本原性问题驱动下初中数学专题复习策略

——以平面几何中的定值问题为例

孙　欣
(苏州市吴江区实验初级中学,江苏　苏州　215000)

【摘要】专题复习是一种重要的复习形式,如何设计好一节专题复习课是教育界同行一直关注的问题.文章概述了本原性问题驱动下初中数学专题复习教学工作的开展,对平面几何中的定值问题这一专题的复习做了一些尝试和思考,提出基于本原性问题驱动的专题复习的实施策略,以此培养学生的数学核心素养.

【关键词】本原性问题驱动;初中数学;专题复习;平面几何中的定值问题

引　言

专题复习是一种重要的复习形式,一线教师经常将专题复习课当成习题课,将同一类型的题目再整理、再练习,学生面对专题复习也很迷茫.如何设计好一节专题课,如何让专题课深入浅出,更容易被学生接受是这些年来教育界同行一直关注的问题.现代教育学借鉴哲学中对于"本原"的理解和思考方式提出了本原性问题驱动的理念.这是从教学方法的设计角度出发的,对学习活动中最为原始、朴素、本质的观点、思想和方法进行引导,从而激发学生对最本质的问题的主动性探索和认知,激发学生展开学习的原动力.本原性问题驱动下的初中数学教学,指的是教师在课堂教学中设计系列问题,环环相扣,把学生的学习分层引向深入,进而有效地激发学生理解和体验数学内容的本质.

下面结合平面几何中的定值问题这一专题的设计谈谈对教学的实践和思考.

一、教学之困

(一)专题涉及内容之宽泛

一节专题课的内容涉及方方面面,一个专题涉及不同的题型、不同的知识点,甚至多种思想方法.在教学中如何把握、如何理清思路、如何引导学生深入思考都是每一节专题课前教师必须思考的问题,对教师来说是不小的挑战.

(二)教学形式之僵化

在日常教学中,专题课的形式较为单一,一些教师追求对数学知识与方法的全面讲解,表现为对数学知识与方法的简单堆积与重复.将专题课简单上成了习题课,缺乏条理和连贯性,教学收效甚微,无法形成解决一类问题的策略,更无法直指要害给学生留下深刻印象.

二、教学之行

(一)课堂实施

在平面几何中,定值问题就是研究图形运动过程中不变量的问题,常常与动态问题相结合,通常会去探求不变的角度、线段的和差倍分、图形面积等.

1.基于简单情境的初步感知:合作与激发

已知条件　在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,D 为线段 AB 的中点.

问题(1)　如图1,$AC=BC$,一直角的顶点与点 D 重合,绕着点 D 转动,点 E,F 分别在线段 AC,BC 上,且 $ED\perp DF$.运动过程中有哪些不变的量或不变的关系?

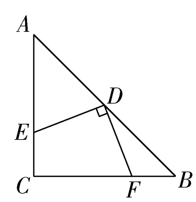

图1

师:大家一起来说说看.

生:有很多不变的量,$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$,$\angle EDF$的度数均不变;还有很多线段的长度也不变,如AD,BD,AC,BC,如果把CD连起来,CD的长度也不变.

师:有同学补充吗?

生:四边形$CEDF$的面积应该也保持不变.

师:你能否大胆猜想一下四边形$CEDF$的面积是$Rt\triangle ABC$面积的几分之几?

生:我猜应该是$\frac{1}{2}$.

师:你是如何猜到的?

生:在$\angle EDF$绕着点D转动的过程中,可以取临界状态,如当点F与B重合时,则点E就与点C重合,这时四边形$CEDF$就变成了$\triangle BDC$,面积恰好是$Rt\triangle ABC$面积的一半.或者观察运动过程中的特殊位置,当$\angle EDF$绕着点D转动到角两边分别与直角三角形两直角边垂直时,这时四边形$CEDF$就变成了一个正方形,面积恰好也是$Rt\triangle ABC$面积的一半.

师:通过观察计算一些临界状态或者特殊位置,我们猜想得出四边形的面积是定值,所以在碰到问题不知如何处理时,我们可以先通过一些特殊的位置或者状态进行大胆猜想.但是光有猜想还不行,能否把特殊情况推广到一般情形呢?也就是说我们该如何严格证明四边形的面积是一个定值?

生:连接CD后,运动过程中$\triangle EDC$和$\triangle FDB$好像总是全等的.

师:你是如何发现图2中三角形全等的?图形运动过程中除了有不变的量还有哪些不变的关系吗?

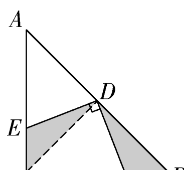

图2

生:连接CD之后,易得$\angle ECD=\angle B=45°$,$\angle CDB=\angle EDF=90°$,由此可知$\angle EDC=\angle FDB$.同时$CD=AD=BD$,故$\triangle EDC$和$\triangle FDB$是全等的,所以在转动过程中四边形$CEDF$的面积与$\triangle BDC$的面积是相等的,是一个定值.

设计意图 平面几何中的定值问题的实质是探索动态过程中的不变量,教师首先选取教材中的问题作为引入,让学生有似曾相识的感觉,拉近与学生的距离,其次提出了一个本原性问题:运动过程中有哪些不变的量或不变的关系?这一问题揭示了定值问题的本质,即:探索动态过程中的不变量.当然这一问题的解决并不轻松,引导学生可从多个方面去考虑,不变的角、线段、面积,也就说明了平面几何中定值问题经常涉及的题型有角度为定值、线段的和差倍分是定值、面积是定值等.探究哪些量是定值的过程可以培养学生的数学眼光.当考虑到面积时,学生凭借几何直观作出了大胆的猜想,猜想四边形$CEDF$的面积可能是一个定值,稍后教师以"你能否大胆猜想一下四边形$CEDF$的面积是$Rt\triangle ABC$面积的几分之几?"这样的小问题驱动学生进一步思考,激发学生强烈的好奇心和求知欲,选取特殊的位置或临界状态推测这一定值,动中取静、以静制动.最后,教师要求学生用严格的逻辑证明将结论推广到一般情形.面对这一要求,部分学生不能立刻找到思路,这时教师试图引导学生回到最先提出的问题,即"图形运动过程中除了有不变的量还有哪些不变的关系吗?"通过分析运动过程中不变的关系,这里不变的关系包含角之间的关系、线段之间的数量和位置关系,还有面积之间的关系等,构造全等三角形,理清证明的思路,从而将特殊推广到一般,使学生初步感知解决定值问题的一般策略和路径.

2.基于变式的认知深入:建构与优化

问题(2) 已知条件不变,如图3,若$\angle B=60°$,直角$\angle EDF$绕点D转动过程中有哪些不变的量或不变的关系?

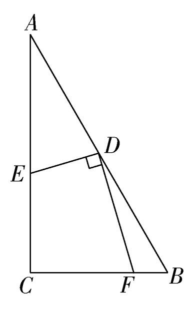

图3

追问1:与(1)中一样的结论我们不再重复,试图寻找不同的结论,问题(1)中$DE=DF$的结论在这张图中还成立吗?

追问2:DE和DF没有相等关系,可不可能存在其他关系呢?

追问3:我们如何猜想这两条线段之间的关系?大家打算选取什么样的特殊位置呢?

追问4:有了初步的猜想后,我们仍旧要进行严格证明,对于两条线段的长度之比,你打算如何证明呢?

追问5:通过以上两个问题的探讨,对于解决这一类问题,同学们有没有什么想法?说说看.

设计意图 将问题稍作变形,往往可以得出不同的结论.设计问题(2)是为了让学生加深对平面几何中的定值问题的认识和理解,着重引导

学生探索 DE 和 DF 两条线段长度的数量关系，类比上一问，选取特殊位置进行猜想，课堂中学生选取 $\angle EDF$ 的两边 DE 和 DF 分别与 AC，BC 垂直这样的特殊位置，大胆猜测 $\frac{DE}{DF}$ 应该是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，后通过构造相似，如图 4 所示，过点 D 分别向 AC，BC 作垂线，垂足分别为 E'，F'，可得 $\triangle DE'E$ 和 $\triangle DF'F$ 相似，从而利用对应边成比例即可得证.通过对上述两个问题的探究学生可形成解决该类问题的一般路径：通过特殊位置或者临界状态对定值作出猜想，再进行严格的推理证明，将特殊推广到一般.这样的探索过程能不断优化学生的认知结构，引导学生学会用数学的思维去思考.

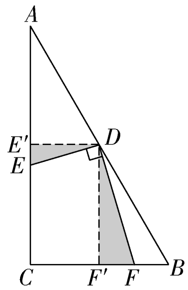

图 4

3.基于类比的能力提升：表达与生成

问题（3） 已知条件不变，如图 5，直角 $\angle EDF$ 绕点 D 顺时针旋转，旋转角 α（$0°<\alpha<60°$），旋转过程中的任意两个位置分别记为 $\angle E_1DF_1$，$\angle E_2DF_2$，DE_1 交直线 AC 于点 P，DF_1 交直线 BC 于点 Q，DE_2 交直线 AC 于点 M，DF_2 交直线 BC 于点 N，求 $\frac{PM}{QN}$ 的值.

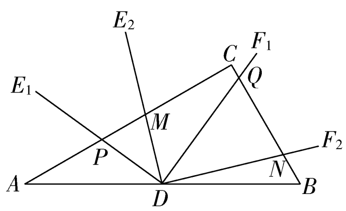

图 5

追问 1：基于问题（1）（2）的解决经验，你能否类比之前的做法来思考这一问题？

追问 2：你选取何种特殊位置来猜想 $\frac{PM}{QN}$ 的值？

追问 3：我们把 $\angle E_1DF_1$，$\angle E_2DF_2$ 转动至一般的位置，如何证明你的猜想？

设计意图 该变式是前面两问的延续，让学生重视已有学习经验，类比之前解决定值问题的策略，通过引导学生小组讨论和合作交流，在解决问题的同时渗透转化思想，提升学生的数学语言表达能力，激发学生身上的无限可能.题目需求 $\frac{PM}{QN}$ 的值，说明 $\frac{PM}{QN}$ 应该是定值，对于定值未知的定值问题，学生仍旧可以遵循先猜想后证明的路径，选取如图 6 所示的特殊位置猜想定值，此时，易发现 $\triangle DPM$ 和 $\triangle DQN$ 是相似的，

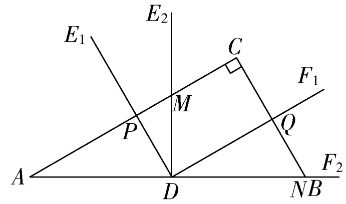

图 6

那么 $\frac{PM}{QN}=\frac{PD}{QD}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.再推广到一般，把 $\angle E_1DF_1$，$\angle E_2DF_2$ 转动到较为一般的位置，题中求 PM，QN 两线段长度的比值，易联想到三角形相似，通过证两对角分别相等可得 $\triangle DPM$ 和 $\triangle DQN$ 相似.$\frac{PM}{QN}$ 就可以转化为相似三角形对应边上的高之比，而这一比值在之前的问题中学生已经求解过，是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

问题（4） 若上题中 $\angle B=\beta$（$60°<\beta<90°$），其余条件不变，判断 $\frac{PM}{QN}$ 的值是否为定值？如果是，请直接写出这个值（用含 β 的式子表示）；如果不是，请说明理由.

设计意图 多方面渗透从特殊到一般的思想方法，让学生学会把结论推广到更一般的情况，认识问题的本质，加深对学科知识的理解和思考.

4.基于迁移的方法应用：延伸与拓展

新问题 如图 7，已知 $\angle MON=90°$，OT 是 $\angle MON$ 的平分线，A 是射线 OM 上一点，$OA=8$ cm.动点 P 从点 A 出发，以 1 cm/s 的速度沿 AO 水平向左作匀速运动，与此同时，动点 Q 从点 O 出发，也以 1 cm/s 的速度沿 ON 竖直向上作匀速运动.连接 PQ，交 OT 于点 B.经过 O，P，Q 三点作圆，交 OT 于点 C，连接 PC，QC.设运动时间为 t s，其中 $0<t<8$.

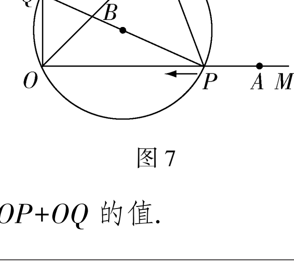

图 7

（1）求 $OP+OQ$ 的值.

(2)四边形 $OPCQ$ 的面积是否为定值？若是,求出这个定值;若不是,请说明理由.

设计意图 将直角与圆结合起来,产生新的定值问题.第(1)问求线段和的定值,是显而易见的,学生很容易解决.第(2)问探索四边形 $OPCQ$ 的面积是否为定值,略有难度.在这里教师试图引导学生通过设参计算的代数方法去解决,可证明 $\triangle PCQ$ 是等腰直角三角形,则 $S_{\triangle PCQ}=\frac{1}{2}PC\cdot QC=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}PQ\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}PQ=\frac{1}{4}PQ^2$,在 $\mathrm{Rt}\triangle POQ$ 中,$PQ^2=OP^2+OQ^2=(8-t)^2+t^2$,再由四边形 $OPCQ$ 的面积 $S=S_{\triangle POQ}+S_{\triangle PCQ}$ 即可得出答案,旨在引导学生多角度思考,拓宽解题思路.

(二)课后延伸

教师继续以问题驱动学生拓展学习:针对以上问题,你还有其他方法吗？能否也用几何方法来解决呢？请大家课后思考.

设计意图 解决问题的方法往往不是唯一的,思考问题的角度也不一定是唯一的,引导学生从多维度去思考问题,让学生发现平面几何中的定值问题有时可以用代数方法去计算求解,有时也可用几何方法去证明.教师在专题复习中要帮助学生归纳总结解决一类问题的策略与方法,但不要带给学生思维上的枷锁,要遵循本原性问题的开放性和发展性原则,让学生得到多重的数学体验.

三、教学之思

数学专题复习是初三后期复习中的“重头戏”,本原性问题驱动下的教学为师生打开了专题复习的新思路,让专题复习之路走得更加平稳扎实.

(一)明确问题本质,寻求解决策略

在本原性问题的引导过程中,层层深入,加深对问题数学本质的理解.本节课在探究平面几何中的定值问题时,教师始终引导学生分析图形运动过程中的不变量和不变关系,帮助学生明确问题本质,通过自主探索、合作交流找到解决这类问题的基本策略和方法,先特殊探求,再理性证明,让专题复习不再漫无目的.

(二)完善课堂结构,渗透数学思想

在教学中教师要善于运用本原性问题引导学生揭示知识的内在结构,用“联系”的观点提升学生思维的深刻性.本原性问题的设计需要经过反复推敲,好的问题设计有利于完善课堂结构,让学生参与到课堂中来,充分发挥学生的聪明才智,集思广益让课堂立体而饱满,在探索思考解决问题串的过程中渗透数学常用的思想方法.如本节课中学生能够明晰定值问题中常见的题型,经常涉及从特殊到一般、转化、数形结合等数学思想.

(三)注重循序渐进,发展核心素养

本原性问题的设计应该更加注重问题的层次性和关联性,可以从简单的问题出发,层层深入,循序渐进,培养学生的数学眼光,找准学生的最近发展区,鼓励学生用数学的思维去思考、用数学的语言去表达,激发学生对数学的学习兴趣,树立学习数学的信心,注重提升学生的课堂感受,发展核心素养.

结　语

数学家哈尔莫斯曾说“问题是数学的心脏”,好的数学问题可以直击数学本质,引发学生深入思考,甚至触类旁通.“本原性问题驱动课堂教学的理念”为专题复习提供了新的思路,同时对广大教学工作者提出了不小的挑战.能否通过提出本原性问题引发学生思考,这要求教师全面了解学生学情、深刻理解课标、深度剖析问题本质、明确专题素养导向,在发现问题、提出问题、分析问题、解决问题的专题复习课中做学生探究活动中的组织者、引导者、合作者,让课堂自然生成,让核心素养的提升有章可循.

【参考文献】

[1]杨玉东.“本原性数学问题驱动课堂教学”的比较研究[D].上海:华东师范大学,2004.

[2]徐文彬.本原性学科问题驱动课堂教学的理论与实践[J].教育理论与实践,2007(12):38-40.

[3]杨玉东,黄伟胜.初中数学教师专业能力必修[M].重庆:西南师范大学出版社,2012.

[4]郑毓信.“数学深度教学”十讲之五:思维的深刻性与“联系的观点”[J].小学数学教师,2019(12):30-32.

[5]张乃建.初中数学教学中“问题链”的有效设计策略探究[J].数学学习与研究,2024(27):41-43.