

新课标，新教材，新教学

——苏科版初中数学教材编修解读

苏科版初中数学教材编修组 石树伟

一、教材为何修编：呼应课标变化

二、教材如何修编：体现课标理念

三、教材如何使用：落实教材意图

一、教材为何修编：呼应课标变化

课标主要变化之一——核心素养导向

■ 数学核心素养的构成——“三会”

- 会用数学的眼光观察现实世界
- 会用数学的思维思考现实世界
- 会用数学的语言表达现实世界

■ 数学核心素养的学科特征：

- 数学眼光：数学抽象 → 数学特征：数学的一般性
- 数学思维：逻辑推理 → 数学特征：数学的严谨性
- 数学语言：数学模型 → 数学特征：应用的广泛性

课标主要变化之一——核心素养导向

数学核心素养概念体系

内涵	外延(表现)			
思维品质、关键能力、情感态度价值观	构成 ("三会")	分学段表现		
	数学的眼光	高中	初中	小学
		数学抽象	抽象能力	数感
				量感
				符号意识
		直观想象	几何直观	几何直观
			空间观念	空间观念
		创新意识	创新意识	创新意识
	数学的思维	逻辑推理	推理能力	推理意识
		数学运算	运算能力	运算能力
	数学的语言	数学建模	模型观念	模型意识
		数据分析	数据观念	数据意识
		应用意识	应用意识	应用意识

■ 数学核心素养的阶段表现:

- 小学：思维以具象为主，核心素养的表现侧重于**意识，即基于经验的感悟**；
- 初中：具备了一定的抽象能力，核心素养的表现侧重于**观念，即基于概念的理解**；
- 高中：已经具有较强的抽象能力，核心素养的表现侧重于**能力，即基于理解的掌握**。

课标主要变化之一——核心素养导向

■ 为什么是“三会”？——完备性

- “三会”覆盖数学发生、发展、应用的全过程。
- “三会”能推及义务教育数学课程每一个具体的教学内容。

■ 为什么是“三会”？——大众性

- 高中数学核心素养——专业性强，不是所有人都能形成的素养
专业素养
- 义务教育数学核心素养——通俗易懂，要求所有人都应具备的基本素养
大众素养，公民素养

课标主要变化之一——核心素养导向

■ 为什么是“三会”？——贴切性

- 过去的抽象、推理、模型等非数学独有——数学眼光、数学思维、数学语言，体现数学学科特征
- 精简了条数——体现“核心”的意蕴
- 数学眼光、数学思维、数学语言，与一般意义、平常理解的素养是一致的，过去的数学抽象等表述其实是关键能力——体现“素养”的意蕴

课标主要变化之一——核心素养导向

■ 为什么是“三会”？——基础性

■ 数学眼光聚焦抽象的数量关系和空间形式，可以说“数学眼光”主要表现为数学抽象，但不能完全等同于数学抽象。数学眼光相当于数学抽象的门槛，从数学出发看问题的角度。

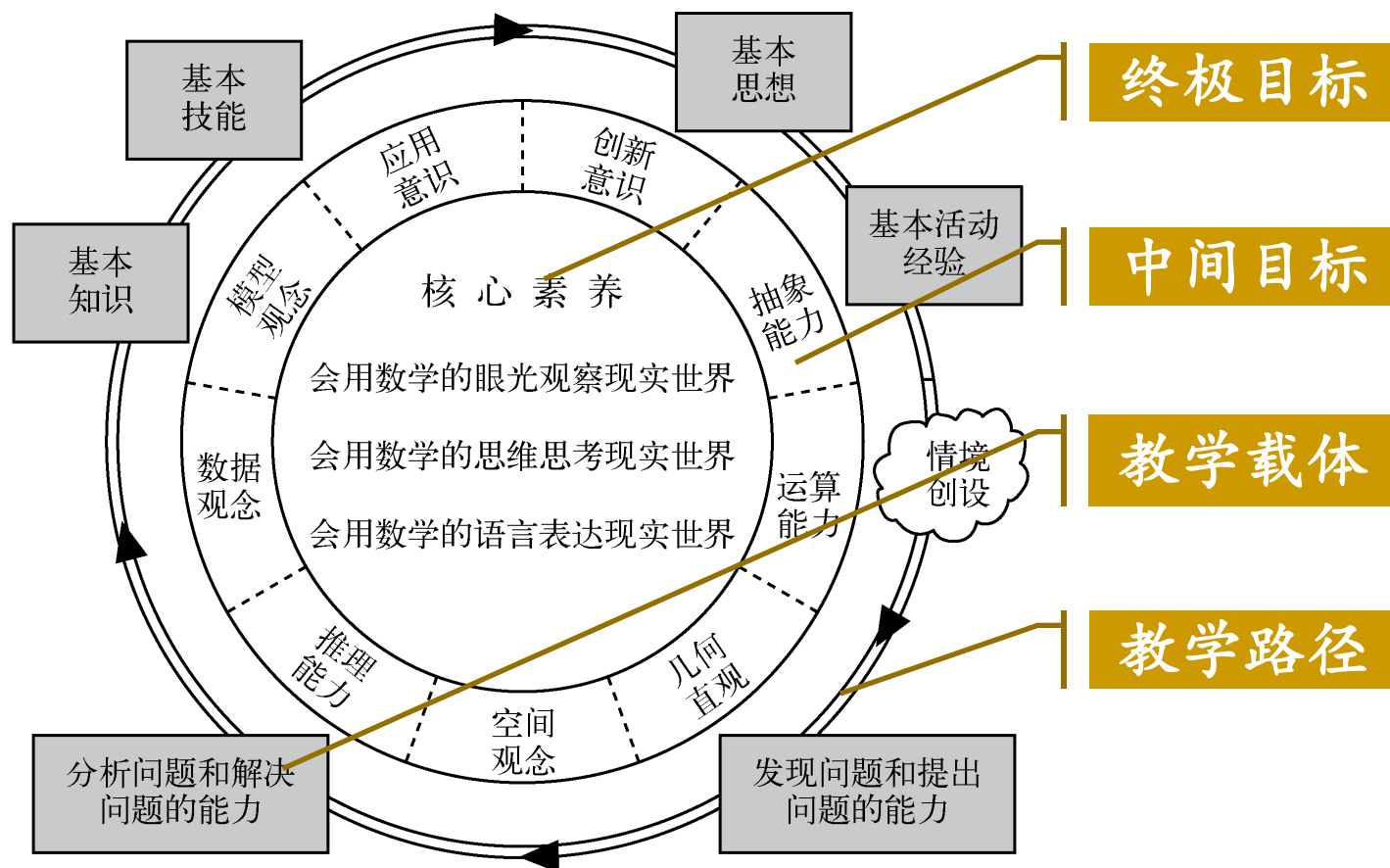
■ 数学语言是数学建模的基础

数学建模：模型建立→模型求解→模型检验→模型完善

数学语言：模型建立，包括提炼数学要素→确定关键元素→发现关键元素之间的联系→数学表达

数学建模是专业素养，数学语言才是公民素养。数学语言是数学建模的全部教育价值当中，对每一个学习者来说都是必须而且有能力达成的目标和任务，是数学建模中真正符合核心素养要求的部分。

课标主要变化之一——核心素养导向



■ 结论:

- 核心素养以四基四能为培育载体，没有脱离具体知识内容的核心素养；
- 核心素养以主要表现为具体抓手，让核心素养培育、评价具有可行性。

课标主要变化之二——内容结构化

■ 内容结构化

- 课程内容组织。重点是对内容进行结构化整合，探索发展学生核心素养的路径。（目的）
- 在教学中要重视对教学内容的整体分析，帮助学生建立能体现数学学科本质、对未来学习有支撑意义的结构化的数学知识体系。（标准）

■ 内容结构化的基本考虑

- 形式上基于抽象结构，体现学习内容的整体性，利于知识的记忆与存储、提取与应用、联想和迁移
- 理念上强调核心素养，反映学科本质的一致性，利于发挥结构和联系的力量，凸显知识本质，把握一般观念

课标主要变化之二——内容结构化

■ “数与运算”主题

- 整数、小数、分数的意义：计数单位 + 计数单位的个数
- 整数、小数、分数的运算：相同计数单位的个数的运算
- 对未来学习的迁移价值：整式、分式、二次根式的运算

■ “方程与不等式”主题

- 一元一次方程、不等式的意义：
用字母表示未知量建立相等或不等关系
- 一元一次方程、不等式的解法：
通过转化求得未知量或其范围
- 对未来学习的迁移价值：高次方程、不等式，多元方程、不等式

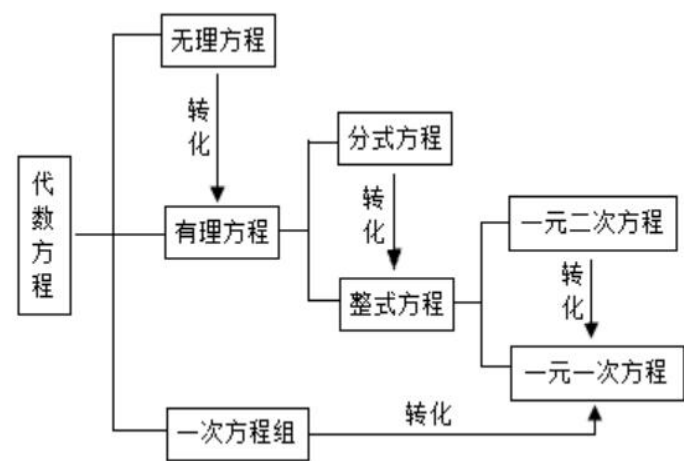


图 初中代数方程知识结构

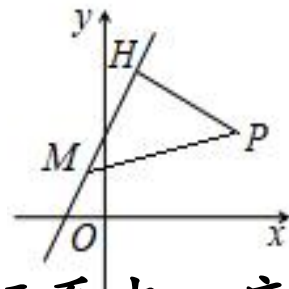
课标主要变化之二——内容结构化

■ 距离概念

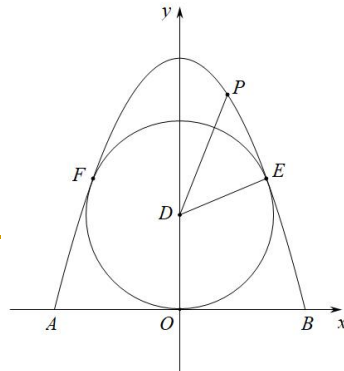
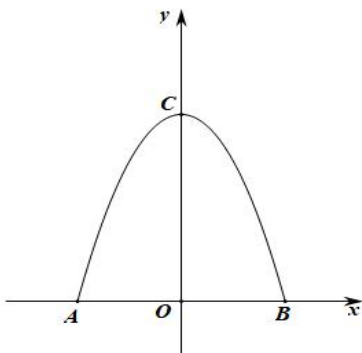
■ 点到点、点到直线、直线到直线（平行线）的距离本质：最短

■ 对未来学习的迁移价值：点到曲线、点到面、任意互不包含的两图形之间的距离

题1. 如图，求点 $P(2, 1)$ 到直线 $y=2x+1$ 的距离。



题2. 如图是一块余料，将其放置在平面直角坐标系中，底部边缘 AB 在轴上，且 $AB=8$ dm，外轮廓线是抛物线的一部分，对称轴为轴，高度 $OC=8$ dm. 现将其切割成圆，判断能否切得半径为3 dm的圆，请说明理由。



课标主要变化之二——内容结构化

■ “研究对象+”的原则：概念+性质、运算、关系

■ 数的认识+数的性质、关系、运算 → 数与运算

■ 图形的认识+测量 → 图形的认识与测量

■ 负数认识+负数的性质、关系与运算

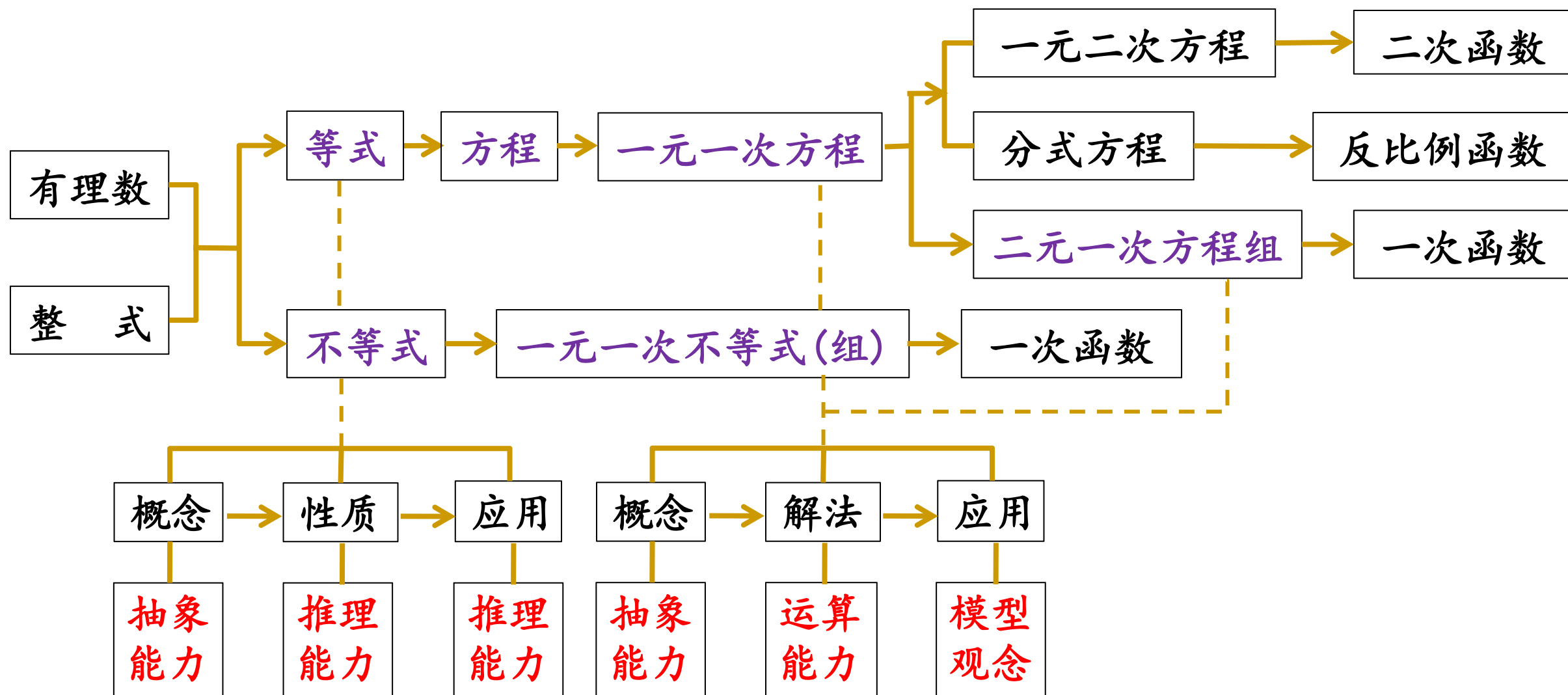
■ 方程概念+性质解法+应用

■ 欧几里得关于点、线、面的定义在数学上是不重要的，它们之所以成为讨论的中心，仅仅是因为公理述说了它们之间的关系。换句话说，无论把它们称为点、线、面，还是把它们称为桌子、椅子、啤酒瓶，最终推理得到的结论都是一样的。

——希尔伯特

■ 将数学概念的教学与“+”的内容融为一体（即抽象结构），这样的教学才有利于突出数学本质，才有利于学生形成和发展核心素养。

课标主要变化之二——内容结构化



课标主要变化之三——跨学科主题学习

■ 课程方案

- 加强课程综合，注重关联。加强课程内容与学生经验、社会生活的联系，强化**学科内知识整合**，统筹设计**综合课程**与**跨学科主题学习**。
- 综合学习的三条路径：
学科内整合学习→跨学科主题学习→综合课程的学习
- 设立**跨学科主题学习**活动，加强学科间相互关联，带动课程**综合化**实施，强化**实践性**要求。

课标主要变化之三——跨学科主题学习

■ 课程标准

- 以培养学生综合运用所学知识和方法**解决实际问题**的能力为目标，……设计情境真实、较为复杂的问题，引导学生**综合运用数学学科和跨学科的知识与方法**解决问题。
- 感受数学与科学、技术、经济、金融、地理、艺术等学科领域的融合，积累数学活动经验，体会数学的科学价值，提高发现与提出问题、分析与解决问题的能力，发展应用意识、创新意识和实践能力。
- 为什么强调跨学科主题学习：**素养导向**
 - 发展应用意识、创新意识、实践能力
 - 素养的情境性：核心素养在知识形成和知识应用的情境中形成，也只有在知识形成和知识应用的情境中真实表现。

二、教材如何修编：体现课标理念

（一）进一步突出内容结构化——1. 重修总括性内容

- 编写“数学与我们同行”“走进几何世界”两章，加强对初中数学及图形与几何领域的统领

现教材

第1章 数学与我们同行

- 1.1 生活 观察
- 1.2 活动 思考
- 1.3 交流 表达

第5章 走进几何世界

- 5.1 观察 抽象
- 5.2 运动 想象
- 5.3 转化 表达

第6章 平面图形的初步认识

- 6.1 直线、射线、线段 156
- 6.2 角 164
- 6.3 相交线 173
- 6.4 平行线 182
- 6.5 多边形 195
- 数学探究 198
- 小结与思考 199
- 复习题 200
- 综合与实践 205

原教材

第1章 数学与我们同行

- 1.1 生活 数学
- 1.2 活动 思考

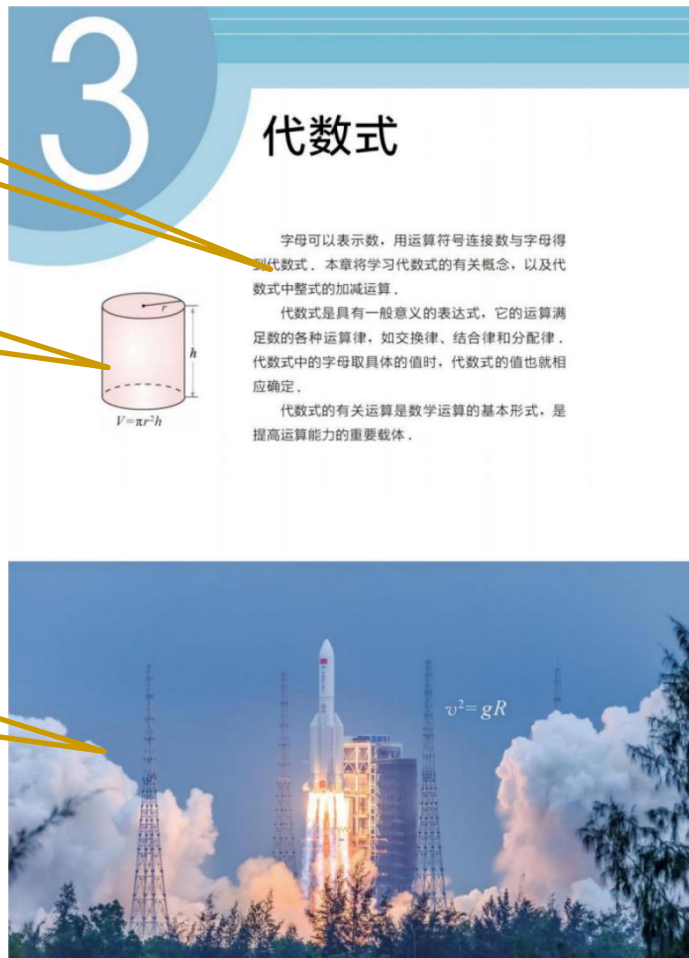
(一) 进一步突出内容结构化——1. 重修总括性内容

- 优化章引言体例，改变章头语结构，加强对每一章内容的统领

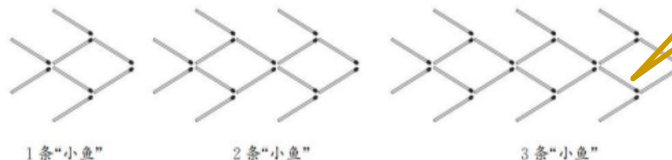
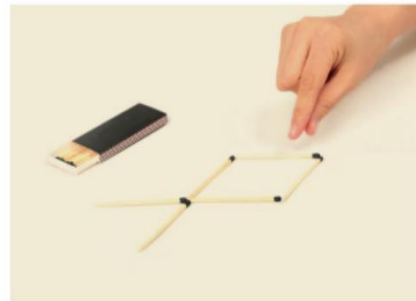
章头语

章副图

章主图



按下图的方式，用火柴棒搭“小鱼”。



- ① 搭1条、2条、3条“小鱼”各用多少根火柴棒？
- ② 按同样方式，搭20条“小鱼”要用多少根火柴棒？
- ③ 如果用 n 表示所搭“小鱼”的条数，那么搭 n 条这样的“小鱼”需要多少根火柴棒？

章头活动

（一）进一步突出内容结构化——1. 重修总括性内容

- 优化章引言体例，改变章头语结构，加强对每一章内容的统领

代数式

字母可以表示数，用运算符号连接数与字母得到代数式。本章将学习代数式的有关概念，以及代数式中整式的加减运算。

代数式是具有一般意义的表达式，它的运算满足数的各种运算律，如交换律、结合律和分配律。代数式中的字母取具体的值时，代数式的值也就相应确定。

代数式的有关运算是数学运算的基本形式，是提高运算能力的重要载体。

学什么：本章学习的主要内容和线索

怎么学：本章学习主要应用的思想方法

为什么学：本章学习的意义和价值

（一）进一步突出内容结构化——1. 重修总括性内容

- 统一“小结与思考”体例，形成结构明晰思想，引导学生将书读薄读透

小结与思考

1. 本章知识结构：



```
graph TD; A[字母表示数] --> B[代数式]; B --> C[代数式求值]; B --> D[整式]; D --> E[整式加减运算]; D --> F[单项式]; D --> G[多项式];
```

本章中，我们借助对现实情境和简单问题中数量关系的分析，理解了字母表示数的意义，认识了代数式的有关概念，学习了整式加减运算，体会了代数式表达一般规律的优越性。

2. 代数式是数、字母通过运算符号组成的表达式，代数式的值由代数式中的字母取值确定，它随字母所取值的变化而变化，用代数式可以刻画实际问题中的数量和数量关系，有助于形成和发展符号意识、抽象能力。

整式是一类特殊的代数式，整式加减运算的基础是合并同类项，熟练地掌握整式加减运算是初中阶段运算能力的重要表现。

3. 本章中，我们曾把 $5(x-2y) - 3(x-2y) + 8(x-2y) - 4(x-2y)$ 中的“ $x-2y$ ”看成一个整体，用一个字母表示后进行合并同类项，这是一种“整体代换”的方法，常常可以起到化繁为简的作用。你能举出运用这种方法的其他例子吗？

框架结构
内容线索

思想方法
关键能力

拓展引申

（一）进一步突出内容结构化——2. 适度重组相关内容

- 以遵循学生认知的逻辑为前提，按照数学知识的逻辑适度重组相关内容

现教材

第2章 有理数

2.1 正数与负数

2.2 数轴

2.3 绝对值与相反数

2.4 有理数的加法与减法

2.5 有理数的乘法与除法

2.6 有理数的乘方

2.7 有理数的混合运算

数学探究

小结与思考

复习题

综合与实践

原教材

第2章 有理数

2.1 正数与负数

2.2 有理数与无理数

2.3 数轴

2.4 绝对值与相反数

2.5 有理数的加法与减法

2.6 有理数的乘法与除法

2.7 有理数的乘方

2.8 有理数的混合运算

数学活动 算“24”

小结与思考

复习题

(一) 进一步突出内容结构化——2. 适度重组相关内容

- 以遵循学生认知的逻辑为前提，按照数学知识的逻辑适度重组相关内容

现教材

第4章 一元一次方程

4.1	等式与方程	
4.2	一元一次方程及其解法	
4.3	用一元一次方程解决问题	..
	数学探究	
	小结与思考	
	复习题	

原教材

第4章 一元一次方程

4.1	从问题到方程	
4.2	解一元一次方程	
4.3	用一元一次方程解决问题	
	数学活动 一元一次方程应用的调查	·
	小结与思考	
	复习题	

- 方程内容全部移到初中

- 小学过去：解简易方程本质还是运算；学生无法认识代数的本质，无法感受方程学习的必要性

- 初中现在：方程概念+性质解法+应用，感受方程本质和方程学习的必要性

(一) 进一步突出内容结构化——2. 适度重组相关内容

- 以遵循学生认知的逻辑为前提，按照数学知识的逻辑适度重组相关内容
- “研究对象+”的原则：概念+性质、运算、关系
 - 负数认识+负数的性质、关系与运算
 - 方程概念+性质解法+应用
- 欧几里得关于点、线、面的定义在数学上是不重要的，它们之所以成为讨论的中心，仅仅是因为公理述说了它们之间的关系。换句话说，无论把它们称为点、线、面，还是把它们称为桌子、椅子、啤酒瓶，最终推理得到的结论都是一样的。

——希尔伯特
- 将数学概念的教学与“+”的内容融为一体（即抽象结构），这样的教学才有利于突出数学本质，才有利于学生形成和发展核心素养。

（一）进一步突出内容结构化——2. 适度重组相关内容

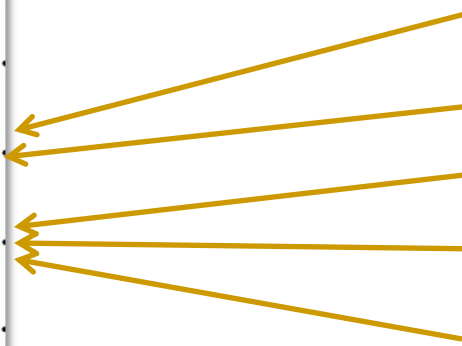
- 以遵循学生认知的逻辑为前提，按照数学知识的逻辑适度重组相关内容

现教材

第3章 代数式
3.1 字母表示数·····
3.2 代数式·····
3.3 整式的加减·····
小结与思考 ·····
复习题 ·····
综合与实践 ·····

原教材

第3章 代数式
3.1 字母表示数 ·····
3.2 代数式 ·····
3.3 代数式的值 ·····
3.4 合并同类项 ·····
3.5 去括号 ·····
3.6 整式的加减 ·····
数学活动 月历中的数学
小结与思考 ·····
复习题 ·····



(一) 进一步突出内容结构化——2. 适度重组相关内容

- 以遵循学生认知的逻辑为前提，按照数学知识的逻辑适度重组相关内容

现教材

原教材

第6章 平面图形的初步认识

6.1 直线、射线、线段
6.2 角
6.3 相交线
6.4 平行线
6.5 多边形
数学探究
小结与思考
复习题
综合与实践

第9章 图形的变换

9.1 平移
9.2 轴对称
9.3 旋转
数学探究
小结与思考
复习题
综合与实践

平面图形的初步认识

平移、旋转、翻折→全等三角形

轴对称→特殊三角形、中垂线、

角平分线

中心对称→平行四边形

轴对称、中心对称→圆

相似变换→相似三角形

后续：由总到分，三角形、四边形、圆

(综合几何体系，辅之以变换视角)

(图形变换为主线串联几何知识)

(一) 进一步突出内容结构化——2. 适度重组相关内容

- 存在为照顾学生认知的逻辑，而牺牲数学知识的逻辑的情况

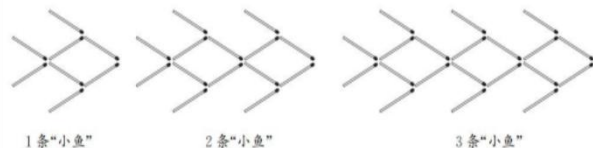
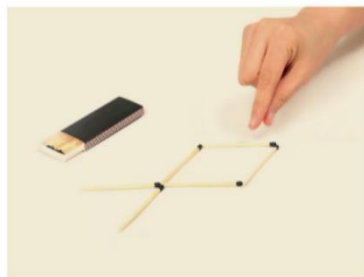
整式乘法与因式分解

- 原教材：整式乘法与因式分解集中放在同一章，体现互逆的运算关系。
- 新教材：整式乘法与因式分解分离，因式分解放至八下分式一章前面。

(一) 进一步突出内容结构化——3. 加强小初衔接

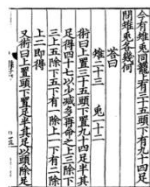
■ 小初衔接的重点在于从算术到代数的过渡

按下图的方式，用火柴棒搭“小鱼”。



- 搭1条、2条、3条“小鱼”各用多少根火柴棒？
- 按同样方式，搭20条“小鱼”要用多少根火柴棒？
- 如果用 n 表示所搭“小鱼”的条数，那么搭 n 条这样的“小鱼”需要多少根火柴棒？

小学里，我们研究过鸡兔同笼问题，它出自我国约1500年前的数学著作《孙子算经》。



《孙子算经》

- 填写下表，你知道满足题意的鸡、兔各有多少只吗？

鸡的只数	1	2	3	4	5	6	...
兔的只数	34	33	32	31	30	29	...
总足数							...

- 用字母 x 表示鸡的只数，填写下表。你可以发现哪些等量关系？请用数学式子表示。

项目	只数	足数
鸡		
兔		
合计	35	94



问题

右图中的一套紫砂壶茶具包括1把茶壶和6只茶杯。做1把茶壶需要0.6 kg的泥料，做1只茶杯需要0.15 kg的泥料。10.5 kg泥料可以做几套这样的茶具？（不计制作时的耗损）



【算术方法】

$0.6 + 6 \times 0.15 = 1.5$ (kg)，
 $10.5 \div 1.5 = 7$ (套)。
答：可以做7套茶具。

【列方程方法】

设可做 x 套茶具，根据题意，得
 $0.6x + 6 \times 0.15x = 10.5$
解这个方程，得
 $x = 7$ 。
答：可以做7套茶具。

比较小明、小丽的方法，你能说说他们是如何思考的吗？

例1

今年小明13岁，王老师45岁。再过几年小明年龄是王老师年龄的三分之一？

分析

这个问题中的等量关系：

$$\text{若干年后小明年龄} = \text{若干年后王老师年龄} \times \frac{1}{3}.$$

解

设再过 x 年小明年龄是王老师年龄的三分之一。
根据题意，得

$$13 + x = \frac{1}{3}(45 + x).$$

解这个方程，得

$$x = 3.$$

答：3年后小明年龄是王老师年龄的三分之一。



讨论

请你尝试用算术方法解例1，并与列方程方法比较，你认为列方程方法有什么优势？

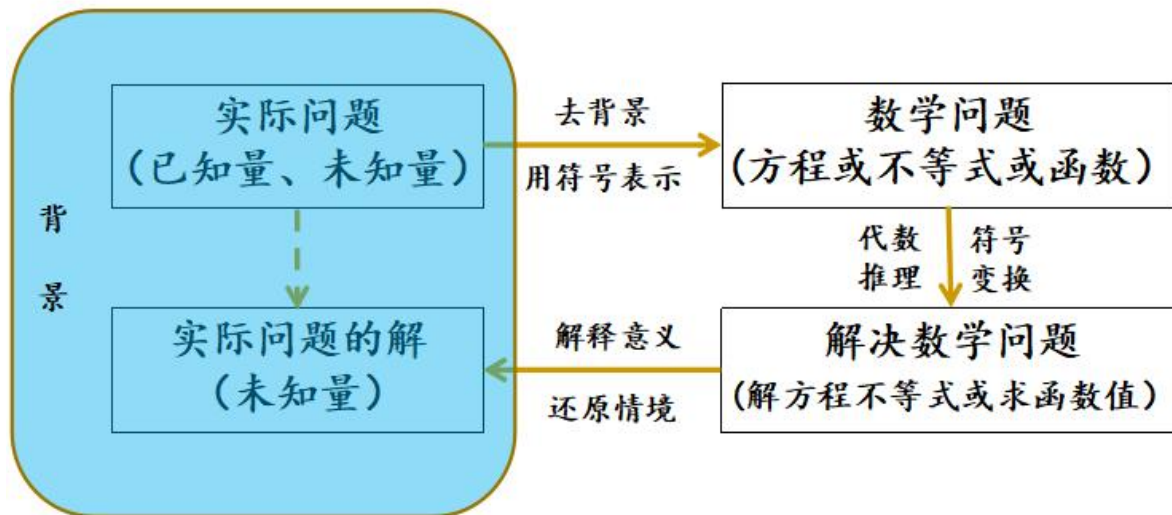
(一) 进一步突出内容结构化——3. 加强小初衔接

- 小初衔接的重点在于从算术到代数的过渡

算术思维：



代数思维：



(二) 自觉体现核心素养培养要求——1. 加强抽象能力

■ 展示概念的发生发展过程

■ 数学概念的形成过程是典型的数学抽象活动。

■ 注重引导学生在情境中抽象出数学概念，理解概念引入的**必要性**、**定义过程**以及**多元表征**，经历数学概念的发生发展的全过程，积累从具体到抽象的活动经验，发展抽象能力。

在日常生活中，有各种各样的数量关系，其中许多是相等关系。例如：

天平左边托盘中有 2 袋食盐，每袋 x g，右边托盘中有 3 袋白糖，每袋 y g，天平平衡表示 $2x=3y$ ；

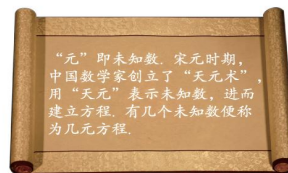
长方形的长和宽分别为 x, y ，面积为 S ，则 $S = xy$ ；

购买 12 支铅笔和 3 本笔记本共花费 58 元，铅笔每支 a 元，笔记本每本 b 元，则 $12a + 3b = 58$ 。

你还能举出一些生活中这样的例子吗？

像 $2x=3y$ ， $S=xy$ ， $12a+3b=58$ 这样，表示相等关系的式子叫作**等式**(equation)。

在上一节认识的方程中，像 $2x+1=x+5$ ， $x+\frac{1}{7}x=19$ 这样等号两边都是整式，且只含有一个未知数，未知数的次数都是 1 的方程，叫作**一元一次方程**(linear equation with one unknown)。



轴对称的概念

轴对称是自然界和日常生活中的常见现象。



活动

1. 在一张 A4 纸上滴一滴墨汁，将纸对折、压平，然后重新展开，你有什么发现？
2. 将一张透明纸对折，在折痕的一边画一个三角形，在折痕的另一边描出这个三角形，展开透明纸，你有什么发现？

一般地，将一个平面图形沿某条直线翻折后得到另一个图形的平面变换叫作**轴对称**(line symmetry)，这条直线叫作**对称轴**(axis of symmetry)，此时称这两个图形成轴对称。

如图 9-12， $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，直线 l 是对称轴，点 A 的对应点是 A' ，也叫作对称点，线段 $A'B'$ 是线段 AB 的对应线段， $A'B' = AB$ ， $\angle A'$ 是 $\angle A$ 的对应角， $\angle A' = \angle A$ 。

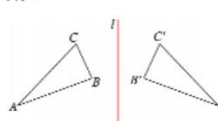


图 9-12

创设问题情境

观察

数学化

构建图形或数量关系

定义

表达

形成数学概念

(二) 自觉体现核心素养培养要求——1. 加强抽象能力

■ 通过特例探究规律，归纳数学原理、法则、定理

■ 教材设计一些奠基性活动，使学生通过归纳、类比，自主发现规律，形成原理、法则、定理。

活动

(1) 如图 4-2(1)，天平平衡，对天平两边进行如图 4-2(2) 所示的操作，可以在保持天平平衡的状态下称出一个小球的质量。请写出每一步操作对应的等式，并解释对应等式的实际意义，你能否说出等式是如何变形的？你能说明变形的合理性吗？

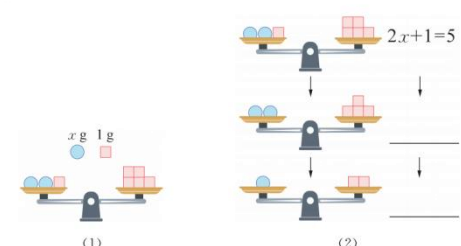


图 4-2

(2) 如图 4-3，仿照上述过程设计天平操作过程，求出小球的质量 y ，写出每一步操作对应的等式，并解释等式的变形过程。



图 4-3

根据上面的活动，我们发现：

等式的基本性质



如图 8-1，几块型号相同的液晶屏拼接在一起组成“电视墙”，如何计算这块“电视墙”的面积？

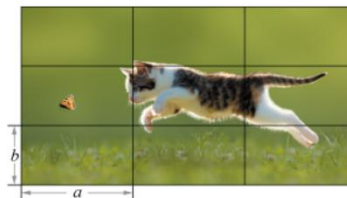


图 8-1

“电视墙”是一个长方形。

“电视墙”由 9 个小长方形组成。

如果把图 8-1 的“电视墙”看成一个大长方形，那么它的长为 $3a$ 、宽为 $3b$ ，面积为 $3a \cdot 3b$ 。

如果把图 8-1 的“电视墙”看成是由 9 个小长方形组成的，那么它的面积为 $9ab$ 。

由此得到 $3a \cdot 3b = 9ab$ 。

一般地，可以运用乘法交换律、结合律计算两个单项式的乘积。对于任意的 a, b ，

$$\begin{aligned} & 3a \cdot 3b \\ &= 3 \times 3 \cdot a \cdot b && \left. \begin{array}{l} \text{乘法交换律} \\ \text{乘法结合律} \end{array} \right\} \\ &= (3 \times 3) \cdot (a \cdot b) \\ &= 9ab. \end{aligned}$$

字母像数一样进行运算！



(二) 自觉体现核心素养培养要求——1. 加强抽象能力

■ 注重从自然语言到符号表征的转化

- 让学生循序渐进地感受数学符号体系的一般性，完成从算术思维到代数思维的过渡。

果农通过网络直播宣传，使物美价廉的水果畅销全国各地。一只快递包装纸箱的质量为 1 kg，当放入苹果(每个苹果的质量约为 0.25 kg)后，纸箱和苹果的总质量不能超过 10 kg。这只纸箱内最多能装多少个苹果？



问题中数量之间的不等关系：

$$\text{纸箱质量} + \text{苹果质量} \leq 10 \text{ kg.}$$

可以通过设未知数，列一元一次不等式解决问题。解答过程如下：

设这只纸箱内装了 x 个苹果，
根据题意，得

$$0.25x + 1 \leq 10.$$

1. 设一个合适的未知数
2. 根据数量之间的不等关系列一元一次不等式

对于任意一个数，加上一个数后，和比原来的数大还是小？为什么？

探究

七年级上册“有理数的加法”

两个连续奇数的和有什么特点？你能说明理由吗？

探究

$1+3=4,$
 $3+5=8,$
 $5+7=12$
 $\vdots$

两个连续奇数
可以表示为：
 $2n-1, 2n+1.$

七年级上册“代数式”

例 2 证明：三个连续自然数之和都能被 3 整除.

证明 设这三个自然数分别为 $k-1, k, k+1$ ，其中 k 是自然数且 $k \geq 1$.
所设三个自然数的和为 $(k-1) + k + (k+1) = 3k$ ，
 $\therefore 3k$ 能被 3 整除，
 $\therefore$ 这三个自然数的和能被 3 整除.

七年级下册“证明”

(二) 自觉体现核心素养培养要求——2. 加强推理能力

- 图形与几何：局部完善演绎体系，规范几何推理与证明
 - 使学生明晰知识的来龙去脉，理解推理与证明的基础、必要性以及逻辑性，加强推理过程的准确性与严谨性。
- 例如，在七年级下册“证明”的“12.4 定理”中，通过多边形内角和与外角和定理的猜想、探究、推理过程，构建局部演绎体系：

平行线的基本事实

→ 三角形内角和定理

→ 多边形内角和定理

→ 多边形外角和定理

- 又如，在“三角形”中，以综合几何为主线展开研究图形的性质，用“讨论”或“卡通语”给出图形变换的研究视角和思考方式。

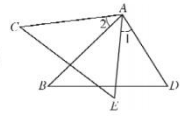
例 2 已知：如图 1-17， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ， $\angle 1 = \angle 2$ 。
求证： $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ 。

分析 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 已有两组对应边相等，只要证它们的夹角相等。

证明 $\because \angle 1 = \angle 2$ ，
 $\therefore \angle 1 + \angle BAE = \angle 2 + \angle BAE$ (等式的性质)，
即 $\angle BAD = \angle CAE$ 。
在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，
 $\begin{cases} AB = AC, \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AD = AE, \end{cases}$
 $\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS)。

图 1-17

$\triangle ABD$ 绕点 A 旋转后可以与 $\triangle ACE$ 重合。



(二) 自觉体现核心素养培养要求——2. 加强推理能力

■ 数与代数：逐步加强代数推理

- 数与式：逐步加强基于运算规则和运算的代数推理，利用运算律的普遍意义理解与推导运算法则和运算的合理性。

例 2 证明：三个连续自然数之和都能被 3 整除。

证明 设这三个自然数分别为 $k-1$, k , $k+1$, 其中 k 是自然数且 $k \geq 1$.
所设三个自然数的和为 $(k-1) + k + (k+1) = 3k$,
 $\because 3k$ 能被 3 整除,
 $\therefore$ 这三个自然数的和能被 3 整除。

一般地，我们有：

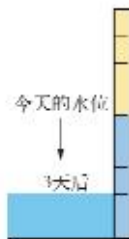
如果 $a+b=0$ ，那么 a , b 互为相反数。

13. 已知两数 a, b , 判断 $a-b$ 与 $b-a$ 是否互为相反数，并说明理由。

有理数的乘法



在水文观测中，常常关注水位的高低与升降。如果水位每天下降 4 cm，那么如何计算 3 天后的水位变化？



3 天后的水位比现在的水位下降 12 cm。如果规定水位上升记为正，下降记为负，那么我们有

$$(-4) \times 3 = -12.$$

因为 $4 \times 3 = 12$ ，所以 $(-4) \times 3$ 是 4×3 的相反数。
我们也可以用相反数的意义来说明 $(-4) \times 3 = -12$ 。
因为 $(-4) \times 3 + 4 \times 3 = [(-4) + 4] \times 3 = 0 \times 3 = 0$ ，
所以 $(-4) \times 3$ 是 4×3 的相反数，
所以 $(-4) \times 3 = -12$ 。

当数扩展到有理数后，乘法分配律仍然适用！



如何计算 $4 \times (-3)$, $(-4) \times (-3)$?



$4 \times (-3)$ 好像是 4×3 的相反数。

$(-4) \times (-3)$ 好像是 $(-4) \times 3$ 的相反数。



(二) 自觉体现核心素养培养要求——2. 加强推理能力

■ 数与代数：逐步加强代数推理

■ 方程与不等式：加强**基于基本事实与性质的代数推理**（三段论推理）。

■ 推理依据：等式（不等式）的基本性质，等式（不等式）的传递性，等。

例 3 如果 $a-b < 0$ ，那么是否一定有 $a < b$ ？请说明理由。

解

如果 $a-b < 0$ ，那么 $a < b$ 。理由如下：

因为 $a-b < 0$ ，

在不等式的两边同时加上 b ，得

$a-b+b < 0+b$ （不等式的基本性质 1），

所以 $a < b$ 。

如果 $a < b$ ，同样
能说明 $a-b < 0$ 。



3. 无论 a 为何值，是否一定有 $a+3 > a$ ？请说明理由。

6. 用不等式的基本性质说明 $a-1 < a$ 。

7. 已知 $a < 1$ ，是否一定有 $\frac{a+1}{2} < 1$ ？请说明理由；

已知 $a < b$ ，是否一定有 $\frac{a+b}{2} < b$ ？请说明理由。

14. 已知 $a > b > 0$ ，试比较 a^2 与 b^2 的大小，并说明理由。

2. 判断命题“如果 $a < b, c < d$ ，那么 $a+c < b+d$ ”的真假性。

因为 $a < b$ ，

在不等式两边都加上 c ，得

$a+c < b+c$ 。

因为 $c < d$ ，

在不等式两边都加上 b ，得

$b+c < b+d$ 。

因为 $a+c < b+c$ ， $b+c < b+d$ ，

所以 $a+c < b+d$ 。

命题的条件

不等式的基本性质

命题的条件

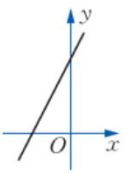
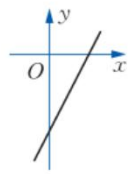
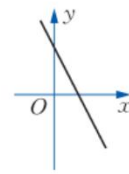
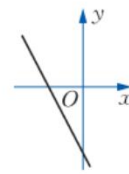
不等式的基本性质

命题的结论

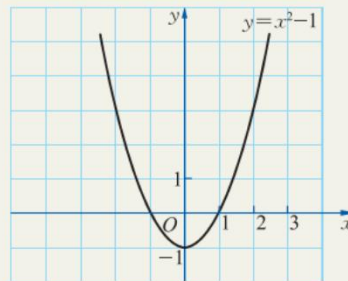
(二) 自觉体现核心素养培养要求——2. 加强推理能力

■ 数与代数：逐步加强代数推理

- 函数：基于数形结合的推理，建立代数推理与几何直观的联系。
- 与几何推理相比，代数推理更为抽象，因此，教材在函数部分设计了一些数形结合的活动，为代数推理提供几何直观。

函数表达式	$y=kx+b(k>0)$		$y=kx+b(k<0)$	
	$b>0$	$b<0$	$b>0$	$b<0$
函数图象				
图象经过的象限	一、二、三	一、三、四	一、二、四	二、三、四
函数变化趋势	y 随 x 的增大而增大		y 随 x 的增大而减小	

例如，根据二次函数 $y=x^2-1$ 的图象，我们可以“看”出并“推”出函数的哪些图象特征和性质呢？



“看”	“推”
图象开口向上；抛物线有最低点，最低点为 $(0, -1)$	由 $y = x^2 - 1 \geq -1$ ，可知函数的最小值是 -1 ，此时 $x=0$
抛物线有对称轴，对称轴是 y 轴	设 x_1, x_2 对应的函数值分别为 y_1, y_2 ，则 $y_1 = x_1^2 - 1, y_2 = x_2^2 - 1$ 。当 $x_1 = -x_2$ 时， $x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1$ ，所以 $y_1 = y_2$
图象上的点距离对称轴越“远”，点的位置越“高”	当 $x > 0$ 时， x 越大， x^2 越大，所以 $y = x^2 - 1$ 越大，即 y 随 x 的增大而增大；当 $x < 0$ 时， x 越小， $y = x^2 - 1$ 越大，所以 y 随 x 的增大而减小

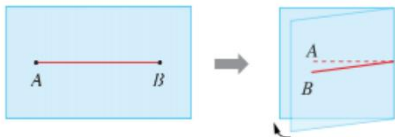
(二) 自觉体现核心素养培养要求——3. 加强几何直观

■ 通过折纸、剪拼、画图等操作活动积累直观经验

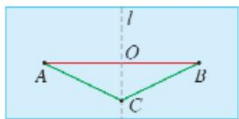


活动

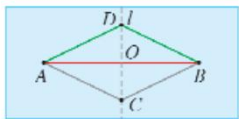
1. 在长方形透明纸上画线段 AB ，对折纸片，使点 A, B 重合。



2. 展开纸片，记折痕为 l ，将 l 与线段 AB 的交点记为点 O ，在 l 上任取一点 C ，连接 CA, CB 。



3. CA 和 CB 相等吗？若点 D 满足 $DA = DB$ ，点 D 一定在直线 l 上吗？



讨论

在上述活动得到的圆形中， $\triangle COA$ 与 $\triangle COB$ 关于直线 l 成轴对称吗？还可以找出哪些成轴对称的三角形？

例 1

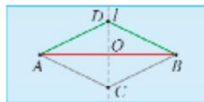
尺规作图：如图 9-16，已知线段 AB ，作线段 AB 的垂直平分线。



图 9-16

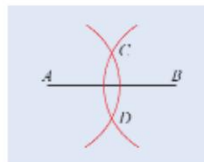
分析

由上述活动得到启发，要作线段 AB 的垂直平分线 l ，关键是确定点 C 和点 D 的位置。因为 CA 与 CB, DA 与 DB 都关于 l 对称，所以 $CA = CB, DA = DB$ 。

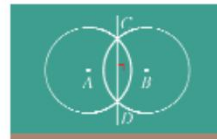
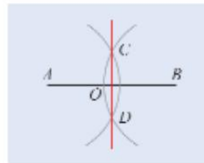


作法

- ① 分别以点 A, B 为圆心，取大于 $\frac{1}{2}AB$ 长为半径，作两段相交的弧，交点记为 C, D 。



- ② 作直线 CD ，与 AB 交于点 O 。直线 CD 即为所求。



为什么弧的半径要大于 $\frac{1}{2}AB$ ？



(二) 自觉体现核心素养培养要求——3. 加强几何直观

■ 利用尺规作图探讨几何图形的存在性与结构特征

为一个三角形茶几配一块能与桌面完全重合的玻璃，需要测量哪些量？

从数学的角度看，就是要作一个与给定的三角形全等的三角形。



只给定两条边或两个角可以作出无数个三角形，条件肯定不够。

只给定一条边和一个角，也无法确定这个三角形。



三角形中有三条边、三个角，给定三角形中的哪些条件就可以作出一个与之全等的三角形呢？



活动

1. 用一张长方形纸剪一个直角三角形，怎样剪才能使每个人得到的直角三角形都能够重合？

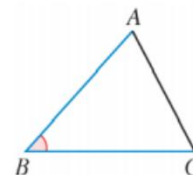
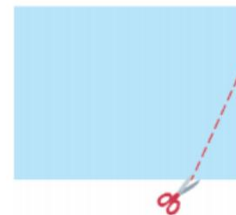


图 1-15

2. 如图 1-15，给定 $\triangle ABC$ ，在透明纸上用直尺和圆规作 $\triangle A'B'C'$ ，使得 $\angle B' = \angle B$ ， $A'B' = AB$ ， $B'C' = BC$ 。这两个三角形全等吗？

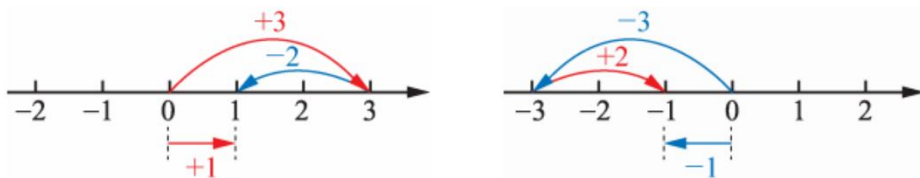
(二) 自觉体现核心素养培养要求——3. 加强几何直观

■ 加强数形结合，建立代数研究对象的几何直观

2. 两个加数的符号不同．如

$$(+3)+(-2)=(+1), (-3)+(+2)=(-1).$$

此时，和的符号与绝对值较大的加数的符号一致，和的绝对值等于较大的绝对值减去较小的绝对值(图 2-13)．



平方差公式



活动

1. 如图 8-6(1)，在边长为 a 的正方形纸片上剪去一个边长为 b ($b < a$) 的小正方形，计算剩余部分的面积．

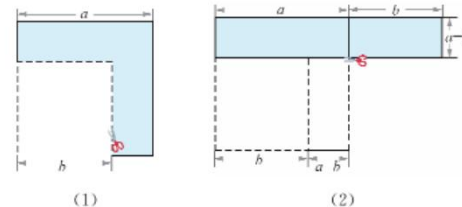


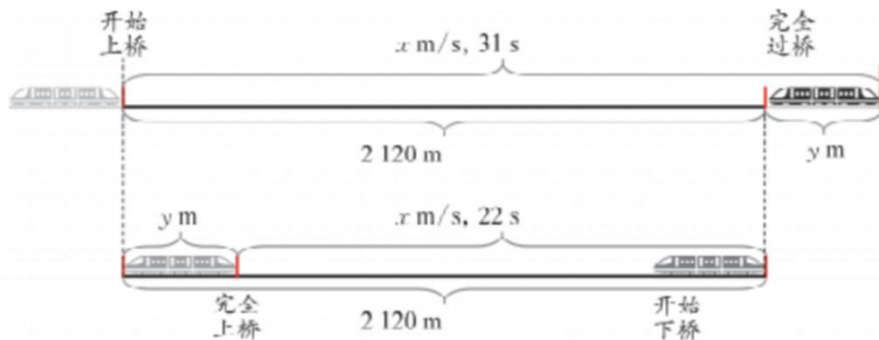
图 8-6

2. 如图 8-6(2)，将剩余部分剪开拼成一个长方形，计算这个长方形的面积．
3. 由上述操作，你能得到怎样的等式？
4. 你还有其他方法计算剩余部分的面积吗？

(二) 自觉体现核心素养培养要求——3. 加强几何直观

- 充分使用直观工具表达数量关系，运用几何直观解决问题
 - 在各个内容领域都尽可能引导学生利用直观工具（如数轴、坐标系、几何图形、线形图、表格、树形图、流程图）分析问题、解决问题。

设列车的平均速度为 x m/s，列车的长度为 y m，可以画出如图 10-1 所示的线形示意图，分析数量关系：



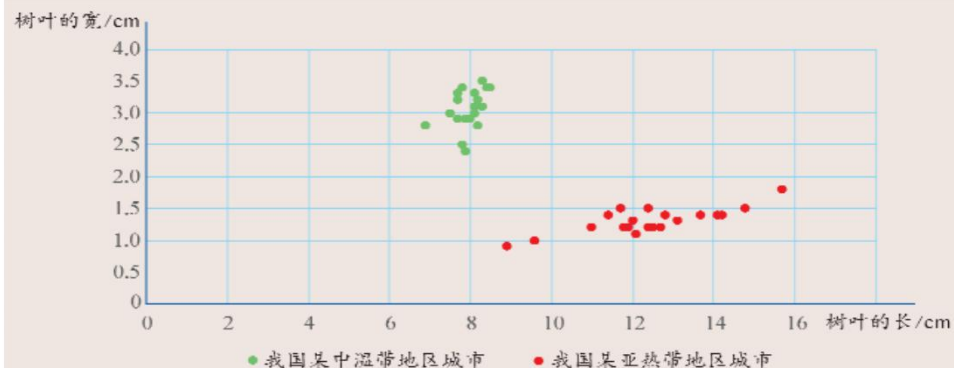
设购买“冰墩墩” x 个，“雪容融” y 个，可以列表分析数量关系：

类型	“冰墩墩”	“雪容融”	合计
单价/（元/个）	48	38	—
个数/个	x	y	10
花费/元	$48x$	$38y$	420

(二) 自觉体现核心素养培养要求——4. 发展数据观念

- 通过有意义的统计活动发展学生的数据观念。
 - 强调数据处理的实际背景与意义。
 - 为学生提供基于数据独立思考、做出决策的机会。
 - 通过统计案例，使学生经历相对完整的统计活动。

2. 有人通过调查，统计不同地区柳树叶的长与宽，绘制成如图1所示的统计图。分析数据，你能得到哪些结论？



柳树叶的长与宽

图1

6.3 统计案例：货比三家

购物时，人们常说“货比三家”。在大数据时代，统计分析是一种有效的比较方法。

小明家准备购买一辆新能源汽车，收集了A，B，C三种品牌新能源汽车销售的有关数据。如何根据数据选择品牌呢？



(二) 自觉体现核心素养培养要求——5. 加强模型观念

■ 设计基于真实情境和真实问题的应用问题。

8. 港珠澳大桥是连接香港、珠海、澳门的超大型跨海通道，其中技术难度最高的是桥梁、隧道、人工岛组合的主体工程。已知在这个主体工程中，隧道长度比桥隧总长的 $\frac{1}{4}$ 少0.7 km，桥梁长度比桥隧总长的一半多8.1 km，求主体工程中的桥梁长度和隧道长度。



(第8题)

果农通过网络直播宣传，使物美价廉的水果畅销全国各地。一只快递包装纸箱的质量为1 kg，当放入苹果(每个苹果的质量约为0.25 kg)后，纸箱和苹果的总质量不能超过10 kg。这只纸箱内最多能装多少个苹果？



为了方便运输和销售，生产企业常把相同的纸杯叠放成一摞进行包装。当一摞纸杯的个数分别是5, 10, 15, 20, 25时，每摞纸杯的总高度分别是多少？



一摞纸杯的高度和哪些量有关系？

每增加一个纸杯，总高度的增加值相同。



(二) 自觉体现核心素养培养要求——5. 加强模型观念

■ 设计基于真实情境的跨学科综合与实践活动。

1. 为健美运动员配制早餐。

某健美运动员在赛前第 10 周至赛前第 3 周训练早餐的饮食计划为蛋清、燕麦、500 mL 水和其他营养补充剂。他的蛋白质需求为 45 g，碳水化合物需求为 100 g。请你根据蛋清和燕麦的营养成分表（表 1），确定他的早餐中蛋清和燕麦的质量。

表 1 蛋清和燕麦的营养成分

食物	蛋白质	碳水化合物
100 g 蛋清	12.0 g	1.5 g
100 g 燕麦	17.0 g	80.0 g

2. 进一步探究健美运动员的饮食计划。

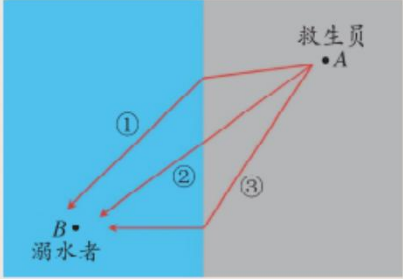
开展小组活动，根据某健美运动员在赛前第 10 周至赛前第 3 周的午餐与晚餐的营养摄入要求（表 2）和食物的营养成分表（表 3），为他配制午餐和晚餐。

表 2 某健美运动员午餐和晚餐的营养摄入

用餐	蛋白质	碳水化合物	脂肪
午餐	50 g	60 g	8 g
晚餐	60 g	140 g	10 g

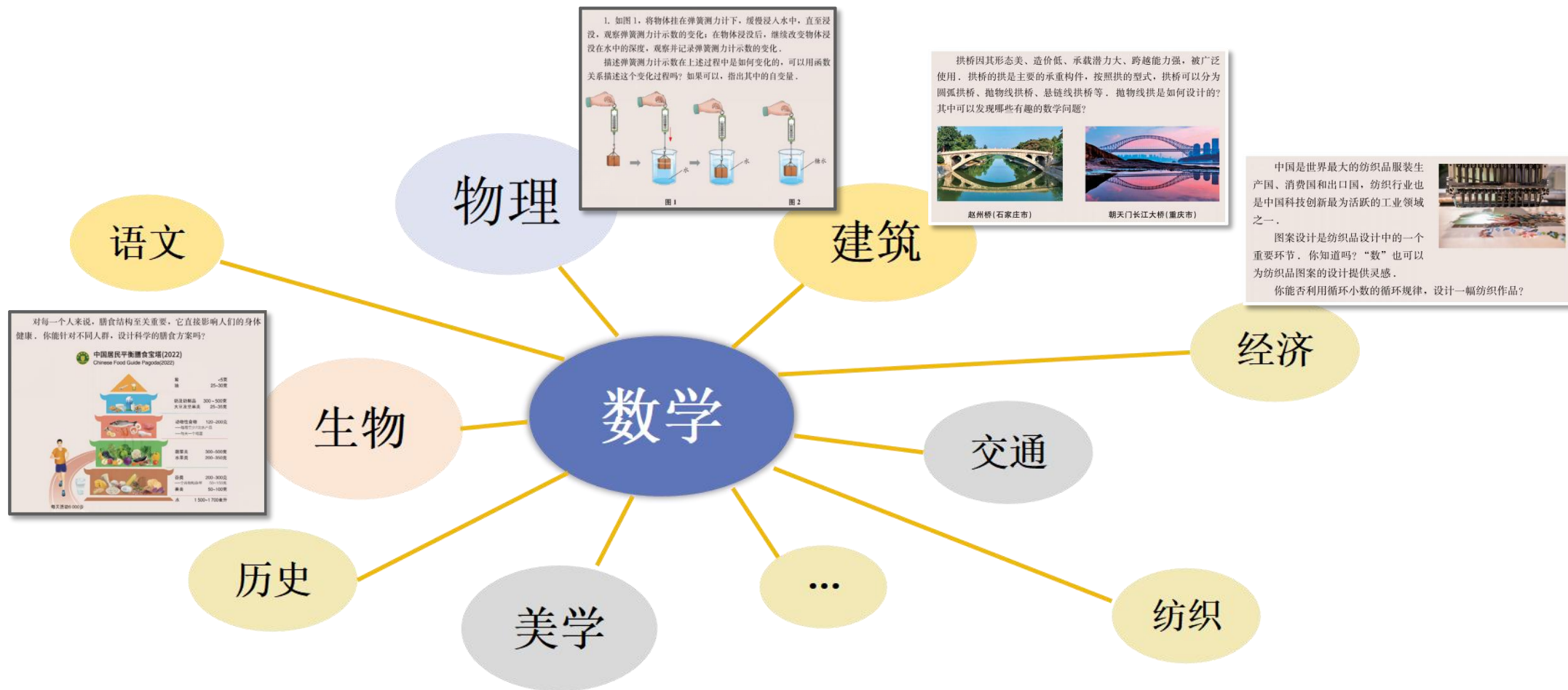
2. 溺水后的黄金救援时间只有几分钟。当救生员发现溺水者时，选择怎样的路径可以最快到达溺水者身边？

某位救生员在海滩上的跑步速度与其在海水中的游泳速度的比例约为 6 : 1。如图 2，判断救生员应选择①，②，③中的哪条路径，并说明理由。



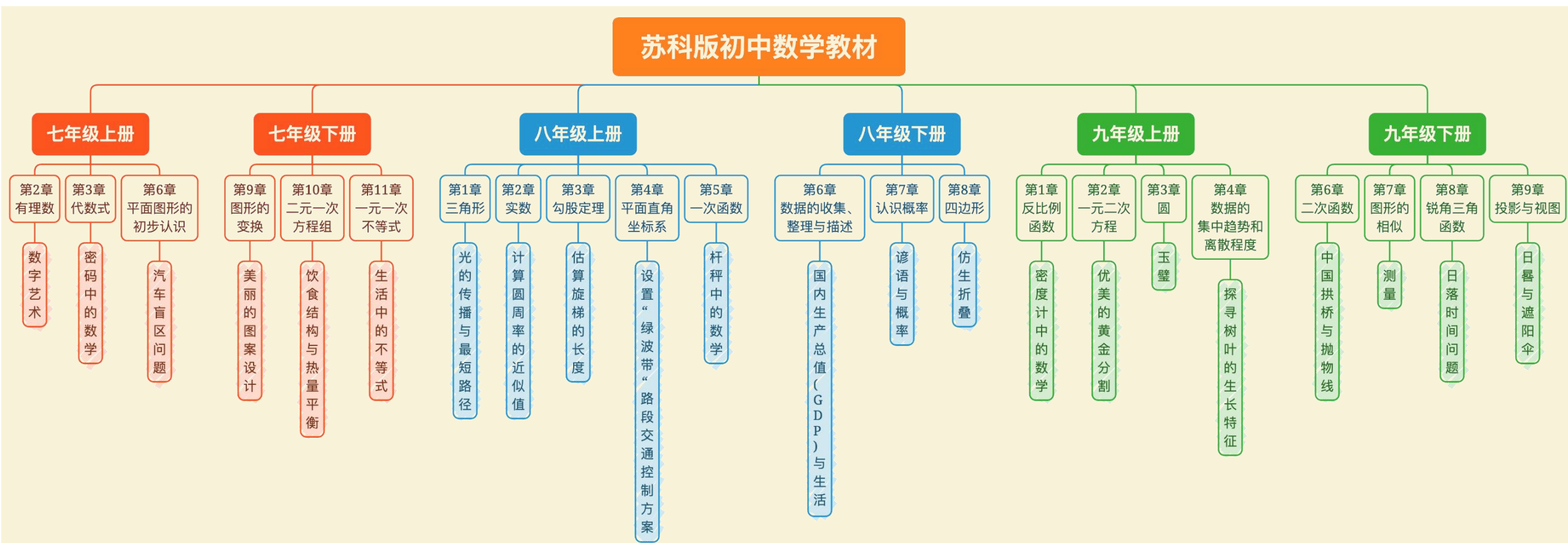
(三) 全新编写综合与实践活动——编写思路

- 以数学为本, 重视与其他学科的联系。



(三) 全新编写综合与实践活动——编写思路

- 突出数学本质，重视与相关知识的联系。



（三）全新编写综合与实践活动——编写体例

■ 问题情境 → 学习任务 → 交流展示 → 应用拓展

综合与实践

数字艺术

一、问题情境

中国是世界最大的纺织品服装生产国、消费国和出口国，纺织行业也是中国科技创新最为活跃的工业领域之一。



图案设计是纺织品设计中的一个重要环节，你知道吗？“数”也可以为纺织品图案的设计提供灵感。

你能否利用循环小数的循环规律,设计一幅纺织作品?

二、学习任务

$\frac{1}{13}=0.\dot{0}7692\dot{3}$, 如图 1, 将 $0.\dot{0}7692\dot{3}$ 顺时针螺旋排列填入对应的方格内, 然后用不同颜色表示各个数字, 最后将颜色填充到方格, 就得到了“ $\frac{1}{13}$ ”的图案.

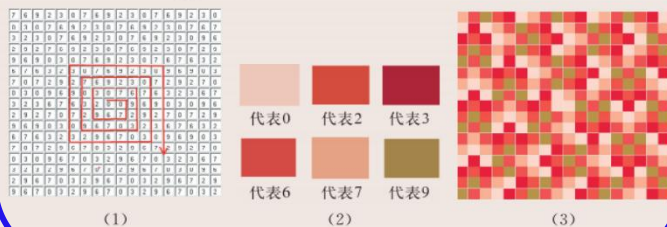


图 1

数的循环节越长, 呈现的图案越丰富 (图 2)。

 $\frac{1}{19}$ (不同配色, 顺时针螺旋排列) $\frac{1}{17}$ (顺时针蛇形排列) $-\frac{1}{17}$ (逆时针蛇形排列)

图 2

1. 请你仿照上述方式, 设计 $\frac{1}{27}=0.\dot{0}3\dot{7}$ 的图案.

- (1) 选用 10×10 的方格纸;
 - (2) 在方格纸上按照顺时针螺旋排列填写 $0.\dot{0}3\dot{7}$;
 - (3) 每个小组自行选用不同的颜色分别代表 0, 3 和 7;
 - (4) 用不同颜色填充方格, 即可得到“ $\frac{1}{27}$ ”的图案.
2. 任意取一个有理数, 设计一幅图案.

三、交流展示

以小组为单位，展示、解读本组作品，并讨论交流：

- (1) 在循环小数和配色方案都相同的情况下, 数字按顺时针螺旋排列和按逆时针螺旋排列得到的图形之间有什么关系?
- (2) 在设计图案时, 还可以用哪些方法排列循环小数循环节的
数字?

四、应用拓展

1. 在数字绘画和设计中,常使用“色轮”(图 3)进行色彩搭配,“色轮”中的每一种颜色都可以用数字表示。查阅资料,了解“色轮”的原理与应用。
2. 查阅资料,了解数学在纺织工程技术创新中的应用,并与同学交流。



图 3

(三) 全新编写综合与实践活动——编写体例

■ 问题情境：

■ 真实性，相关性，开放性，育人性，创新性

一、问题情境

中国是世界最大的纺织品服装生产国、消费国和出口国，纺织行业也是中国科技创新最为活跃的工业领域之一。

图案设计是纺织品设计中的一个重要环节。你知道吗？“数”也可以为纺织品图案的设计提供灵感。

你能否利用循环小数的循环规律，设计一幅纺织作品？



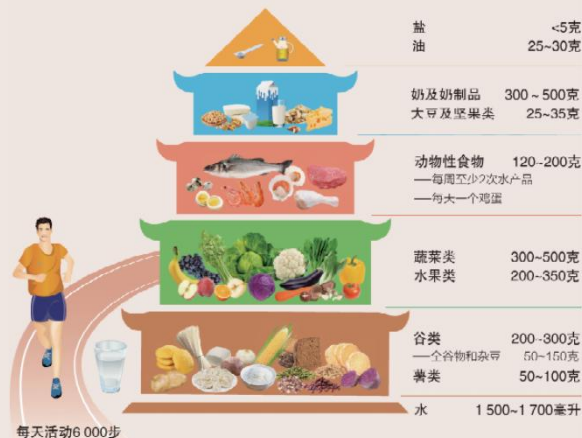
七上 数字艺术

一、问题情境

对每一个人来说，膳食结构至关重要，它直接影响人们的身体健康。你能针对不同人群，设计科学的膳食方案吗？



中国居民平衡膳食宝塔(2022)
Chinese Food Guide Pagoda(2022)



七下 膳食结构与热量平衡

一、问题情境

生活中有大量随机现象，数学家拉普拉斯(P.-S. Laplace, 1749—1827)说：生活中最重要的问题，绝大部分其实只是概率问题。

自古以来人们就会根据经验对随机现象形成判断，这种基于经验的判断往往以谚语的形式流传，如“夜里星光明，明朝依旧晴”“朝霞不出门，晚霞行千里”“大雁不过九月九，小燕不过三月三”等。



生活中，有哪些和随机现象有关的谚语？这些谚语和概率有怎样的联系？

八下 谚语与概率

(三) 全新编写综合与实践活动——编写体例

■ 学习任务:从开放程度看有两种形态

■ 活动的过程性

■ 任务的开放性

二、学习任务

1. **查询资料**. 了解 GDP 的经济学含义.
2. **收集数据**. 通过国家统计局官方网站或者《中国统计年鉴》查询 GDP 数据, 数据范围可以是全国的, 也可以是部分地区的, 或者是某一个时间阶段的.
3. **整理描述数据**. 根据收集的数据, 列出统计表, 选择合适的统计图描述这些数据. 你有什么发现?
4. **分析数据**. 为了解最近十年 GDP 随时间变化的大致趋势, 建立以年份为横坐标, GDP 为纵坐标的坐标系, 并且画出对应的点, 得到散点图.
5. **预测**. 根据散点图, 预测未来的 GDP 发展趋势.
6. **应用**. 在国家统计局官方网站或者《中国统计年鉴》中查询其他统计数据的情况, 分析此数据和 GDP 的关系.

八下 国内生产总值 (GDP) 与生活

二、学习任务

1. 整理课本上出现的关于测量的问题. 你还能提出哪些测量问题?

2. 请利用图形相似的知识解决下面的问题:

甲、乙两位同学在操场上遥遥相距. 已知甲同学臂长为 60 cm, 大拇指长为 6 cm, 乙同学的身高为 180 cm. 甲同学站在操场上向正前方伸直手臂, 保持大拇指竖直, 视线从大拇指边缘穿过观察远处的乙同学, 发现视野中乙同学的身高大概是拇指高度的五分之一, 如图 1 所示.

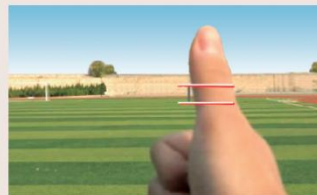


图 1

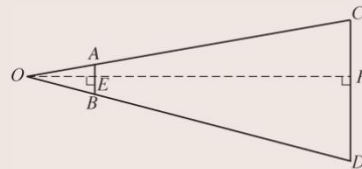


图 2

(1) 在图 2 中, O 表示视点, OE 表示臂长, CD 表示乙同学的身高, 则 OF 表示什么? AB 的实际长度是多少?

(2) 估算甲、乙之间的距离.

3. 测量距离的工具和方法有很多. 如图 3, 你有哪些方法测量河对岸的两个目标 A, B 之间的距离?

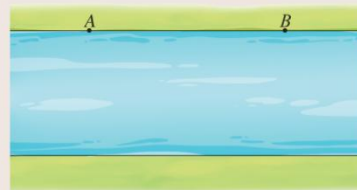


图 3

九下 测量

（三）全新编写综合与实践活动——编写体例

■ 学习任务：

- 从活动内容看：数学活动，实践活动
- 从组织形式看：个人活动，小组活动

（2）计算旋梯扶手长度。

通过小组讨论，得到求旋梯扶手长度 l 的方法和公式，并计算出旋梯扶手长度 l 。

（3）改进计算公式。

观察图 1，旋梯的中间位置有一个平台，将旋梯分成两段，如果该平台长约为 0.8 m，请据此修正旋梯扶手长度的计算方法与公式。

八上 估算旋梯的长度

二、学习任务

请你取一张 A4 纸，按照下列步骤操作。

（1）将 A4 纸长边 7 等分、短边 5 等分，然后，沿短边折成手风琴状，接着，沿着长边以一定角度折叠，确保边线平行。



八下 仿生折叠

（三）全新编写综合与实践活动——编写体例

■ 交流展示：

■ 重视独立思考与合作交流相结合，强调学习的主动性

三、交流展示

1. 基于以上操作，思考并交流下列问题。

(1) 按上述方式折叠后的 A4 纸面积缩小了多少？

(2) 相邻折痕构成的四边形是哪
种特殊四边形？说明理由。

(3) 图 1 是按上述方式折叠后的
A4 纸的展开图，其中四边形 B, C,
D 可以通过怎样的图形变换得到四边
形 A？说说这些图形变换和上述折叠
步骤的关系。

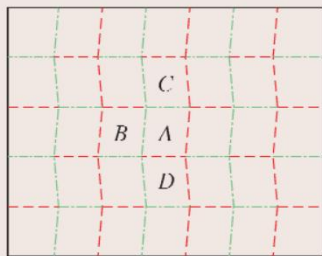


图 1

2. 除上述折叠方式外，还有哪些纸张折叠方法？折叠过程中用
到了哪些几何知识？

八下 仿生折叠

三、交流展示

围绕下列问题进行小组讨论，然后在全班展示汇报：

(1) 这天 14:00 时，小明坐在伞下休息，他坐在椅子上的高度
约为 1 m，椅子距 AB 约为 3 m，他会被太阳晒到吗？

(2) 如果要提高遮阳效果，可以对遮阳伞进行怎样的改进？

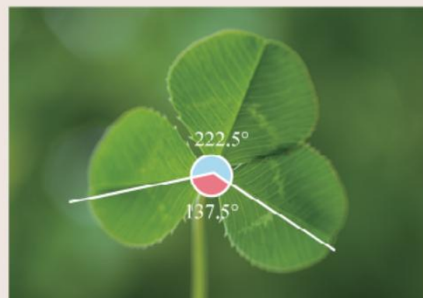
九下 日晷与遮阳伞

（三）全新编写综合与实践活动——编写体例

- 应用拓展: 为学生的**自主学习**创造条件
 - 数学知识或跨学科知识的拓展或深入
 - 学习任务的延续

一、问题情境

在自然界中，有一个优美的数学比例广泛存在，它也因其独特的美感被广泛应用于造型、艺术，下图的叶片、建筑中都蕴含了这个比例，即黄金比。



你能找到自然界、建筑、艺术等领域中蕴含的黄金比吗？

四、应用拓展

1. 与黄金比密切相关的是“斐波那契数列”，它源自“兔子繁殖”问题：假设每对兔子在出生两个月后具有繁殖能力，每月生一对兔子，从一对兔子开始，一年后共有多少对兔子？

请你查阅相关资料，了解“斐波那契数列”及它与黄金比的联系。

2. 调查、了解自然、科学领域中蕴含黄金分割的事物，并与同学交流。

三、教材如何使用：落实教材意图

上好统领课，激发兴趣渗透方法

1.1 生活 观察

我们生活在丰富多彩的数学世界中，广袤田野，繁华都市，处处都有图形、数字。

观察下图，回答问题：

(1) 你能在图中看到哪些熟悉的几何图形？如何对这些图形进行分类？

(2) 与这些图形的形状与大小有关的量有哪些？其中有哪些相等关系与不等关系？

(3) 根据图中的情景，你还能提出哪些问题？



在人类文明的发展过程中，图形和数字是人们表达和传递信息的重要载体。

我国很多经典古籍中记载了“河图洛书”（图1-1），它是重要的文化遗产。



洛阳博物馆中的“河图洛书”

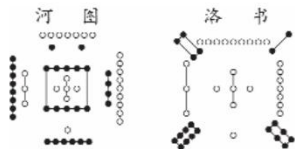
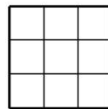


图 1-1

“河图洛书”中用实心点或空心点的个数表示数字，观察图1-1中的每一组点所对应的数字，讨论下列问题：

(1) 根据“洛书”，把数字1~9填入下表中对应的空格，你能发现哪些规律？



(2) 围绕“河图”，你能提出什么问题？



讨论

1. 你的身份证号码表达了哪些信息？请你再举出生活中类似的例子。

2. 观察下面的图案，它们分别有哪些特征？



练习

1. 在校园或家附近找一棵树，估一估这棵树有多高、有多粗。



(第1题)



(第2题)

2. 学校打算用16 m长的篱笆围成长方形的生物园饲养小兔。怎样围可使小兔的活动范围尽可能大？

■ 会用数学的眼光观察现实世界

■ 观察什么？

■ 如何观察？

■ 观察目的？

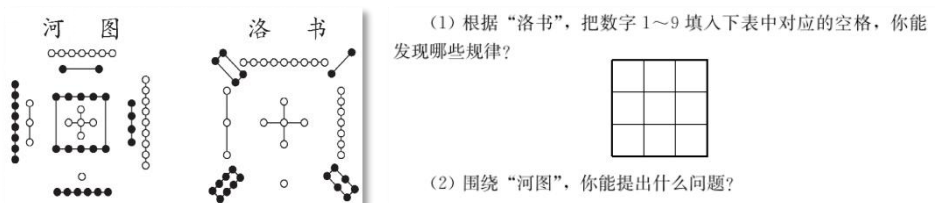
上好统领课，激发兴趣渗透方法

■ 观察什么？



■ 空间形式

- 图形：点线面，平面图形，几何体；
- 度量：长度，角度，面积，体积；
- 位置关系：点点，点线，线线，线面。



■ 数量关系

- 数量：数字，整数，有理数，实数；
- 运算：单位，计数原理，加减乘除；
- 数量关系：相等，多少，顺序，对应。

■ 如何观察？

- 抽象与想象（把田埂“看作”线段、直线）；
- 分类与分步：形状、数量、位置、关系、顺序…；
- 局部与整体：元素、部分、整体、结构…；
- 联系与拓展：经验、联想、类比、举一反三…；
- …

■ 观察目的？

- 问题/猜想；
- 关系/规律；
- 概念/性质；
- 方法/策略；
- …

上好统领课，激发兴趣渗透方法

1.2 活动 思考

折纸与剪拼

1. 把一张长方形纸片按图 1-2 所示的方式操作，可以得到什么图形？说说你的理由。

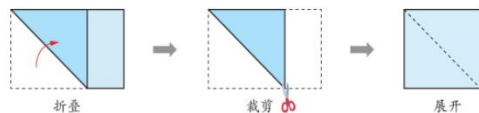


图 1-2

2. 如何把一张长方形纸片剪成两个面积相等的图形？剪成三个、四个呢？

3. 长方形的四个内角都等于 90° ，其内角和为 360° 。根据图 1-3 的思路，你能得到一般四边形的内角和吗？

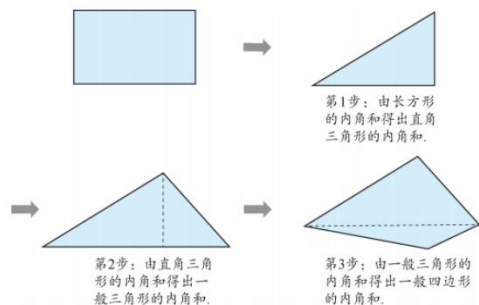


图 1-3

月历中的数量关系

观察图 1-4 中的月历，回答问题：

(1) 月历中蓝色方框内的 4 个数之间有什么关系？如果将方框移动，框住另外 4 个数，这 4 个数也有这样的关系吗？

(2) 月历中黄色方框内有 9 个数，你能发现其中的数量关系吗？

(3) 小明一家在这个月的某天出发外出旅游 5 天，这 5 天的日期之和是 25，最后一天是几号？



一	二	三	四	五	六	日
1 甲午年 十一月 廿九	2 乙未年 十二月 初一	3 丙申年 十二月 初二	4 丁酉年 十二月 初三	5 戊戌年 十二月 初四	6 己亥年 十二月 初五	7 庚子年 十二月 初六
8 辛丑年 十二月 初七	9 壬寅年 十二月 初八	10 癸卯年 十二月 初九	11 甲辰年 十二月 初十	12 乙巳年 十二月 十一	13 丙午年 十二月 十二	14 丁未年 十二月 十三
15 戊申年 十二月 十四	16 己酉年 十二月 十五	17 庚戌年 十二月 十六	18 辛亥年 十二月 十七	19 壬子年 十二月 十八	20 癸丑年 十二月 十九	21 甲寅年 十二月 二十
22 乙卯年 十二月 廿一	23 丙辰年 十二月 廿二	24 丁巳年 十二月 廿三	25 戊午年 十二月 廿四	26 己未年 十二月 廿五	27 庚申年 十二月 廿六	28 辛酉年 十二月 廿七
29 壬戌年 十二月 廿八	30 癸亥年 十二月 廿九	31 甲子年 十二月 三十				

图 1-4



练习

学校将要组建若干个体育活动社团，应开设哪些社团呢？小明设计了下表对各班同学进行调查。

你最感兴趣的体育项目调查表

学号：_____ 班级：_____

项目	啦啦操	篮球	羽毛球	乒乓球	足球	跳绳
最感兴趣的项目 (打“√”，可多选)						

请你根据本校的实际情况，设计一份类似的调查表，通过调查了解情况，为学校的课外体育活动的开展提出合理建议。

■ 会用数学的思维思考现实世界

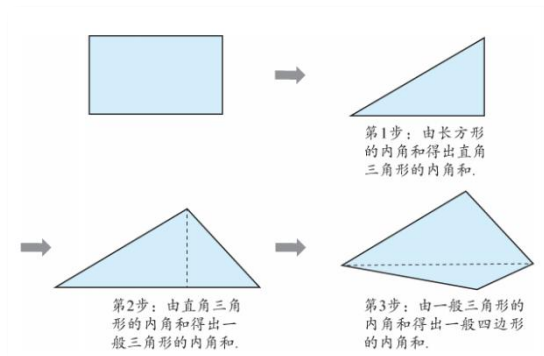
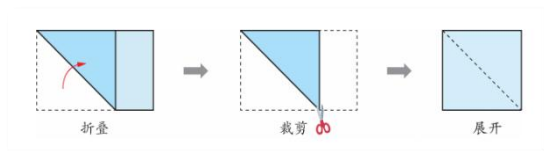
■ 活动类型？

■ 思考形式？

■ 思考目的？

上好统领课，激发兴趣渗透方法

■ 活动类型？



一	二	三	四	五	六	日
1 劳动节	2 十二	3 十三	4 青年节	5 十六	6 立夏	7 十八
8 十九	9 二十	10 廿一	11 廿二	12 廿三	13 廿四	14 母亲节
15 廿六	16 廿七	17 廿八	18 廿九	19 四月	20 初二	21 小满
22 初四	23 初五	24 初六	25 初七	26 初八	27 初九	28 初十
29 十一	30 十二	31 十三				

■ 从现实世界到数学：

- 操作（剪拼，折纸…）；
- 测量（计数、距离…）；
- 建模（对应，关系…）。

■ 数学内部：

- 运算与推理；
- 概念与命题；
- 关系与结构。

■ 从数学到现实世界：

- 描述；
- 解释；
- 论证。

■ 思考形式？

- 相等与不等；
- 变化与不变；
- 特殊与一般；
- 比较与类比；
- 归纳与演绎；
- …

■ 思考目的？

- 问题/猜想；
- 关系/规律；
- 概念/性质；
- 方法/策略；
- …

上好统领课，激发兴趣渗透方法

1.3 交流 表达

分割三角形

如图 1-5，先画 1 个等边三角形，然后连接三条边的中点得到 4 个相同的三角形，将中间的三角形涂色，再对其余 3 个三角形进行同样的操作。



图 1-5

(1) 按照上述规律继续操作，请你画出第 3 次操作后得到的图形。

(2) 按照上述规律，第 4 次操作后得到的图形中涂色三角形的个数是多少？为什么？请与同学交流。

水温的变化规律

小明为了了解水温的变化规律，连续测量并记录了一杯开水在室温下的温度变化情况，得到下表：

时间/min	0	5	10	15	25
温度/℃	98	71	55	45	35
时间/min	35	45	55	65	70
温度/℃	28	24	22	22	22

根据上表，回答问题，并与同学交流。

(1) 室温大概是多少摄氏度？

(2) 你能描述在室温下开水温度随时间变化的特点吗？

(3) 某种奶粉的适宜冲泡温度为 42°C ，小明想冲泡这种奶粉，水烧开后大约需要等待多久？



练习

按照下图所示的方式用火柴棒搭正方形。



(1) 完成下表：

正方形个数	1	2	3	4	5
火柴棒根数					

(2) 探究火柴棒根数和正方形个数之间的关系，表达这个关系，并与同学交流。



阅读

二维码

随着信息技术的发展，人们在条形码的基础上开发了二维码。



条形码



二维码

和条形码相比，二维码存储的信息容量要大得多，信息形式也更为丰富，仅用一个很小的图案就可以实现移动支付、网站解析、网站登录等功能，这是为什么呢？

条形码在一个方向(一般是水平方向)上表达信息，且只能由数字和字母组成，而二维码在水平和竖直两个方向同时存储信息，能在很小的面积内表示大量信息，同时由于二维码使用了若干个与二进制数据相对应的几何形体来表示信息，所以编码范围更广，可以表示更多类型的数据。

■ 会用数学的语言表达现实世界

■ 表达什么？

■ 表达形式？

■ 交流目的？

上好统领课，激发兴趣渗透方法

■ 表达什么？

分割三角形

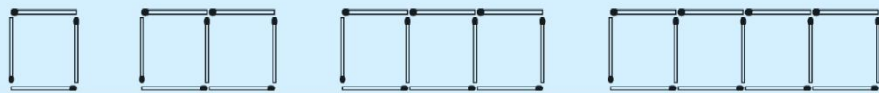
如图 1-5，先画 1 个等边三角形，然后连接三条边的中点得到 4 个相同的三角形，将中间的三角形涂色，再对其余 3 个三角形进行同样的操作。

文字描述 → 图形操作

时间/min	0	5	10	15	25
温度/℃	98	71	55	45	35
时间/min	35	45	55	65	70
温度/℃	28	24	22	22	22

图表描述 → 口头表达

按照下图所示的方式用火柴棒搭正方形。



操作活动 → 符号描述

■ 表达形式？

- 动手操作
- 口头描述
- 文字说明
- 图表展示
- 符号表达
- ...

■ 交流目的？

- 抽象与概括
- 理解与解释
- 转换与刻画
- 证明与反驳
- ...

经历知识形成、发展和应用过程，发展核心素养

■ 数学知识内容是核心素养形成的载体。

■ 非知识本身，而是知识形成、发展和应用的过程为核心素养培育的土壤。

■ 教学应注重过程性，在过程中掌握“四基”培养“四能”，发展核心素养。

■ 概念教学

■ 教材呈现：

现实情境 → 丰富实例 → 概念呈现。

■ 教学过程：

问题情境 → 数学活动（数学化形成具体实例） → 属性分析 → 归纳概念 → 概念精致 → 概念联系。

在日常生活中，有各种各样的数量关系，其中许多是相等关系。例如：

天平左边托盘中有 2 袋食盐，每袋 x g，右边托盘中有 3 袋白糖，每袋 y g，天平平衡表示 $2x=3y$ ；

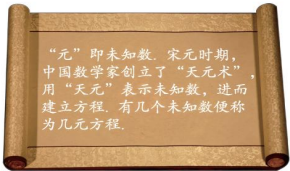
长方形的长和宽分别为 x, y ，面积为 S ，则 $S = xy$ ；

购买 12 支铅笔和 3 本笔记本共花费 58 元，铅笔每支 a 元，笔记本每本 b 元，则 $12a + 3b = 58$ 。

你还能举出一些生活中这样的例子吗？

像 $2x=3y$ ， $S=xy$ ， $12a+3b=58$ 这样，表示相等关系的式子叫作**等式**(equation)。

在上一节认识的方程中，像 $2x+1=x+5$ ， $x+\frac{1}{7}x=19$ 这样等号两边都是整式，且只含有一个未知数，未知数的次数都是 1 的方程，叫作**一元一次方程**(linear equation with one unknown)。



“元”即未知数。宋元时期，中国数学家创立了“天元术”，用“天元”表示未知数，进而建立方程。有几个未知数便称为几元方程。

经历知识形成、发展和应用过程，发展核心素养

■ 性质定理教学

■ 教材呈现：操作活动 → 得到猜想 → 推理论证 → 呈现性质定理（多元表征）。

■ 教学过程：问题情境 → 操作活动 → 形成猜想 → 尝试论证 → 归纳结论 → 多元表征。

8.3 三角形的中位线

活动

1. 按图 8-32 的方式将一张三角形包装纸折叠成一个矩形信封。

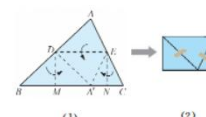


图 8-32

2. 你能在图 8-32(1) 找到哪些相等的线段？

根据上面的折叠过程，可得 $DA = DA'$ ， $DB = DA'$ ，所以 $DA = DB$ 。同理可得 $EA = EC$ ，即 D ， E 分别是边 AB ， AC 的中点。

连接三角形两边中点的线段叫作**三角形的中位线** (median line of triangle)。

如图 8-33，在 $\triangle ABC$ 中， D ， E ， F 分别是边 AB ， AC ， BC 的中点， DE ， DF ， EF 都是 $\triangle ABC$ 的中位线。

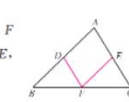


图 8-33

尝试

如图 8-34，完成下列操作，并回答问题：

- 剪一张三角形纸片 ABC 。
- 沿中位线 DE 将纸片剪成两部分，拼得的图形是平行四边形吗？

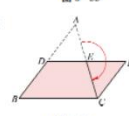


图 8-34

如图 8-35，延长 DE 到点 F ，使 $EF = DE$ ，连接 CF 。

由 $EA = EC$ ， $\angle AED = \angle CEF$ ， $DE = EF$ ，可得 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$ ，于是 $AD = CF$ ， $\angle ADE = \angle F$ ，所以 $BD \parallel CF$ ， $BD = AD = CF$ ，可得四边形 $BCFD$ 是平行四边形。

所以 $DE \parallel BC$ ， $DE = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}BC$ 。

于是，我们得到**三角形的中位线定理**：

三角形的中位线平行于第三边，并且等于第三边的一半。

如图，在 $\triangle ABC$ 中，
如果 D ， E 分别是边 AB ，
 AC 的中点，那么 $DE \parallel BC$ ，
 $DE = \frac{1}{2}BC$ 。

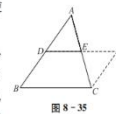


图 8-35

例

如图 8-36， E ， F ， G ， H 分别是四边形 $ABCD$ 的边 AB ， BC ， CD ， DA 的中点，连接 EF ， FG ， GH ， HE ，求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形。



图 8-36

探究

由例题可知，首尾顺次连接四边形 $ABCD$ 的各边中点，可以得到一个平行四边形。那么，当四边形 $ABCD$ 满足什么条件时，所得的平行四边形是矩形、菱形或正方形呢？

经历知识形成、发展和应用过程，发展核心素养

■ 应用教学

- 应用教学需重视分析过程、解决问题思路的寻求过程、表达交流过程，其中可以发展学生的多种关键能力。
- 特别要重视培养学生图表分析问题的意识和能力，发展几何直观。

分析

设小亮出发 x h 后追上小明，根据题意画出如图 4-6 的线形示意图：

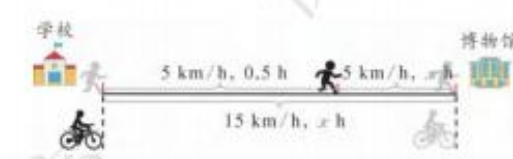


图 4-6

从线形示意图可以看出，这个问题中的等量关系：
小明步行的路程 = 小亮骑行的路程。

例 1

在班级联欢会筹备工作中，小明负责购买奖品，他用 420 元购买吉祥物“冰墩墩”和“雪容融”共 10 个，已知“冰墩墩”48 元/个，“雪容融”38 元/个，小明购买两种吉祥物各几个？

分析

设购买“冰墩墩” x 个，“雪容融” y 个，可以列表分析如下：

数量类型	“冰墩墩”	“雪容融”	合计
单价/（元/个）	48	38	—
个数/个	x	y	10
花费/元	$48x$	$38y$	420

图表分析数量关系 → 作为列方程或不等式依据的相等或不等关系

经历知识形成、发展和应用过程，发展核心素养

■ 应用教学

■ 特别要重视培养学生图表分析问题的意识和能力，发展几何直观。

例 6

中学生环保知识竞赛分必答题和抢答题两部分，必答题答对 1 道得 2 分，抢答题答对 1 道得 3 分，小明必答题和抢答题共答对 12 道，得 27 分，小明必答题和抢答题分别答对几道？

分析

设小明必答题答对 x 道，可以列出表格分析数量关系：

题型	每道题得分	答对数量/道	得分
必答题	2	x	$2x$
抢答题	3	$12-x$	$3(12-x)$
合计	—	12	27

一读：粗略地读，了解大概题意

二读：细细地读，关注题中数量

三读：思考地读，寻找相等关系

思考1：例题中有哪些数据？

思考2：请将这些数据分分类？

思考3：这些数据如何整理描述，会比文字表述更简洁明了？

经历知识形成、发展和应用过程，发展核心素养

■ 应用教学

■ 特别要重视培养学生图表分析问题的意识和能力，发展几何直观。

加法模型：
部分+部分=总量

数量 部分	速度 (单价)	时间 (数量)	路程 (总价)
部分1			
部分2			
.....			
合计			

乘法模型：
速度*时间=路程
单价*数量=总价

用好教材上好“三堂课”，落实内容结构化

- 单元整体教学是落实内容结构化的有效路径。
 - 当前所谓单元教学，多是几节课连上或在一节课时间内大容量、高强度地灌输全单元重要知识，无视当前课时教学现状，更罔顾学生的认知规律。
 - 单元教学在相当长的一段时间内必须处理好“整体设计”在“课时实施”中的落实问题。
 - 单元教学的根本目标是促进内容结构化。是否是单元教学的判断标准，不在于它的教学组织形式和时间，而在于是否有利于单元知识内容的结构化。

用好教材上好“三堂课”，落实内容结构化

■ 充分利用教材，上好“三堂课”：

■ **起始课**：整体规划全单元的学习，增强学习的预见性。

- 充分发挥先行组织者作用，类比规划。

- 精心设计活动任务，任务驱动规划。

■ **分解课**：上联下延一以贯之，让学生在结构和联系中学习新知。

- 上联下延，形成知识结构，关键是分析、找准知识的“生长点”与“延伸点”。

- 一以贯之，强化思想联系，关键是善于挖掘蕴含于同一主题数学知识内容之中的、共同的思想方法，善于迁移。

■ **小结课**：梳理结构把书读“薄”，明晰思想把书读“透”。

用好教材上好“三堂课”，落实内容结构化

■ 起始课：

■ 路径一：发挥先行组织者作用，类比规划单元学习

■ 案例：“分式”一章整体规划（分式概念学习后，课尾小结回顾环节）



图2 分式分数研究内容比较



图3 分式整式研究内容比较

分式研究的路线图：

分式概念 → 分式基本性质 → 分式运算 → 分式方程

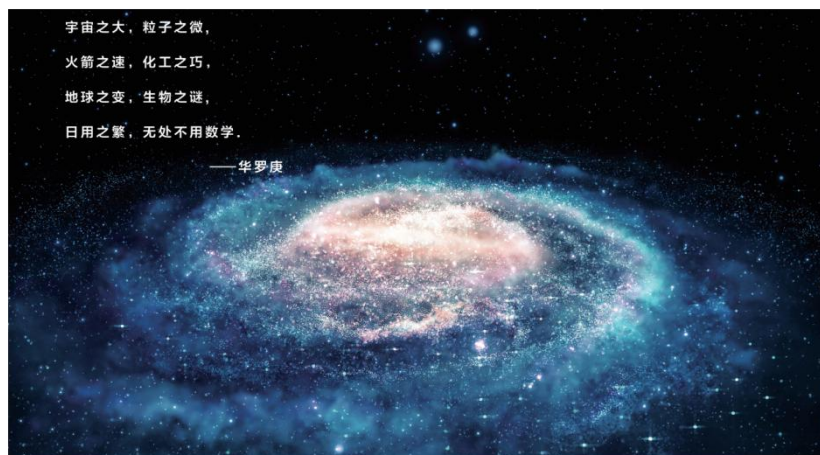
用好教材上好“三堂课”，落实内容结构化

■ 起始课：

- 路径二：感受问题解决需要，任务驱动
规划单元学习

■ 案例：

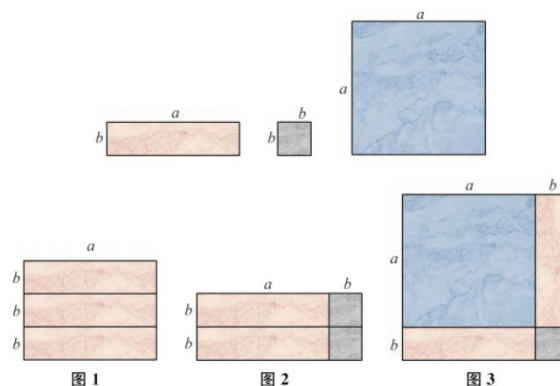
- “幂的运算”整体规划（课始引入阶段）
- “整式乘法”整体规划（课始引入阶段）



道路铺设地砖，不同的铺砌方案会得到不同的图案。



- ① 用若干块如下图所示的长方形和正方形的地砖，拼成图1~图3，它们的面积分别是多少？你有哪些不同的算法？



- ② 如图4，在边长为 a 的正方形地砖上切割掉一个边长为 b 的正方形，剩下部分的面积是多少？你有哪些不同的算法？

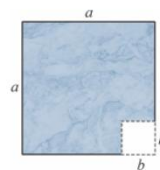


图4

用好教材上好“三堂课”，落实内容结构化

■ 分解课：

- 上联下延形成知识结构，关键是找准知识的“生长点”与“延伸点”

■ 案例：“幂的乘方”上联下延（七下“7.2 幂的乘方与积的乘方”第1课时）

- **内容理解：**幂的乘方其实是同底数幂的乘法在幂的指数也相同时的特殊情形，是同底数幂的乘法基础上对“特例”的考察，体现了从一般到特殊的研究思路。积的乘方又是幂的乘方从简单到复杂进一步拓展。

- **上联方案：**复习同底数幂的乘法 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

→ 探究同底数幂的乘法的特例 → 引入幂的乘方

- **下延方案：**回顾本课学习的幂的乘方 $(a^m)^n = a^{mn}$

→ 探究乘方的底数还可以是什么 → 引入积或商的乘方

用好教材上好“三堂课”，落实内容结构化

■ 分解课：

- 一以贯之，强化思想联系，关键是挖掘蕴含于同一主题数学知识内容之中的、共同的思想方法，善于迁移。

■ 案例：“二次根式的加减”一以贯之

- **内容理解：**整式、分式、二次根式都是“单位+单位个数（系数）”1个或几个的组合，单位相同才能进行加减运算。

用好教材上好“三堂课”，落实内容结构化

■ 小结课：

- 梳理结构，把书读“薄”：自主建构→交流展示→整理完善
- 明晰思想，把书读“透”：问题引思→讨论交流→感悟小结

■ 案例：“幂的运算”小结与思考的问题设计

- 引导学生回顾思考“本章每一个幂的运算法则，我们是怎么去探索的？”都是先通过具体的数字运算发现规律、提出猜想，再用字母代替数去证实猜想，让学生明晰从特殊到一般的探索研究思路。
- 引导学生回顾思考“我们是如何证实每一个幂的运算法则的？”都是运用乘方的意义去证实幂的运算法则，让学生明晰退回原点、回归基本概念是解决问题的重要策略。

教师主导学生主体，上好综合与实践

■ 综合与实践：

- 教师是教学内容的**组织者**、活动的**引领者**、探索的**同行者**，与学生**共同**开展综合实践活动，架设数学学科与其他学科的“桥梁”。
- 过程性，灵活性，开放性，实践性
 - 要根据任务特征和学生认知程度的不同，灵活设计活动时长、形式（**突破3个“45”的限制**）和开放程度（**以教师引导为主或以学生探究为主**），让学生经历项目式学习的全过程。
 - 学生在活动过程中提升获取信息和资料的能力、自主学习或合作探究的能力、撰写研究报告的能力和语言表达能力等，形成和发展应用意识、模型观念等。
- 关注过程性评价：评价方式多样，评价维度多维，评价主体多元。



感谢您的倾听！