

数学画板辅助初中数学专题教学的探究*

——以“一元一次含参不等式组”专题为例

广东省惠州仲恺高新区第二中学(516000) 邓帼婷

摘要 一元一次不等式组中的“含参问题”一直是初中数学教学中的重难点,这类问题的本质是在运动和变化中寻找满足题意的取值(范围),能让学生对“分类讨论”、“数形结合”的思想方法有进一步的认识.这类问题是学生的薄弱点,而数学画板是希沃里面的数学教学软件,能够化抽象为具体、变静态为动态,帮助学生进一步理解知识,强化学习效果.本文就以一元一次含参不等式组专题为例,探究如何结合数学画板辅助教学.

关键词 一元一次不等式组;含参问题;数学画板

一元一次不等式组中的“含参问题”是中考的考点之一,也是学生学习的重难点,解决这类问题需熟练掌握不等式(组)的解法,借助分类讨论或数形结合的思想方法来确定参数的取值(范围),是一种逆向思维题,要求学生概念清晰、分析得当,可以加深学生对一元一次不等式(组)的求解过程及其解的合理性的理解.

由于这类问题涉及参数及不等关系,学生解决此类问题的难点主要有以下几点:

首先,学生不理解题意,忽视审题的关键作用,经常走马观花式地对题目进行解读,导致最终解题错误,本质上是学生无法将题目中的关键信息或隐含条件转化.在题目中经常会出现一些关键词,其中隐含着关于解决问题的关键信息.例如:不等式组“有解”、“无解”、“有几个整数解”等.

其次,学生容易将原不等式组的解集与所求参数的取值(范围)混淆.在求解的过程中确定参数的取值(范围)需借助原不等式组的解集及题目中的相关条件,这两者都是区间范围,学生在解题过程中会忽略它们的关联性,导致做题错误.主要原因还是学生对于不等式组的解集概念模糊,导致两者混淆.

再者,端点值取舍难判断,尤其是根据特殊解的个数求参数的取值范围这一类型,学生常出错在临界值的等号到底能不能取,部分学生平时的逻辑思维能力比较差,做题喜欢死背答案,不愿动脑分析问题,关于实心点和空心点重合到一起是否有公共解区分不清楚,再加上对于“至多、至

少”等词的含义的理解不到位,导致不知道题目要表达的意思,从而很难做对此类题目.

因此,教师讲解这类型题型时,需要结合数轴讲解,但参数的取值(范围)不是固定的,是动态的过程.教师在利用黑板作图讲解时,若只画一个图进行讲解,那么部分作图痕迹会被覆盖且不利于学生理解;若画多幅图,则需花费较多时间,不利于完成课堂教学任务.借助数学画板就可以解决上述弊端,不仅能直观展示参数取值的动态过程,还能充分利用课堂教学时间.以下例题图片均由数学画板作图.

1 类型1:已知解集求参数的取值(范围)

例1 若不等式组 $\begin{cases} x+5 < 5x+1 \\ x-m > 1 \end{cases}$ 的解集是 $x > 1$, 则 m 的取值范围是 ____.

解析 第一步先解出不等式组的解集,即先把参数看成已知量进行求解.

$$\text{解不等式组 } \begin{cases} x+5 < 5x+1 \\ x-m > 1 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x > 1 \\ x > m+1 \end{cases}$$

第二步确定参数的大致取值范围,可以利用口诀法及不等式组的解集条件确定.由“同大取大”且不等式组的解集为 $x > 1$ 可知: $m+1 < 1$.

或者利用数轴作图,结合数学画板先将明确的解集 $x > 1$ 画在数轴上,再绘制 $x > m+1$,移动 $m+1$ 这个点(分别在1的左侧或右侧)来判断参数的大致取值范围.如图1所示,当 $m+1$ 保持在1左侧移动,即 $m+1 < 1$ 时,不等式组的解集为 $x > 1$;如图2所示,当 $m+1$ 移动到1右侧,即 $m+1 > 1$ 时,不等式组的解集为 $x > m+1$,这与题目的条件不符,所以 $m+1 < 1$.

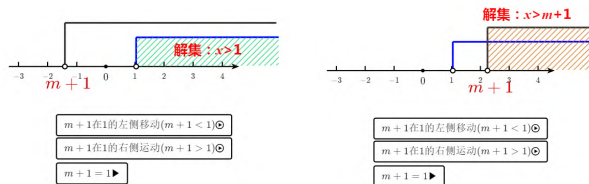


图1

图2

第三步临界点分析,即考虑 $m+1$ 能否等于1.由图3可

*科研项目:基于数字教材粤教翔云的初中数学“提质课堂”教学模式的研究与实践(2022YQJK385).

知,当 $m+1$ 与 1 重合时,解集仍是 $x > 1$,所以 $m+1=1$ 时也成立,即 $m+1 \leq 1$,解得 $m \leq 2$.

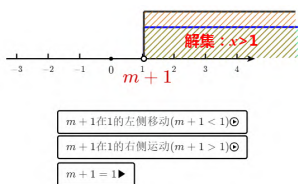


图3

第四步得出正确结论,综上所述, m 的取值范围是 $m \leq 2$.

变式1 若不等式组 $\begin{cases} x+5 \leq 5x+1 \\ x-m > 1 \end{cases}$ 的解集是 $x \geq 1$,则 m 的取值范围是 ____.

变式1与例1的区别在于不等式组及解集多加了等号,解题思路与例1一致,主要区别在于临界点的选取,在变式1的条件下, $m+1=1$ 时解集为 $x > 1$,与原不等式组的解集矛盾,因此 $m+1 \neq 1$, m 的取值范围是 $m < 2$.

例2 若不等式组 $\begin{cases} x-2 < 3a \\ x+4 < a \end{cases}$ 的解集是 $x < a-4$,则 a 的取值范围是 ____.

解析 第一步解出不等式组的解集.

$$\text{解不等式组 } \begin{cases} x-2 < 3a \\ x+4 < a \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x < 3a+2 \\ x < a-4 \end{cases}$$

第二步确定参数的大致取值范围. 口诀法: 由“同小取小”且不等式组的解集为 $x < a-4$ 可知: $a-4 < 3a+2$.

数学画板作图: 由于 $a-4$ 及 $3a+2$ 都是含参的式子,无法在数轴上准确的画出对应点的位置. 针对这种情况,可先假设数轴上某两点对应的就是 $a-4$ 及 $3a+2$,接下来固定 $a-4$ 或 $3a+2$ 其中一点的位置,移动另一点比较解集结果. 下图是以固定 $a-4$ 的位置,移动 $3a+2$. 如图4所示,当 $3a+2$ 在 $a-4$ 右侧移动,即 $3a+2 > a-4$ 时,不等式组的解集为 $x < a-4$; 如图5所示,当 $3a+2$ 在 $a-4$ 左侧移动,即 $3a+2 < a-4$ 时,不等式组的解集为 $x < 3a+2$,这与题目的条件不符,因此 $3a+2 > a-4$.

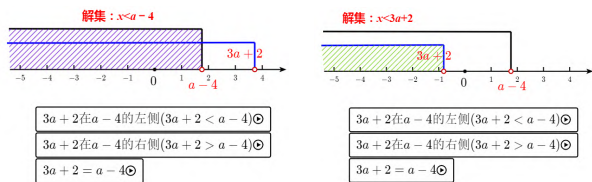


图4

图5

第三步临界点分析,由图6可知,当 $a-4$ 与 $3a+2$ 重合时,解集仍是 $x < a-4$,所以 $3a+2 = a-4$ 时也成立,即

$$3a+2 \geq a-4, \text{ 解得 } a \geq -3.$$

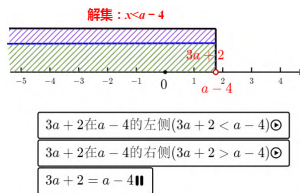


图6

第四步得出正确结论. 综上所述, a 的取值范围是 $a \geq -3$.

2 类型2: 已知有解、无解的情况求参数的取值范围

例3 若不等式组 $\begin{cases} 2x-a > 0 \\ 3x-4 < 5 \end{cases}$ 有解,则 a 的取值范围是 ____.

解析 第一步解出不等式组的解集.

$$\text{解不等式组 } \begin{cases} 2x-a > 0 \\ 3x-4 < 5 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x > \frac{a}{2} \\ x < 3 \end{cases}$$

第二步确定参数的大致取值范围. 口诀法: 因为原不等式组有解,由“大小小大中间找”可知: $\frac{a}{2} < 3$.

或用数学画板作图,先将解集 $x < 3$ 画在数轴上,再画 $x > \frac{a}{2}$,移动 $\frac{a}{2}$ 这个点(分别在3的左侧或右侧)判断参数的大致取值范围为 $\frac{a}{2} < 3$. 具体如下图所示:

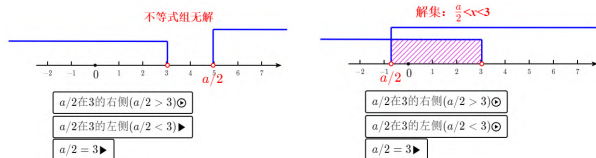


图7

图8

第三步临界点分析. 由图9可知,当 $\frac{a}{2}$ 与 3 重合时不等式组无解,因此 $\frac{a}{2} \neq 3$,即 $\frac{a}{2} < 3$,解得 $a < 6$.

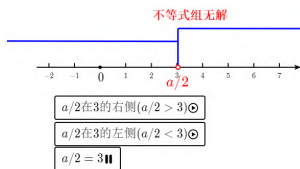


图9

第四步得出正确结论. 综上所述, a 的取值范围是 $a < 6$.

例4 若不等式组 $\begin{cases} x-2m < 0 \\ x+m > 2 \end{cases}$ 无解,则 m 的取值范围为 ____.

解析 第一步解出不等式组的解集.

$$\text{解不等式组 } \begin{cases} x-2m < 0 \\ x+m > 2 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x < 2m \\ x > 2-m \end{cases}$$

第二步确定参数的大致取值范围,口诀法: 因为原不等

式组无解,由“大大小小没有解”可知: $2m < 2 - m$.

或用数学画板作图,由于 $2m$ 及 $2 - m$ 都是含参的式子,可先假设数轴上某两点对应的就是 $2m$ 及 $2 - m$,接下来固定其中一点的位置,移动另一点比较解集结果.下图是以固定 $2m$ 的位置,移动 $2 - m$ 为例,要保证原不等式组无解,则 $2m < 2 - m$.具体如下图所示:

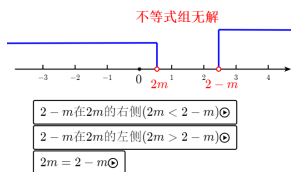


图 10

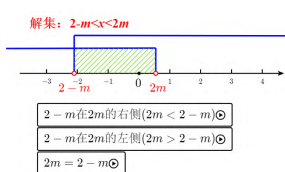


图 11

第三步临界点分析.由图 12 可知,当 $2m$ 与 $2 - m$ 重合时不等式组仍无解,因此 $2m \leq 2 - m$,解得 $m \leq \frac{2}{3}$.

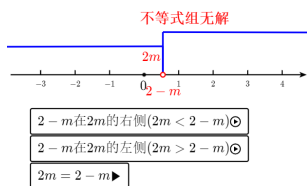


图 12

第四步得出正确结论.综上所述, m 的取值范围是 $m \leq \frac{2}{3}$.

变式 2 若不等式组 $\begin{cases} x - 2m \leq 0 \\ x + m \geq 2 \end{cases}$ 无解,则 m 的取值范围为 ____.

变式 2 只改变了例 4 的不等式的符号,解题思路与例 4 一致,主要区别在于临界点的选取,在变式 2 的条件下,当 $2m = 2 - m$ 时不等式组有解,且交点就是解.这与原不等式组的无解矛盾,因此 $2m \neq 2 - m$, m 的取值范围是 $m < \frac{2}{3}$.

3 类型 3: 已知特殊解的个数求参数的取值范围

例 5 若不等式组 $\begin{cases} 2x - 1 > 3 \\ x \leq a \end{cases}$ 的整数解共有 3 个,则 a 的取值范围是 ____.

解析 第一步解出不等式组的解集.

$$\text{解不等式组 } \begin{cases} 2x - 1 > 3 \\ x \leq a \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x > 2 \\ x \leq a \end{cases}$$

第二步确定参数的大致取值范围.先用口诀法:因为原不等式组有整数解,由“大小小大中间找”可知原不等式组的解集为 $2 < x \leq a$;再用数学画板作图,将解集 $2 < x \leq a$ 画在数轴上.因为不等式组有 3 个整数解,从 2 开始往右数 3 个整数,分别是 3, 4, 5, 可先判断出 a 是介于 5 到 6 之间的,

也可移动 a 点来判断是否在这范围内,具体如下图所示:

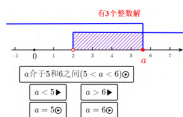


图 13

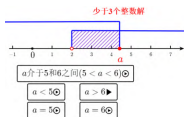


图 14

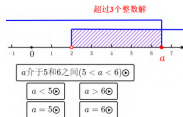


图 15

第三步临界点分析.由上图可知该题的临界点为 5 和 6, 分别用 5, 6 替代 a .当 $a = 5$ 时,恰好有 3 个整数解;当 $a = 6$ 时,则有 4 个整数解.具体如下图所示:

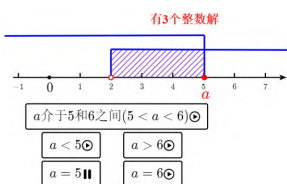


图 16

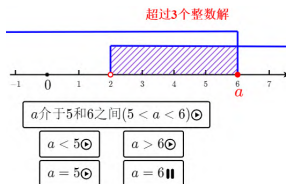


图 17

第四步得出正确结论.综上所述, a 的取值范围是 $5 \leq a < 6$.

4 总结

上述三大类型题的变式均可通过改变原不等式组或题目中的解集条件、整数解个数、有解无解情况得到.这三大题型的求解思路可总结为以下四步:

- (1) 先求出原不等式组的解集(将其中的参数作为已知量处理)
- (2) 确定参数的大致取值范围(利用口诀法或画数轴)
- (3) 临界点分析(直接将临界点代入,根据题目条件判断临界点是否可取)
- (4) 得出正确结论(综合上述步骤答案)

学习是一个长期的过程,随着知识的深入学习,难度也会越来越大.学生是学习的主体,教师是引导者,教师在教学过程中不应该只教会学生死板的知识,而是要教会学生如何举一反三,灵活变通所学的知识,同时也要合理的利用资源进行教学,教学的最终目标是让学生学会正确的学习方法,可以独立自主地解决问题.

参考文献

- [1] 罗彩萍. 探究数形结合思想在初中数学解题过程中的应用[J]. 科学咨询(教育科研), 2020(05): 162.
- [2] 刘文喆, 张瑞月. 数形结合思想在求解含参不等式组中的应用[J]. 中学数学, 2023(12): 77-78.
- [3] 林培娟. 数学思想方法照耀下解答疑难问题[J]. 中学数学, 2012(06): 91-92.
- [4] 王云兰. 浅谈初中数学教学中几何画板的应用[J]. 科学咨询(教育科研), 2020(07): 279.
- [5] 易江南. 一元一次不等式组含参问题[J]. 中学数学, 2022(14): 68-69.