意识,学生需要将现实世界与数学世界联系,即将现实问题转化为数学问题,寻求解决数学问题的方法与知识,解决问题,回归现实问题。可见,模型意识的提升与问题解决都需要用数学语言表征现实问题,将问题数学化,进而用已有数学思维、方法、知识、公式分析数学问题,寻找模型解决数学问题,最后回归现实问题,即经历生活问题数学化、分析数学问题、建构解决模型、应用模型、数学问题生活化的过程。因此,两者过程具有相似性,问题解决过程符合模型意识提升过程,问题解决过程也是模型意识提升的途径。

(三) 习题课教学的实施过程符合模型意识的提升特征

根据前文论述可知,模型意识的提升具有持续性、实践性、引导性、主体性。首先,提升过程不可追求立竿见影,要循序渐进、持续进行、逐步提升;其次,注重从现实模型提炼数学模型的过程;再次,教师要充当指引者的角色引导学生用已有知识解释现象,构建知识与问题间的联系;最后注重发挥学生的主体性,让学生自主回忆、利用知识解决问题、解释思考过程。美国数学家哈尔莫斯(P.Halmos)说过“问题是数学的心脏”。解决数学问题不仅是数学家的基本活动,也是学校数学教学的基本构成。习题课教学以问题解决为主,在数学教学中不断出现,这为模型意识提升提供了实践条件;习题课教学中的数学问题都以现实原型为背景,帮助学生建构生活与数学的桥梁,这为模型意识提升提供了实施条件;在习题课教学中,教师扮演辅助者的角色,在学生需要帮助和出现误区时及时引导和帮助,而学生处于主体地位,通过自主思考、探究、合作交流解决问题,是呈现、展示解题过程,解释解决思路和方法的关键主体,这为模型意识提升提供了过程条件。

可见,习题课教学为模型意识提升提供了时间、实施、过程条件,共同促进学生模型意识的提升。

第四章 指向模型意识提升的小学数学习题课教学模式的建构

一、建构方式

教学模式的建构即学者基于一定的教学理论,建构出一种符号化、概括化的程序或流程,并补充一些实践此模式应采取的策略或方法,使教学形成一种可操作的结构^①。国内外不少学者已经建构了不同的教学模式,从方法论的角度分析,他们的建构方式主要包括两种,分别是演绎建构法和归纳建构法。其中,演绎建构法是指从教育理念或理论出发,采取演绎法得出一种程序化的教学模式,并通过实证法进一步验证与补充,即自上而下的建构方式;而归纳建构法是从一些前人的教学经验出发,归纳出的一种教学模式,即自下而上的建构方式。本研究通过演绎建构法,即自上而下的建构方式建构新的教学模式,通过分析模型意识及习题课教学的理论,结合当前习题课教学对模型意识提升的现状情况,建构指向模型意识提升的小学数学习题课教学模式,并在教学中将其实践分析其有效性,对其完善与改进,提高建构教学模式的科学性和有效性。

二、指向模型意识提升的小学数学习题课教学模式要素分析

教学模式是指为了实现某一目标,基于一定的教育理念,针对特定教学活动而形成体系化教学流程的框架^②。教育模式类似是一座桥梁,它连接着教育理念与教学实践,发挥着中介的作用,使教学更有效地实施与开展,教学模式一般由教育理念、教学目标、教学程序、教学策略、辅助条件、教学评价等构成^③,本文也将以演绎建构法为主,从教育理念、教育目标等五要素具体构建指向模型意识提升的小学数学习题课教学模式要素分析。

(一) 教育理念

教学模式作为连接教育理念与教学实践的桥梁,不论以何种方式建构教学模式,都需以成熟的教育理念作为支撑与起点^④。模型意识作为数学素养之一,其提升也需建立在坚实的教学理念基础上,指向模型意识提升的习题课教学要注重知识与实际生活间的联系、侧重学生的主动性、关注学生自主应用知识解决问题的能力等等。

首先,此教学模式以数学模式理论为理论支撑,以数学模式的同构说、联系说、共同体裁判说为内核;其次,以建构主义理论“以人为本”的理念为基础,注重学生的现有发展及认知水平、关注情境的真实性及教学过程中的互动性,进而促进学生的发展;再次,以现实数学理论的“主体性”理念开展,关注学生在学习和发展过程中的主动性,尊重学生的主体地位,使教学过程成为学习过程的真正主人。

① 徐皓.试论远程开放教育中教学模式的研究视点和建构维度[J].中国远程教育,2004,(05):37-43+79-80.

② 徐英俊.现代教育理论[M].哈尔滨:东北林业大学出版社,2002:113.

③ 曲艺.教学模式的构成要素分析[J].教育探索,2005(05):39-40.

④ 邓佩佩.基于开源硬件的小学创客教学模式的构建与应用研究[D].四川师范大学,2019.

（二）教学目标

新课标指出数学教学要提升学生的核心素养，提高学生用数学语言表达现实世界的能力，模型意识便是数学语言表现之一。数学习题课教学作为数学教学课型之一，也应致力提升学生的模型意识，让学生在发现问题、提出问题、分析问题与解决问题的全过程中，加强学生的现实世界与数学世界的联系，感悟数学模型在实际生活中的普适性，进而提升数学核心素养。因此，要牢牢抓住教学目标建构教学模式，要想构建指向模型意识提升的习题课教学模式，就必须达成提升学生的模型意识的目标。

此教学的教学目标即提升学生的模型意识。首先，习题课教学的问题是模型意识提升的载体。习题课教学以各种问题为出发点，在解决问题的过程中学生多次应用相关知识，感悟模型的一致性，进而提升学生的模型意识；其次，习题课教学的问题解决过程是模型意识提升的路径。模型意识的提升与问题解决都需要用数学语言表征现实问题，将问题数学化，进而用已有数学思维、方法、知识、公式分析数学问题，寻找模型解决数学问题，最后回归现实问题，即经历生活问题数学化、分析数学问题、建构模型、应用模型、数学问题生活化的过程。学生在此过程多次建模，深化对数学模型本质的理解，感悟数学模型的普适性，有助于学生加强生活世界与数学世界的关系，进而提升模型意识。

（三）教学程序

在本研究中，模型意识即在数学思维的引导下，对实际情境问题与数学模型主动互相转化的积极状态。这主要分为实际问题转化为数学模型及数学模型转化为实际问题两个方面。根据前文的模型意识过程表现可知模型意识具体包括四个子要素，分别为理解现实情境——转化关系结构——表达解题过程——列举生活问题。不难看出，前三个过程表现基于实际情境问题进行，学生需要先对问题进行认知与理解，将其数学化，才能提炼其中的关键信息，进而找出关系，唤醒相关的模型解决问题，其体现实际问题转化为数学模型方面，而最后一个子要素-列举生活问题，则是在多次解决问题的过程中感悟模型并将其现实化的过程，其体现数学模型转化为实际问题方面，可见，四个子要素环环相扣，是一种进阶的关系，而教学模式的目标之一则是提升学生的模型意识，因此，基于模型意识提升的小数学习题课教学的程序也应该呈现进阶形式，具体程序如下。

1. 呈现情境与问题，实际问题数学化

弗赖登塔尔所提出的“现实数学教学理论”关注“现实数学”，需要学生经历“数学化”等过程，即搜寻情境的有效信息，并将其转化为数学信息，这便对应理解现实情境，学生认知与理解问题需在看到真实情境后提出问题，进而认知与理解问题，因此，程序一为呈现情景与问题，实际问题数学化。在指向模型意识提升的习题课教学起始阶段，教师需呈现现实问题情境激发学生的兴趣。问题情境的创设有利于学生将现实问题与数学构建联系，且有助于提高学生的参与度和积极性，使之产生强烈的探究欲望，但由于地区差异与学生差异，教科书的情境可能与学生的兴趣不符，教师所创编的问

题情境应符合学生生活经验、以生活原型作为支撑且蕴含学生需掌握的基础知识,此时学生处于好奇阶段,教师应引导学生以数学角度观察、发现与提出数学问题,以此提高学生的数学观察能力、感悟数学在生活中的价值。在问题提出的基础上,引导学生理解问题,并将真实情境信息及问题化为数学信息与问题。

2.构建数学模型,交流解题思路

此程序对应转化关系结构与表达解题过程,根据波利亚及海斯学者所提出的数学解题步骤,学生需要在发现问题的基础上表征问题,制定并实施计划,表征问题便离不开用数学语言、表格、关系式表示问题的内部关系,并提取相关知识、性质等进行解决,而此过程就是构建数学模型的过程,进而唤醒相关知识,交流自己的想法,此程序与上一程序的关系是进阶关系,因此,程序二为构建数学模型,交流解题思路。在此,教师通过启发学生自主通过各种方式表征数学信息间的内部关系,思考探寻解决方案,采取合作交流等方式分享解题思路,最终找到生活问题的结果。具体来说,此时教师需启发学生根据问题的已知和未知条件,从自己的知识体系、解题经验中积极搜寻和提取解决问题的方法,为学生积极唤醒已有数学知识、经验提供时间条件,在找到解决方案后,学生便开始跃跃欲试,想分享自己的解题方法与解题过程,这时教师应组织学生用数学语言表达自己的想法,多询问学生为什么,给学生提供用数学知识、概念、方法解释过程与结果的机会,提高学生的模型应用意识、数学语言表达能力。

3.解决变式问题,应用模型延伸

此程序是为了巩固前两个程序的过程,形成意识,提高学生的问题解决能力,与前面程序的关系是并列关系。新课标提出学生应感悟模型的普适性,要达到此目的,则离不开在某一模型的多次情境使用中逐步感悟,因此,此程序为解决变式问题,应用模型延伸。这时学生已经解决了原模型问题A(如:小红摘了4个苹果,她又摘了3个苹果,问小红总共摘了几个苹果?),且已提取出对应的模型与方法等,对此题已掌握,需要进一步探究与延伸。此时教师需呈现与原模型问题相关的变式问题,为了达到让学生认识一个模型可以解决一类问题,教师可呈现的变式问题包括横向变式 A_1 、纵向变式 A_2 或横纵向变式 A_{12} 。横向变式 A_1 即运用与A的不同情境或改变未知与已知条件的问题,问题较为简单,但情境发生变化(如:①李明第一天看了5页书,第二天看了6页书,问李明两天共看了几页书?或者②小红两次共摘了7个苹果,第一次摘了4个,第二次摘了几个?);纵向变式 A_2 即运用与A不同复杂程度的问题(如增加计算步骤或推理步骤),问题难度加大(如:小红第一次摘了4个苹果,第二次比第一次少摘一个,她两次共摘多少个?);而 A_{12} 即既改变情境、已知未知条件,又增加复杂程度的问题,难度进一步增大(如:二年级需要每人买一本书,1班有30人,2班比1班多12人,那么两班共需买多少本书)。此时学生通过自主思考、灵活应用,不断解决此模型的各种问题,其目标在于帮助学生了解数学模型能解决一类问题,更灵活对数学模型进行应用,因此此环节是必不可少的。

4. 弱化问题形式，探究问题本质

前面的三个程序指向实际问题转化为数学模型方面，数学模型的建构过程需要学生能将具体的问题情境去除非本质特征，形成简化的数学关系或数学结构^①。此步骤则应该从感性认知逐渐转化为理性认知，并感悟此类问题的本质，感悟模型的一致性，因此，程序四为弱化问题形式，探究问题本质，此程序与前面程序的关系为进阶关系。此时学生已经解决了关于数学模型的一类问题，在一系列问题解决过程中学生对此模型已经有了感性的认识，但是感性认识只能让学生停留在认识的表面，缺乏深度理解，于是，教师需引导学生弱化问题形式，探究和归纳此类问题的本质，提高问题分析能力与解决能力。此时教师应起到点拨作用，组织和引导学生观察、整理与归纳此类问题的共同点，学生大胆说出自己的发现、得出的结论，在自主观察、得出结论的过程中使学生理性的、更深层次地理解数学模型的广泛应用、数学模型具有普适性，也进一步提高问题分析与解决能力。

5. 自主创编新问题，感悟模型普适性

此程序对应列举生活问题，在前面程序的基础上进行。在感悟模型普适性的基础上，学生能用数学眼光发现生活中的同模型问题，则更能体现其对数学模型普适性的深刻理解，因此，程序五为自主创编新问题，感悟模型普适性。在上一程序学生已经得出一个数学模型，而且认识到这个模型能够解决一类问题，为了帮助学生搭建现实世界与数学世界的桥梁，学生不仅需要将生活问题化，还要能数学模型生活化，即从一个公式、一个概念出发，看到生活中能用此模型解释、解决的相关问题，进而加深学生对现实世界与数学世界间的联系，感悟数学在生活中的价值与意义，因此教师需要组织学生从已归纳出的数学模型出发，开启创新意识，从生活角度出发，编制能用数学模型解决的一系列生活问题，此环节的目的是让学生感悟生活与数学间的紧密联系，感悟模型的普适性。

（四）教学策略

为了更好地达成教学目标，在实施指向模型意识提升的习题课教学时，教师应注意以下几点：

1. 问题的情境应符合学生的实际生活

在习题课教学中，教师所呈现的问题情境应与学生的生活相联系，以生活原型作为问题支撑和背景，这些问题情境包括学校生活、家庭生活、社会生活、科学生活等等。首先，学生在实际生活中会遇到各种各样的问题，这些问题大多都与数学知识息息相关；小学生学习数学知识主要是为了解决生活中的各种问题，学生习得新的数学知识也需要以生活经验和解决实际问题为基础；其次，对学生来说，与自己生活相关的问题与自己的关系紧密，更容易激发学生对问题的探究欲望与学习兴趣，同时能体会数学知识在生活中的价值，提高学生对知识的应用意识；最后，模型意识的内涵之

^① 邱玲.过程性变式应用于小学数学模型意识提升的实践研究[D].浙江师范大学,2023.

一是学生感悟现实世界与数学世界间的联系,从而使抽象的知识具象化,促进学生理解。因此,教师所选编的问题情境需与学生的认知、经验、生活有关,从而使教学效果更好,目标达成度更高。

2.注重学生在构建模型中的主动性

教师在教学过程中应注重学生的主体地位,发挥学生的主观能动性。学生的主动性指学生在学习过程中主动探究、思考、表达及解决问题的意识和倾向。首先,根据建构主义理论可知,在教学过程中,教师作为帮助者和引导者,应充分相信学生,在课堂开始激发学生的积极性,将课堂交给学生,充分发挥学生的主体地位,使教学效果更好,在此过程中他们乐意参与课堂活动、提出问题、与他人讨论并寻找解决方案,有利于激发学生的学习动机和兴趣,从而培养他们的批判性思维和问题解决能力;其次,在指向模型意识提升的小学数学习题课教学中,考虑到模型意识更关注学生对模型的主动应用,要更遵循“以生为本”的教学理念,突出学生的主体地位,因此,要促进学生模型意识的提高,必须发挥学生的主动性,让学生用自己所获得的知识或方法解释现象或问题。为了提高学生的模型意识必须给予学生一定的时间与机会,鼓励学生思考与表达自己的观点,让学生主动应用模型、自主用已有知识与方法解决问题,同时可以鼓励学生通过小组讨论、团队合作等学习方式激发学生的主动性。

3.关注原问题与变式问题间的递进关系

变式问题是指通过修改问题的情境或者转化问题内部的已知与未知条件而形成的与原问题有联系却存在差异的问题,问题的变式可以形成一类问题,而变式问题间的递进关系是指各问题间联系与发展的逐渐加深或变化,解决变式问题会用到前一个问题的知识或方法,亦或者与前一个问题的内部结构相似甚至相同。在教学中呈现变式问题的作用在于引导学生感受解决问题是数学模型的应用途径,认识一类问题可以用一个数学模型解决。因此,教学中呈现的变式问题不仅仅要让学生应用此模型解决问题,也要让学生认识一个模型可以解决一类问题,在此,一类问题不仅仅是情境不同,但难度和水平相同的问题,还指的是不同难度的问题,甚至是不同情境、不同难度、不同条件的问题,这些问题难度、深度是层层递进的。在应用同一模型解决这些层层递进、逐渐复杂的问题中,强化学生对一类问题可以用一个数学模型解决,且问题间的递进关系可以帮助学生拓展思维能力、系统掌握解决问题的方法,应用数学模型解决这些问题,力求达到提升小学生模型意识的目的。

(五) 辅助条件

为了保证教学活动的顺利开展,在教学过程中需要主体、环境等各方面条件的支持,指向模型意识提升的小学数学习题课教学需要以下三条件的支持:

1.学生方面

在“主体性”教育理念的基础上,学生的角色定位应是积极主动的求学者。在具体的习题课教学过程中,首先,学生应积极地用数学眼光发现各种情境中的问题,感受各种生活情境中数学问题的存在,其次,自主唤醒已有的相关知识、分析其内部关系进

而解决问题，分享收获，最后但却更重要的是在解决各种问题的基础上，深度思考各类问题背后的变与不变，进而更有效地感悟模型普适性。

2.教师方面

在“以人为本”教育理念的基础上，教师的角色应是引导者、帮助者和促进者。在指向模型意识提升的小学数学学习题课教学中，第一，教师需要在课前搜集并准备好各种情境的问题，为激发学生积极参与其中做好准备，第二，在解决问题的过程中引导学生从理解问题、确定内部结构、搜寻相关知识进而顺利解决问题，第三，给予学生充足的时间交流想法，探寻本质。因此，教师必须熟悉此模式的步骤及每阶段的任务，既能引导学生积极思考，又能实现教学目标。

3.环境方面

指向模型意识提升的小学数学学习题课教学以建构主义理论所提出的“以人为本”教育理念进行建构，此模式关注学生在教学过程中的积极参与与自主获得，在此理论及理念下，学习环境应是开放的、积极愉悦、畅所欲言的，教师应该给学生充分提供自主交流、思考及探究的机会和时间，减少要求与讲解的时间，进而给学生营造宽松、敢说、积极参与的学习氛围。

（六）教学评价

教学评价是根据一定的标准对教师的教学过程及结果、学生的学习过程及结果进行全面评价的活动，教学评价对学生的全面发展及教师的教学质量提升有不可替代的作用^①。针对指向模型意识提升的习题课教学进行评价应紧扣建构教育模式的目标进行，而指向模型意识提升的习题课教学模式的目标主要是提高学生的模型意识。因此，将指向模型意识提升的习题课教学模式的评价内容设置如表 4-1 所示。

表 4-1 指向模型意识提升的小学数学学习题课教学设计与实施的评价内容

评价内容	测试卷
指向模型意识提升的小学数学学习题课教学	模型意识测试卷 1（前测卷）
设计与实施的教学效果	模型意识测试卷 2（后测卷）

三、指向模型意识提升的小学数学学习题课教学模式图

指向模型意识提升的小学数学学习题课教学模式的目的是提升学生的模型意识。为了达成这个教学目标。首先，本研究以数学模式理论、建构主义理论、现实数学教育理论为基础；其次，根据模型意识的内涵要素及提升特点，形成五个教学环节；最后，要了解目的达成的程度，此教学模式是否能发挥其预期作用，还需要教学评价进一步检验与完善。如果教学评价的结果能达到提升小学生模型意识的目的，则证明此教学模式有效，可进一步推广和教学。

基于以上分析，在此构建了指向模型意识提升的小学数学学习题课教学模式，如图 4-1 所示。

① 田曼.核心素养培养视角下的小学数学教学评价策略研究[J].天天爱科学(教育前沿),2022,(06):102-104.

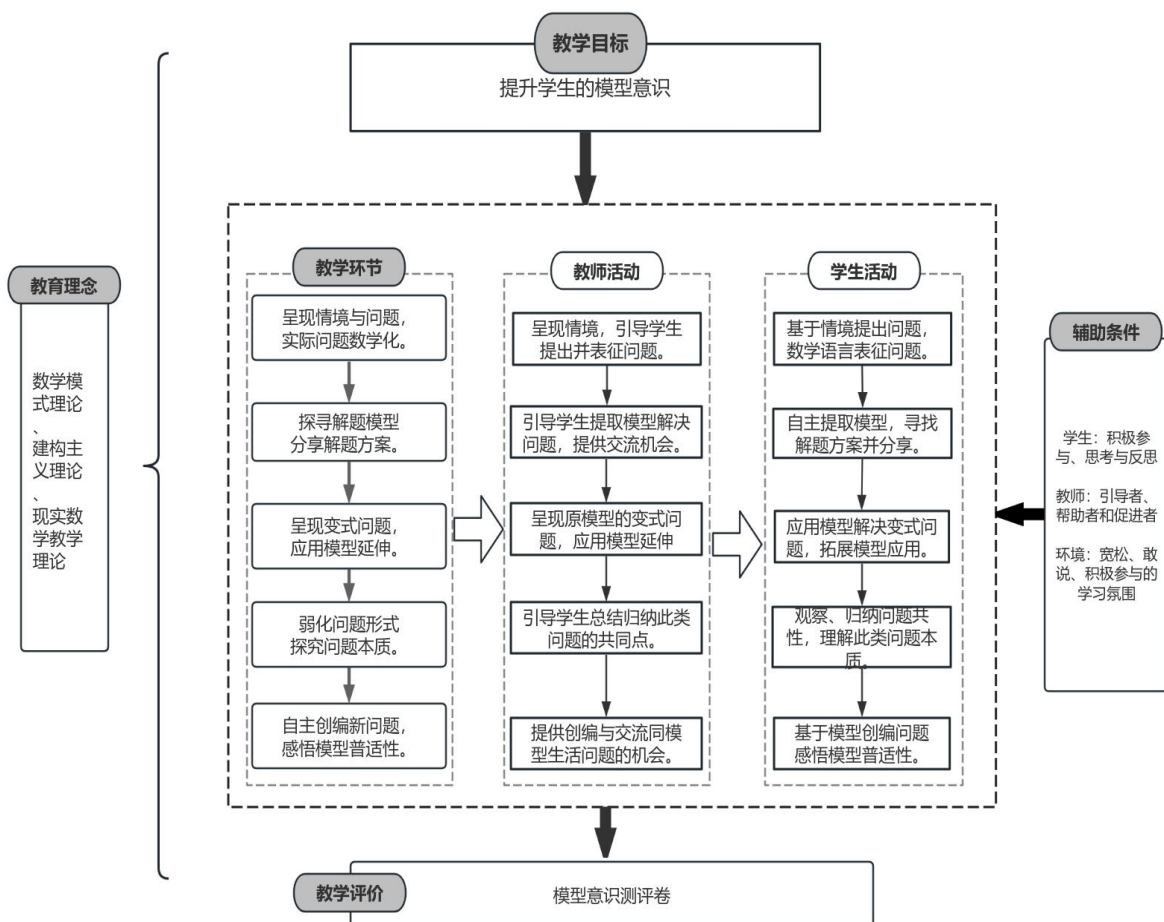


图 4-1 指向模型意识提升的小学数学习题课教学模式图

四、指向模型意识提升的小学数学习题课教学案例

1. 教学案例《分数与除法的关系》

（1）课程标准分析

新课标指出：第三学段的学生能结合具体情境理解整数除法与分数的关系，要尝试在真实的情境中发现和提出问题，探索运用基本的数量关系及几何直观等分析与解决问题，形成模型意识、应用意识等。

（2）教材分析

本节习题课教学的内容为人教版五年级下册第四章第 2、3 节，从知识前后的联系看，分数与除法的关系相关内容是分数意义的延续，又是六年级上册分数乘除法内容的基础。

本节知识内容的掌握对学生深刻理解分数有承先启后的重要作用。一方面对学生理解分数产生的意义有促进作用，让学生了解分数不仅可以表达在分物出现不能整数分的情况下使用，同时让学生了解到分数可以表示两个数的非整数倍数关系，而倍数关系的研究便与数学模型息息相关，需要让学生在各种生活情境中应用与感受；另一

方面,学习分数与除法的关系也对后期学习分数乘除法有重要作用,关于分数乘除法的各种问题与两个数之间的倍数关系息息相关,能否理解分数乘除法各数间的关系一部分取决于分数与除法关系的理解程度。

本节知识主要包含一个数学模型,即 $A \div B = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$),表示A是B的 $\frac{A}{B}$ 倍,且这个模型有两种变形,分别是 $A = B \times \frac{A}{B}$, $B = A \div \frac{A}{B}$,即将 $A \div B = \frac{A}{B}$ 看成一个除法算式,要算被除数或者除数,根据三数关系进行转化即可得到,虽然具体的运算属于六年级的知识,但是除法算式中三者的关系是学生之前已经学过的,这些关系的转换需要学生在不同的情境、不同的问题中逐步感受,进而提高模型意识,理解其本质。

(3) 学生分析

A.知识基础

学生已经学习了分数的意义、分数的产生及除法与分数关系的新课。学生对分数与除法的关系已经有了初步的了解,且能应用分数与除法关系的知识解决基本的问题。

B.能力基础

学生在前面的练习及学习中,已经有问题意识,形成了初步的模型意识,能处理问题间的简单关系,并能根据问题间的关系解决问题。

C.心理特点

五年级的学生在11岁左右,认知发展已经处于具体运算阶段,可以进行简单的抽象,且具有可逆性,且对事物有探究欲望和兴趣。

(4) 教学目标

A.掌握解决生活问题的方法,能解决 $A \div B = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$) 模型及模型变式有关问题。

B.通过练习提高将生活问题转化为数学方式的意识,通过合作交流等提高数学语言表达能力,通过举例发现模型的普适性。

C.感受生活与数学的紧密联系,数学知识的有用性,有意识用数学模型解决问题,感悟模型的普适性。

(5) 教学重难点

A.教学重点:能主动且正确将生活问题转化为数学方式并解决与 $A \div B = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$) 有关的问题。

B.教学难点:能解决 $A \div B = \frac{A}{B}$ 的其他变式问题,发现或创编出与原问题模型一致的其他问题。

(6) 教学过程

表 4-2 教学案例 1

环节	教师活动	学生活动	设计意图
呈现情境与问题，情境问题数学化	【创设情境】这周我们学习了分数与除法的关系，其实在生活中有很多这类关系。我们先来看看这样一个情境。五（1）班共有 17 幅书法作品参加学校的书法比赛，其中 4 幅作品从全校 255 幅参赛作品中脱颖而出获奖。 通过仔细观察你能发现什么数学信息。 【提出问题】你能根据这些信息提出有关“分数”的问题吗？ 呈现问题①五（1）班获奖作品占全班参赛作品的几分之几？ 【问题数学化】读完这道题，谁想说这道题让我们算什么？	学生仔细阅读并进行回答。 学生提出相应问题。 学生根据问题回答。	此环节学生的心理状态为认知，表现为理解问题情境。教学环节为：呈现情境与问题，情境问题生活化。在开始以生活情境导入，并让学生从中发现问题，在此过程中有利于让学生认识到生活中的问题与数学息息相关。 通过问题引导让学生脱离情境，思考情境中的有效信息及题意，并将其数学化。
构建数学模型，交流解题	【选择与构建模型】一般在做应用题时，题目中的信息有时会很繁琐，要想看清它们间的关系，我们怎么办？ 请学生用自己喜欢的方式表达其中的关系并列式解决。 问：为什么用除法解决，而不用乘法呢，你能说说自己的理由吗？ 同学们在练习本上列式计算，完整回答问题。	学生说出一些简化信息方式。 在黑板上分享不同的表达方式。 学生分享所列式子和答案并解释原因。	此环节学生的心理状态为抽象与唤醒，即抽象为简洁的数学表征方式，并唤醒相关的知识、概念及公式等数学模型，外显性表现为将情境信息转化各种表征方式并解决问题。引导学生用数学各种数学

思路			方式表征题目中的关系,并逐步形成主动意识,同时让学生解释自己的解题思路。										
解决变式问题,应用模型延伸	【变式问题 1】 ②五(1)班获奖作品是全校参赛作品之几分之几? 现在请同学们根据我们刚才的步骤,解决这个问题。(给学生 2 分钟思考时间) 请同学分享自己的解题过程? 那这两道题都是求五(1)班获奖人数所占的分数,为什么结果不一样? 两个题的单位“1”分别是谁? 如何判断问题中的单位“1”,在除法与分数关系的问题中,单位“1”一般在除法和分数的什么位置? 看来大家不仅学会了知识,而且能用知识解决很多问题,将知识活学活用,真棒! 【变式问题 2】 某市开展“垃圾分类,健康中国”行动,一个垃圾清理站一周内回收垃圾的情况如下。 <table><tr><td>种类</td><td>厨余垃圾</td><td>可回收垃圾</td><td>有害垃圾</td><td>其余垃圾</td></tr><tr><td>数量/吨</td><td>29</td><td>8</td><td>3</td><td>41</td></tr></table> 请问:厨余垃圾和其余垃圾共占垃圾总数的几分之几? 根据我们的方法和步骤,请你们快速思考,看谁做得又快又完整。 谁想来分享自己的解题过程? 有时候我们会发现所列出的关系	种类	厨余垃圾	可回收垃圾	有害垃圾	其余垃圾	数量/吨	29	8	3	41	【自主练习】 学生回答并列出关系式:全班获奖人数÷全校参赛人数=几分之几(倍数),根据信息和关系式列出算式得出结果。 学生回答:因为单位“1”不同,说出两个小题的“单位 1”分别是谁。 学生回答:单位“1”在“的”前面,这类问题中,单位“1”在除数的位置,在分数的分母位置。 学生回答:(厨余垃圾数量+其他垃圾)÷垃圾总数=几分之几(倍数),再根据关系式列出算式得出结果。	通过此题巩固解题步骤及应用模型解决问题,通过分享和解释提高学生主动用数学解释现象的意识,同时通过连续的几个问题让学生知道如何判断“单位 1”在分数问题中的位置和除法算式中的位置。 变换问题情境,并增加解题的步骤,提高学生对此类问题模型一致性的感悟。
种类	厨余垃圾	可回收垃圾	有害垃圾	其余垃圾									
数量/吨	29	8	3	41									

式需要的信息题目中没有,就像这道题,我们要如何做? 那就是说有的数据只是被藏起来了,需要我们先细心找到,再计算,问题就迎刃而解。 非常棒,现在给大家两分钟时间,请大家在练习本上完整呈现解题过程并分享。 【变式问题 3】 根据我国第四次大熊猫调查结果显示,全国共有 1864 只野生大熊猫,其中有 1387 只生活在四川。那么根据第四次调查,未生活在四川的大熊猫占有所有大熊猫数量的多少? 请同学分享自己的解题过程。 你可以给大家解释一下你的思路和想法吗?其他同学有没有其他的想法或思考?(请有不同想法的同学分享) 师:大家非常棒,已经快速解决三个问题了,最后一个题有一些难度,但是考察的知识点和问题的关系都是一样的,看看谁能快速找到其中的关系。 【变式问题 4】 小明和小华相约去钓鱼,小明说:“我钓鱼数量的$\frac{1}{2}$是 3 条”,那么小明钓了几条鱼? 请同学们仔细看看题中的信息,你能得出什么信息? 请你们选一种数学表达方式来表示题目中的信息,再思考$\frac{1}{2}$表示谁占谁的$\frac{1}{2}$?其中的单位“1”是谁?再想想可以用什么方法解决,现在以小组为单位开始探究。 请同学分享。	根据其他信息和关系,先算出来。 学生分享自己的解题步骤和结果。 【自主练习】 学生分享自己的解题思路过程及结果。 学生回答:这道题还是求一个数占另一个数的几分之几,所以就是算它们的倍数关系,所以用除法解决。 学生回答:小明钓鱼数量的$\frac{1}{2}$是 3。 【小组合作】 学生以小组为单位讨论问题。在黑板上画图,并根据图说出小明钓鱼数量的$\frac{1}{2}$是 3 的意思是将小明钓鱼数量平分成两份,其中一份是 3,所以得出小明钓	在前一题的解题引导后让学生进行自主练习,能够提高学生的参与性,同时让学生达到“知行一致”。 再次呈现变式问题,改变原有的“一个数占一个数的几分之几”提问方式,将已知变未知,未知变已知,提高学生的变通能力和模型意识,同时采取小组合作交流的形式激发学生的学习积极性,在解题中感受图、表达式等数学模型表征的简洁性。
---	---	--

	很好，可以从画出线段图快速发现它们间的关系并解决问题，谁可以根据这个图列出一个关系式呢，谁÷谁$=\frac{1}{2}$呢？ 那刚才我们前面那几道题要计算的都是倍数，这道题我们要算什么？ 那我们列出的关系式是一个除法算式，要求的是除数，该如何算？ 非常棒，大家可以用线段图和表达式解决这类问题，也更加深入了解除法与分数之间的关系，分数除法的相关知识我们在下学期就会学到，现在只需要大家了解。 【变式问题 5】 我们刚才算出来小明钓鱼数量是 6 条，如果小华钓鱼数量是小明的$\frac{1}{3}$，那么小华钓了几条鱼？现在请大家根据我们刚才的两种分析方法进行计算。 请同学分享自己的解题过程。 师：看来我们在做题目时，可以把很多乘法、除法算式根据它们之间的关系进行转化，再求解。	鱼数量是 $3+3=6$。 学生回答：$3\div$小明钓鱼数量$=\frac{1}{2}$，这里的“单位 1”是小明钓鱼数量，要算“单位 1”。 学生回答。 【自主练习】 学生在练习本上自己思考并解决。 【交流分享】 第一种：画图法与分数的意义分析。 第二种：小华的钓鱼数量$\div$ 小明钓鱼数量$=\frac{2}{3}$，算被除数，用乘法。小华的钓鱼数量=小明钓鱼数量$\times\frac{2}{3}$	此题与上一题的情境相同，但问题不同，与原问题情境、已知、未知条件都不同，难度加大，但其内部关系一致，进一步让学生感悟模型 $A\div B=\frac{A}{B}$ ($B\neq 0$) 可以解决一类问题。
弱化问题形式，探究问题	【寻找问题共性】 引导学生思考四个问题的相同点。 【探究问题本质】 询问这种问题能否列举完？引导学生用一个字母表达式来表达这几个题目共用的表达式。 问：这是一种什么关系？能否用一个图示表示这个式子吗？	学生进行自主思考与合作交流，进行分享。 通过教师的问题进行理性思考与回答，了解这类问题的本质。	通过探索各种情境、各种形式问题下的共性，了解此类模型问题的本质，从而让学生感悟从感性向抽象发展。 从字母表达式、图式、关键词

题本质	单位 1 是谁呢？可以用哪些关键字来识别这种关系呢？ 如果知道 A 和 $\frac{A}{B}$，除了用画图法，还能用什么方法算 B 呢？说明理由。 那知道 B 和 $\frac{A}{B}$，用什么法算 A 呢？说明理由。		等各种角度出发，了解此类模型本质，同时提高学生对此类问题的敏感度。 根据除法算式的性质分析各个部分之间的关系，并利用其解决问题，进而提升学生的模型意识。
自主创编问题，感悟模型普适性	【自主创编问题】 我们上课前就说过生活中其实有很多这样的关系，你能根据我们总结出的字母表达式设计一个问题吗？ 那你们能编一个像 3、4 题一样复杂一点的问题吗？ 我们今天的任务不仅仅是做题，更重要的是寻找这些问题关系的共同点，我们小学阶段各种问题的解决都离不开对问题的分析。希望大家以后遇到问题能多寻找信息之间的关系，通过他们的关系解决各类问题，因为不管它们如何变，它们之间的关系都是可以转化的，问题也就迎刃而解了！	学生根据字母表达式和生活情境创设问题。	让学生基于数学模型发现数学中的问题，目的是加强学生现实生活与数学世界间的联系，同时也提高了学生在看到数学知识等模型时能与自己的生活紧密联系，从而提高应用能力。

2.教学案例《分数加、减法混合运算》

（1）课程标准分析

新课标中指出：第三学段的学生要经历用字母表示数的过程，能进行分数的四则运算，要尝试在真实的情境中发现和提出问题，探索运用基本的数量关系及几何直观等分析与解决问题，形成模型意识、应用意识等。

（2）教材分析

本节习题课教学的内容为人教版五年级下册第六章，从知识前后的联系看，分数的加、减法运算是同分母分数加减法、异分母分数加减法的延续，又是整数、分数、小数混合运算的基础。

本节知识内容的掌握对学生巩固同分母分数加减法、异分母分数加减法，学习混合四则运算有承先启后的重要作用。一方面对学生巩固同分母分数加减法、异分母分

数加减法有促进作用,让学生在应用分数加减法知识解决问题时巩固分数加减法算理的练习,同时让学生了解与应用各分数与整体的关系及其相关应用,而其中的 $A+B+\dots=1$ 便与数学模型息息相关,需要让学生在各种生活情境中应用与感受,另一方面,学习分数的加、减法混合运算也对后期学习数的混合运算有重要作用,关于混合运算的练习需要学生将整数、分数、小数的运算及转化融会贯通,因此,能否解决混合运算的相关问题一部分取决于分数运算水平。

本节知识主要包含数学模型,即 $A+B+\dots=1$ 或者 $A+B+\dots=C$,表示 A 占单位 1 的几分之几, B 占单位 1 的几分之几, $\dots=1$,且这个模型有变型,为 $A=1-B-\dots$ 。即将 $A+B+\dots=1$ 看成一个加法算式,要算一个加数,根据各量关系进行转化即可得到,这些关系的转换需要学生在不同的情境、不同的问题中逐步感受,进而提高模型意识,理解其本质。

(3) 学生分析

A. 知识基础

学生已经学习了同分母分数的加减法、异分母分数的加减法及分数加减法混合运算的新课。学生对分数的加、减法已经有了初步的了解,且能应用分数加减法的知识解决基本的问题。

B. 能力基础

学生在前面的练习及学习中,已经有问题意识,形成了初步的模型意识,能处理问题间的简单关系,并能根据问题间的关系解决问题。

(3) 心理特点

五年级的学生在 11 岁左右,认知发展已经处于具体运算阶段,可以进行简单的抽象,且具有可逆性,对事物有探究欲望和兴趣。

(4) 教学目标

A. 了解在表示关系的问题中会隐藏“单位 1”的信息,能正确识别并利用其解决问题。

B. 通过练习各情境、各变式模型的问题提高问题解决能力,通过合作交流等提高数学语言表达能力,通过举例发现模型的普遍应用性。

C. 感受生活与数学的紧密联系,数学知识的有用性,有意识用数学模型解决问题,感悟模型的普适性。

(5) 教学重难点

A. 教学重点: 能主动且正确将生活问题转化为数学方式并解决与 $A+B+\dots=1$ (C) 模型有关的问题。

B. 教学难点: 能解决 $A+B+\dots=1$ 的其他变式问题,能发现或创编出与原问题模型一致的其他问题。

(6) 教学过程

表 4-3 教学案例 2

环节	教师活动	学生活动	设计意图
呈现情境与问题，情境问题数学化	【创设情境】同学们，我们这一单元学习了分数的加减法，那我们这节课就一起用所学知识来做一些习题。 某小学图书馆各类图书情况如右图。你能得到什么信息呢？  【提出问题】 那你能想到什么数学问题呢？ 那现在我们一起来解决大家提出的这个问题：其他类图书占总图书的多少？ 【问题数学化】 根据这个饼图，谁能说说这道题实际让我们算什么？ 根据我们之前的经验，在了解信息后，我们可以做什么事情？	学生回答。预设：图书馆书的种类就四种，其中科学类占$\frac{2}{11}$，历史类占$\frac{3}{11}$，文学类占$\frac{5}{11}$，其他类未知。 学生提出问题。 学生积极回答问题。 脱离情境，将问题数学化，即算绿色部分是整个圆的几分之几。 学生回顾解题步骤，并积极回答	此环节学生的心理状态为认知，表现为理解问题情境。教学环节为：呈现情境与问题，情境问题生活化。在开始以图书馆图书情况的生活情境导入，并让学生从中发现问题并提出问题，在此过程中有利于让学生认识到生活中的大多数问题与数学息息相关。 引导学生将生活问题数学化，引导学生去情境化，了解其问题本质。

构建数学模型，交流解题思路	【选择与构建模型】 那现在请大家用自己智慧的眼睛看看如何简化题目中的信息或关系。 题目中并没有 1 这个信息，你怎得出这个关系式呢？ 非常棒，那用什么法可以得到其他类图书占总图书的多少。 刚才的表达式是加法，为什么又用到了减法？ 太棒了，看来同学们能将知识融会贯通，理解了加法式子的本质，而且能根据具体的问题具体分析它的变形。那现在请同学们快速在练习本上用自己喜欢的方法解决这道题。 我们继续往后来探究，看看它还有没有其他的变形。	学生根据饼图列出关系式并根据图及各分数与“单位 1”间的关系回答。 学生独立思考并回答：用减法、用方程解决。 学生根据加法算式各部分间的关系解释原因。 学生分享不同的做题过程和思路。	此环节学生的心理状态为抽象与唤醒，即抽象为简洁的数学表征方式，并唤醒相关的知识、概念及公式等数学模型，外显性表现为将情境信息转化各种表征方式并解决问题。因此，在此，引导学生用表、图、表达式等简化题目中的信息和关系，提高学生用数学语言表达现实世界的意识。
解决变式问题，应用模型延伸	【变式问题 1】 妈妈买了 2 米长的毛线，给爸爸织毛衣用去了 $\frac{7}{10}$ 米，给小红织手套用去了 $\frac{1}{20}$ 米，毛线还剩多少？ 相信大家已经知道自己遇到问题首先干什么，再干什么了，现在先自己思考如何做，自己在练习本上做一做（2 分钟），哪位同学做完、想好就可以举手告诉老师了。 请 3 位同学进行分享。 非常棒，大家能主动把看起来繁琐的信息简化成一个表达式或者一个图，让自己一目了然，还能想到用不同的方法解决同一个问题。 我还有一个疑问，第一题是用单位“1”减其他部分，为什么这道题用 2	【自主练习】 学生根据步骤自主独立解决问题。 学生说出自己表达信息的方法（表达式、线段图等），并说出自己的解决方法。 学生通过问题的回答，理解用“单位 1”和用实际数的情况。（上一道题是各类书数占总书的分数，这	通过呈现变式问题让学生理解何种情况用具体数据解决，何种情况题目中会隐含“单位 1”的信息，同时通过分享和解释提升学生用数学知识解释现象和思路的意识。

减呢？ 原来是这样，大家对分数理解得真透彻。那现在谁来列式解决一下这道题。 非常棒，看来大家已经能根据问题间的关系和画图解决很多问题了。那我们继续加油，看看下一个问题有什么变化。 【变式问题 2】 有红、黄、蓝三条丝带。红丝带比黄丝带长$\frac{7}{20}$米，蓝丝带比黄丝带短$\frac{3}{20}$米，蓝丝带与红丝带相差多少米？ 这道题读起来有些绕口，我们该怎么办呢？ 那现在请大家以小组为单位将题目中信息简化后解决问题。哪组愿意分享它们的成果？ 真是个善于思考的孩子，能够仅根据各个量之间的关系就能算出结果。还有很多同学不太懂，谁有其他的方法解决？ 师：真棒，一下子把复杂的关系让我们一目了然，现在看来同学们都会了，看来我们要善于画图寻找问题中的关系。 请你们想想这个题要算各部分与单位 1 的关系还是准确的量呢？ 非常好，能快速分清问题之间的关系，那这道题隐含了单位“1”这个信息吗？ 太棒了，又一个问题被我们突破了，大家给自己鼓鼓掌，我们一起突破最后一个问题。 【变式问题 3】 某市“六一儿童节才艺表演设一、	道题是具体的长度） 学生采取不同方法解决问题并分享。 学生回答问题，并感受数学表达的简洁性。 【小组合作探究】 学生分享自己的表达方式及解题思路。（预设：红丝带=黄丝带$+\frac{7}{20}$，蓝丝带=黄丝带$-\frac{3}{20}$，红丝带-蓝丝带$=\frac{7}{20}+\frac{3}{20}=\frac{1}{2}$（米） 画图的同学上黑板展示并解释（预设：通过画图发现红、蓝丝带都和黄丝带有关，红丝带比黄丝带长，蓝丝带比黄丝带短，而且黄丝带长度不变，红丝带比黄丝带长的部分与蓝丝带比黄丝带短的部分之和就是它们长度之差） 学生回答问题。 准确地量，因为丝带长度带了单位。	变换问题情境及问题的内部关系，提高学生对此类问题模型一致性的感悟，丰富学生解决 1 问题的经验。
---	---	---

二、三等奖，一、二等奖共占总人数的$\frac{2}{5}$，一、三等奖共占总人数的$\frac{7}{10}$，一、二、三等奖获奖人数各占获奖总人数的几分之几？ 让学生齐读问题，并请同学说说能得到什么数学信息。 知道了信息和问题，我们如何做？ 我们在做题中发现题目中可能会隐含一个条件，想想什么样的题目中会隐含条件，这道题有没有隐含条件。根据自己的数学表达先自己思考有没有思绪，再和同桌互相交流。 请学生分享自己的想法。 问：你最后是根据什么知识得出一等奖占总人数的多少的？ 原来还是用到了加法的性质，还有其他方法可以解决吗？ 其他同学还有不同的算法吗，如果我们知道隐含条件1，还知道一、二等奖占总人数的多少，你能得到什么信息呢？大家再算算。 非常棒，看来大家能够根据以前学的加数+加数=和解决很多不同的问题。 现在有两种方法解决这道题，看看你们更喜欢哪种方法，为什么。 做了这道题，大家想想为什么一开始没想到用单位1与二、三等奖占总人数的几分之几之间的关系找到突破口解决呢？ 看来我们还是需要对关于倍数关系的分数提高敏感度，时刻记得这类题有一个隐含条件，进而找解决方	学生齐读问题并说出自己获取的信息。 学生回答问题并进行表达。（表达式或线段图）学生自主思考并与同桌交流与讨论。 画图：从图中发现一、二等奖占总人数分数+一、三等奖占总人数分数=一、二、三等奖占总人数分数+一等奖占总人数分数，而且隐藏了信息一、二、三等奖占总人数分数之和为1，所以一等奖占总人数分数$=\frac{2}{5}+\frac{7}{10}-1=\frac{1}{10}$，再根据题目中的其他关系就可以知道二、三等奖分别占总人数的多少了。 学生回答方程。 学生根据减法直接算出三等奖占总人数的几分之几，进而根据关系算出其他分数。 学生回答并说出理由。	通过分组合作方式给予学生一个支架，让学生进行交流、探究，感悟不同类型问题所用模型的一致性，并引导学生从多种角度和方法解决问题，提高学生的推理能力和模型普适性的感悟。
---	--	---

	法。	学生反思，并说出问题。	
弱化问题形式，探究问题本质	【寻找问题共性】 我们这节课解决了4个关于分数加、减法的问题，这4个题有什么共同点呢？ 那我们如何看它们是不是倍数关系呢？ 【探究问题本质】 同学们观察得十分仔细，将共同点都总结了出来，那你们能用一个字母表达式来表达这几个题目共用的表达式，并根据这个字母表达式画出示意图吗？ 非常好，如果我知道总量或者“1”，用什么法计算其中一个分数？	预设1：这四个题都是关于分数的加、减法问题 预设2：这几个问题都可以用加数+加数=和这个式子表达 预设3：有的问题会隐含告诉一个信息就是“1”（当全部分数都是表示部分与整体关系时） 如果带单位就是具体量，如果不带单位就表示有隐含条件1。 学生回答 $A+B+C=1$ 或者 $A+B+C=\text{总量}$ 学生回答减法。	通过探索各种情境、各种形式问题下的共性，了解此类模型问题的本质，从而让学生感悟到模型的一致性。 从字母表达式、图式、关键词等各种角度出发，了解此类模型本质，同时提高学生对此类问题的敏感度。
自主创编问题，感悟模型普适性	【自主创编问题】 我们刚才已经在不同问题中用了这个关系式，其实生活中用这个关系式解决的问题还有很多很多，现在请同学们根据我们总结出的字母表达式设计不同的分数问题。（请同学们思考并举例） 非常好，看来很多问题都是形式发生了变化，但是它们的本质不变，用的还是一个知识，我们通过画图或者找出它们的关系，通过关系的转化我们的问题就迎刃而解了。	学生根据字母表达式和生活情境创设问题。	让学生基于数学模型发现数学中的问题，加强学生现实生活与数学世界间的联系，也提高了学生在看到数学模型时与自己的生活联系，从而提高应用意识和模型意识。

第五章 指向模型意识提升的小学数学习题课教学的实验研究

一、实验设计

（一）实验目的

第四章所建构的指向模型意识提升的小学数学习题课教学模式是在理论分析的基础上进行的，而所建构教学模式的目的是提升习题课教学效果，最终提升学生的模型意识，因此需要通过实践与评价了解教学模式的效果。此实验的目的即选择两个各方面基本一致的两个班，实验中控制无关变量，尽可能只在教学模式方面存在差异，实验后进行后测，了解实验班的模型意识提升情况。

（二）实验假设

本研究基于对模型意识及习题课教学的理论分析，依据指向模型意识提升的小学数学习题课教学提出假设：指向模型意识提升的数学习题课教学可以提升学生的模型意识。

（三）实验对象

本实验的研究对象是 Y 市小学五年级，选择五年级的原因：首先，新课标要求第三学段学生在发现、提出、分析与解决问题的过程中发展模型意识；其次，五年级学生处于小学的第三学段，五年级学生已经对小学数学的多数知识有基本的认知与掌握，受到内容认知障碍的影响较少，且与六年级相比升学压力在此时还较小，更适合做此研究的实验对象。这所学校五年级共 5 个班，且 5 个班都属于平行班，本研究通过随机选择同一个老师所教的两个班级进行模型意识测试，通过对其各方面进行了解与分析，发现两个班级的人数比为（A 班：B 班=50：49）；性别比为（男_{A 班}：女_{A 班}=26：24、男_{B 班}：女_{B 班}=25：24）；四年级下册 A 班、B 班期末成绩的及格人数占比分别为（及格比_{A 班}=72%、及格比_{B 班}=69%）；平均分分别约为（平均分_{A 班}=76.42 分、平均分_{B 班}=74.31 分）；年龄分布为（10~11 岁），根据皮亚杰的认知发展阶段，7~11 岁的学生都处于具体运算阶段。可见，A 班与 B 班在人数、性别、数学成绩、年龄等无关变量都基本一致。因此，初步确定这两个班为对照班（A 班）与实验班（B 班）进行为期三个月的准实验研究，样本基本情况如下表 5-1 所示。

表 5-1 实验样本具体分布

	实验人数	男生	女生
对照班 (A 班)	50	26	24
实验班 (B 班)	49	25	24
总数	99	51	48

（四）实验变量

1.实验自变量

自变量 X：教学模式的差异。对照班（A 班）采取传统教学模式进行习题课教学，实验班（B 班）采用所建构的指向模型意识提升的习题课教学模式进行教学实践，选择实验班（B 班）进行实验干预。

2.实验因变量

因变量 Y：对照班（A 班）与实验班（B 班）学生模型意识的提升情况。

3.实验无关变量

要获得更客观的数据，需尽可能排除无关变量的影响，因此，在本实验研究中控制以下变量：一，对照班与实验班的授课教师相同；二，对照班与实验班的学生在各方面基本相似；三，实验班与对照班的授课内容与习题课教学所用习题都相同；四，两个班级的实验对象总人数、男、女生人数比例基本相同；五，两个班级课后所布置的作业一致。

（五）实验方法

本研究采用的是准实验法，选择两个组进行实验，即 Group1 和 Group2（简称 G1 和 G2），前期两组的水平分别为 Y_1 和 Y_2 ，之后对两个组分别进行两种不同水平的实验处理（ X_1 和 X_2 ），实验结束后两组会产生不同的效果（ $Y_{1'}$ 和 $Y_{2'}$ ），对 $Y_{1'}$ 和 $Y_{2'}$ 进行测量和对比，进而了解实验效果如何，与此同时，也可对 Y_1 和 $Y_{1'}$ 、 Y_2 和 $Y_{2'}$ 进行比较，由于两组采取不同水平实验处理，一般实验组会出现干预效果，而对照组则保持原状。

（六）实验工具

1.测试卷目的

本研究主要编制两套测试卷，分别为测试卷 1 与测试卷 2。测试卷 1 编制与实施的目的是了解两个班学生模型意识是否存在差异，通过学生对测试卷 1 的作答情况进行编码与分析，并通过 spss 软件对两个班级学生的所得分数进行独立样本 t 检验。若两个班级学生成绩差异不显著，则可选择其为实验班与对照班，进行教学实验；测试卷 2 编制与实施的目的是了解实验班学生的模型意识是否有提高，与对照班的成绩是否存在显著性差异，进而分析教学设计与实施的效果。

2.测试卷维度

测试卷 1 与测试卷 2 需要反映学生的模型意识水平，因此，测试卷 1 与测试卷 2 的编制与评分需要以模型意识的内涵与要求为基础，确定测试卷编制维度。

基于第三章从心理学视角对模型意识的分析及模型意识过程表现的分析，本研究将内隐性特点与四个过程表现结合，形成数学模型意识的测试题维度，在这四个过程中，前者（认知、抽象、唤醒、感悟）描述的学生数学模型意识的心理倾向，后者（问题的理解、转化关系结构、表达解题过程、列举生活问题，概括为理解、转化、表达、

列举)描述的是学生模型意识的过程性表现,具体如图 5-1 所示。

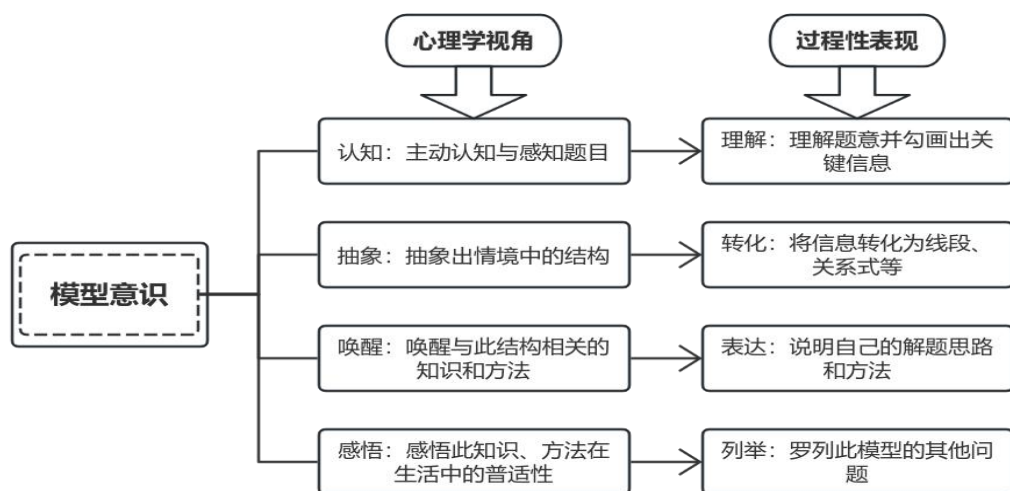


图 5-1 数学模型意识维度结构图

3.测试卷编制过程

(1) 确定题目内容

只有基于具体的数学知识才能测评出学生的模型意识,没有知识的模型意识便是无本之木,无源之水。新课标将义务教育阶段的数学内容分为四个领域,分别是数与代数、图形与几何、统计与概率、综合与实践,数学模型在课程内容的各个领域都渗透。因此,此次测试题根据五年级学生所学内容对这四个领域皆有涉及。

本研究的研究对象是五年级的学生,考虑到前后测需要排除知识本身的影响和学生自身的知识掌握水平,因此前后测试卷选择四年级及五年级上册的相关知识;问题的相关内容包含四个数学领域,分别为数与代数、图形与几何、统计与概率、综合与实践。

(2) 设计具体题目

模型意识是学生建立现实与数学的桥梁,学生需要在各种实际情境中主动应用数学模型,因此,模型意识的测试需要现实情境的铺垫。参照 PISA 测试题的情境分类,在此将问题情境分为四类,分别为个人情境、社会情境、职业情境、科学情境。因此本研究所编制的测试题也应涉及这四个情境;第二,基于模型意识的测试题目的是测评学生的模型意识,而基于前文的分析发现模型意识的测评离不开学生解题过程的呈现,因此测试题的题目形式为应用题;第三,测试题的设计遵循由易到难、阶梯式呈现的原则;第四,为了使前测卷与后测卷的成绩变化更具有客观性,因此,两套测试卷各题的情境、内容及数学模型意识维度都保持高度的一致性。

同时,研究者参考了信效度较好的程安琪^①、陈灵^②及范思琪^③建模水平的测试题,

① 程安琪.小学高年级学生数学建模能力水平的调查研究——以南京市 L 小学为例[D].南京师范大学,2020.

② 陈灵.第二学段学生数学建模能力的调查研究——以南京市 A 小学为例[D].南京师范大学,2017.

③ 范思琪.小学生数学建模能力的现状调查——以南京市 N 小学高年级为例[D].南京师范大学,2019.

结合本测试的目的、研究对象，确定模型意识的测试题。

(3) 咨询专家意见

模型意识测试卷编制结束后，首先发给实习学校的小学数学组教师，并请他们仔细斟酌题目的语序、问题的设置、情境的设置等，并提出宝贵意见，研究者针对意见对测试卷中不合理的问题做出合理的修改，同时将测试卷发给导师和同组的同学查看，并了解他们所提出的问题。最后根据记录的问题和建议进行修改与完善，进而删除不合理的题目、修改不合理的表达，最终形成测试卷 1（前测卷）和测试卷 2（后测卷）。

4.评分标准

由第三章对过程表现的分析可知模型意识的四个过程表现为递进的关系。再次借鉴章勤琼，陈肖颖学者^①对模型意识的表现性目标层次以及前文对模型意识的过程表现、学生的解题情况，确定表 5-2 模型意识的层次划分及分数赋值标准。

由于模型意识的各个层次是递进的，下一个层次比上一个层次的要求更高，为了体现其难易程度及其关系，因此，按照步骤给分，每个大题的分值是各层次分值的累计分值，但是由于有的同学能直接看出问题的内部关系直接表现 D2 进行列式解决而忽视 D1 勾画的步骤，此种情况默认已达到 D1 水平，其中 D1 的操作较为简单，赋值为 1 分，而学生在 D2、D3、D4 水平有不同的作答差异，因此每个水平都赋值 2 分。基于上述分析，本研究基于模型意识维度及学习者解答问题的具体情况确定符合小学数学模型意识测试卷的评价标准，如下表 5-2 所示。

表 5-2 模型意识各层次及评价标准

模型意识层次	学生作答特征	分数赋值
层次 1：识别 (D1)	学习者无法读懂问题，只对一些数字进行勾画，但未做出有效的回答。	达到作答要求，赋值为 1 分，否则为 0。
层次 2：表征 (D2)	学习者能写出解决问题的公式或者用数学方式表示出问题中的内部关系并解决。	只写出相关知识而未计算，赋值为 1 分；正确列式并得到结果赋值为 2 分，否则为 0。
层次 3：解释 (D3)	学习者能唤醒解决此问题的所有知识或者数学方法，解释清楚问题内部关系及自己的思路。	只写出知识未解释得 1 分；能用自己的方法清楚解释过程得 2 分，否则为 0。
层次 4：列举 (D4)	能列举出与表示此问题内部关系的式子相同的其他情境问题。	问题表述不清晰但内部关系一致，赋值为 1 分；表述清晰且内部关系一致，赋值为 2 分，否则为 0。

① 章勤琼,陈肖颖.小学数学模型意识的内涵、表现与教学——兼论核心素养的表现性目标[J].课程.教材.教法,2024,44(01):106-113.

5.测试卷的预测与修订

(1) 预测样本

本研究需测试两份试卷的信效度值,因此选择与 A 班、B 班平行的班级 C 班作为预测样本,对 C 班进行两次测试(测试卷 1 和测试卷 2),测试卷 1 的预测试共发放测试卷 51 份,回收测试卷后,剔除其中的空白测试卷,回收有效试卷 49 份;测试卷 2 的预测试共发放 51 份,同样回收测试卷后,剔除其中的空白测试卷,回收有效试卷 50 份。

(2) 数据处理

为了了解试卷的信效度等,本研究使用 SPSS23.0 软件,对回收的有效测试卷进行数据处理与分析,主要包括:测试卷信度检验(克隆巴赫系数)、测试卷效度检验(KMO 和 Bartlett 的球形度检验)、相关性分析、因子分析等。

(3) 测试题修订

为了得到信效度较高的测试卷,本研究首先对 C 班级的学生测试,测试卷为前测试卷《小学生模型意识测试卷 1(预测版)》、《小学生模型意识测试卷 2(预测版)》,测试时间都为一节课(45 分钟),测试结束后根据学生的作答情况和测试结果发现测试卷有如下问题:首先,有的问题描述不清晰,学生不理解题目导致无法解决问题;其次,有的情境学生不了解导致无法理解题意。因此研究者对有描述不清晰的问题进行调整,并将学生不了解的情境进行更换,形成《小学生模型意识测试卷 1(前测卷)》、《小学生模型意识测试卷 2(后测卷)》。

调整后的测试卷 1 和测试卷 2 都由模型意识维度构成,含 4 个大题,每大题各 3 小题,共 12 个小题。

6.测试卷的信度与效度分析

(1) 信度分析

2023 年 3 月在 C 班进行预测试,从而了解测试卷的信度情况和学生答题情况,两份测试卷预测试都发放 51 份,《小学模型意识测试卷 1》共回收 49 份有效试卷,《小学模型意识测试卷 2》共回收 50 份有效试卷。在收回试卷后,对其分别进行编码,每个问题按照步骤进行给分,若达到要求记为 1,未达到要求记为 0,对《小学模型意识测试卷 1》(下文记为测试卷 1)和《小学模型意识测试卷 2》(下文记为测试卷 2)分别用 SPSS 软件进行信度分析,结果如下表 5-3 所示。

表 5-3 小学模型意识测试卷可靠性分析

可靠性统计		
	克隆巴赫 Alpha	项数
测试卷 1	0.907	16
测试卷 2	0.859	16

(2) 复本信度分析

复本信度是指通过两个内容相似但题目不同的测试去测量同一群体，计算研究对象在两份测试得分的相关系数。如表 5-4 所示，将 31 名学生的两次测试结果进行分析可知，测试卷 1 和测试卷 2 的相关系数为 0.824，且显著性为 0.000， $P<0.01$ ，相关极其显著，表明该测试的复本信度良好。

表 5-4 相关性

		测试卷 1	测试卷 2
测试卷 1	皮尔逊相关性	1	0.824**
	显著性（双尾）		0.000
	N		31
测试卷 2	皮尔逊相关性	0.824**	1
	显著性（双尾）	0.000	
	N	31	31

(3) 效度分析

效度是指测试卷分数能反映所需测量的某种特质或结构的程度，即所测问题与试卷是否能准确测到假设的理论。本研究使用 SPSS 软件对所编码的两套数据分别进行分析，分析结果显示测试卷 1 的 KMO 值为 0.721， $P=0.000$ ，测试卷 2 的 KMO 值为 0.727， $P=0.000$ ，具体数据如表 5-5 所示，说明两套测试卷有良好的效度，适合做因子分析。

表 5-5 小学模型意识测试卷效度分析

KMO 取样适切性量数			
		测试卷 1	测试卷 2
巴特利特球形度检验	近似卡方	0.721	0.727
	自由度	390.880	489.287
	显著性	0.000	0.000

在因子分析中，首先要进行公因子方差分析，分析几个公因子的累积贡献率，其中累计贡献率越高，表明几个公因子对于原来变量的表达越好。一般 >0.5 可以被表达， >0.7 表示公因子表达很合理。

表 5-6 公因子方差

		初始	提取			初始	提取
RZ1.1	1.000	0.860	RZ3.1	1.000	0.568		
CX1.2	1.000	0.843	CX3.2	1.000	0.683		
HX1.3	1.000	0.690	HX3.3	1.000	0.778		
GW1.4	1.000	0.736	GW3.4	1.000	0.815		
RZ2.1	1.000	0.834	RZ4.1	1.000	0.881		
CX2.2	1.000	0.897	CX4.2	1.000	0.828		
HX2.3	1.000	0.970	HX4.3	1.000	0.777		
GW2.4	1.000	0.826	GW4.4	1.000	0.815		

如表 5-6 所示，16 个题项的值均 >0.5 ，表明题项均可以被表达，可以进行下一步

因子分析。

表 5-7 总方差解释

成分	初始特征值			提取平方和载入			旋转平方和载入		
	合计	方差的%	累积%	合计	方差的%	累积%	合计	方差的%	累积%
1	8.227	43.301	43.301	8.227	43.301	43.301	5.062	26.641	26.641
2	3.020	15.893	59.194	3.02	15.893	59.194	3.587	18.881	45.522
3	2.109	11.098	70.291	2.109	11.098	70.291	3.236	17.030	62.552
4	1.489	7.835	78.126	1.489	7.835	78.126	2.959	15.574	78.126
5	0.874	4.599	82.726						
6	0.587	3.092	85.817						
7	0.527	2.772	88.589						
8	0.386	2.033	90.621						
9	0.347	1.826	92.447						
10	0.304	1.599	94.046						
11	0.255	1.340	95.386						
12	0.196	1.030	96.416						
13	0.192	1.011	97.427						
14	0.158	0.833	98.260						
15	0.117	0.614	98.874						
16	0.075	0.396	99.270						

如表 5-7 所示,可以提取 4 个因子,其中方差解释率表示提取的四个因子对 16 个题项的信息提取度,即 4 个因子可以解释 16 个题项的 78.126%。

为了更清楚看出每个因子与变量之间的关系,对提取的 4 个因子进行旋转成分矩阵分析,其中筛选因子载荷系数绝对值 >0.5 ,说明各项收敛效果好。具体数据如表 5-8 所示,各项因子载荷系数绝对值都 >0.5 ,表明各项的收敛效度好。

表 5-8 旋转成分矩阵

	成分			
	1	2	3	4
GW3.4	0.867			
CX4.2	0.780			
HX3.3	0.770			
RZ4.1	0.691			
RZ3.1	0.537			
RZ2.1		0.907		
CX3.2		0.906		
GW2.4		0.602		
CX2.2		0.785		
HX2.3			0.915	
GW4.4			0.909	
HX4.3			0.842	
GW1.4			0.500	
CX1.2				0.900
RZ1.1				0.879
HX1.3				0.691

(4) 难度与区分度分析

① 难度

试题难度是指试题的困难或容易程度,适当的试题难度会检测出学生的真实水平,对其学习成果做出客观的评价,让学生了解自己的不足及改进地方。试题较难会影响学生的学习积极性和自尊心,逐渐导致学生对学习丧失信心与兴趣,而试题较简单学生则会对学习逐渐失去探索性,同样导致积极性缺失;同时,对此研究来说前测测试卷与后测测试卷的难易程度应保证尽量相近,测试题难度越相近,前后的成绩越能保证此模式的有效性。

本研究采用张洪秀学者所提出的依据学生成绩分析本研究中的两份测试卷难度,其方法是将学生的测试成绩由高到低排列,高分组、低分组分别为前 27%和后 27%,试题难度与通过率有关,因此先计算高分组、低分组在此题的通过率,进而计算该题难度。

$$P_H = \frac{R}{N_H} \times 100\% \quad P_L = \frac{R}{N_L} \times 100\%$$

其中, P 表示此题的通过率, R 表示答对此题的人数。 N 表示高分组或低分组的人数。

$$P = \frac{(P_H + P_L)}{2}$$

其中, P 表示该题的难度, P_H 、 P_L 分别表示高分通过率、低分通过率。

测试卷的整体难度为测试卷全部题目难度的平均值, P 值处于 0 至 1 之间。若 $P > 0.8$, 则表示测试卷较为简单, 若 $P < 0.2$, 则表示测试卷难度较大。通常来说, 一份测试卷应该包含不同难度及一定比例的问题, p 值大于 0.8 或小于 0.2 的问题应少于 10%。

② 区分度

区分度属于试卷效度的一部分,指测试题目能区分被测试者能力的程度大小,测试卷良好的区分度能够区分出学生的能力,能有效鉴别被测者的水平^①。区分度 D 的计算公式为:

$$D = P_H - P_L$$

上述公式中, D 表示区分度, P_H 、 P_L 分别表示高分通过率、低分通过率。试卷整体的区分度为各题区分度的平均值, D 值越大表示试卷区分度越强, D 值越小表示试卷区分度越弱。

表 5-9 区分度数值表

区分度	评价标准
$D > 0.4$	很好
$0.30 \geq D \geq 0.40$	较好
$0.20 \geq D \geq 0.29$	需修改
$D \leq 0.19$	需淘汰

① 竺培梁.心理测量[M].合肥中国科学技术大学出版社.2008:74-80.

根据上述 P 值、D 值计算公式，分别代入前测及后测成绩数据，具体结果如表 5-10 所示。

表 5-10 模型意识前、后测试题难度

测试卷	试卷难度	试卷区分度
前测卷	0.5625	0.712
后测卷	0.5412	0.689

根据表 5-9 和表 5-10 数据可知，难度 $P_{前测卷}=0.5625$ 与难度 $P_{后测卷}=0.5412$ 都在 0.2~0.8 之间，区分度 $D_{前测卷}=0.712$ 与难度 $P_{后测卷}=0.689$ 都大于 0.4，难度与区分度都较为相近，且在编制测试卷时，尽可能为了确保成绩不受测试卷内容及问题问法的影响，也保证了高度一致性，因此不论从考察内容、问法、难度及区分度看，测试卷 1 与测试卷 2 的成绩可以作为检测学生模型意识情况的工具。

二、实施过程

此实验具体流程图如图 5-2 所示：

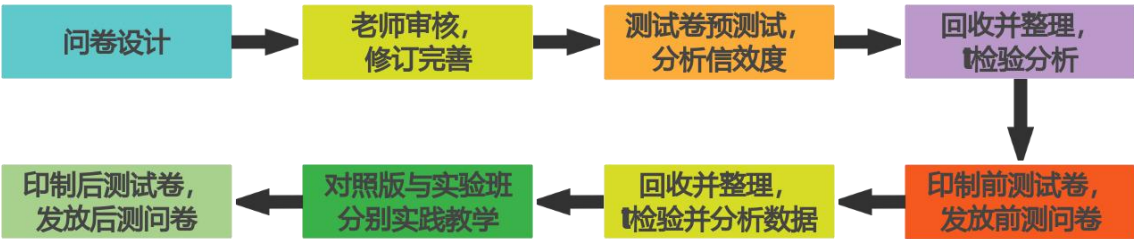


图 5-2 指向模型意识提升的小学数学习题课教学实验流程图

其可概括为三个阶段实施，如表 5-11 所示。

表 5-11 教学实验实施过程

实验阶段	实验内容	实验任务
实验前测	实验准备及前测实施	选择实验班与对照班，对两班进行测试，并对成绩进行分析。
实验实施	教学设计与教学实施	对实验班进行习题课教学设计与课堂教学。
实验后测	后测及数据分析	整理数据并进行分析，了解实验班学生模型意识的提升情况。

（一）实验前测阶段

此阶段是进行正式实验前的阶段，主要任务是对实验班与对照班的学生进行前测测试。在测试卷编制时，本研究基于前文的理论确定测试题维度初步编制试题，并在导师与实习教师的指导下进行修改与调整，形成最终的测试卷，后选择实习学校同一教师授课的两个平行班为实习班和对照班，进行前测测试，两个班级共发放 99 份测试卷，回收有效试卷 97 份，并对其数据进行分析。

（二）实验实施阶段

此阶段是正式设计与实施指向模型意识提升的习题课教学阶段，实验内容为五年级下册，实验班根据所构建的教学模式进行实践，对照班进行传统教学，在实验过程中，选择基本一致时间的课对实验班和对照班进行实践，以此减少教学时间的无关因素影响，同时在此过程中尽量保证两个班的教师、授课时长、课后作业一致，减少无关变量的影响。为了长期、逐步提高学生的模型意识，教学共实施三个月。

为了分析实施过程中对模型意识的提升过程，在此以《分数与除法的关系》习题课教学为例，展示呈现情境与问题，情境问题数学化；选择与构建模型，分享解题思路；弱化问题形式，探究问题本质三个环节的教学片段，并进行具体分析。

片段 1：【呈现情境与问题，情境问题数学化】

【呈现情境】

这周我们学习了分数与除法的关系，其实在生活中有很多这类关系。我们先来看看这样一个情境。呈现情境：五（1）班共有 17 幅书法作品参加学校的书法比赛，其中 4 幅作品从全校 255 幅参赛作品中脱颖而出获奖。

师：哪位同学想说说你得到了哪些信息呢？

生：我知道五（1）班参赛作品 17 幅、获奖 4 幅、全校参赛作品 255 幅。

师：非常棒，你有一双能捕捉数学信息的漂亮眼睛，快速找出了所有数学信息。

【提出问题】

师：我们这章学习了分数，你能根据这些信息提出有关“分数”的问题吗？

生 1：五（1）班获奖作品数是全班参赛作品数的几倍？

生 2：五（1）班获奖作品数是全校参赛作品数的几分之几？

师：看来大家都对分数都有自己的了解，而且能用数学的眼光发现生活中的数学问题。现在我们一起用所学知识解决屏幕上这两个问题。

①五（1）班获奖作品占全班参赛作品数的几分之几？

【问题数学化】

师：看了这道题，谁想说说这道题让我们算什么？

生：五（1）班获奖作品数 4 是全班参赛作品数 17 的几倍？

师：说得非常好，同学们快速将复杂的生活问题变成了简洁的数学问题，给你们点个赞！

【分析】此环节是学生将实际情境问题转化为数学问题的第一步，也是学生建立生活与数学世界桥梁的第一步。呈现情境与问题，情境问题数学化。主要是通过从现实情境中发现问题、提出问题等过程让学生建立现实生活与数学世界的关系，也是为后面认识生活中的很多问题都需要用数学解决奠定基础。因此，在教学初始阶段，先呈现了班级参加书法比赛的情境，进而让学生从中发现数学信息，发现问题并提出问题，这步便是让学生认识到生活中很多问题与数学息息相关，启发学生要有意识用数学角度观察世界，发现问题，建立生活世界与数学世界的联系；在此基础上，让学生将情境问题数学化，即去情境化，从数学角度进行思考问题。

片段2：【选择与构建模型，分享解题思路】

师：一般在做应用题时，题目中的信息有时会很繁琐，要想看清它们间的关系，我们怎么办？

生1：画线段图、列表格。

生2：写出它们之间的关系。

师：看来同学们都有自己的法宝将复杂的信息简单化，老师真佩服你们！那现在请大家用自己喜欢的方式表达其中的关系。谁愿意在黑板上为其他同学分享和解释呢？

生1：我用线段图表示两个数的关系，我发现这里问五（1）班获奖作品数4是全班参赛作品数17的几倍就是问4是17的几倍，要用除法解决，也就是 $4 \div 17$ 。

师：回答得很完整，而且用线段图的方式让这个关系更加清晰明了，有没有用不同的方式简化他们关系的同学呢？

生2：我用表达式表示它们之间的关系：五（1）班获奖作品数 $4 \div$ 全班参赛作品数 $17 =$ 几倍

师：这两位同学用两种不同的方式表达其中的关系，但是它们都得出用除法解决，那老师想请教你们，为什么用除法解决，而不用乘法呢，你能说说自己的理由吗？

生：因为要求一个数是另一个数的几倍，这种倍数关系要用除法。

师：就是说我们知道两个数或者两个量，要求一个数是另一个数的几倍，就要用除法，除法结果可能是分数，也可能是整数。那现在请同学们在练习本上列式计算，大家得出的结果是多少？

生： $4 \div 17 = \frac{4}{17}$ 。

师：所以 $\frac{4}{17}$ 是什么呢，请大家把解决过程补充完整哦！

【分析】此环节是学生自主唤醒相关知识、方法、概念、定理并将情境信息转化为图、表、表达式等分析并解决问题的过程，即教学环节中的选择与构建模型，分享解题思路。主要是加强用图、表、关系式等数学模型表述问题内部关系的意识，进而与他人分享自己的想法与思路，这与新课标中的用数学概念与方法予以解释一致。因此，在此阶段，先以“遇到复杂的信息或者想清楚了解问题内部的关系时，你有什么方法？”的问题启发学生选择图、表、关系式等简洁的数学表达方式表征问题内部关系，逐步让学生形成主动表征的意识；进而让学生通过各种表征方式了解已知信息与未知信息之间的关系，得出解决方法，并通过分享和解释的过程，提升其主动解释思路和想法的意识；最后通过“为什么用除法解决”的问题引发学生思考其与之前学的倍数关系的联系，经过思考可以得到其与之前学的整数倍数关系是同一模型。

片段3：【弱化问题形式，探究问题本质】**【寻找问题共性】**

师：我们刚才做了4个题目，请大家回顾一下这4个题目，他们有什么共同点呢？

生1：问题都与谁占谁的几分之几有关，都是倍数关系的问题。

生2：都要用到一个数 $\div$ 另一个数 $=$ 几分之几这个表达式。

生3:四个题虽然都用到了一个数÷另一个数=几分之几,但是有时候也可以把他们进行转化解决问题!

【探究问题本质】

师:同学们观察得十分仔细,经过思考将共同点都总结了出来,那这种问题我们能列举完吗?

生:不能,生活中这样的问题太多了。

师:你们能用一个字母表达式来表达这些问题共用的表达式吗?

生: $A \div B = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$)

师:这是一种什么关系呢?你能用一个图示表示这个式子吗?

生:此式子表示倍数关系,表示A占B的几分之几或者A是B的几倍。

师:单位1是谁呢?它在式子的哪个位置,在题目中又怎么识别呢?

生:单位1是B,可根据问题的问法,谁占(是)谁的几分之几来识别,单位1在的之前。

师:根据这个式子的三量关系,如果知道A和 $\frac{A}{B}$,除了用画图法,还能用什么方法算B呢?说说你的理由。

生:用除法计算,可以将这个式子看成除法算式,根据它们之间的三量关系,可得除数=被除数÷商

师:那知道B和 $\frac{A}{B}$,用什么法算A呢?说说你的理由。

生:用乘法计算,还是将这个式子看成除法算式,根据它们之间的三量关系,可得被除数=商×除数

师:看来大家对这类问题都有深刻地了解了,如果理解不清楚,我们还可以寻求线段图和分数的意义帮我们解决。

【分析】此环节是弱化问题形式,探究问题本质。主要是为了加深学生对一个模型能解决一类问题的认知与理解,将感性的认知转化为理性的认知,这与新课标中的对模型的普适性的初步感悟、知道数学模型可以用来解决一类问题一致。因此,在此阶段,先让学生对这类问题进行分析,从问题的问法、问题所用的知识、问题所用的方法等方面概括这些问题的共同点,使感性认识上升到理性认识,进而发现此类问题的数学关系是一致的,而此数学关系又可以解决一类问题,这类问题又有共同点,进而感悟其中的变与不变,不变的是问题内部关系、图示表征等,变的只是情境、步骤、已知与未知条件。

(三) 实验后测阶段

此阶段是对实验效果的检测阶段,即了解实验班学生的模型意识提升情况。在教学实施结束后,选择一节课对实验班与对照班进行测试,实验班与对照班共发放测试卷99份,有效试卷98份,在回收试卷后,根据评分标准对学生的成绩打分,通过SPSS软件了解成绩的差异性 & 实验班模型意识的具体提升情况。

第六章 指向模型意识提升的小学数学习题课教学实验数据与结果分析

一、实验数据分析

（一）实验前测数据分析

为了排除实验班和对照班学生模型意识差异性的无关变量，确保此次实验的科学性，在正式实验前对所选择的两个班级进行模型意识测评，进而通过对比与分析，了解所选择的两个班级是否符合实验对象的要求。通过测评结果来看，两个班级模型意识成绩情况基本一致。对照班人数为 50 人，实验班人数为 49 人，如表 6-1 所示为两个班级的具体情况，包括得分最大值，最小值，平均值及标准差等。

表 6-1 实验班与对照班前测数据

	个案数	最大值	最小值	平均值	标准差	中位数	平均值标准误差
对照班 (A 班)	50	21	3	14.12	4.555	15	0.927
实验班 (B 班)	49	20	3	13.86	4.484	14	0.926

由表 6-1 数据可知两个班的模型意识成绩情况：对照班最高分 21 分，最低分 3 分，全班平均分为 14.12 分，中位数为 15，标准差为 4.555，平均值标准误差为 0.927；实验班最高分 20 分，最低分 3 分，全班平均分为 13.86 分，中位数为 14，标准差为 4.484，平均值标准误差为 0.926，由此可知两个班级的模型意识成绩情况基本一致。

为了更科学、清楚地呈现两个班级模型意识成绩情况，使用 SPSS 软件对对照班与实验班学生成绩录入并进行独立样本 t 检验分析。通过独立样本 t 检验，可得出 sig 值，即两个班级的差异情况，当 sig 值 > 0.05 时，差异不具有统计学意义，即差异不显著；当 sig 值 ≤ 0.05 时，差异具有统计学意义，即差异显著。两个班级的 t 检验结果如表 6-2 所示，由表数据可知，sig(前测) = 0.758 > 0.05，因此，两个班级的模型意识成绩不存在显著性差异，可选择其作为实验班与对照班。

表 6-2 实验班与对照班前测成绩显著性 t 检验

莱文方差等同性检验		平均值等同性 t 检验							
F	显著性	t	自由度	Sig. (双尾)	平均值差值	标准误差差值	差值 95%置信区间 下限 上限		
假定等方差	0.945	0.333	-0.310	97	0.758	-0.406	0.927	-3.007	2.195
不假定等方差		-0.310	96.991	0.758	-0.406	0.926	-3.007	2.195	

(二) 实验后测数据分析

对实验班进行指向模型意识提升的小学数学学习题课教学实施，对对照班进行传统教学的习题课教学设计与实施，经过三个月的教育实践后，根据两个班测试卷 2（后测卷）的作答情况得出实验效果。

表 6-3 为两个班后测成绩情况，对照班最高分为 21 分，最低分为 4 分，全班平均分为 14.05 分，中位数为 15，标准差为 4.550，平均值标准误差为 0.921；实验班最高分为满分 28 分，最低分 6 分，全班平均分为 19.62 分，中位数为 17，标准差为 5.632，平均值标准误差为 0.779。可见，实验班与对照班学生的成绩出现了差异，且根据后测数据可知，不论最小值、最大值、平均值，实验班的成绩都较对照班好。由于在实验阶段实验班进行了指向模型意识提升的小学数学学习题课教学实施，因此实验班产生的积极效果可能就是此设计与实施产生的作用。

表 6-3 实验班与对照班后测成绩情况

	个案数	最大值	最小值	平均值	标准差	中位数	平均值标准误差
对照班 (A 班)	50	21	4	14.05	4.550	15	0.921
实验班 (B 班)	49	28	6	19.62	5.632	17	0.779

同样，为了更科学、清楚地呈现两个班级模型意识成绩差异情况，使用 SPSS 软件对对照班与实验班学生的后测成绩录入并进行独立样本 t 检验分析，并通过此数据验证此教学设计与实施的有效性，具体数据如表 6-4 所示。

表 6-4 实验班与对照班后测差异性 t 检验

莱文方差等同性检验				平均值等同性 t 检验					
F	显著性	t	自由度	Sig. (双尾)	平均值差值	标准误差差值	差值 95%置信区间 下限	上限	
假定等方差	1.132	0.290	3.191	97	0.002	3.856	1.208	1.458	6.254
不假定等方差		3.197	94.723	0.002	3.856	1.206	1.461	6.251	

由表 6-4 数据可知, $\text{sig}(\text{后测})=0.002<0.05$, 表示两个班级的成绩差异显著, 这也说明两个班级的成绩渐渐出现差异, 且从表 6-4 可看出是实验班产生积极影响。

实验结果表明, 指向模型意识提升的小数学学习题课教学实施对学生模型意识的提升有积极的影响。

(三) 实验数据具体分析

为了更清晰、更具体了解实验班学生模型意识各层次的具体情况和进步情况, 在此对数据进行分类、汇总并进行横向、纵向的比较。根据前文所分析的模型意识分析框架四层次、四个题目, 将对照班与实验班后测、实验班的前后测的各题目、各层次人数百分比分别对比与分析, 了解其具体情况。

1. 后测对照班与实验班数据对比分析

由前文可知前后测试卷的难度、内容、区分度基本一致, 且前测两个班级模型意识成绩无明显差异, 因此可以将后测对照班与实验班学生的各题、各层次情况进行整理与汇总, 得到表 6-5, 进而了解较对照班而言, 实验班模型意识的各层次是否有提高, 主要在哪些层次有提高。

表 6-5 后测对照班与实验班模型意识情况

	识别(D1)		表征(D2)		解释(D3)		列举(D4)	
	对照班	实验班	对照班	实验班	对照班	实验班	对照班	实验班
第一题	100%	100%	95%	96%	91%	93%	54%	60%
第二题	80%	91%	73%	72%	64%	62%	15%	33%
第三题	92%	95%	55%	67%	48%	63%	15%	41%
第四题	71%	66%	50%	55%	35%	41%	10%	22%
平均占比	86%	88%	68%	73%	59%	65%	24%	39%

从表 6-5 可知,对照班与实验班的四个模型意识层次都存在差异,差异较大的有表征(D2),相差 5%;解释(D3),相差 6%,差异最明显的是列举(D4),对照班有 24%名学生达到此层次,而实验班有 39%名学生达到此层次。

这说明通过三个月的指向模型意识提升的习题课教学实施,实验班学生的模型意识水平有所提高,且主要在表征(D2)、解释(D3)和列举(D4)三个层次提高。

2.实验班前后测数据纵向分析

将实验班学生的前后测各题、各水平情况进行整理与汇总,得到表 6-6,进而了解实验班学生哪个水平的百分比有所提高,具体提高了多少。

表 6-6 实验班前、后测模型意识情况

	识别(D1)		表征(D2)		解释(D3)		列举(D4)	
	前测	后测	前测	后测	前测	后测	前测	后测
第一题	100%	100%	94%	96%	90%	93%	55%	60%
第二题	90%	91%	69%	72%	59%	62%	16%	33%
第三题	94%	95%	53%	67%	47%	63%	16%	41%
第四题	67%	66%	41%	55%	33%	41%	12%	22%
平均占比	88%	88%	64%	73%	57%	65%	24%	39%

从表 6-6 可知,在模型意识的四个水平中,人数百分比增长幅度较大的有表征(D2),平均人数百分比由 64%增长至 73%;解释(D3),平均人数百分比由 57%增长至 65%;列举(D4),平均人数百分比由 24%增长至 39%,增长幅度最大的是列举(D4),增长了 15%。

这说明通过三个月指向模型意识提升的习题课教学实施,学生的模型意识有所提升,其中,实验班约有 7%的同学从识别(D1)提升到 D2、D3 或 D4;约有 8%的同学从表征(D2)提升到 D3 或 D4,约有 15%的同学从解释(D3)提升到 D4。

二、实验结论与反思

(一) 实验结论

经过指向模型意识提升的小学数学学习题课教学实施,本研究通过测量工具测试卷 1 和测试卷 2 的具体数据了解学生解决问题的情况和模型意识的提升情况,从测试数据中得出以下结论:

1.建构的教学模式对学生的模型意识水平二——表征有所提升

在实验前对实验班与对照班的模型意识进行前期测评,根据测评结果和数据分析发现两个班级的模型意识成绩大致相等,不存在显著差异,但是在实验班进行为期 3 个月的指向模型意识提升的小学数学学习题课教学实施后,再次对两个班进行后期测评,根据测评和数据分析发现:首先,后测两班成绩出现显著性差异,且实验班成绩比对照班成绩好;其次,通过对实验班前后数据纵向对比发现,实验班后测成绩比前测成

绩好。通过对各水平的人数占比进行分类汇总、对比分析后发现,后测实验班($D2_{\text{后测实验班}}=73\%$)达到表征水平的人数占比较对照班($D2_{\text{后测对照班}}=68\%$)高5%;经过纵向分析,后测实验班($D2_{\text{后测实验班}}=73\%$)达到表征水平的人数占比较前测实验班($D2_{\text{后测对照班}}=64\%$)高9%。

2.建构的教学模式对学生的模型意识水平三——解释有所提升

在前测数据不存在显著差异,后测数据呈现显著差异的基础上,为了了解实验班的学生在哪些水平有所提升,对各水平的人数占比进行分类汇总。经过对比分析,后测实验班($D3_{\text{后测实验班}}=65\%$)达到解释水平的人数占比较对照班($D3_{\text{后测对照班}}=59\%$)高6%;经过纵向分析,后测实验班($D3_{\text{后测实验班}}=65\%$)达到解释水平的人数占比较前测实验班($D3_{\text{后测对照班}}=57\%$)高8%。可见,本研究所建构的教学模式对学生的模型意识水平三——解释有所提升。

3.建构的教学模式对学生的模型意识水平四——列举有所提升

在前测数据不存在显著差异,后测数据呈现显著差异的基础上,为了了解实验班的学生在哪些水平有所提升,对各水平的人数占比进行分类汇总,经过对比分析,后测实验班($D4_{\text{后测实验班}}=39\%$)达到列举水平的人数占比较对照班($L4_{\text{后测对照班}}=24\%$)高6%;经过纵向分析,后测实验班($D4_{\text{后测实验班}}=39\%$)达到列举水平的人数占比较前测实验班($D4_{\text{后测对照班}}=24\%$)高15%。可见,本研究所建构的教学模式对学生的模型意识水平四——列举有所提升。

(二) 实验反思

通过实验后的测评与数据分析,本研究发现所建构的模式对学生的模型意识产生了积极影响,但是教学实践中仍存在问题需要改进。

1.教学实验时长较短,学生的模型意识提升不明显

此教学实验进行了三个月,时间较短,通过数据可知后测实验班学生的模型意识较实验前和对照班有所提升,但效果并不明显。究其原因,模型意识是一种主动用数学方法、方式、思想解决问题、解释现象等的心理过程,它与短期可习得的程序性知识、陈述性知识有所差异,更适合长期提升,而三个月的实验时长不足以大幅度提升学生的模型意识,因此,还需教师长期进行模型意识教学,进而提升学生的模型意识。

2.指向模型意识的习题课教学模式需完善与修正

本研究以模型意识的内涵等理论为立足点建构指向模型意识提升的习题课教学模式,并基于此模式与各种问题设计习题课教学、实施教学,但是在教学实践的过程中,发现所建构的模式由于未考虑实践中的问题而呈现出一些不足,首先,未明确各阶段应该分配的时间,导致在实际教学时有时出现教学时间过长;其次,习题数量没有明确规定,给教师所留的弹性较大,需要教师根据知识点的难易程度和问题的复杂程度灵活调节问题数量。

第七章 指向模型意识提升的小学数学习题课的教学建议

新课标在旧课标的基础上强调数学课程应承担立德树人、发展核心素养的任务，模型意识作为小学阶段数学重要的核心素养之一，对提高学生数学应用意识、数学学习自信心、树立正确数学学习观等有重大意义。通过此次教学实践与研究发现指向模型意识提升的小学数学习题课教学模式对提高学生的模型意识有效果，但是通过实践与测评发现在教学过程中还有需要注意与调整之处，因此，针对此模式的不足提出以下建议。

一、挖掘与关注情境资源，加强学生对同类问题的感知

在指向模型意识提升的小学数学习题课教学的创编新问题，感悟模型普适性环节中，学生所列举的多是常见的生活问题，而其他情境的却极少，且当前很多作业和课堂上出现的问题以基础知识与基本技能为主，出现的问题多是同一类的，机械的情境，不存在教育意义，也无法提高学生的积极性，甚至有的习题全部以无情境的机械形式呈现，这无疑越来越让学生觉得数学是乏味的、无用的数学题。而本研究的教学对象是小学学生，他们的求知欲较强，对实际生活中的有趣现象和问题会产生比较浓厚的探究、解决兴趣，且模型意识中的情境多种多样。因此，教师应引导学生关注多样的情境，提高其积极性，深刻了解数学模型的适用。

第一，教师需提升自己的模型意识，在日常生活中时常思考这个问题是否与数学的哪些知识有关，是否能作为提升学生模型意识的珍贵资源，并不断积累，长此以往，学生也会有意识地在生活中用数学知识解释现象、解决问题，同时，在得到数学模型后也会思考这个模型能解决生活中的哪些问题；第二，教师需关注问题情境的多样性，不仅需关注日常生活中的问题，还需关注科学情境中、社会情境的问题，这便需教师多积累科学知识，并从中寻找有关知识的问题，从而让学生感受模型的一致性、感受数学应用的广泛性。

二、关注学生对模型的认知与应用，逐步形成自主意识

首先，由于固化的教学流程和步骤，教师在教学过程中偶尔会关注问题本身，而忽视对学生模型意识的提升，从而导致教学效果不高；其次，本研究的目的是提高学生的模型意识，即在遇到实际问题或者在遇到数学模型时进行相互转化的心理倾向，要想提升学生的模型意识，学生需认识、了解线段图、表、关系式、数学解题方法等数学模型的价值，而在教学模式实施过程中，学生对这些数学模型并没有深入地认识，也未认识到其重要性，这便使教学效果大打折扣。因此，要想最大限度发挥教学模式的效果，要将数学模型显性化，既要让学生了解这些知识、数学表达方式、解题方法等是什么，知道其怎么用。

第一，在新授课教学或习题课教学的数学化环节，要及时引导学生回忆学过的数学表征方式，鼓励学生用多种方式将情境数学化，帮助学生理解题意并养成多种表征

的习惯，同时教师需在此过程中让学生感受其优点及价值；第二，在实际问题解决结束后，要引导学生思考与反思数学模型在各类情境、各类问题的普遍适用性，让学生逐渐形成透过现象看本质、解题抓住关键的意识；第三，在反思结束后要总结这类模型问题的关键信息所在，进而让学生越来越爱用各种数学方式表征、分析与解决问题，对学数学越来越有自信，发现数学的乐趣与规律。

三、注重变式问题的阶梯性，循序渐进提升模型意识

在实际教学过程中，首先，问题出现的顺序会对学生的问题解决有一定影响，杂乱的顺序会影响学生的深度思考；其次，情境单一、问题单一、难易程度忽高忽低的问题不仅不会提升学生的模型意识、提高自信心与问题解决能力，反而会使其对数学失去兴趣，甚至产生厌恶情绪，而有跨度、有坡度的问题会发散学生思维、激发学生兴趣、提高问题解决能力、提升模型意识。因此教师在上此类课前，必须精心选择与设计相关习题，逐步提升学生的模型意识。

首先，教师要以相关知识目标为基础，筛选课本的、习题册的各类变式、各种情境问题，并根据自己的已有经验创编各种情境的相关问题；其次，分析这些问题的问法和所考察的问题形式，并根据难易程度、复杂程度和常规程度对其进行排列，在课堂上从简至难分别呈现；最后，提供给学生充足的时间和机会让他们思考、反思，发现问题的本质和模型，从而让学生在各种各样的情境、各种难度的问题中感受模型的一致性，进而循序渐进提升学生唤醒模型、应用模型的意识。

四、引导学生自主归纳，加深对模型的普适性感悟

学生在前三个环节已经多次经历感知问题、表征问题、分析问题及解决问题的过程，但是这些问题却有不同，包括原问题与各种变式问题，学生对这些问题的认知还处于分散的点状，对这些问题之间的关系认知还处于表象的感知阶段，无法深刻理解其模型的一致性及这类问题的本质。然而，对其深入理解，感受数学模型的普适性还需要从量变到质变，脱离表象，看到本质，这便需要学生对这些变的问题蕴含的不变归纳、总结出来，即由表象抽象出模型，加深对模型的普适性感悟。

首先，教师在习题课教学前应该根据各个步骤的要求做好时间规划，分配好各个步骤的时间防止出现讲不完的问题而导致自主归纳概括的时间不充足；其次，在此环节，教师要引导学生自主回忆所解决问题的过程和具体步骤，从而自主归纳和概括出这些问题的本质；最后，采取多种方式进行，提高学生积极性，可以让学生先自主思考，再合作交流的方式进行。

第八章 指向模型意识提升的小学数学习题课教学的研究结论与讨论

一、研究结论

本研究是基于对模型意识及数学习题课教学的理论, 指向模型意识提升的小学数学习题课教学可行性分析的基础上, 构建了指向模型意识提升的小学数学习题课教学模式, 并采取准实验研究方法检验此教学模式的效果, 本研究通过理论分析与实践研究得到以下成果:

(一) 厘清了模型意识的内涵及其在小学数学习题课教学提升的可行性

首先, 本研究结合各学者、旧课标及新课标的阐述, 将模型意识定义为在数学思维的引导下, 对实际情境问题与数学模型主动互相转化的积极状态, 通过现实问题的转化与解决、用数学模型表达与解释、列举生活中的同模型问题等呈现出的与数学模型有关的行为表现, 并从心理和行为角度形成其定义; 其次, 基于各学者及自己的分析形成其过程表现; 最后, 在此基础上, 从习题可以为模型意识的提升提供载体; 习题课教学的问题解决过程可以为模型意识的提升提供路径; 习题课的实施过程符合模型意识的提升特征三个方面分析其可行性, 为建构指向模型意识提升的小学数学习题课教学模式奠定理论基础。

(二) 建构了指向模型意识提升的小学数学习题课教学模式

本研究在模型意识内涵、过程表现的基础上, 基于教学模式五个基本要素确定并分析了指向模型意识提升的教学理念、教学目标、教学程序及教学评价。其中, 五步教学程序分别为呈现情境与问题, 实际问题数学化; 构建数学模型, 交流解题思路; 解决变式问题, 应用模型延伸; 弱化问题形式, 探究问题本质; 自主创编新问题, 感悟模型普适性, 并提出在此教学实践中, 需要学生、教师及环境三方面的支持。

(三) 构建了模型意识的测评工具并验证了此教学模式的有效性

为了达成教——学——评的一致性, 首先, 本研究在分析模型意识的内涵及其过程表现的基础上, 以此为测试卷编制维度编制测试题; 其次, 根据新课标对模型意识的学业标准要求及其他学者对模型意识水平的划分, 完善各水平并进行赋值, 利于测试卷的评分; 再次, 通过克隆巴赫系数、KMO 系数、巴特利特球形度检验、一致性分析及因子分析等检测了测试卷的信效度, 进而提供给教师一种模型意识的测评工具, 帮助教师了解学生的模型意识现状; 最后, 通过测评工具了解此教学模式提升了学生的模型意识。

二、研究讨论

2022 年新课标将旧课标中的模型思想划分为小学模型意识及初中的模型观念, 此变化更关注每个学段的侧重点。小学模型意识更关注学生注重用数学知识、数学方法、数学方式等解释生活现象、解决生活问题, 从一系列问题的解决中感悟数学模

型在生活中的普适性。因此,各学者也开始展开对数学模型意识的内涵研究、教学实践研究、策略研究及测试研究。

(一) 本研究从心理学和外显性表现两方面确定模型意识的内涵

在模型意识的内涵方面,章勤琼及陈肖颖学者认为其主要包含结构模型和过程建模,其形成需要经历识别情境、情境数学化、解决同类问题三步,具体表现为识别、表征、抽象及概括四个层次^①;费岭峰认为模型意识更侧重建模过程,关注模型解释及模型应用^②;崔铭允是个体在解决现实问题与数学模型之间的敏感反应,突出其主动的心理倾向和行为倾向^③。由此可知,章勤琼、费岭峰学者更关注从建模过程论述模型意识的内涵,崔铭允则更关注从心理学角度论述其内涵。

而本研究模型意识则从心理学角度及其外显性表现两个角度进行界定,首先从心理学角度来看,其指对情境问题与数学模型相互转化的主动的心理倾向,其包含四个心理状态,分别为认知、抽象、唤醒、感悟,而这些心理状态又有其外显性表现,分别对应理解、转化、表达及列举。

(二) 本研究关注在教学中以多种方式提升学生的模型意识

在提升模型意识的教学实践方面,张维国和王立都提出通过多元表征提升学生的模型意识,王维国提出通过线段图、表格、算式等方式表征并解决问题^④;王立所提出用图式、表格、言语等具象和抽象表达相结合的方式表征并解决问题^⑤;邱玲和赵世龙则关注变式问题的价值,邱玲提出从过程性变式问题出发,让学生在变式问题的解决中感受其中的变与不变,进而感知模型能解决一类问题,进而主动迁移所学模型^⑥;赵世龙提出情境创设、挖掘本质、变式应用、循序渐进四个策略^⑦;崔铭允提出教师要多引导总结、打破学生思维定势、通过思维训练提升学生的表征意识、加强教师对相关课例探讨及反思、建立模型时多引导学生探究发现规律等。

首先,本研究所界定的数学模型即各种表达方式,也即多元表征,包括图、表、关系式等,在所建构教学模式第一环节的实际问题数学化过程中就需要学生用自己喜欢的、适切的方式表征问题;其次,本研究也关注到变式问题对模型意识的价值,突出此“类”问题的重要性,通过 A_1 、 A_2 、 A_{12} 等各种同类变式问题让学生感性认识此类问题的不变与变,并将其以系统的、可操作的形式进行呈现,利于教师在习题课教学中提升学生的模型意识进而提升学生的模型意识。虽然说本研究注重通过多样的方式提升模型意识,但难免也会有不足,如会对某些方式较为注重,而忽视其他方式,无法

① 章勤琼,陈肖颖.小学数学模型意识的内涵、表现与教学——兼论核心素养的表现性目标[J].课程.教材.教法,2024,44(01):106-113.

② 费岭峰.发展小学生模型意识的内涵及其教学思考[J].教学月刊小学版(数学),2024,No.686No.689(Z1):15-18.

③ 崔铭允.小学“数与代数”中模型意识的提升策略研究[D].华中师范大学,2023.

④ 张维国.在多元表征中促进模型意识的主动形成——以“租船”一课为例[J].小学教学(数学版),2024,(01):37-40.

⑤ 王立.经历多元表征,发展模型意识——以人教版教材三年级上册“归一问题”应用练习为例[J].教学月刊小学版(数学),2024,(Z1):26-29.

⑥ 邱玲.过程性变式应用于小学数学模型意识提升的实践研究[D].浙江师范大学,2023.

⑦ 赵世龙.小学数学模型意识提升常态化实施的研究[J].中小学课堂教学研究,2024,No.91(02):16-20.

对所有的方式都深入应用。

（三）本研究构建了完整的模型意识测评工具

在模型意识的测评维度及层次划分方面，当前相关研究还较少。章勤琼和陈肖颖将模型意识分为四个层次，分别为层次 1：识别，需要学生识别信息，提出问题、层次 2：表征，需用画图或语言描述表征问题、层次 3：抽象，需要学生能用算式解决并解释、层次 4：概括，需要验证与推广模型，并通过乘法分配律相关问题进行评价；邱玲从情景了解、问题转化、模型迁移、自主变式四个维度编制试题，并对各维度进行赋分^①。

而本研究的模型意识测试卷维度是基于对模型意识过程表现的分析而确定的，同时又与评分标准息息相关，分别为问题的认知与理解、模型的抽象与转化、模型的唤醒与表达、模型的感悟与列举，这便与新课标所提倡的教——学——评一致。但是其也有不足，如各维度的划分不够详细，后续需要细化其维度。

综上所述，首先，本文所界定的模型意识内涵更加全面，从心理学及外显性表现两个方面进行论述，并分析了其过程表现，深化对模型意识的理解；其次，为了在习题课教学中有效提升学生的模型意识，所建构的教学模式过程不仅包含了其他学者所提出的教学策略和实践方式，而且将其以系统的、步骤化的形式呈现出来，更利于教师实践；最后，根据模型意识的过程表现及水平确定了测试卷利于模型意识的评价，整体形成了教——学——评的一致性。

^① 章勤琼,陈肖颖.小学数学模型意识的内涵、表现与教学——兼论核心素养的表现性目标[J].课程.教材.教法,2024,44(01):106-113.

结语

本研究在梳理国内外模型意识理论及其教学实践研究的基础上，第一，深度了解模型意识的内涵及研究现状，进而阐释模型意识的内涵并基于心理学和数学模型角度确定其内涵及过程表现，对指向模型意识的小学数学学习题课教学进行了理论探讨；第二，基于模型意识的过程表现、习题课教学原则等确定了教学模式的五个基本要素，构建了指向模型意识提升的小学数学学习题课教学模式；第三，基于模型意识维度编制模型意识测试卷；第四，通过准实验研究及学生的模型意识测评卷情况检验此教学模式的效果；第五，针对教学实践情况与学生测试卷情况提出教学建议。

但是此研究还有一些不足可继续研究与改进。首先，教学实践时间较短。因为研究者自身的时间及客观条件的限制，教学实践实施的次数有限，虽然根据测试结果可以发现相比较对照班，实验班学生的模型意识有所提高，但是还有提升的空间；其次，教学对象有限。教学模式只在五年级进行了实践及实验研究，因此，此教学模式的说服力不是特别强，但是在测试后根据 SPSS 的数据发现实验班的模型意识的确有所提升，因此此教学模式的可行性是值得肯定的；最后，构建教学模式的基础不够深入。由于本研究国外文献资源和资料的匮乏，对英文文献梳理还不足，对模型意识的分析还不够深入，因此导致教学模式的构建还不够深入，还有一定的进步空间。

基于上述不足，本研究期望在以下几个方面改善：首先，加大指向模型意识提升的小学数学学习题课教学实践学段，将五年级扩展至更多的学段、年级、学校甚至地区；其次，由于研究者自身的当前的知识储备及客观因素，对指向模型意识提升的习题课教学模式建构、测评还需进一步修订与完善；最后，由于实习时间有限等客观因素的影响，教学的实践时间不足，学生的模型意识提升还不够明显，应长期进行实践，并不断反思，完善模式。

参考文献

标准类:

- [1] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2022年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2022.
- [2] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2011年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2011.
- [3] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2017.

著作类:

- [1] Kaiser G, Blum W, Ferri RB, Stillman G. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling(ICTMA 14)[M]. Dordrecht:Springer, 2011:37-40.
- [2] 张思明著,中国教育报刊社人民教育家研究院组编.张思明与中学数学建模[M].北京:北京师范大学出版社,2015:186-191.
- [3] Giordano FR, Weir MD, Fox WP. A first course in mathematical modeling[M].3thed. [S.L]: Brooks/Cole, 2003:26-31.
- [4] Henning H,Keune M.Levels of modelling competencies[M]Modelling and applications in mathematics education.Springer,Boston,MA,2007:225-237.
- [5] 喻平.数学教学心理学[M].北京:北京师范大学出版社,2010:289-301.
- [6] 波利亚.数学的发现[M].北京:北京科学出版社,1987:112-113.
- [7] 罗增儒.数学解题学引论[M].西安:陕西师范大学出版社.2001:77-79.
- [8] 张景中,张奠宙.数学习题教学研究[M].上海:上海教育出版社,2010:116-118.
- [9] 吴亚萍.中小学数学教学课型研究[M].福州:福建教育出版社,2016:371.
- [10] (美)罗伯特·J.马扎诺,(美)黛布拉·J.皮克林.培育智慧才能:学习的维度教师手册[M].盛群力译.福州:福州教育出版社,2015:58.
- [11] 邱兴华,张良朋.怎样用尝试教学法上课[M].南昌:江西人民出版社,2016:134.
- [12] 徐利治,郑毓信.数学模式论[M].南宁:广西教育出版社,1993:7-11.
- [13] 瞿葆奎,施良方.“形式教育”论与“实质教育”论[M].上海:华东师范大学出版社,1988,(1):9;(2):27.
- [14] 戴再平.数学习题理论[M].上海:上海教育出版社,1996:10.
- [15] 徐英俊.现代教育理论[M].哈尔滨:东北林业大学出版社,2002:113.
- [16] 陈琦.教育心理学(第三版)[M].上海:高等教育出版社.2020年版:151-156.
- [17] 弗赖登塔尔.数学教育再探--在中国的讲学[M].刘意竹、杨刚等译.上海:上海教育出版社.1999.
- [18] 中国大百科全书出版社编辑部.简明不列颠百科全书(第十卷)[M]北京:中国大百科全书出版社,1985:543.
- [19] 徐利治.数学方法论选讲[M].湖北:华中师范大学出版社,2000:11-13.

- [20]王宪昌主编.数学思维方法(第二版)[M].北京:人民教育出版社,2010:186.
- [21]史宁中.数学思想概论:第5辑:自然界中的数学模型[M].长春:东北师范大学出版社,2012:53.
- [22]竺培梁.心理测量[M].合肥中国科学技术大学出版社.2008:74-80.
- [23]史宁中,曹一鸣.义务教育数学课程标准(2022年版)解读[M].北京:北京师范大学出版,2022:28+186-201.

期刊类:

- [1]沈丹丹.开展数学建模活动 促进小学教学改革[J].宁波大学学报(教育科学版),2002(05):119-121.
- [2]齐磊.浅谈小学数学教学中发展学生模型思想的提问策略[J].小学教学研究,2016(29):74-76.
- [3]袁红.尝试数学建模,发展学生数学应用能力——从西方国家小学数学建模教学的一则案例谈起[J].外国中小学教育,2009(05):56-61.
- [4]Schukajlow S, Kaiser G, Stillman G. Empirical Research on Teaching and Learning of Mathematical Modelling:a Survey on the Current state-of-the-art[J].Springer Berlin Heidelberg, 2018,50(1-2):5-18.
- [5]喻平.数学核心素养评价的一个框架[J].数学教育学报,2017,26(02):19-23+59.
- [6]Ludwig M,Xu B.A Comparative Study of Modelling Competencies Among Chinese and German Students[J].Journal fur Mathematik-Didaktik,2010,31(1):77-97.
- [7]李玉光.试论缄默知识在拟定解题计划过程中的运用[J].集美大学学报(教育科学版),2008(04):68-71.
- [8]何月丰.谈小学数学练习课的目标定位[J].小学数学教师,2017(03):71-74.
- [9]苏桂芹,李秀珍.小学数学练习课六步教学模式的探索[J].小学数学教育,2015(09):16-17.
- [10]李晓梅;李雅杰;王井.回归概念本质 渗透模型意识——“路程、时间与速度”教学设计与说明[J].小学数学教育,2021,(19):41-44.
- [11]王祥表.利用模型思想 提升模型意识——一道选择压轴题的命制与说题过程[J].中学数学,2017,(10):37-38.
- [12]李艳琴;宋乃庆.小学低段数学符号意识的培养策略研究[J].数学教育学报,2016,25(05):28-31.
- [13]喻平.数学核心素养评价的一个框架[J].数学教育学报,2017,26(02):19-23+59.
- [14]徐皓.试论远程开放教育中教学模式的研究视点和建构维度[J].中国远程教育,2004,(05):37-43+79-80.
- [15]曲艺.教学模式的构成要素分析[J].教育探索,2005(05):39-40.
- [16]田曼.核心素养培养视角下的小学数学教学评价策略研究[J].天天爱科学(教育前沿),2022,(06):102-104.
- [17]应心韵.基于新课程标准的小学数学教学评价实践与思考[J].理科爱好者(教育教学),2021,(05):187-188.

- [18]章勤琼,陈肖颖.小学数学模型意识的内涵、表现与教学——兼论核心素养的表现性目标[J].课程.教材.教法,2024,44(01):106-113.
- [19]费岭峰.发展小学生模型意识的内涵及其教学思考[J].教学月刊小学版(数学),2024,Z1:15-18.
- [20]张维国.在多元表征中促进模型意识的主动形成——以“租船”一课为例[J].小学教学(数学版),2024,No.746(01):37-40.
- [21]王立.经历多元表征,发展模型意识——以人教版教材三年级上册“归一问题”应用练习为例[J].教学月刊小学版(数学),2024,Z1:26-29.
- [22]赵世龙.小学数学模型意识提升常态化实施的研究[J].中小学课堂教学研究,2024,91(02):16-20.

学术论文类:

- [1]丁丹平.小学数学教学中渗透模型思想的现状及策略研究——以第二学段为例[D].杭州师范大学,2021.
- [2]刘兴旻.基于模型思想的小学乘法教学研究——以《乘法运算定律》为例[D].中南民族大学,2021.
- [3]Greefrath G, Vorholter K. Teaching and Learning Mathematical Modelling[D]. ICME-13 Topical Surveys. Cham: Springer, 2016.
- [4]陈灵.第二学段学生数学建模能力的调查研究——以南京市 A 小学为例[D].南京师范大学,2017.
- [5]程安琪.小学高年级学生数学建模能力水平的调查研究——以南京市 L 小学为例[D].南京师范大学,2020.
- [6]范思琪.小学生数学建模能力的现状调查——以南京市 N 小学高年级为例[D].南京师范大学,2019.
- [7]陈聪.小学六年级学生数学建模能力的调查研究[D].上海师范大学,2021.
- [8]陈钰.高中数学习题课教学的有效性研究[D].贵州师范大学,2015.
- [9]朱坤燕.高中生数学解题反思能力的培养研究[D].南京师范大学,2017.
- [10]关秀玉.小学数学高年级练习课设计与实施研究[D].东北师范大学,2012.
- [11]戴素琴.高中数学习题课教学的课堂研究[D].上海师范大学,2012.
- [12]宋玉涵.基于数学模型思想的“简易方程”教学设计研究[D].扬州大学,2022.
- [13]邓佩佩.基于开源硬件的小学创客教学模式的构建与应用研究[D].四川师范大学,2019.
- [14]崔铭允.小学“数与代数”中模型意识的提升策略研究[D].华中师范大学,2023.
- [15]邱玲.过程性变式应用于小学数学模型意识提升的实践研究[D].浙江师范大学,2023.

网址:

- [1] OECD 2004. Learning for Tomorrow's World First Results from PISA 2003 [EB/OL]. (2000)[2023-10-15]. <http://www.pisa.oecd.org>.

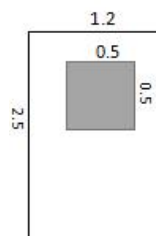
- [2] 搜狗百科.“数学模型”词条[EB]/[OL].(2022-3-13)[2023-4-14].<https://baike.baidu.com/item/%E6%95%B0%E5%AD%A6%E6%A8%A1%E5%9E%8B/1376909>.2023.10.16.
- [3] 中华人民共和国教育部.教育部关于全面深化课程改革落实立德树人根本任务的意见[EB]/[OL].(2014-4-8)[2023-4-14].http://www.moe.gov.cn/srcsite/A26/jcj_kcjcgh/201404/t20140408_167226.html.

附录

模型意识测试卷 1(前测卷)

问题 1: 市中心小学教室的门中间都有一块玻璃, 如图所示(单位: 米)。现在学校打算给五 2 班教室的一面门刷漆(窗户部分不刷漆), 则

- ①刷漆部分的面积有多少?
- ②看到这道题, 你想到了哪些知识, 具体是什么, 你的解题思路是什么?
- ③你能编一个用上述式子解决的生活中的其他问题吗?



问题 2: 上周新疆和甘肃两省举办了小学生知识竞赛, 下面是两省两名代表学生的五场竞赛得分情况。

地区 次数	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次
新疆(分)	98	94	95	94	X
甘肃(分)	90	91	93	95	97

- ①如果按照平均分计分, 且新疆学生代表获胜, 那新疆最后一次比赛至少得多少分?
- ②看到这道题, 你想到了哪些知识, 具体是什么, 你的解题思路是什么?
- ③你能编一个用上述式子或所用知识解决的生活中的其他问题吗?

问题 3: 小明爸爸的体重比体内的血液多 35kg。研究发现, 成人体重约是体内血液的 13 倍, 那么

- ①爸爸的体内有多少千克血液?
- ②你的解题思路是什么?
- ③你能编一个用上述式子解决的生活中的其他问题吗?

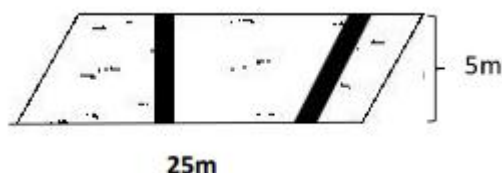
问题 4: 某公司准备举办一场年会, 需要在正方形舞台的四个边都安装 10 盏灯, 且要求每个顶点都有 1 盏灯, 那么

- ①电工师傅一共要买多少盏灯?
- ②你能结合数学方式(图、表、表达式等)解释你的解题思路吗?
- ③你能编一个用上述式子或所用知识解决的生活中的其他问题吗?

模型意识测试卷 2（后测卷）

问题 1：一块平行四边形的公园（公园高为 5m）中间有两条宽 1m 的小路，其余地方为草坪。

- ①这个公园需要铺多大的草坪？
- ②看到这道题，你想到了哪些知识，具体是什么，你的解题思路是什么？
- ③你能根据你所列的式子编一个生活中的其他问题吗？



问题 2：全红婵是我国国家跳水队女运动员，2020 年第一次参加东京奥运会就获得了女子 10 米跳的金牌。这场比赛她前四跳就已经得到了 367 分，第五跳后平均分达到 93 分，那么

- ①她第 5 跳得分是多少？
- ②看到这道题，你想到了哪些知识，具体是什么，你的解题思路是什么？
- ③你能根据你所列的式子或所用知识编一个生活中的其他问题吗？

问题 3：小红爸爸脚长比身高少 150cm。已知，成人的身高约是脚长的 7 倍，那么

- ①爸爸脚长多少？
- ②你的解题思路是什么？
- ③你能根据你所列的式子编一个生活中的其他问题吗？

问题 4：张大伯准备在承包的正方形池塘四周种树，池塘边长为 60 米，每隔 6 米种一棵，且要求四个角上各种一棵，那么

- ①张大伯需要买多少棵树苗？
- ②你能用数学方式（图、表、表达式等）解释你的解题思路吗？
- ③你能根据你所列的式子或所用知识编一个生活中的其他问题吗？