

从中美小学生数学学习的多元表征 看数学教学^①

李 静

(廊坊师范学院数信学院,河北廊坊 065000)

[摘要]中美小学生学习成就得益于不同表征的使用。多元表征利于学生数学思维和创新能力的发展。在中国数学课堂教学中,应该以直观表征引入数学概念,多元表征变式加深数学理解,引导学生自己创建多元表征。

[关键词]中国;美国;小学生;多元表征;变式;数学教学

中图分类号:G623.5 文献标识码:A 文章编号:1003-7667(2013)08-0083-05

多元表征是研究课堂教与学的重要概念。^[1]表征既是数学的一部分,又是理解数学的一个手段,^[2]也是促进学生对数学理解的教学手段。考察中美小学生数学学习的多元表征使用情况,寻找符合中国实际的多元表征教学策略,可以更好地进行新课程数学教学。

一、中美小学生数学学习的多元表征

中国小学生在国际数学几次测试中取得较好成绩,形成了“中国学习者的悖论”现象,迄今为止,一直是国际数学教育研究关注的热点。^[3]国际数学教育家蔡金法对国际数学测试结果的深入研究发现,^[4]中国学生在“过程受限”问题(process-constrained problems,指那些通过实施标准算法就能解决的问题)表现很好,但在“过程开放”问题(process-open problems,指通常不能通过一种算法就可以解决,而是需要对问题情境作新的探索的问题)中不如美国学生。研究表明,我国学生问题解决的常规能力优于美国,而问题解决的创新能力

力不及美国。进一步的观察分析认为,^[5]美国学生喜欢使用图示的、表格的、言辞的等直观、具体的表征和与之相应的直接策略,突出非形式化的数学理解,而中国学生擅长使用符号表征和与之相应的抽象策略,过分强调形式化的数学抽象。这从以下中美六年级《比例问题》测试案例^[6]可以看出。

问题:有一些孩子和一些比萨饼,7个女孩平分2个比萨饼,3个男孩平均分1个比萨饼,每个女孩分得比萨饼与每个男孩分得比萨饼一样多吗?解释或展示你是如何找到答案的。

90%中国学生如下解答:

$$\frac{1}{3} = \frac{7}{21}, \frac{2}{7} = \frac{6}{21}, \frac{7}{21} - \frac{6}{21} = \frac{1}{21}$$

或者分数化为小数: $\frac{1}{3} \approx 0.33, \frac{2}{7} \approx 0.29, 0.33 - 0.29 = 0.04$,

就可知道 $\frac{1}{3}$ 大于 $\frac{2}{7}$ 。

80%美国学生如下解答:

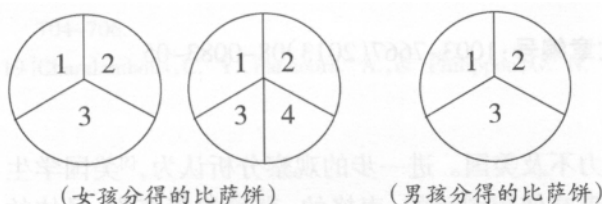
^①全国教育科学规划教育部重点课题“基于多元表征学习的初中代数变式教学模式研究——‘以学论教’改革实验”(GOA107019)的阶段性成果。学院博士基金项目:代数表征与变式教学整合研究(LSZB201006)。

作者简介:李静(1966-),河北张北人,廊坊师范学院数信学院副教授,博士研究生。

解法一:3个女孩分1个比萨饼,另外3个女孩分另1个比萨饼,这6个女孩中的每个女孩都与3个男孩中的每个男孩分得同样多的比萨饼。但是有1个女孩没有分得比萨饼,所以说,每个男孩分得的比萨饼更多。



解法二:3个女孩分1个比萨饼,剩下的4个女孩分1个比萨饼,剩下的4个女孩每人分得的比萨饼要少于每个男孩分得比萨饼,所以男孩分得比萨饼更多。



多数中国学生采用符号表征的一般算法,比较直接地给出答案,显得严谨规范。多数美国学生采用直观形象表征,给出许多具体算法,显得简洁明了,甚至有些趣味。可以看出,中国学生在问题解决时,采用被动的套用公式,模式化倾向较浓;而美国学生在问题解决时,主动地创建个人喜爱的方法,个性化倾向较多。我们可以说,形式化的套用和变式练习有助于学生的基础知识和基本技能的学习,但是如此下去,或多或少地泯灭了数学概念理解和问题解决朴实的、生动的、具体的思维过程以及此过程中的思维火花,不利于学生创新思维的发展。具体的、形象的教具和表达利于引起学生的学习兴趣,利于理解数学内容,但是如此下去,不经过具体材料到抽象概念的建构学习思考,肯定不利于学生的数学知识结构完善,以及更好地运用知识解决问题。综合来看,多元表征(言语表征、图表表征、数字表征和符号表征等)及其策略的学习可以取中美两国所长,以充分发展学生的数学思维 and 创新能力。

二、小学数学多元表征的教学

从以上案例可以看出,学生数学思维 and 创新能力发展离不开多元表征的学习。数学学习规律表现为从具体材料到抽象概念,再到具体问题解决的一系列过程,体现为非形式化到形式化,再到更广的非形式化验证和运用。数学内容理解表现为由直观表征到符号表征转化、以及符号表征与直观表征的联系,中间交织着言语表征。学生对数学内容的理解程度表现在自己创建多元表征形式的过程中。教师将自己对数学内容的理解、信念和观点等的教学表征转化为学生易于接受的多元表征,以此发展学生的多元表征,帮助学生学会数学思考,培养学生创新意识,这应成为数学教学的重要策略。

1.以直观表征引入数学概念

在小学数学教学中,直观表征表现为具体实物、模型、图形、表格等可视材料或教具成为小学生学习的基本辅助材料,形式多样和丰富多彩的情境表征,可以激发学生学习数学的热情和兴趣,也可以促进学生的概念性理解。教师首先针对所学内容,发掘或者创设一些不同类型的直观表征,帮助学生形成数学概念的知觉理解。如分数 $1/2$ 的认识,可设计其面积表征、集合表征、线段表征、言语表征和运算表征等,如:

(1)面积表征



(2)集合表征



(3)线段表征



(4)运算表征

1个苹果分给2个人,可以用 $1 \div 2$ 表示(读作二分之一)

教师引导学生认识 $1/2$ 的不同表示,给以直观形象的认识,从概念涉及的外延上启发学生对 $1/2$ 的意义思考。这样的概念引入从广度上为概念理解打下了基础,也激发了学生的学习兴趣。

在直观表征使用上,美国教师在数学教学上过分依赖直观表征,经常使用具体的、可操作的教具或模型。当然,使用这些教具或模型的目的显然

不仅仅是为了追求数学课堂教学的趣味性,更多地是帮助学生理解抽象的数学内容。要真正理解所学内容,教师应让学生明确具体与抽象之间的关系,让学生认识到所学的数学内容是具体模型的抽象,是认知的一种飞跃。只有通过思维,才能把握到事物抽象的本质。

具体直观表征的使用有助于促进学生思维从具体到抽象发展,但是过多的使用则有可能妨碍学生对数学内容的深层次理解,使学生的理解和思维停留在低层次水平上。

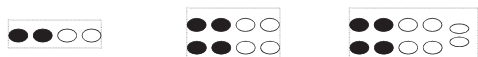
2.多元表征变式加深数学理解

美国 NCTM 在 2000 年的《学校数学课程标准与原则》中指出,“不同的表征将导致不同的思维方式”,^[7]它建议学生不仅应该学会在问题解决过程中选择、使用与转化各种数学表征,而且应能够在概念的不同表征之间建立广泛的联系。就像德雷费斯(Dreyfus)和艾森伯格(Eisenberg)(1996)指出的,“任何表征将能够表达出部分但不是全部的信息,凸显其中的一些方面,而隐藏另一些”。^[8]在数学教学上,创设或操作多元表征来适合知识和思维,可以帮助学生更快地形成数学抽象表征,达到数学本质理解。恰当的多元表征变式可以起到如此作用。如对 $1/2$ 的理解,可设计或变式其面积表征、集合表征、线段表征、言语表征和运算表征等,如:

(1)面积表征变式



(2)集合表征变式



(3)线段表征变式



(4)运算表征变式

A. 1 个苹果分给 2 个人,可以用 $1 \div 2$ 表示(二分之一)。

B. 小玉有 3 元,小伟有 6 元,小玉是小伟的几倍?表示为 $3:6=1/2$ 。

C. 一个月饼分给 2 个人,每个人吃 $1/2$ 。

(注:每一个表征的变式中,前两个是肯定变式,后一个是否定变式。)

教师引导学生对 $1/2$ 的不同表征进行变式,给以抽象本质的认识,从概念内涵上启发学生对 $1/2$

的意义思考。这样的概念理解从深度上为概念的巩固找到了捷径,也培养了学生的数学抽象能力。

在表征变式使用上,中国教师在数学教学上过分依赖符号表征变式,经常使用概念本质属性的标准变式和非标准变式。当然,使用这些变式的目的显然不仅仅是为了追求课堂教学的趣味性,为变式而变式,而是更多地帮助学生理解抽象的数学内容。多元表征变式^[9]就不单是针对概念进行本质变式,而应该针对概念形成的有关概念意图(多元表征)的每个表征进行变式,达到多元表征的有效转化和联系,由此形成学生丰富的图式,便于学生理解数学和运用数学。

多元表征中的每一个表征都是学生学习的知识,都有其实质内容,只不过表达形式不同而已。通过多元表征的变式,可以解决背景资源不足和种类不够丰富的困难,达到知识组织的完善、有序,利于知识的提取和加工。但是,过多的使用则有可能增加学生对数学内容的理解负荷,使学生的理解和思维停留在混沌状态上。

3.引导学生自己创建多元表征

案例测试表明,通过实际切比萨饼来解决 $1/2$ 的相关问题,几位中国学生做得不够理想。由此看来,中国学生自己构建数学表征的机会较少。学生构建自己的表征应该从直观的形象表征开始,应多给中国学生机会,让他们从实际的、直观的角度构建自己对数学概念、关系和法则的表征,深化或完善抽象表征理解。

开始时,教师应用具体表征或实际操作来鼓励学生运用自己的策略来理解数学或解决问题。学生的策略可以是教师教过的,也可以是教师没有教过的。当然,随着学生数学概念的发展,要求教师帮助他们形成更多概括性的表征和策略,从而发展他们对数学的抽象思维和概念性理解与运用,从中发展他们的创新能力。以下介绍美国教师引领学生创建多元表征解决问题的案例^[10]改编,以给中国教师提供教学参考。

问题:如图 1,2 个足球、1 顶帽子的价钱一共是 80 美元,1 个足球、2 顶帽子的价钱一共是 76 美元,问每个足球和每顶帽子的价格各是多少美元?



图 1

(1)教师引领学生用图形表征进行求解

解法一：

利用所给图 1,如果把两组图形加起来,就可以发现 3 个足球和 3 顶帽子的价钱一共是 $80+76=156$ 美元。那么 1 个足球和 1 顶帽子的价钱一共是 $156 \div 3=52$ 美元,然后从图 1 的第一行可以得到,1 个足球的价格为 $80-52=28$ 美元,从而 1 顶帽子的价格是 24 美元。

解法二：

从图 2 可以看到,从图 2 中的第一行到第二行,把 1 个足球换成 1 顶帽子,总价钱减少了 4 美元,如果再把第二行的足球换成帽子,就可得到第三行图形,即包含 3 顶帽子,第三行的价钱也应该比第二行少 4 美元,这样就得到 3 顶帽子的价钱是 72 美元。进一步就可以分别求得足球和帽子的价格。

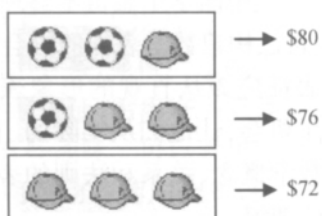


图 2

评注:解法一解题策略,来源于图形表征的结构观察,进行图形化归或化简运算后,得出答案。解法二解题策略,也是对图形比较或变式的结果,方法更加简便。此法利用了图形的信息,把握了各个量之间的关系,激发了学生学习兴趣,培养了学生创新能力。两种解法类似于古代中国算筹求解方程的方法,给人以数学美的感受。

(2)教师引领学生用表格表征进行求解

解法三:根据已知,可以构造下面的表 1,从 80 美元到 76 美元找出相差 4 美元的规律,进而完成表格中带括号的数据 84 美元和 72 美元,可以得到足球和帽子的价格。

表 1

足球数量	3	(84)			
	2		80		
	1			76	
	0				(72)
		0	1	2	3
	帽子数量				

评注:该解法利用各种“现实量”或“可能量”列表发现规律,得到答案。这种探索性求解对于特殊问题的特殊解答,对培养学生发现问题、分析问题和解决问题能力的意义重大。当然得到的结果还需代回原题进行检验。这种解法内含着直线图解的思想,给人以许多启发。

(3)教师引领学生用符号表征进行求解

解法四：

设足球的价格是 x 美元,帽子的价格是 $(80-2x)$ 美元,由题意得：

$$x+2(80-2x)=76$$

$$\text{解得 } x=28$$

$$\text{当 } x=28 \text{ 时, } 80-2x=24$$

解法五：

设足球的价格是 x 美元,帽子的价格是 y 美元,由题意得：

$$\begin{cases} 2x+y=80 \\ x+2y=76 \end{cases}$$

$$\text{解得 } x=28, y=24$$

评注:直观图形或表格求解,也离不开数学概念法则和思想,对培养学生创新意识有非常好的作用,但仍需要走向符号表征的解决,体会数学概念和法则的直接解决问题的优越性,把握数学思想方法的真谛,培养学生的数学思维能力。但是,符号表征解决问题时也是离不开直观表征的辅助理解。经过这样的引导训练,学生真正体会了多元表征之间的联系和转化作用。

这就是说,无论哪种表征求解问题,实质上都是数学模型或模式在起作用,只不过是某种表征更容易显现模式特征,即数学关系或结构更加直观、直接,而这种表征利于这个年龄段的学习和思考,可以达到我们的素质教育目标,这就是我们常说的多元表征之间的联系和转化的旨意所在。利用多元表征目的是适合学生的学习方式,帮

助学生建构自己的数学。为此,教师引导学生创建自己对数学概念、法则公式和观念的表征,甚至进行问题解决时的自我表征的发挥,既利于巩固或者加深数学知识的思考,又可培养学生积极的学习情感和态度。应特别说明的是,在教师创设一定活动情景下,鼓励学生创新多元表征,以此进行小组活动,可以真正达到新课改要求的数学教学活动水平。

参考文献:

- [1]Goldin,G.A.(1998).Toward Assessment Framework for School Mathematics.In R.Lesh & S.J.Lamon(Eds.), Assessment of Authentic Performance in School Mathematics (pp.64~89).AAAS Press.
- [2]Ball,D.L.(1993).Halves, and twos:Constructing and Using Representational Contexts in Teaching Fractions. In T.P. Carpenter, E. Fennema, and T.A. Romberg (Eds.), Rational Numbers:An Integration of Research (pp. 328~375).Hillsdale, NJ :Erlbaum.
- [3]范良火,朱雁.从大型国际数学比较研究的视角看:华人在数学方面的表现如何?[A].范良火,黄毅英,蔡金法,李士琦.华人如何学习数学[M].南京:江苏教育出版社,2005.3.
- [4]Cai,J.(2000a).Mathematical Thinking Involved in U. S. and Chinese Students' Solving Process-constrained and Process-open Problems. Mathematical Thinking and Learning: An International Journal, 2, 309~340.
- [5]Cai,J.(2004).Why do U.S. and Chinese Students Think Differently in Mathematical Problem Solving? Exploring the Impact of Early Algebra Learning and Teachers' Beliefs. Journal of Mathematical Behavior, 23(2):133~165.
- [7]National Council Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Virginia :NCTM.361.
- [8]Dreyfus & Eisenberg, T.(1996).On Different Facets of Mathematics Thinking. In R.J. Sternberg and T. Ben-Zeev (Eds.), The Nature of Mathematics Thinking(pp.253~284). Hillsdale, NJ :Erlbaum.
- [9]李静.基于多元表征的初中代数变式教学研究[M].长沙:湖南师范大学出版社,2012.49.
- [6][10]蔡金法.中美学生数学学习的系列实证研究[M].北京:教育科学出版社,2007.258~270.

Mathematics Teaching Based on Multi-Representations of Chinese and U. S. Primary School Mathematics Learning

LI Jing

Abstract: Chinese and U. S. pupils' learning achievements benefits from the use of different representations. Multi-representations can be conducive to the development of students' mathematical thinking and innovation ability. In mathematics classroom teaching involved multi-representation, mathematical concepts should be introduced through visual representation, mathematical understanding should be deepened through multi-representation's variation, students should be guided to create multi-representations for themselves.

Key words: multi-representations, variation, mathematics teaching

本文责编 晓 洁