第 30 卷第 6 期
2021 年 12 月
数学教育学报
JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION
Vol.30, No.6
Dec., 2021

初中数学教科书中“几何直观”的设计类型及原则

顾继玲[1]，章　飞[2]

（1．南京师范大学 教师教育学院，江苏 南京　210097；2．江苏第二师范学院 课程与教学研究所，江苏 南京　210013）

摘要：几何直观兼具认识论和方法论两方面的教育价值．初中数学教科书中几何直观的类型有直观表征、直观分析、直观解释和直观发现．初中数学教科书几何直观的设计应遵循以下原则：准确性，既是知识工具更是能力素养；整体性，兼顾内容和类型避免出现偏差；渐进性，问题表述的类型和图形的明晰程度要有层次；反思性，要有反思性的问题和活动．

关键词：初中数学；教科书；几何直观；类型；原则

中图分类号：G632.3　文献标识码：A　文章编号：1004–9894（2021）06–0059–05

引用格式：顾继玲，章飞．初中数学教科书中“几何直观”的设计类型及原则[J]．数学教育学报，2021，30（6）：59–63.

1　问题提出

“几何直观”是《义务教育数学课程标准（2011 年版）》提出的在数学课程中应当注重的十个核心概念之一，《高中数学课程标准（2017 年版）》也将“直观想象”列为 6 个学科核心素养之一，“直观想象素养整合了空间想象、几何直观和空间观念”[1]，是在“几何直观”基础上更进一步的要求．当前对“几何直观”或“直观想象”的相关研究并不少，但从研究内容来看，更多涉及学生学习或教师教学，对教科书中几何直观的呈现或设计研究很少．教科书作为学生学习内容的主要载体，自然应做好为学生提供发展几何直观素养的学习材料，为学生的学习和教师的教学做好价值引领，因此教科书中“几何直观”的设计显得尤为重要．研究首先分析几何直观的教育价值，在此基础上试图以初中数学教科书为例，对教科书中几何直观呈现的基本类型及教科书几何直观设计的原则等方面进行探讨．

2　几何直观的教育价值

几何直观能做什么？有哪些基本类型？教科书如何渗透几何直观？等问题，都应建立在几何直观教育价值的基础之上，因此在讨论教科书设计问题之前依然需要分析几何直观的教育价值．

“几何直观主要是指利用图形描述和分析问题．借助几何直观可以把复杂的数学问题变得简明、形象，有助于探索解决问题的思路，预测结果．几何直观可以帮助学生直观地理解数学，在整个数学学习过程中都发挥着重要作用”[2]，对几何直观的内涵和作用，《义务教育数学课程标准（2011 年版）》给出的上述论述是广义的、概括的．这里的“图形”含义也是广义的，不仅仅局限于几何图形，包括常见的平面图形、立体图形以及数轴、坐标系、表格、框图、直观素材等，解决的问题也不限于数量关系．

选取涉及几何直观的教育价值、意义或功能的有代表性的文献，对其进行梳理归类，可归为两个方面．

一是认识论方面，很多重要的数学内容、概念都具有“双重性”，既有“数的特征”，也有“形的特征”，是认识数学对象的两个基本角度，要用数和形“两只眼睛”看数学，只有从两个方面认识它们，才能很好地理解它们、掌握它们的本质意义．相关论述诸如，几何直观是认识论问题，是认识的基础，有助于学生对数学的理解，借助于几何直观、几何解释，能启迪思路，可以帮助我们理解和接受抽象的内容和方法[3]，数学的发展过程也表明，再抽象的数学结论总能找到相对直观的表征和解释……恰当地运用几何直观，不仅能更好地建立起数和形之间的联系、促进相互的转化，提高综合运用知识的能力，而且能给学习带来极大的好处[4]，几何直观有助于将抽象的数学对象直观化、显性化[5]，几何直观具有解释功能[6]．

二是方法论方面，几何直观是思考问题、解决问题的思维方式之一，不仅有助于探索问题解决的思路，同时可以获得对数学的直观理解，抓住问题的本质．相关论述诸如，“几何直观是一种思维形式，它是人脑对客观事物及其关系的一种直接的识别或猜想的心理状态”[7]，“借助于见到的或想到的几何图形的形象关系产生对数量关系的直接感知，即可称之为‘几何直观’”[8]，“凭借几何直观开展的思维活动，可以成为创新性思维活动的开端”[5]，“几何直观是种意识，也是种技能与能力”[9]，“几何直观具有发现功能”[6]．

因此，几何直观有助于人们认识和理解数学对象，同时有助于人们探索问题、整体把握问题和促进发现．

3　教科书中几何直观的类型

研究几何直观的教科书设计，自然应分析教科书中几何直观的不同类型及其作用意义等．有文献对教科书中蕴含几何直观的内容进行了梳理，得到诸如“借助图形理解公式”“借助数轴掌握运算”“借助图形探索性质”等呈现类型，这样的梳理十分具体，但又是过于零碎了，既难免遗漏又不能形成一些上位的思考，有类似知识点罗列之感，难能迁移应用，也难以给教科书设计者以启示．此外，这种对已有教科书中几何直观呈现类型的梳理，是一种“实然”状态．作为教科书的设计，应进行“应然”考虑，即需要分析在教科书设计中借助几何直观能做什么，实现哪些功能？研究者认为基于上述几何直观的教育价值，“几何直观”在初中教科书中的呈现类型，

收稿日期：2021–08–11
基金项目：江苏省教育科学“十三五”规划课题——基于“三段式”研课的全日制数学专硕 PCK 发展研究（B-b/2018/01/47）
作者简介：顾继玲（1971—），女，江苏建湖人，教授，博士，硕士生导师，主要从事课程与教学论、教师教育研究．章飞为本文通讯作者．

主要有以下 4 种．

3.1 直观表征

直观表征，即借助图形表达数学对象，侧重于对数学对象“形”的表达．对于教科书中数学对象的直观表征，一般包括两种情况，一是数学对象引入时借助图形直观地呈现促进对象形成的素材，二是数学对象引入后借助图形对其进行直观表征．

很多数学概念是现实模型的直接反映，兼具“数”和“形”两方面的特征，为此，在引入这些数学概念时可以首先寻找贴近生活的直观素材，让学生基于视觉的观察初步感知数学对象，如小学阶段借助小棒等实物帮助学生认识数的组成、理解计数单位，初中阶段借助温度计引入数轴，借助数轴上点到原点的距离引入绝对值的概念等．在小学阶段，实物直观相对较多，中学阶段则以符号直观、图形直观为多．

数学对象引入后，如能从图形的角度加以直观表征，可以更好地帮助学生理解数学对象．如一次函数，其代数形式为 $y=kx+b$（k，b 是常数，$k\neq0$），这仅是一个抽象的数学表达式，需要关注的是：作为一个函数，它有什么特殊的特征？如对于具体的一次函数 $y=-2x+5$，借助表格（图 1）可以直观地呈现规律：y 随着 x 增长时，增幅是固定的．这种均匀的变化规律反映到图象上，显示为一条直线，同时也可以看到借助图形表征，函数 k，b 才变得“生动”起来，从这个角度来说，图形的表达更易于反映一次函数的本质．再如二元一次方程组的解反映到图象上就是两个一次函数图象的交点情况，设计这样的问题：已知一次函数 $y=3x-1$ 与 $y=2x$ 图象的交点是 $(1, 2)$，求方程组 $\begin{cases}3x-y=1\\ y=2x\end{cases}$ 的解，设计此类问题的重心自然不是方程组的图象解法，而是方程组和函数之间的联系，面对这样的问题如果机械地运用代入消元求解，显然反映出学习者没有理解方程组的解的直观表达．反过来，能否对数学对象进行图形表征，也是检验学生对数学对象认识或理解的一种方式．

	x	$y=-2x+5$	
	1	3	
+1	2	1	−2
+1	3	−1	−2
+1	4	−3	−2

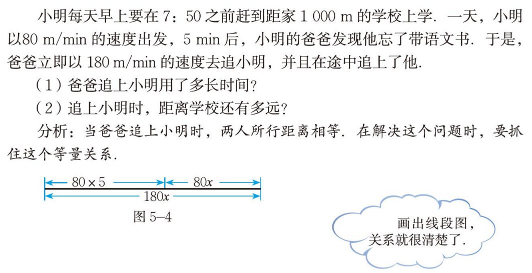
图 1　一次函数变化规律

3.2 直观分析

直观分析，即借助图形分析数学问题，侧重于利用图形寻求解决问题的思路．有些问题中数量较多、数量关系比较复杂、问题的表述也可能增加了无用或干扰信息等，为此，需要用适当的方式将有关的数量及其关系更好地表示出来，便于基于数量关系建立相应的模型解决问题．此时，图、表等可直观、形象地呈现数量关系，将复杂的语言文字转化成图形语言，帮助分析问题．

如案例 1，基于题目的信息，画出相应的线段图，数量关系明显可见，方程呼之欲出．

案例 1[10]：


小明每天早上要在 7：50 之前赶到距家 1 000 m 的学校上学．一天，小明以80 m/min 的速度出发，5 min 后，小明的爸爸发现他忘了带语文书．于是，爸爸立即以 180 m/min 的速度去追小明，并且在途中追上了他．

（1）爸爸追上小明用了多长时间?

（2）追上小明时，距离学校还有多远?

分析：当爸爸追上小明时，两人所行距离相等．在解决这个问题时，要抓住这个等量关系．

相关实验研究也表明了几何直观在问题解决中的优越性，如同一数学问题，采用直观图示的方式呈现和文字语言的方式呈现，小学生解题正确率在前者方式下明显高于后者方式下[11]，“直观表征”缩短了解题路径，优化了解题方案，它展现的是一种知识之间的‘灵活’联系，言语与直观之间的灵活联系[12]．

另外，对于有挑战性问题的解决，首先要确定研究思路，利用图形结构可以展现思维脉络，帮助理清思路．如初中阶段无理数的定义，一般教科书通过面积为 2 的正方形的边长探索发现它不是有理数，最终给它命名无理数，并给出定义：无限不循环小数叫做无理数．但为什么它不是有理数就是无限不循环小数呢？怎么说明它一定就是无限不循环小数呢？实质上其中蕴含比较复杂的代数推理：面积为 2 的正方形边长 a 是无理数，是什么样的小数？→难以直接解决，转而说明熟悉的有理数和小数是什么样的关系？→发现有理数等价于有限小数或无限循环小数→a 不是有理数，因此 a 不是有限小数或无限循环小数，即为无限不循环小数．要说清楚这件事直观图形（图 2）更能够清晰展现研究问题的思路，反映对问题的整体思考和逻辑关系的清晰表达．

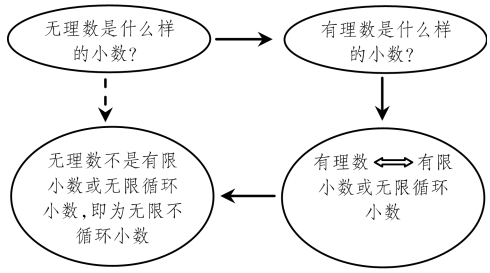
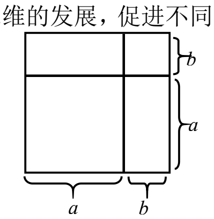


图 2　无理数和小数关系的研究思路

3.3 直观解释

直观解释，即借助图形对数学结论或问题的结果进行描述，侧重于对已获得的结果赋予“形”的解释，从而丰富对数学对象的理解．数学公式可以通过代数运算得到，这是代数思维的体现，但代数公式如能借助图形进行直观解释，可让代数公式变得形象直观，便于学生记忆与理解，甚至引发更为一般的推广，同时也可促进学生思维的发展，促进不同知识内容领域的融合．



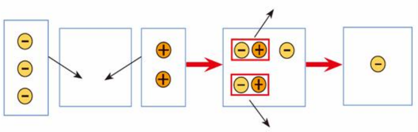
案例 2[13]：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，你能用旁边的图形解释这个公式吗？

教科书在基于代数运算得到完全平方公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 之后，引导学生借助图形进行几何解释，这样的解释形象直观，而且可引发对于 $(a-b)^2$ 的猜测，甚至可以引发优秀学生猜想

$(a+b+c)^2$、$(a+b)^3$ 等的几何解释和代数表达．

再如，代数运算法则即“算法”本质上是人们发明的一种规则，规则与规律不同，规则反映的不是事物之间内在的必然联系，它不是客观存在的．要理解这种人为创造出来的规则并能够灵活加以运用，首先就要理解规则，了解规则是什么以及为什么，即算理．通过直观模型为算理提供直观的解释，是帮助学生理解算理的常见做法．下面是教科书中有理数加法法则直观解释的一个案例——等值相消，运算过程直观可见．

案例 3[10]：计算 $(-3)+2$．在方框中放进 3 个⊖和 2 个⊕，移走所有的 $\boxed{⊕⊖}$，可得 $(-3)+2=-1$．



无论是从事数学教学或研究，我是喜欢直观的．学习一条数学定理及其证明，只有当我能把定理的直观含义和证法的直观思路弄明白了，我才认为真正懂了[8]．代数中的几何直观更值得关注，英国数学家阿蒂亚指出，在几何中视觉思维占主导地位，而代数中有序思维占主导地位．所以几何中首先用到的是最直接的形象思维，用形象思维洞察，然后用逻辑思维严格化．在教育中过分强调一种方式而损害另一种方式是错误的[14]．张奠宙先生也表达了相同的观点，中学代数与几何课程的主要差别在于代数(包括概念和法则)抽象、繁琐，而几何直观、形象．他因此呼吁，从心理接受能力的角度来说，在代数教学中引入适当的几何直观、注重利用贴近生活的形象思维便是代数教学中的一项重要任务．所谓“理解”实际上基本等同于“建立直观形象”，纯粹抽象的事物是难以理解的[15]．

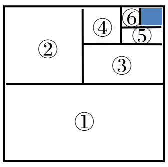
3.4　直观发现

直观发现，即借助图形直观整体地把握研究对象，发现数学结论．一般有两种情况：一种是根据要求解或证明的结论构建数学问题的直观模型，直接获得问题的解答，另一种是反向的思维过程，即根据直观图形发现数学结论．

案例 4[10]：将一个边长为 1 的正方形纸片分别割成 7 个部分，部分②是部分①面积的一半，部分③是部分②面积的一半，依次类推．

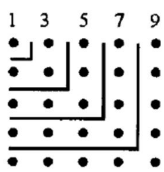
（1）阴影部分的面积是多少？

（2）受此启发，你能求出 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^6}$ 的值吗？



根据问题的特点赋予直观背景，使问题的解决简明、直观化．要计算 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^6}$，只需要这副正方形图，从图中就可看出这个算式就是要求图形①②③④⑤⑥面积和，显然它等于 $1-\frac{1}{2^6}$．

案例 5：给出点阵图，你能发现什么数学结论？观察可得：图形直观表达了数学结论 $1+3+5+7+9=5^2$，很自然地可以猜想一般结论：



$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

直观发现，往往在获得问题解答的基础上可以导致更进一步的发现，对发展学生的直觉思维、培养学生的创新能力提供了空间．如案例 4 中从代数问题想到如何构造图形，上述问题中依次“面积的一半”是构造图形的关键点，只要能画出满足此条件的图形即可，因此可以出现另外的构造图形，如构造线段、三角形、长方形、圆等．案例 5 中改变“直角形”的构造，又能得到其它熟悉结论吗？

一个数学对象的几何直观对这个对象来说，是种直观，但对第一次接触这个直观方式的学生来说，便可能就是一种抽象[9]．因此，直观发现需要积累一定的基本图形的直觉经验．

另要说明的是，直观表征、直观分析、直观解释和直观发现并不完全独立，直观分析、直观解释和直观发现都建立在直观表征的基础之上，同一个数学问题呈现方式或提出要求不一样，对直观类型的侧重可能会不一样，如对平方差公式，如果将直观图形作为公式探索的素材，那么图形的作用主要体现为直观表征，但如果在获得公式后要求学生寻求直观图形的解释，那么显然图形的作用主要体现为直观解释．

4　教科书中几何直观的设计原则

教科书的结构（体系）有明线和暗线之分，明线一般为目录所呈现的具体章节内容，暗线则多隐匿于内容“背后”，如渗透数学思想方法的暗线，培养学生能力的暗线，帮助学生积累数学活动经验的暗线，几何直观作为核心素养也是暗线之一，这种暗线也需一定的内容载体，也需一定的脉络展现．教科书中几何直观的设计应力图遵循如下几个原则．

4.1　准确性

教科书中几何直观的设计首先要有准确的目标定位，需要明确的是，几何直观不仅仅是知识工具，更是能力素养．现有初中数学教科书中各个内容领域利用几何直观来处理的教学内容大量存在，如借助数轴掌握运算、借助图形探索性质、借助线形图明确关系等，但很多表现为一种“必选动作”，即此教学内容本身就是从几何直观而来，如绝对值的概念其本身就源于两点间的距离，函数的性质其本身就要借助于图形的探索等等，如果将几何直观的体现仅局限于这些“必选动作”，那么几何直观的目标定位似乎只是获得知识的一种图形工具，获得知识的桥梁，而不是作为一种思考问题、理解数学的思维方式或能力素养．

借助于图形描述和分析问题，可以将抽象的问题直观化，可以将复杂数量关系清晰化，反过来，面对一个抽象的问题或代数表达，能否用恰当的图形表达自己的理解或用图形的方法解决问题、整体把握问题，即是几何直观思维或能力素养的表现．“几何直观首先表现为一种意识——面对数学问题能想到用画图来帮助思考；其次表现为掌握一定的几何直观的画图技巧，能画出图来”[16]，作为教科书应有意识地引导学生进行几何直观的思考，将其作为一种能力素养渗透教科书中．

如，平方差公式，除了教科书给出的直观图形解释（图

3)，可以进一步提出：你还能给出其它图形的直观解释吗？

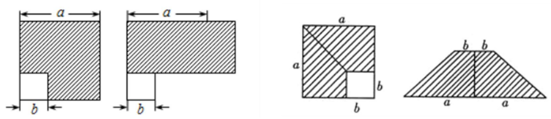


图 3 平方差公式直观图形

或在一些问题中采用直观的方法表达或解决问题，要求学生能够迁移到新的问题．如在平方差公式之后学习完全平方公式，得到公式后，要求学生自行给出公式的图形解释，在其后的因式分解学习中可以再次回顾图形的解释．经过这样的学习积淀，学生看到 a^2、b^2、ab 自然会想到图形的面积，因此在因式分解中甚至可以提出挑战性问题：你能对 a^3-b^3 进行因式分解吗？你是怎么得到结论的？学生可以借助图形猜想结论，再通过整式乘法运算验证结论．

4.2 整体性

从前文分析知，几何直观的类型有：直观表征、直观分析、直观解释和直观发现，常见的数学活动主要有概念生成、命题探究和问题解决，因此可将几何直观分为概念生成过程中的几何直观、命题探究过程中的几何直观和问题解决过程中的几何直观．几何直观在不同内容中的分布广泛程度如表 1 所示．

对于教科书学习内容，可以更多考虑其直观表征，尽力沟通数和形的联系（当然应是自然的），感受数学对象的多角度认识；在命题探究和问题解决过程中，更多考虑直观分析和直观解释，获得对命题的直观理解和解释，学会问题解决的策略；在问题解决过程中，更多考虑直观发现，获得对问题的直接领悟，形成一定的数学直观．

表 1 几何直观在内容中的分布广泛度

	概念生成过程中	命题探究过程中	问题解决过程中
直观表征	√	√	√
直观分析		√	√
直观解释		√	√
直观发现			√

注：√代表相应表现在此内容中比较广泛

从当前教科书来看，几何直观并不缺乏，但存在内容分布和类型分布偏差情况．从内容来看，在概念形成和命题探究过程中的直观为多，问题解决过程中的直观较少，这应该和当前数学课程强调情境、探究有一定的关系，注重概念的形成过程，注重公式、法则等结论的探究，但当获得结论后用其解决问题几何直观相对被忽视了．从类型来看，直观表征、直观分析和直观解释为多，直观发现少之又少．相关研究也提供了佐证，一般的数学问题解决过程中，学生并不倾向于使用直观表征策略[12]．一个有趣的现象是，采用直观信息加工方式的被试对自己的结论都表示怀疑，并且认为需要进一步的代数验证[12]，这样的学习现象首先应该从教科书的编写角度考虑是否对学生产生了影响．

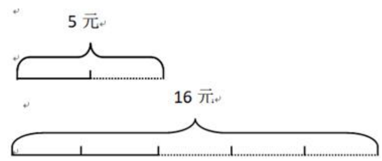
4.3 渐进性

教科书应通过渐次递进的设计，促进学生几何直观的有序发展．从学生的学习来说，几何直观不会自发形成，需要教科书及教学中不断呈现，需要学生长期的经验积累，因此应首先关注基本图形的几何直观，帮助学生积淀形成基本图形的几何直观，如一些式的图形表达，看到 $a(b+c)$ 会想到长方形的面积，看到 $|a-b|$ 会想到数轴上两点间距离，看到 a^2+b^2 会想到直角三角形的两个直角边的平方和，在问题解决中，关注从图形的角度表征问题的信息，或从图形的角度思考问题，用线段图、表格等表达数量关系．通过一些实证研究的结果和教科书编写团队的研讨，研究者认为，问题表述的类型和图形的明晰程度是影响学生借助几何直观解决问题的外在因素，因此，在几何直观的教科书设计时，可以从问题表述的类型和图形的明晰程度两个方面进行渐进的设计．

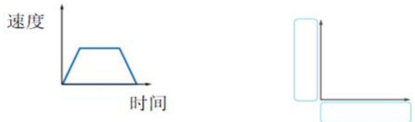
问题表述的类型一般有正向表述的问题、逆向表述的问题和转换的问题，正向表述的问题指给定代数表达要求给出实际背景或图形直观，如给定方程代数表达模型要求赋予实际背景的问题；逆向表述的问题指给定图形直观要求给出代数表达，如案例 6（1），给出方程信息的图形表达，要求编写相应的方程问题；转换问题则指借助 A、B、C 之间的关系，由给定 A 和 B 的图形直观，给出 A 和 C 或 B 和 C 的图形直观，如案例 6（2）要求从速度和时间的图象，判断它们之间的变化规律，进而推断路程和时间的变化规律，再反映到直观图象中去．审视当前教科书，相对而言，多为正向表述的问题，逆向表述和转换的问题较少，因此教科书编写中，在正向表述问题之后，应结合具体内容和学生的学力水平考虑适当增补逆向表述的问题和转换的问题．

案例 6：

（1）请你根据下面的线段图编一个方程问题，列方程并求解．



（2）下图给出一辆汽车行驶速度随时间改变的图象，请你画出这辆汽车行驶路程随时间改变的图象．



图形的明晰程度也直接影响着学生借助几何直观解决问题的表现，根据图形的明晰程度可以将图形的呈现方式分为 3 类：呈现完整图形、呈现部分图形和不呈现图形．显然，对于同一问题这 3 种呈现方式导致问题解决的难度是逐步提升的，因此教科书同样要考虑其渐进性，从呈现完整图形到呈现部分图形再到不呈现图形，从“示范—引导—自主”引领学生进行几何直观的思考，如在列方程解应用问题中，第一阶段可以采用分析题意的方式，呈现用线段图或表格表达问题中的信息，第二阶段可以采用要求学生填空的方式呈现线段图或表格，第三阶段则直接要求学生能否用图形直观表达问题中的数学信息．

4.4　反思性

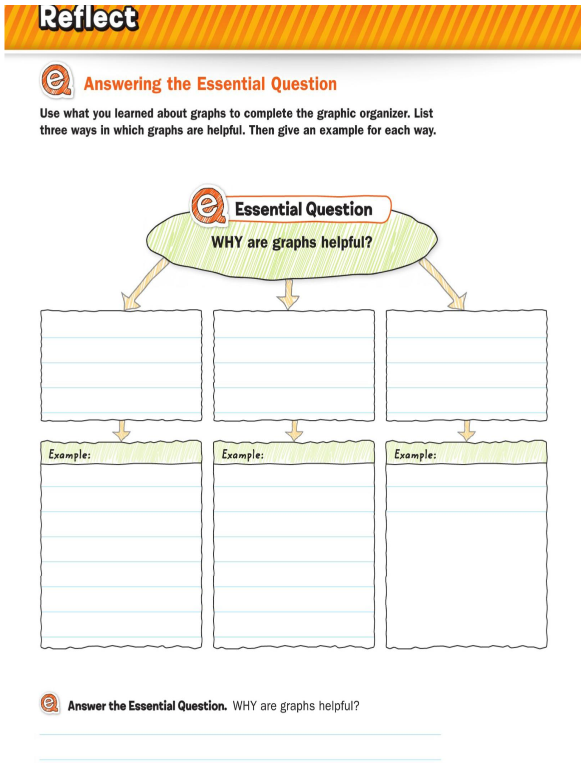
弗赖登塔尔指出，反思是重要的数学活动，它是数学活动的核心和动力[17]．新的数学观念形成后，学习者就会试图用新的观念去重新认识已经积累起来的知识、技巧、方法和规律，把它们纳入刚刚建立起来的认知结构，这是一个反思过程．数学教学必不可少的一部分就是加强学生的反思，因为数学并不是单纯的知识，而是思想、观念，它既是反思的材料，又是反思的结果．反思能力和其他能力一样，也不是自然形成的，需要教师有意识地培养．

直观不是“教”出来的，而是自己“悟”出来的[18]，对几何直观，教师不能仅仅满足于学生在某一问题中采用几何直观解决了具体的问题，应能够引导他们反思自己的活动过程，思考为什么想到建构这样的图形，图形在此问题中起到了什么作用，一般地，从哪些方面建构图形，图形解决问题有哪些方面的作用？如求 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^6}$ 的值，为什么想到画正方形，为什么这样分割图形？其它图形可以吗？为什么？

教科书中同样应设计丰富的反思性活动，引导学生反思借助几何直观解决问题的过程，反思几何直观的意义与价值等，这方面，现行初中数学教科书尚有较大的提升空间．美国 McGraw-Hill 出版社出版的初中数学教材 Glencoe Math 其中有不少好的呈现，如案例 7[19]，在函数有关内容章后小结中直接提出这样的反思性问题：为什么图表是有用的？请列出图表有用的 3 种方式，并分别举例说明．

几何直观是数学中生动的、不断增长的而且迷人的课题，在内容上、意义上和方法上远远超出对几何图形本身的研究意义[3]．对教科书几何直观的研究必定是其中之一，需要理论的思考，同时需要实践的检验．研究仅对初中数学教科书中几何直观的类型和设计原则进行了探讨，教科书设计中还有很多问题值得思考和研究：什么内容需要几何直观？几何直观怎样呈现？作为教科书怎样体现在不同学习阶段的层次要求等．

案例 7：



［参 考 文 献］

[1]　史宁中，王尚志．普通高中数学课程标准（2017 年版）解读[M]．北京：高等教育出版社，2018：114．

[2]　中华人民共和国教育部．义务教育数学课程标准（2011 年版）[M]．北京：北京师范大学出版社，2012：6．

[3]　秦德生，孔凡哲．关于几何直观的思考[J]．中学数学教学参考，2005（10）：9–11．

[4]　黄翔．数学课程标准中的十个核心概念[J]．数学教育学报，2012，21（4）：18．

[5]　孔凡哲，史宁中．关于几何直观的含义与表现形式[J]．课程·教材·教法，2012，32（7）：92–97．

[6]　章飞，凌晓牧．几何直观的内涵、功能与培养途径[J]．中学数学教学参考，2013（9）（中旬）：18–20．

[7]　蒋文蔚．几何直观思维在科学研究及数学教学中的作用[J]．数学教育学报，1997，6（4）：67．

[8]　徐利治．谈谈我的一些数学治学经验[J]．数学通报，2000，39（5）：1．

[9]　蔡宏圣．几何直观：小学数学教学的视角[J]．课程·教材·教法，2013，33（5）：109–115．

[10]　马复．义务教育数学课程标准教科书七上[M]．北京：北京师范大学出版社，2013：150．

[11]　夏光杰．“画”里有“话”——以画线段图解决问题为例谈“几何直观”[J]．小学教学研究，2016（3）：31–33．

[12]　傅赢芳．数学直观的认知分析及对教学的启示[D]．南京：南京师范大学，2009：38，37，62．

[13]　马复．义务教育数学课程标准教科书七下[M]．北京：北京师范大学出版社，2013：23．

[14]　王鹏远．谈计算机和几何教学的现代化[J]．中学数学教学参考，1998（7）：23．

[15]　张奠宙，张广祥．中学代数研究[M]．北京：高等教育出版社，2006：II–III．

[16]　蔡圣宏．几何直观的内涵及教育教学价值[J]．广西教育，2013（10）：36．

[17]　弗赖登塔尔．数学教育再探[M]．刘意竹，杨刚，译．上海：上海教育出版社，1999：50．

[18]　史宁中．几何直观与小学数学教学[R]．金华：第十六届全国新世纪小学数学课程与教学系列研讨会，2017．

[19]　CARTER J, CUEVAS G, DAY R, et al. Glencoe math course 3 [M]. Columbus: McGraw-Hill Education, 2013: 258.

（下转第 91 页）

[23] HEJHAL D．怀念 Atle Selberg，1917—2007[J]．胥鸣伟，译．数学译林，2010，29（1）：30–44．
[24] FLO．Jean-Pierre Serre 荣获首届 Abel 奖[J]．胡作玄，译．数学译林，2003，22（2）：184–186．
[25] 丘成桐．数学与中国文学[J]．中国大学教学，2005（9）：4–9．
[26] KRANTZ S G．L. V. Ahlfors（1907—1996）[J]．李叶舟，译．数学译林，1998，17（4）：313–321．
[27] 丘成桐．从数学教学的视角看中国的基础教育[M] // 丘成桐，杨乐，季理真．数学与人文（第五辑）．北京：高等教育出版社，2011：49–51．
[28] MILNOR J．在老范氏楼中成长[J]．胥鸣伟，译．数学译林，2001，20（1）：59–66．
[29] 丘成桐．中国高等教育[M] // 丘成桐，杨乐，季理真．数学与人文（第一辑）．北京：高等教育出版社，2010：248–266．
[30] POLYA G．数学与猜想：合情推理模式[M]．李心灿，王日爽，李志尧，译．北京：科学出版社，2001：177．
[31] JHADAMARD．数学领域中的发明心理学[M]．陈植荫，肖奚安，译．大连：大连理工大学出版社，2008：51．

Analyzing Scientific Research Commonalities and Education Viewpoints of Winners of both the Fields Medalists and Wolf Prize Winners

HAO Shun-li

(Department of Basic Sciences, Beijing International Studies University, Beijing 100024, China)

Abstract: Winners of both the Fields Medal and Wolf Prize in Mathematics represent the most excellent, innovative talents in mathematics. By analyzing scientific research commonalities and education viewpoints of the 16 winners of both the Fields Medal and Wolf Prize in Mathematics, it was found that their scientific research commonalities mainly include three aspects: necessary conditions, personality characteristics and scientific research methods of high-level mathematicians, and characteristics of their papers or works. Their education viewpoints comprise five aspects: stimulating interest, personality education and academic influence, learning from mathematicians, promoting research through teaching, and specialties and courses. From this, top-notch innovative talents in mathematics can be cultivated by teachers and schools through the following five ways: cultivating the students’ interest and ability, guiding their learning, fostering research and paper writing, improving teachers’ teaching and research proficiency, and implementing reasonable course planning and specialties. From this, we can cultivate top-notch innovative talents in mathematics through five ways: cultivating interest and ability, guiding learning and scientific research, guiding the writing of papers, teaching and research, and specialization and curriculum.

Key words: scientific research commonalities; education viewpoints; Fields Medal; Wolf Prize in Mathematics; top-notch innovative talents in mathematics

[责任编校：陈汉君、陈隽]

（上接第 63 页）

The Design of “Geometric Intuition” in Junior High School Mathematics Textbooks: Types and Principles

GU Ji-ling[1], ZHANG Fei[2]

(1. College of Teacher Education, Nanjing Normal University, Jiangsu Nanjing 210097, China;
2. Institute of Curriculum and Teaching, Jiangsu Second Normal University, Jiangsu Nanjing 210013, China)

Abstract: Geometric intuition has the educational value of both epistemology and methodology. The types of geometric intuition in junior high school mathematics textbooks are as follows: intuitive representation, intuitive analysis, intuitive interpretation, and intuitive discovery. The geometric intuition design of junior high school mathematics textbooks should follow the principles of: accuracy, both knowledge tools and ability literacy; integrity, considering both content and type to avoid deviation; gradualness, with the type of problem representation and the clarity of the graphics being hierarchical; and reflective, whereby there must be reflective questions and activities.

Key words: junior high school mathematics; textbooks; geometric intuition; type; principle

[责任编校：陈隽、陈汉君]