

专题复习

再探二次函数下等腰三角形存在性

一、容疑，能动学

常州近5年中考·二次函数大题·分析 (课堂引入) — 中考链接

年份	题号	题型	分值
2020 年	第 28 题	二次函数角度、对称问题	10 分
2021 年	第 28 题	二次函数角度 (等腰)、面积问题	10 分
2022 年	第 27 题	二次函数角度、平移问题	10 分
2023 年	第 28 题	二次函数等腰三角形、线段相等问题	10 分
2024 年	第 28 题	二次函数性质、线段相等问题	10 分

近五年常州中考
二次函数压轴题
中，多次考到与等
腰三角形或线段
相等问题

一、容疑，能动学

2023 年常州中考第 27 题

(考题呈现) — 情境引入

27. 如图，二次函数 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧)，

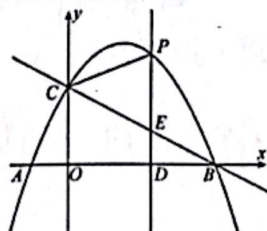
与 y 轴交于点 C ，点 P 是第一象限内二次函数图象上的一个动点，
设点 P 的横坐标为 m 。过点 P 作直线 $PD \perp x$ 轴于点 D ，作直线 BC 交 PD 于点 E

(1) 求 A, B, C 三点的坐标，并直接写出直线 BC 的函数表达式；

(2) 当 $\triangle CEP$ 是以 PE 为底边的等腰三角形时，求点 P 的坐标；

(3) 连接 AC ，过点 P 作直线，交 y 轴于点 F ，连接 DF 。

试探究：在点 P 运动的过程中，是否存在点 P ，使得 $CE = FD$ ，若存在，请直接写出 m 的值；若不存在，请说明理由。

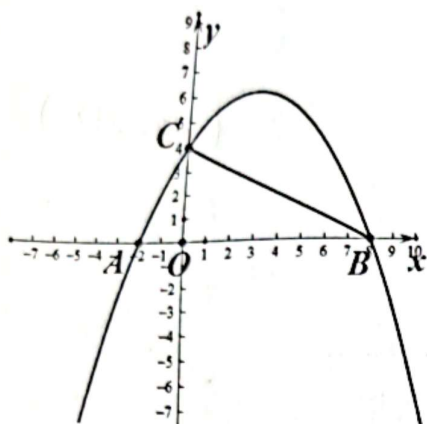


扫描全能王 创建

一、容疑，能动学

例1: 如图，二次函数 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$ 的图象与x轴交于A, B两点
(点A在点B的左侧)，与y轴交于点C，

(1)求A, B, C三点的坐标，并直接写出直线BC的函数表达式；



解：当 $y=0$ 时， $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4 = 0$

解得 $x_1 = -2, x_2 = 8$

$\therefore A(-2, 0), B(8, 0)$

当 $x=0$ 时， $y=4$

$\therefore C(0, 4)$

直线BC: $y = -\frac{1}{2}x + 4$

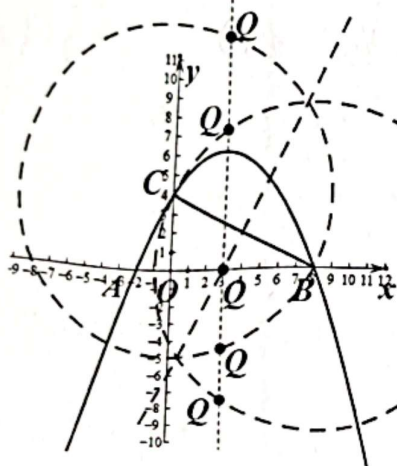
课前完成

一、容疑，能动学

例1: 如图，二次函数 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$ 的图象与x轴交于A, B两点
(点A在点B的左侧)，与y轴交于点C，

(2)点Q在抛物线的对称轴上，当 $\triangle QBC$ 为等腰三角形时，求Q的坐标

课前完成，课堂展示



分类：①BC=BQ
(三类)

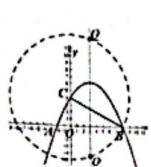
作图
(两圆一线)

计算：

$$\sqrt{25+y^2} = 4\sqrt{5}$$

检验 $Q(3, \pm\sqrt{55})$

②CB=CQ

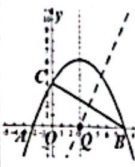


作圆C

$$\sqrt{9+(y-4)^2} = 4\sqrt{5}$$

检验 $Q(3, 4\pm\sqrt{71})$

③QB=QC



作BC垂直平分线

$$\sqrt{9+(y-4)^2} = \sqrt{25+y^2}$$

检验 $Q(3, 0)$

归纳解等腰三角形步骤：一、分(三类)

小结

二、作(两圆一线)

三、算(几何法、代数法)

四、验(是否共线、重合)

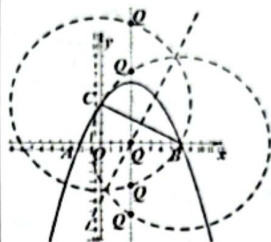


一、容疑，能动学

小结1:

等腰三角形存在性的基本解题步骤?

分类: (三类)	$\odot BC=BQ$	$\odot CB=CQ$	$\odot QB=QC$
作图 (两圆一线)			
计算:	$\sqrt{25+y^2}$ $=4\sqrt{5}$	$\sqrt{9+(y-4)^2}$ $=4\sqrt{5}$	$\sqrt{9+(y-4)^2}$ $=\sqrt{25+y^2}$
检验	$Q(3, \pm\sqrt{55})$	$Q(3, 4\pm\sqrt{71})$	$Q(3, 0)$



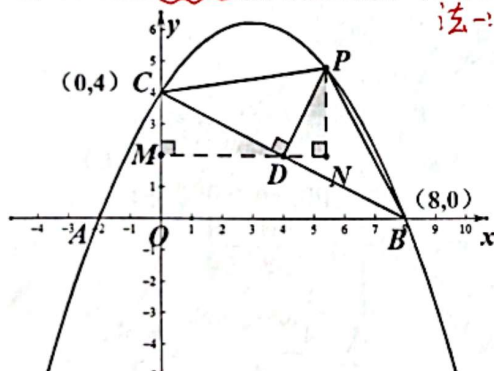
二、容理，深化学

例2: 如图, 二次函数 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$ 的图象与x轴交于A, B两点 (点A在点B的左侧), 与y轴交于点C,

(1) 点P是第一象限内二次函数图象上的一个动点, 当 $\triangle PBC$ 是以BC为底的等腰三角形时, 求P的横坐标

【辅助线1】 PC $PB=PC$
【辅助线2】 PB BC

法一: 代数法



$$PC = \sqrt{m^2 + (-\frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m)^2}$$

$$PB = \sqrt{(m-8)^2 + (-\frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m + 4)^2}$$

由 $PB=PC$ 得

$$m^2 + (-\frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m)^2 = (m-8)^2 + (-\frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m + 4)^2$$

$$\text{解得: } m_1 = -1 + \sqrt{41}, m_2 = -1 - \sqrt{41} (\text{舍})$$

如何解方程呢?

$$\text{设 } t = -\frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m$$

母 (换元法)

$$\therefore m^2 + t^2 = (m-8)^2 + (t+4)^2$$

$$m^2 + t^2 = m^2 - 16m + 64 + t^2 + 8t + 16$$

$$-8t + 16m - 80 = 0$$

$$2m^2 - 12m + 16m - 80 = 0$$

$$m^2 + 2m - 40 = 0$$

追问: 还有其它方法吗?

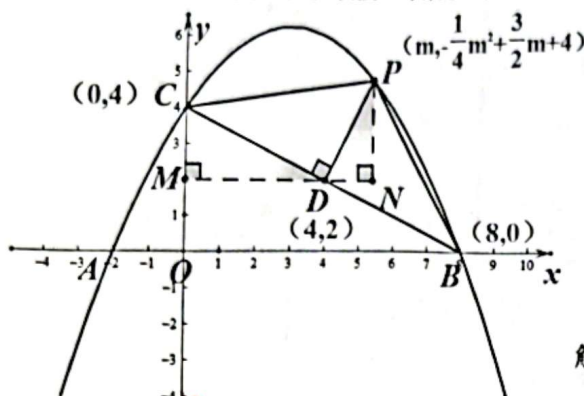


二、容理，深化学

例2: 如图, 二次函数 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$ 的图象与x轴交于A, B两点

(点A在点B的左侧), 与y轴交于点C,

(1) 点P是第一象限内二次函数图象上的一个动点, 当 $\triangle PBC$ 是以BC为底的等腰三角形时, 求P的横坐标



法二: 几何法

由 $\triangle PDN \sim \triangle DMC$ 得:

$$\frac{PN}{DM} = \frac{DN}{CM}$$

$$\therefore \frac{-\frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m + 2}{4} = \frac{m-4}{2}$$

解得: $m_1 = -1 + \sqrt{41}$, $m_2 = -1 - \sqrt{41}$ (舍)

作 $PD \perp BC$

$\therefore PC = PB$

$\therefore CD = BD$ (三线合一)

$\therefore D(4, 2)$

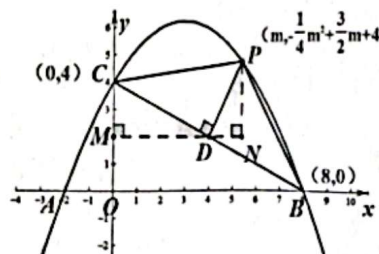
斜90°构造横平竖直

K型相似

二、容理，深化学

小结2:

等腰三角形存在性解法的比较



代数法:

$$PC = \sqrt{m^2 + (-\frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m)^2}$$

$$PB = \sqrt{(m-8)^2 + (-\frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m + 4)^2}$$

由 $PB = PC$ 得

$$m^2 + (-\frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m)^2 = (m-8)^2 + (-\frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m + 4)^2$$

解得: $m_1 = -1 + \sqrt{41}$, $m_2 = -1 - \sqrt{41}$ (舍)

几何法:

由 $\triangle PDN \sim \triangle DMC$ 得:

$$\frac{PN}{DM} = \frac{DN}{CM}$$

$$\therefore \frac{-\frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m + 2}{4} = \frac{m-4}{2}$$

解得: $m_1 = -1 + \sqrt{41}$, $m_2 = -1 - \sqrt{41}$ (舍)



扫描全能王 创建

三、容新，深度学

例3: 如图, 二次函数 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点

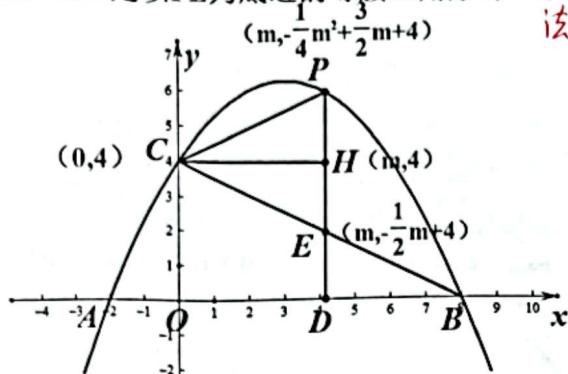
(点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 直线 $BC: y = -\frac{1}{2}x + 4$

点 P 是第一象限内二次函数图象上的一个动点,

过点 P 作直线 $PD \perp x$ 轴于点 D , 作直线 BC 交 PD 于点 E

当 $\triangle CEP$ 是以 PE 为底边的等腰三角形时, 求点 P 的坐标;

点 P 点 E CP
辅助线 CE
 $CP = CE$



法一: 代数法

$$CP = \sqrt{m^2 + (-\frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m)^2}$$

$$CE = \sqrt{m^2 + (\frac{1}{2}m)^2}$$

由 $CP = CE$ 得:

$$m^2 + (-\frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m)^2 = m^2 + (\frac{1}{2}m)^2$$

课后求解

三、容新，深度学

例3: 如图, 二次函数 $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点

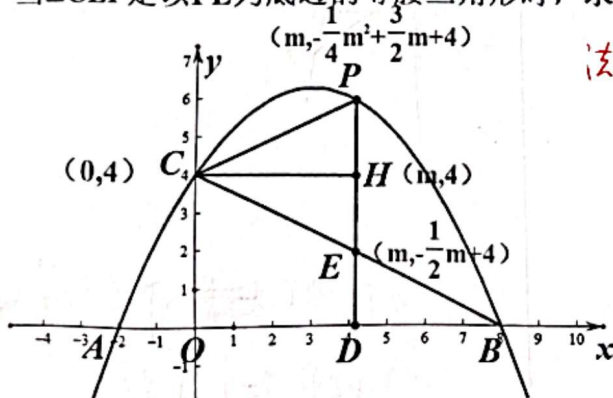
(点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 直线 $BC: y = -\frac{1}{2}x + 4$

点 P 是第一象限内二次函数图象上的一个动点,

过点 P 作直线 $PD \perp x$ 轴于点 D , 作直线 BC 交 PD 于点 E

当 $\triangle CEP$ 是以 PE 为底边的等腰三角形时, 求点 P 的坐标;

点 P 点 E
辅助线 CH
 $CP = CE$



法二: 几何法

作 $CH \perp PE$

$\because CP = CE$

$\therefore H$ 为 PE 中点

$$\therefore \frac{y_P + y_E}{2} = y_C \quad \text{或} \quad PH = EH$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m + 4 + (-\frac{1}{2}m + 4)}{2} = 4$$

课后求解



课堂小结

如何探究等腰三角形的存在性问题?

基本解题步骤

当 $\triangle QBC$ 为等腰三角形时,求Q的坐标

分类: $\odot BC=BQ$ $\odot CB=CQ$ $\odot QB=QC$
(三类)

作图

(两圆一线)

计算:

(代数法)

检验



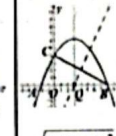
$$\sqrt{25+y^2} = 4\sqrt{5}$$

$$Q(3, 4\sqrt{5})$$



$$\sqrt{9+(y-4)^2} = 4\sqrt{5}$$

$$Q(3, 4\sqrt{7})$$



$$\sqrt{9+(y-4)^2} = \sqrt{25+y^2}$$

$$Q(3, 0)$$

基本解题方法

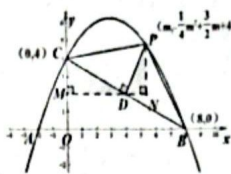
代数法:

$$PC = \sqrt{m^2 + (-\frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m)^2}$$

$$PB = \sqrt{(m-3)^2 + (-\frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m + 4)^2}$$

$$m^2 + (-\frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m)^2 = (m-3)^2 + (-\frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m + 4)^2$$

$$\text{解得: } m_1 = -1 + \sqrt{41}, m_2 = -1 - \sqrt{41} (\text{舍})$$



几何法:

由 $\triangle PDN \sim \triangle DMC$ 得:

$$\frac{PN}{DM} = \frac{DN}{CM}$$

$$\frac{-\frac{1}{4}m^2 + \frac{3}{2}m + 2}{4} = \frac{m-4}{2}$$

$$\text{解得: } m_1 = -1 + \sqrt{41}, m_2 = -1 - \sqrt{41} (\text{舍})$$

板书设计

再探等腰三角形存在性

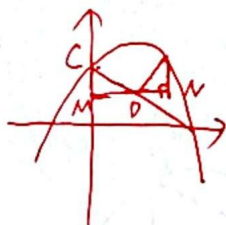
步骤: 一分 二作 三算 四验
(三类) (两圆一线) (几何法) (是否舍去)

方法: 法一: 代数法 (换元法)

例2过程

法二: 几何法 (K型相似)

例2过程



不用PPT ~~投影~~ 可全部用板书

投影学生过程



扫描全能王 创建