

小学生解决真实情境问题的调查研究*

——基于 PISA 数学素养的视角

陈敏 杨玉东

〔摘要〕基于 PISA 数学素养框架情境分类和其他关于情境的研究,构建了分析数学问题情境的 4 个维度,即背景素材特征、语境呈现方式、语境干扰程度、任务挑战水平。对公开的 11 道 PISA 数学素养题目进行选编并用情境框架编码分析后,对某地 3 所学校的 89 名六年级学生测试后发现:(1)学生解决背景素材熟悉问题的表现优于背景素材不熟悉问题;(2)语境呈现方式不是影响学生解题的主要因素,但特殊文本对学生造成一定困扰;(3)语境干扰程度对学生解题有较明显的影响;(4)学生解决探究型任务的能力与本身的知识储备不相称。

〔关键词〕问题情境 数学问题 问题解决 PISA 数学素养

DOI:10.16194/j.cnki.31-1059/g4.2016.09.011

PISA 数学素养测评特别关注学生“在各种各样现实情境中表达、运用和解释数学的个人能力”,^[1] PISA 试题最重要的一个特征是问题的情境性。PISA 使用“context”作为“情境”的英文用词,可以理解为情境是数学问题的背景资料,它刺激学生的问题意识,提供分析问题、解决问题的线索。^[2]当学生面对现实问题时,情境是如何影响学生的认知的?小学生解决真实情境问题表现如何?教学需要作出哪些改进?我们希望对“情境”做更多的探索和研究。

一、相关研究综述

我们以主题词“数学问题情境+PISA”在中国知网搜索,得到 2014~2015 年期间发表的相关期刊文章 131 篇,发现大部分文章(124 篇,占 94.7%)集中于对数学问题情境功能价值和创设策略的讨论,虽有一些具体案例和反思,但无论是实践的广度还是理论的深度,都没有超越此前吕传汉等对中小学“数学情境与提出问题”的系列教学研究。^{[3][4]}此外,这些文章过于笼统,对情境只有一种整体的关照,却没有

深入思考影响情境使用效果的内在要素,比如《上海教育科研》前期的一篇研究发现:教师对情境的创设和运用缺少自觉性。^[5]

只有为数不多的文章对数学问题情境的分析比较深入且具有实证基础。鲍建生在做中英初中数学课程综合难度比较研究时,依据 PISA2012 将数学情境按与学生的生活距离由近及远分为四类(个人的、教育或职业的、公共的、科学的),^[6]并增加了“无背景”一类。^[7]解丹针对高一学生的调查发现学生解决科学情境问题的表现优于公共生活情境,^[8]与 PISA 的预设不符,主要原因是学生参与社会实践活动非常少,对公共生活情境反较科学情境更为陌生,从而给我们一个启示:不仅要考虑客观的素材类别,还要考虑学生的主观熟悉程度。

邢强等就情境“熟悉程度”对学生解题的影响开展研究,^[9]把应用题按“完全熟悉、不熟悉实体、不熟悉时空框架、不熟悉实体间关系”分类,发现不熟悉的实体对儿童辨别和表征问题情境没有影响,不熟悉的时空框架和不熟悉的实体间关系则显著干扰了

* 项目基金:全国教育科学规划重点课题《数学问题情境创设有效性研究》(课题编号 GIA117010)。

儿童对情境模型的构建并导致了较差的表征成绩。

张夏雨认为,给问题加入现实背景会增加问题的难度,^[10]而这种难度包括两个方面:表征复杂性和知识基础。可以理解为:情境本身具有一定的认知挑战,外显的是它的表征方式,内隐的是它所联系的数学概念、运算和推理等等。

张泽庆提出从3个角度对数学问题情境进行分析研究,^[11]即:内容的角度、呈现方式的角度和有无干扰条件的角度。通过对重庆地区365名四年级小学生进行测试发现,前两个角度对学生解题的影响不显著,而有干扰条件的情境明显比无干扰条件的情境引发了更多的错误和失败。

陈志辉提出了一个包含六类情境(无情境、个人情境、教育情境、职业情境、公共情境、科学情境)、三个维度(数学特征水平、表征特征水平、任务特征水平)的数学问题情境水平分析框架。^[12]他使用该框架进行中美教材习题比较,得出了一系列具有针对性的结论,是在我们所见材料中对情境分析较为全面的研究。

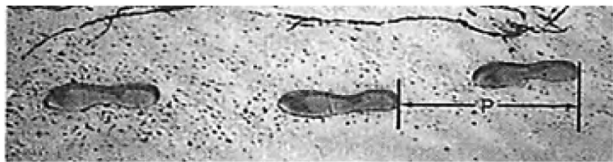
二、研究设计

1. 分析框架

本研究更关注学生在解决数学问题时,情境的构成对于认知所产生的正向或负向影响。同时因为是实践取向的研究,所以因素分析不能太复杂,要便于操作。基于前述文献研究并结合教学经验,我们尝试构建了新的数学问题情境分析框架(见表1)。

2. 测试内容及编码过程

测试题从公开的PISA测评题中选择,并根据小学生特点做适度改编,共11大题(限于篇幅,本文略去)。以下面一道改编自PISA公开试题的“脚印”题为例,简要说明编码过程。



上图是某男士步行时的脚印,P指两个连续脚印的脚跟之间的距离,叫做步幅。研究发现,对于男士来说,他们的步幅p(以米作单位)和每分钟走的

表1 数学问题情境分析框架与对应编码

维度划分	对应编码	层次描述
背景素材特征 (A)	A0	无背景(直接呈现为数学形式)
	A1	问题的素材来自学生个人生活(包括居家、学校、社区生活)为主的现实背景,学生较为熟悉
	A2	问题的素材来自成人社会生产和生活(包括特定行业、科学研究领域)为主的现实背景,学生不一定熟悉
	A3	问题的素材来自抽象的数学研究领域为主的人为构造背景,学生可能熟悉、也可能不熟悉
语境呈现方式 (B)	B1	连续文本:由自然段构成的文本,自然语句的句子是文本的最小单位。
	B2	非连续文本:与连续文本形式不同,不是自然语言的语句为最小单位,而是包括数学符号、图形、图表、图示等非自然语言为主的文本
	B3	混合文本:由连续文本和非连续文本共同构成的单篇文本
	B4	多重文本:由几篇相对独立的文本构成,这些文本可以是连续的,也可以是非连续的,文本与文本之间的关系比较松散或不明显,甚至可以互相矛盾、信息冗余等
语境干扰程度 (C)	C1	数学特征明显,情境易剥离,信息简单,所要使用的数学工具是明确的,可以直接提取或者仅需一步推算
	C2	数学特征不太明显,情境和数学的融合度较高,解决问题需要的信息足够、数学工具不太明显,需要两步及以上的推理和运算
	C3	数学特征不明显,情境和数学的融合度很高,信息可能有冗余或不足,需要的数学工具不明显,需在理解的基础上合理选择有关的数学工具、方法,涉及两步及以上的推理和运算,解题过程和答案都可能是开放的
任务挑战水平 (D)	D1	情境中的任务要求指向识记型任务,如从图表中直接读取信息、根据给定公式进行推算等
	D2	情境中的任务要求指向理解型任务,包括常规建模,简单变式问题的解决等
	D3	情境中的任务要求指向探究型任务,对陌生的或全新的情境建模,提出问题、提出观点,对策略和结果进行反思等

步数n之间存在着一个公式 $\frac{n}{p} = 140$ 。问题:(1)如

果小勇哥哥每分钟行走70步,那么他的步幅大概是多少?(2)小罗知道自己的步幅是0.8米。请算一算他每分钟能走多少米?

应用前面提出的数学问题情境分析框架,对问题(1)进行编码。首先从背景素材特征看,步幅和步数关系的研究,学生不一定熟悉,记为A2;再看语境呈现方式,有图有文字,记为B3;然后评估语境干扰程度,题中有明确的计算公式,情境易剥离,记为C1;最后界定任务挑战水平,是简单代数推算,记为D1。这样,这道题目的编码为A2B3C1D1。

利用上面示例的步骤,对所有题目的问题情境做出编码(如表2)。

表2 测试题目的情境分析编码结果汇总

题号	情境编码	题号	情境编码
练习一, 1	A1B3C1D1	练习二, 1	A2B3C2D2
练习一, 2 (1)	A1B1C2D2	练习二, 2 (1)	A2B3C1D1
练习一, 2 (2)	A1B1C2D2	练习二, 2 (2)	A2B3C2D2
练习一, 3	A2B1C3D3	练习二, 3	A2B1C2D2
练习一, 4	A1B3C2D3	练习二, 4	A2B3C2D2
练习一, 5 (1)	A2B3C1D1	练习二, 5	A2B1C3D3
练习一, 5 (2)	A2B3C1D1	练习二, 6	A2B4C3D3

3. 测试对象与过程

测试对象为某城区3所学校的89名六年级学生:其中30名来自民办实验学校,30名来自公办实

验学校,29 名来自公办普通学校。考虑到测试时间不能过长,分 2 次进行(分别为练习一、练习二),每次 30 分钟。测试时向学生说明为研究所用,要求学生尽可能详细地记录解题的过程。

三、测试结果

1. 总体情况

将本次测试中所有题目的回答情况汇总在表 3 中,并与 PISA 国际测试中的正确率做了比较,初步发现:即使是小学生群体,他们解题通过率也普遍高于已知的 PISA 国际测试通过率,中国学生的解题优势可见一斑。

表 3 六年级学生解决真实情境问题通过率一览表

通过情况	空白 (%)	错误 (%)	完全或基本正确 (%)	PISA 国际测试正确率 (%)	
题号					
练习一	1	9.0	4.5	86.5	——
	2 (1)	1.1	14.6	84.3	46%
	2 (2)	9.0	22.5	68.5	12%
	3	6.7	36.0	57.3	11%
	4	7.9	36.0	56.2	≈51%
练习二	5 (1)	32.6	11.2	56.2	——
	5 (2)	33.7	32.6	33.3	——
	1	4.5	49.4	46.1	<20%
	2 (1)	9.0	13.5	77.5	36%
	2 (2)	9.0	60.7	30.3	20%
	3	1.1	39.3	59.6	——
4	2.2	32.6	65.2	31%	
5	0	58.4	41.6	28%	
6	13.5	49.4	37.1	——	

注:①基本正确是指整体思路正确,但有一些细节错误,如计算错误、书写错误等,这类错误在 PISA 阅卷中只要表现为理解正确一般都归为正确。②部分题目未查到 PISA 国际测试通过率。

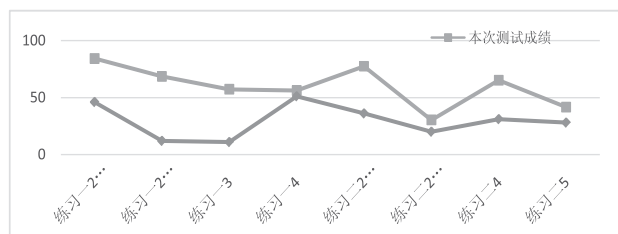


图 1 本次测试成绩与 PISA 测试成绩比较(部分试题)

2. 情境对小学生解题的影响

我们分别从本文提出的情境分析的四个维度,即背景素材特征、语境呈现方式、语境干扰程度、任务挑战程度,来呈现对学生解题的影响结果。

(1) 背景素材特征对解题的影响

学生解决背景素材熟悉问题的表现优于背景素材不熟悉的问题。A2 型问题中通过率超过 70% 的只有 1 道,即前述练习二第 2 题(1),主要原因是这道

题目几乎没有“数学化”的要求,因此,尽管背景素材较陌生,但对学生来说却是不需要考虑的。

表 4 不同背景素材特征问题的通过率比较

A1 型问题通过率	A2 型问题通过率
73.9%	50.4%

(2) 语境呈现方式对解题的影响

测试表明,小学生解读常规数学图表的能力与解读自然文句的能力相差不大,但应对特殊文本存在困难。例如:一道有关刹车的问题(见图 2)中,两个小问题的通过率都比较低(56.2%和 33.3%),空白率较高(32.6%和 33.7%),访谈发现主要原因是学生从未遇见过这种螺旋形的统计图表,不能有效读取其中的数据。

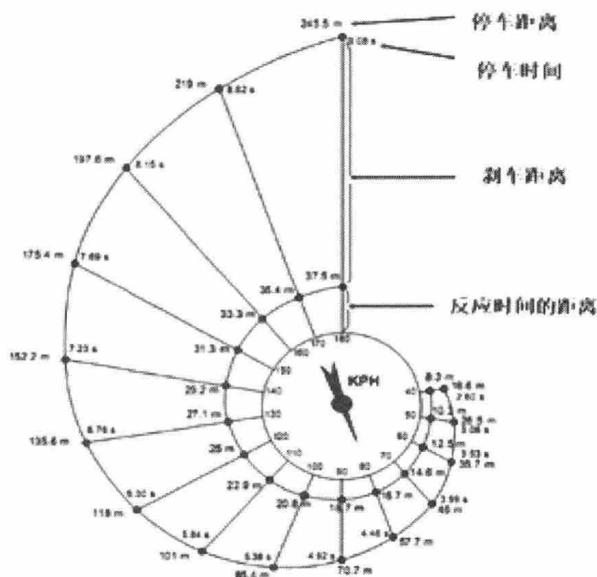


图 2 “刹车”问题中呈现的图示

表 5 不同语境呈现方式问题的通过率比较

B1 型问题通过率	B2 型问题通过率	B3 型问题通过率	B4 型问题通过率
62.3%	——	56.4%	37.1%

(3) 语境干扰程度对解题的影响

语境干扰程度对学生解题有明显的影响。其中 C1 型问题通过率比 C2 型问题通过率高 23.4%,并且是 C3 型问题通过率的约 1.8 倍。进一步分析卷面,发现语境的开放性对学生的干扰最大。例如:一道测试题目要求学生估计一个尺寸为 100 米×50 米的长方形场地最多可容纳多少观众,其背景信息(场地的大小、形状、门票售罄、歌迷们都站着等)的数学含义不明确,解决这个问题需要找出文本中没有给

出的、但可以根据生活常识假设和推断出来的信息,学生的通过率仅为 41.6%。

表 6 不同语境干扰程度问题的通过率比较

C1 型问题通过率	C2 型问题通过率	C3 型问题通过率
82%	58.6%	45.3%

(4)任务挑战水平对解题的影响

随着任务挑战水平的提高,学生解题的成功率下降,D1 型问题通过率比 D2 型问题高 23%,比 D3 型问题高 33.9%,学生解决常规问题(D1、D2)的平均通过率大约是解决非常规问题(D3)通过率的 1.35 倍。D3 型问题共有 4 道,其中两道为全新情境建模,平均通过率 49.5%;两道为反思和说理,平均通过率 46.7%,这说明只有不到一半的学生能在挑战型任务中提出有逻辑的想法。

表 7 不同任务挑战水平问题的通过率比较

D1 型问题通过率	D2 型问题通过率	D3 型问题通过率
82.0%	59.0%	48.1%

四、结论与建议

1. 结论

不同的情境要素对解题有不同性质和不同程度的影响。本次测试表明:

第一,在背景素材特征方面,熟悉的背景素材能在一定程度上支持学生分析和解决问题,而陌生或抽象的背景素材则会增加问题的挑战性。

第二,语境呈现方式不是影响学生解题表现的主要因素,但对现实中使用的一些特殊图表,以及混合文本,学生缺少有效的分析方法。

第三,语境干扰程度和任务挑战水平联系紧密,是影响学生解题的两个关键因素。学生解决情境与数学高度融合的挑战型任务存在明显困难,表现出与其自身具有的知识技能水平不相称。

2. 建议

第一,在教学中尽可能引入来自现实生活的真实情境

使用真实情境能够使数学和现实建立联系,帮助学生获得数学学习的现实感,形成恰当的数学观和数学学习观,从而培养“在现实社会中遇到问题时,能够顺利激活其具有的数学知识和数学能力去解决问题,并作出有理有据的数学判断和决策”的公

民。^[15]

第二,在教学中情境的使用要重点培养学生的“数学化”能力

数学化,即学生把现实世界抽象问题到数学世界,应用数学知识和技能解决问题后再回到现实世界中去解读的过程。学生的“数学化”包括三个方面:表征问题情境为数学问题,运用数学概念、事实、程序和推理,阐释、运用、评估数学结果到现实情境。^[13] 97%的 PISA 数学素养测试题都是有真实情境的,^[14] 这些题目与学生的现实和未来高度融合,值得借鉴。

第三,在教学中有意识地选择不同层次的数学任务情境

首先,在背景素材方面,新知引入和建构阶段可选用学生熟悉的素材内容作为问题载体,以帮助学生理解新概念、新规则;而作为拓展性练习,则宜设置一些不太常见的、其他专业领域的现实背景素材,以深化数学概念与原理的理解及灵活运用。其次,在语境呈现方式方面,提倡开展数学阅读活动,选择采用不同文本形式呈现的与数学相关的绘本、故事、新闻、百科等,开阔学生的眼界,帮助他们积累处理非标准文本的经验。然后,在语境干扰程度方面,在聚焦某一数学概念、数学结构的学习阶段,需要一些情境易剥离、可替换的数学问题;在数学知识的应用阶段,教师可学习和借鉴 PISA 测评题,提高情境和数学的融合度,特别是可以增加一些结构开放的问题,加大“干扰程度”,提高学生分析和处理信息的能力。最后,在任务挑战水平方面,除了保持目前较为扎实有效的理解型任务的教学外,需要适当增加探究型任务,不应局限于求出一个结果、总结一类算法,更要重视为学生提供提出观点、反思策略、讨论结果的机会,提高他们思维的批判性和创造性。

参考文献:

- [1]OECD.PISA 2015 Draft Mathematics Framework. March 2013, p5. <http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft%20PISA%202015%20Mathematics%20Framework%20.pdf>
- [2]徐星.PISA 数学测试样题[J].上海教育,2013,(12):99~105.
- [3]吕传汉,汪秉彝.论中小学“数学情境与提出问题”的数学学习[J].数学教育学报,2001,10(4):9~14.
- [4]吕传汉,汪秉彝.再论中小学“数学情境与提出问题”的数学学习[J].数学教育学报,2002,11(4):72~76.

(下转第 54 页)

育考试成绩”“停止考生参加相关教育考试”为行政处罚的前提下,被处罚考生如果不服,其有权寻求法律救济应当是毫无疑问的。依据《行政复议法》和《行政诉讼法》的相关规定,相对人不服行政处罚,可以申请行政复议或提起行政诉讼。我国的行政复议制度和行政诉讼制度已比较健全,法律规定也比较具体,考生不服处罚决定依法寻求法律救济不存在法律上的障碍,本文对此不作赘述。

我们这里要探讨的是,复议和诉讼的程序复杂,耗时较长,对于停考处罚尚不至于因为审限问题而影响考生获得有效救济,但对于取消考试资格和考试成绩的处罚,考生若通过复议和诉讼寻求救济,则难免时过境迁,救济程序还没走完,考试或招生工作已经结束,该如何解决此问题?我们注意到,《国家教育考试违规处理办法》设置了考试违规处理的复核制度,该《办法》第27条规定:“考生或者考试工作人员对教育考试机构做出的违规处理决定不服的,可以在收到处理决定之日起15日内,向其上一级教育考试机构提出复核申请;对省级教育考试机构或者承办国家教育考试的机构做出的处理决定不服的,也可以向省级教育行政部门或者授权承担国家教育考试的主管部门提出复核申请。”《办法》第28条规定,复核单位应在30日内作出复核决定。上述“违规处理决定”包括考试行政处罚决定,具体到取消考试资格和考试成绩的处罚,如由市级教育考试机构作出处罚决定,则考生可在15日内向省级教育考试机构申请复核,复核机构应在30日作出复核决定。这

种程序简便、处理较迅速的复核制度,对于不服取消考试资格和成绩的考生寻求救济,是有显著价值的。当然,如考生的请求未获复核机构的支持,还可以申请复议和提起诉讼,以获得事后救济。

注释:

- ①2015年8月29日第十二届全国人民代表大会常务委员会第十六次会议通过,自2015年11月1日起施行。
- ②2015年12月27日第十二届全国人民代表大会常务委员会第十八次会议通过,自2016年6月1日起施行。
- ③2012年1月5日教育部令第33号修改公布。
- ④《教育部关于做好2016年普通高校招生工作的通知》(教学[2016]3号),2016年2月26日教育部发布。
- ⑤2006年12月29日第十届全国人民代表大会常务委员会第二十五次会议修订,自2007年6月1日起施行。
- ⑥1999年6月28日第九届全国人民代表大会常务委员会第十次会议通过,自1999年11月1日起施行。
- ⑦1998年3月6日国家教育委员会第27号令公布。

参考文献:

- [1]李孝猛.行政许可撤销行为的法律属性[J].华东政法学院学报,2005,(3):43~47.
 - [2]徐晓明.行政许可撤销制度研究[J].行政法学研究,2008,(4):61~66.
 - [3]陈韶峰,朱卫国.论国家教育考试舞弊行为的行政处理[J].江苏高教,2013,(4):32~35.
 - [4]罗豪才,湛中乐.行政法学[M].北京:北京大学出版社,2006:75~76.
- [陈韶峰 上海师范大学教育学院 200234]

(上接第49页)

- [5]杨玉东,张波.教师运用数学问题情境教学的潜在观念与理论倾向[J].上海教育科研,2014,(11):54~56.
- [6]陆璟.PISA测评的理论和实践[M].上海:华东师范大学出版社,2013.
- [7]鲍建生.中英初中数学课程综合难度的比较研究[M].南宁:广西教育出版社,2009.
- [8]解丹.问题情境的设置对高中生数学问题解决的影响研究[D].首都师范大学,2013.
- [9]刑强,单永明,黄荷艳.文本信息熟悉度和难度对儿童数学应用题解题的影响[J].广东大学学报(自然科学版),2013,12(4):91~95.
- [10]张夏雨.基于关系——表征复杂性模型的有背景问题难度研究[J].数学教育学报,2010,19(3):46~49.

- [11]张泽庆.数学问题情境对小学生解决问题能力的影响研究[D].西南大学,2011.
 - [12]陈志辉.中美两国初中数学课程问题情境水平比较研究——以函数内容为例[D].上海师范大学,2014.
 - [13]王鼎.PISA数学测评核心能力运用启示[J].外国中小学教育,2014,(2):11~16.
 - [14]周慧,蔡春霞.PISA2012数学素养测试分析框架及例题分析[J].课程与教学,2015,(5):36~42.
 - [15]OECD:PISA 2012 Mathematics Framework.pdf[EB/OL].http://www.oecd.org/Dataoecd/8/38/46961598.pdf,2010-11-30.
- [陈敏 浙江省新思维教育科学研究院 310003;
杨玉东 上海市教育科学研究院 200032]