跨学科项目式导向　考查数学探究创新
——2024年中考“综合与实践”专题解题分析

苏洪雨，杨　洋
（华南师范大学数学科学学院）

摘　要：综合与实践试题是当前中考数学试卷的重要组成部分，也是考查学生数学核心素养的主要内容．通过“综合与实践”专题解题分析，发现2024年初中学业水平考试数学试题中的综合与实践问题有三个特点：跨学科、项目式和探究性．在此基础上，从数学文化、能力迁移、图形变换等不同角度研究相关优秀试题，给出解决综合与实践问题的教学建议．

扫码订阅配套讲座

关键词：数学探究；跨学科；项目学习；问题解决

中图分类号：G633.6　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1673-8284（2024）12-0050-12

引用格式：苏洪雨，杨洋. 跨学科项目式导向　考查数学探究创新：2024年中考“综合与实践”专题解题分析[J]. 中国数学教育（初中版），2024(12)：50-61.

数学来源于现实世界，但又超越现实世界；数学具有高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性．抽象、严谨的数学是对生活实践的浓缩，这为数学研究带来了便捷，但也对学生理解数学的发生发展带来了一定的困难．因此，数学课程中的综合与实践活动在学生的数学学习中具有重要价值，让学生经历、体验数学的发生发展过程，再现数学的魅力，帮助学生积累基本的数学活动经验．

随着数学《义务教育数学课程标准（2022年版）》（以下简称《标准》）的颁布和实施，综合与实践活动越来越受到重视，形式也是多种多样，包括跨学科学习、项目式学习、数学探究等，这些活动的开展既促进了学生问题解决能力的发展，也提升了学生的数学核心素养．在“教—学—评”一体化的背景下，中考试题中的综合与实践问题不断创新，对学生的数学理解和问题解决能力进行了较为全面的考查．2024年全国各地区初中学业水平考试（以下统称“中考”）数学试卷中命制了各类新颖的综合与实践问题，全面考查了学生的数学核心素养．

一、试题特点分析

1. 跨学科视角下考查综合问题解决能力

《标准》将跨学科主题学习安排在“综合与实践”领域，并指出，综合与实践以培养学生综合运用所学知识和方法解决实际问题的能力为目标，根据不同学段学生的特点，以跨学科主题学习为主，适当采用主题式学习和项目式学习的方式，设计情境真实、较为复杂的问题，引导学生综合运用数学学科和跨学科的知识与方法解决问题．以跨学科综合与实践主题活动为载体，建立不同学科之间的联系，使学生感悟数学与生活、数学与其他学科的关联，形成跨学科的应用

基金项目：2022年中国教育学会义务教育数学课程标准研究（初中）专项课题——基于发展学生核心素养的课程资源优化与整合研究（22ZS061405ZA）.

作者简介：苏洪雨（1977— ），男，教授，主要从事数学教育评价与测量研究；
杨洋（2001— ），女，硕士研究生，主要从事数学跨学科学习研究.

中国知网 https://www.cnki.net

意识，培养学生解决现实世界中实际问题的能力.

例1　（四川·自贡卷）为测量水平操场上旗杆的高度，九(2)班各学习小组运用了多种测量方法.

（1）如图1，小张在测量时发现，自己在操场上的影长 EF 恰好等于自己的身高 DE. 此时，小组同学测得旗杆 AB 的影长 BC 为11.3 m，据此可得旗杆高度为_______.

（2）如图2，小李站在操场上点 E 处，前面水平放置镜面 C，并通过镜面观测到旗杆顶部 A. 小组同学测得小李的眼睛距地面高度 $DE = 1.5$ m，小李到镜面距离 $EC = 2$ m，镜面到旗杆的距离 $CB = 16$ m. 求旗杆高度.

（3）小王所在小组采用图3的方法测量，结果误差较大. 在更新测量工具，优化测量方法后，测量精度明显提高，研学旅行时，他们利用自制工具，成功测量了江姐故里广场雕塑的高度.

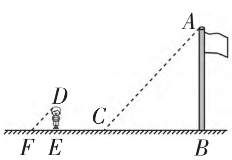


图1　利用影子

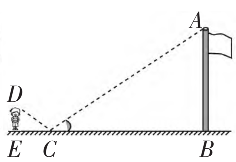


图2　利用镜子

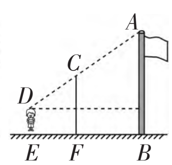


图3　利用标杆

方法如下：

如图4，在透明的塑料软管内注入适量的水，利用连通器原理，保持管内水面 M，N 两点始终处于同一水平线上.

如图5，在支架上端 P 处，用细线系小重物 Q，标高线 PQ 始终垂直于水平地面.

如图6，在江姐故里广场上点 E 处，同学们用注水管确定与雕塑底部 B 处于同一水平线的 D，G 两点，并标记观测视线 DA 与标高线交点 C，测得标高 $CG = 1.8$ m，$DG = 1.5$ m. 将观测点 D 后移24 m到点 D' 处. 采用同样方法，测得 $C'G' = 1.2$ m，$D'G' = 2$ m. 求雕塑高度（结果精确到1 m）.

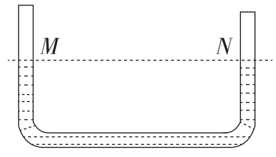


图4　找水平线

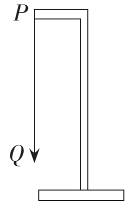


图5　定标高线

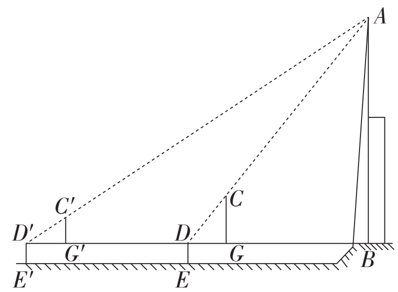


图6　测雕塑高

目标解析：该题基于测量旗杆高度的实际场景，融合物理学中光的反射与连通器原理，设计三种测量方案，考查了直角三角形、相似三角形的判定与性质等知识. 试题展现了数学与物理学科的交叉融合，渗透了方程思想、数形结合思想、转化与化归思想等数学基本思想，考查了学生的抽象能力、运算能力、应用能力和跨学科能力，让学生会用数学的眼光观察现实世界，会用数学的思维思考现实世界. 在应对测量偏差时，试题引导学生主动优化方法，提升精度，展现了科学素养，培养了学生的科学精神与严谨的态度.

解法分析：该题设计详尽，解答需条理清晰，逐一攻克. 第(1)小题利用影子测旗杆高度，核心是利用两个直角三角形相似，由影长等于身高，可以推断 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，从而计算出旗杆的高度. 第(2)小题则结合物理学中的镜面反射原理，要求学生具备跨学科知识. 根据光的反射定律，光在玻璃等界面反射时，入射角与反射角相等，利用相似三角形的性质即可求解旗杆的高度. 第(3)小题引入了物理学中的连通器原理，学生需深入解读题干信息，结合图4和图5理解连通器原理，此基础上得到 $\triangle DCG$ 和 $\triangle DAB$ 相似，$\triangle D'C'G'$ 和 $\triangle D'AB$ 相似. 通过两次运用相似三角形的性质，分别建立方程求解出雕塑的高度.

题源分析：该题紧扣《标准》要求，聚焦教材核心，强化“四基”. 第(1)小题、第(2)小题改编自人教版《义务教育教科书·数学》（以下统称“人教版教材”）九年级下册第二十七章“相似”中的数学活动1，凸显了数学知识在现实情境中的应用，充分展现了试题的基础性、发展性和综合性. 第(3)小题巧妙引入“江姐故里研学旅行”的主题，其中雕塑基座高度寓意深刻，隐喻江姐牺牲时的年岁，融入了爱国主义教育及红色元素，实现了知识与情感的双重教育价值. 对

中国知网　https://www.cnki.net

第(1)小题和第(2)小题进行延伸和拓展，要求学生能深刻理解试题背景，灵活运用数学思想方法解决实际问题，展现了良好的层次与区分度. 另外，该题尤为注重跨学科知识的融合，将数学问题与物理学中的光的反射、连通器原理等知识巧妙结合，培养了学生的综合应用能力，助力综合素养的提升.

类题赏析：综观2024年全国各地区中考“综合与实践”试题，以跨学科知识为载体，考查学生综合运用其他学科知识及数学知识来分析问题和解决问题，培养了学生运用跨学科知识解决问题的能力. 类似的试题还有安徽卷第19题、江苏扬州卷第16题、福建卷第16题等.

拓展练习：（安徽卷）科技社团选择学校游泳池进行一次光的折射实验，如图7，光线自点 B 处发出，经水面点 E 折射到池底点 A 处. 已知 BE 与水平线的夹角 $\alpha=36.9°$，点 B 到水面的距离 $BC=1.20$ m，点 A 处水深为1.20 m，到池壁的水平距离 $AD=2.50$ m. 点 B，C，D 在同一条竖直线上，所有点都在同一竖直平面内. 记入射角为 β，折射角为 γ，求 $\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$ 的值.

（精确到0.1，参考数据：$\sin 36.9°\approx0.60$，$\cos 36.9°\approx0.80$，$\tan 36.9°\approx0.75$.）

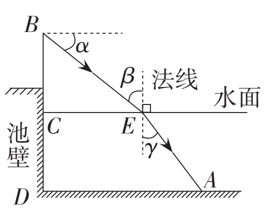


图7

答案：1.3.

2. 以项目式学习为载体，建立数学模型，导向现实问题解决

《标准》指出，初中阶段综合与实践领域，可采用项目式学习的方式，以问题解决为导向，整合数学与其他学科的知识和思想方法，让学生从数学的角度观察与分析、思考与表达、解决与阐释社会生活及科学技术中遇到的现实问题. 让学生经历项目式学习的全过程，从数学的角度分析现实生活和科学情境中遇到的问题，会用数学的眼光观察现实世界；再经历项目式学习的全过程，探究问题的本质，建立数学模型，会用数学的思维思考现实世界，会用数学的语言表达现实世界，发展抽象能力、推理能力和数学建模等数学核心素养.

例2　（山西卷）综合与实践.

【问题情境】如图8，矩形 $MNKL$ 是学校花园的示意图，其中一个花坛的轮廓可近似看成由抛物线的一部分与线段 AB 组成的封闭图形，点 A，B 在矩形的边 MN 上. 现要对该花坛内种植区域进行划分，以种植不同花卉，学校面向全体同学征集设计方案.

【方案设计】如图9，$AB=6$ 米，AB 的垂直平分线与抛物线交于点 P，与 AB 交于点 O，点 P 是抛物线的顶点，且 $PO=9$ 米. 欣欣设计的方案如下：

第一步：在线段 OP 上确定点 C，使 $\angle ACB=90°$，用篱笆沿线段 AC，BC 分隔出 $\triangle ABC$ 区域，种植串串红；

第二步：在线段 CP 上取点 F（不与点 C，P 重合），过点 F 作 AB 的平行线，交抛物线于点 D，E. 用篱笆沿 DE，CF 将线段 AC，BC 与抛物线围成的区域分隔成三部分，分别种植不同花色的月季.

【方案实施】学校采用了欣欣的方案，在完成第一步 $\triangle ABC$ 区域的分隔后，发现仅剩6米篱笆材料. 若要在第二步分隔中恰好用完6米材料，需确定 DE 与 CF 的长. 为此，欣欣在图9中以 AB 所在直线为 x 轴，OP 所在直线为 y 轴建立平面直角坐标系. 试按照她的方法解决问题.

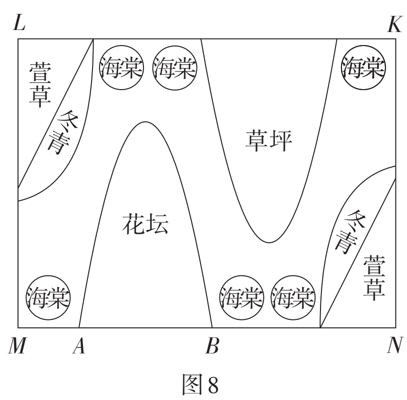


图8

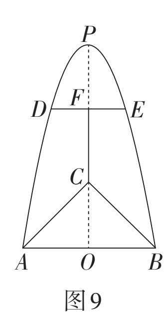


图9

（1）在图9中画出平面直角坐标系，并求抛物线的函数表达式；

（2）求6米材料恰好用完时 DE 与 CF 的长；

（3）种植区域分隔完成后，欣欣又想用灯带对该

中国知网　https://www.cnki.net

花坛进行装饰，计划将灯带围成一个矩形．她尝试借助图9设计矩形四个顶点的位置，其中两个顶点在抛物线上，另外两个顶点分别在线段 AC，BC 上．直接写出符合设计要求的矩形周长的最大值．

目标分析：该题考查了二次函数的实际应用问题，涉及建立平面直角坐标系、求二次函数的表达式、利用二次函数表达式求最值等知识，考查了学生的抽象能力、几何直观、模型观念和应用意识．通过解决此题，让学生学会从数学的角度去观察、分析、表达并解决实际问题，在此过程中使学生不断积累数学活动经验，深刻体会数学的应用价值，培养了学生的综合与实践能力．

解法分析：第(1)小题求解抛物线的函数表达式，有三种方法．第一种，设为一般式，利用待定系数法代入 A，B，P 三点的坐标求解；第二种，设为顶点式，根据顶点 P 的坐标，直接设为 $y=ax^2+9$，再代入点 A 或点 B 的坐标即可求解；第三种，设为交点式 $y=a(x-3)(x+3)$，再代入点 P 的坐标即可求解．作图时需规范坐标轴的画法．第(2)小题利用 $DE+CF=6$，根据第(1)小题求出的表达式可以表示出 E，F，D 三点的坐标，结合 $\triangle ABC$ 是直角三角形求出 OC 的长度，注意当点的坐标为负数时，转化为线段长度时应取绝对值．第(3)小题是求周长最大的定值问题，解题方法较多，可以求出直线 AC，BC 的表达式，结合矩形的对称性得顶点的坐标，周长的表达式为二次函数，利用配方法或判别式法求最值即可．

题源分析：该题立足校园环境美化这一真实情境，提出具有综合性、实践性、探究性的问题．在解决问题的过程中，学生需要将实际问题转化为数学问题，经历“实际问题—数学抽象—建立模型—解释应用”的全过程．通过引导学生建立数学模型，感悟数学的应用价值，突出“综合与实践”课程的应用性、实践性与综合性，符合做中学、用中学、创中学理念．

类题赏析：综观2024年全国各地区中考“综合与实践”专题的试题，以问题解决作为导向，从数学的视角去观察、分析、表达，并解决现实问题，以增强学生发现与提出问题、分析与解决问题的能力，培养其应用意识、创新意识和实践能力的同类试题还有很多，如陕西卷第25题、江西卷第19题、甘肃卷第22题等．

拓展练习：（陕西卷）一条河上横跨着一座宏伟壮观的悬索桥．桥梁的缆索 L_1 与缆索 L_2 均呈抛物线型，桥塔 AO 与桥塔 BC 均垂直于桥面，如图10所示，以点 O 为原点，以直线 FF' 为 x 轴，以桥塔 AO 所在直线为 y 轴，建立平面直角坐标系．

已知：缆索 L_1 所在抛物线与缆索 L_2 所在抛物线关于 y 轴对称，桥塔 AO 与桥塔 BC 之间的距离 $OC=100\text{ m}$，$AO=BC=17\text{ m}$，缆索 L_1 的最低点 P 到 FF' 的距离 $PD=2\text{ m}$．（桥塔的粗细忽略不计．）

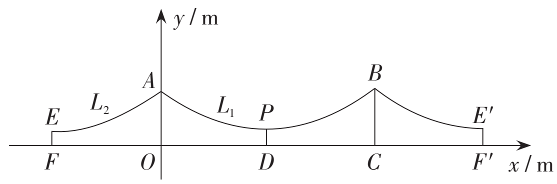


图10

（1）求缆索 L_1 所在抛物线的函数表达式；

（2）点 E 在缆索 L_2 上，$EF\perp FF'$，且 $EF=2.6\text{ m}$，$FO<OD$，求 FO 的长．

答案：（1）$y=\frac{3}{500}(x-50)^2+2$；（2）$FO$ 的长为 40 m．

3. 关注数学探究，考查探究能力和逻辑思维

衡量学生接受优质数学教育成效的关键标志，在于他们是否具备了支撑未来学习、生活及职业生涯所需的数学素养，实现个人能力的可持续发展．良好的数学学习不只是知识技能学习的结果，还应该包括知识学习的过程，让学生在过程中感悟数学思想、掌握数学基本思想方法、获得积极的情感体验等．让学生经历探究数学知识的来龙去脉，体验数学知识的形成过程，通过动手操作、思维推理、实践应用、反思归纳等探究性学习形式，让学生体验数学再创造的过程，积累数学基本活动经验．

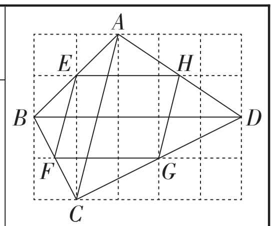
例3　（青海卷）综合与实践．

顺次连接任意一个四边形的中点得到一个新四边形，我们称这个新四边形为原四边形的中点四边形．数学兴趣小组通过作图、测量，猜想：原四边形的对角线对中点四边形的形状有着决定性作用．

以下从对角线的数量关系和位置关系两个方面展开探究．

中国知网 https://www.cnki.net

【探究1】

原四边形对角线关系	中点四边形形状	 图11
不相等、不垂直	平行四边形	

如图11，在四边形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是各边的中点.

求证：中点四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

证明：因为 E，F，G，H 分别是 AB，BC，CD，DA 的中点，

所以 EF，GH 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 的中位线.

所以 $EF=\frac{1}{2}AC$，$GH=\frac{1}{2}AC$ （____①____）.

所以 $EF=GH$.

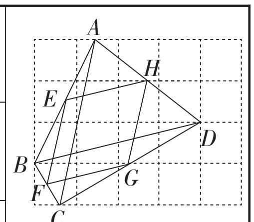
同理，可得 $EH=FG$.

所以中点四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

结论：任意四边形的中点四边形是平行四边形.

（1）补全上述过程中的证明依据①________.

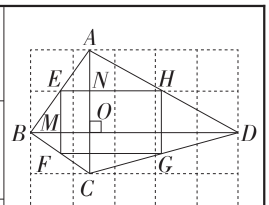
【探究2】

原四边形对角线关系	中点四边形形状	 图12
不相等、不垂直	平行四边形	
$AC=BD$	菱形	

从作图、测量结果得出猜想Ⅰ：原四边形的对角线相等时，中点四边形是菱形.

（2）下面我们结合图12来证明猜想Ⅰ，试在探究1证明结论的基础上，写出后续的证明过程.

【探究3】

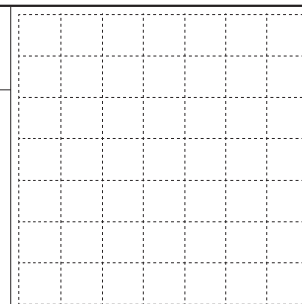
原四边形对角线关系	中点四边形形状	 图13
不相等、不垂直	平行四边形	
$AC\perp BD$	②______	

（3）从作图、测量结果得出猜想Ⅱ：原四边形对角线垂直时，中点四边形是②______.

（4）下面我们结合图13来证明猜想Ⅱ，在探究1证明结论的基础上，写出后续的证明过程.

【归纳总结】

（5）根据上述探究过程，补全下面的结论，并在图14中画出对应的图形.

原四边形对角线关系	中点四边形形状	 图14
③____	④____	

结论：原四边形对角线③__________时，中点四边形是④__________.

目标分析： 该题是四边形的综合题，考查了中点四边形、平行四边形的判定、矩形的判定、菱形的判定、正方形的判定，以及三角形中位线定理等知识. 学生通过经历完整的探究过程，用动态的眼光看待问题，发现问题的本质，从观察、分析、解决问题的过程中总结方法并应用到同类问题的解决中. 在这个过程中让学生感受转化、类比的思想方法，培养其推理能力和自主探究能力，增强其发散思维和灵活运用知识解决问题的能力.

解法分析： 第(1)小题已知条件中给出了证明过程，根据三角形中位线定理即可得到结论. 第(2)小题根据三角形中位线定理和平行四边形的性质得到中点四边形 $EFGH$ 是平行四边形，根据菱形的判定定理即可得到结论. 第(3)小题根据矩形的判定定理得到结论. 第(4)小题根据三角形中位线定理得到 $EH\parallel BD$，$EF\parallel AC$，再结合平行四边形的判定定理得到四边形 $EMON$ 是平行四边形. 由 $AC\perp BD$，得 $\angle MEN=\angle MON=90°$. 根据矩形的判定定理得到中点四边形 $EFGH$ 是矩形. 第(5)小题，由于该题是从四边形对角线的数量关系和位置关系两个方面展开探究，结合第(3)小题和第(4)小题中已经探究过的内容，故第(5)小题原四边形对角线关系应该为垂直且相等，根据正方形的判定定

中国知网 https://www.cnki.net

理即可得到结论．总体来说，熟练掌握三角形中位线定理是解决该题的关键．

题源分析：人教版教材八年级下册“平行四边形”这一章复习巩固中引入了“中点四边形”的概念，但并未详述探究．此探究是对教材中平行四边形必修内容的拓展与延伸．试题既与学生的认知基础相衔接，兼顾了基础性，又以培养学生的探究意识为主，追求思辨性，具有综合性和创新性．通过探究，让学生经历作图、测量、猜想、证明的全过程，不仅考查学生是否掌握特殊平行四边形的性质和判定方法，还能够培养学生的探究能力，锻炼学生的逻辑思维能力．

类题赏析：综观2024年全国各地区中考“综合与实践”专题的试题，立足于教材的基本内容，对于主干知识进行拓展和延伸，以培养学生的探究意识和思辨意识的数学探究问题还有很多，如上海卷第22题、河北卷第23题、山东滨州卷第24题等．

拓展练习：（山东·滨州卷）现行人教版教材九年级下册第85页“拓广探索”第14题如下．

14. 如图15，在锐角三角形 ABC 中，探究 $\frac{a}{\sin A}$，$\frac{b}{\sin B}$，$\frac{c}{\sin C}$ 之间的关系．（提示：分别作 AB 和 BC 边上的高．）

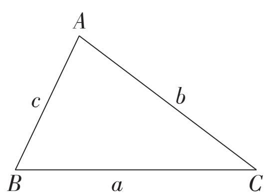


图15

【得出结论】$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$．

【基础应用】在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=75°$，$\angle C=45°$，$BC=2$，利用以上结论求 AB 的长．

【推广证明】进一步研究发现，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ 不仅在锐角三角形中成立，在任意三角形中均成立，并且还满足 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径）．

试利用图16证明：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$．

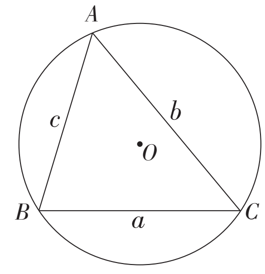


图16

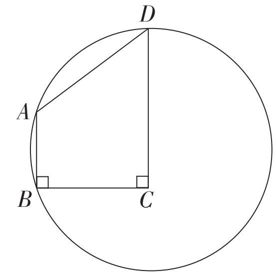


图17

【拓展应用】如图17，四边形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=3$，$CD=4$，$\angle B=\angle C=90°$．求过 A，B，D 三点的圆的半径．

答案：$AB=\frac{2\sqrt{6}}{3}$；证明略；过 A，B，D 三点的圆的半径为 $\frac{5\sqrt{13}}{6}$．

二、优秀试题分析

1. 以数学文化为背景，结合新定义培养数学思维

《标准》指出，真实情境的创设要注重情境素材的育人功能．因此，要深入挖掘数学的人文价值和育人价值，注重选取中华优秀传统文化中的数学文化素材，帮助学生了解和领悟中华民族独特的数学智慧，增强学生的文化自信和民族自豪感，让学生可以沿着古人的足迹去探寻数学学科发展的轨迹，了解数学的发展脉络、数学思想演变的整个过程，以及数学知识的内在联系，调动学生学习数学的兴趣，结合新定义，提升学生的阅读理解能力、自主学习能力和逻辑思维能力．

例4　（河北卷）“铺地锦”是我国古代一种乘法运算方法，可将多位数乘法运算转化为一位数乘法和简单的加法运算．淇淇受其启发，设计了如图18所示的“表格算法”，图18表示 132×23，运算结果为3 036．图19表示一个三位数与一个两位数相乘，表格中部分数据被墨迹覆盖，根据图19中现有数据进行推断，正确的是（　　）．

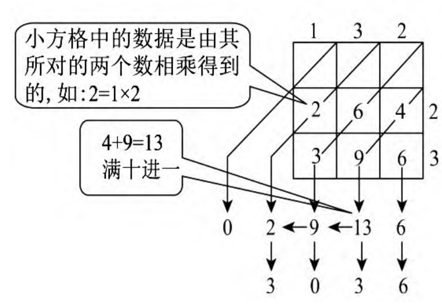


图18

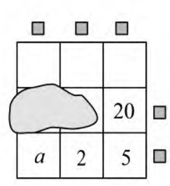


图19

中国知网　https://www.cnki.net

(A)“20”左边的数是16

(B)“20”右边的“□”表示5

(C)运算结果小于6 000

(D)运算结果可以表示为 $4\,100a+1\,025$

题意理解：该题信息量较大，准确理解题意是解题的关键．结合已知与图18的内容，可以获得以下信息：(1)在“表格算法”中，将待求的多位数写在表格上方和右侧；(2)每个小方格中的数据是由所在行、列的两个数相乘得到的；(3)根据图18中对角线的排列方式，将相乘结果相加且满足满十进一的原则即可将多位数乘法运算转化为一位数乘法和简单的加法运算．

思路探求：该题阅读内容多，要先理解题意，在此基础上为了方便表示和计算，可以将五个“□”分别用未知数 x，y，z，m，n 代替．观察图19，问题的突破口在于20，5，2这三个小方格两两之间相互的联系，满足 $yn=2$，$zn=5$，$zm=20$，在10以内满足上式的只有 $n=1$，进而推出 y，z 的值，再由 $zm=20$ 得到 m 的值．利用 $xn=a$，将 x 用含 a 的式子表示，由此 x，y，z，m，n 全部得出，再根据图18的计算方法，所有选项便迎刃而解．

解：设一个三位数与一个两位数分别为 $100x+10y+z$ 和 $10m+n$，如图20所示．

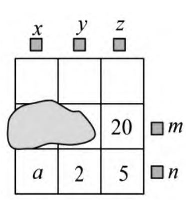


图20

由题意，得 $mz=20$，$nz=5$，$ny=2$，$nx=a$．

所以 $\frac{mz}{nz}=4$，即 $m=4n$．

当 $n=2$，$y=1$ 时，$z=2.5$，不是正整数，不符合题意，故舍去．

当 $n=1$，$y=2$ 时，则 $m=4$，$z=5$，$x=a$．

所以选项A：“20”左边的数是 $2\times4=8$，故本选项不符合题意；选项B：“20”右边的“□”表示4，故本选项不符合题意．

所以 a 上面的数应为 $4a$，如图21所示．

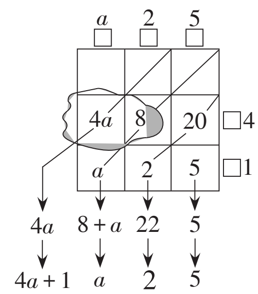


图21

所以运算结果可以表示为 $1\,000(4a+1)+100a+25=4\,100a+1\,025$．所以选项D符合题意．

当 $a=2$ 时，计算结果大于6 000，故选项C不符合题意．

故此题答案选D.

回顾反思：该题依托“铺地锦”这一古代运算方法考查了整式的运算．学生需要经历理解、归纳及运用的思维过程，展现了理解、转化、抽象及推理能力，强调了逻辑思维的有序性与严密性．同时，通过对我国古代数学成就的介绍和应用，弘扬了数学文化，增强了民族自信．解题的关键为精准理解题意与逻辑推理，辅以排除法可以快速解题．

拓展练习：(山东卷)任取一个正整数，若是奇数，就将该数乘3再加上1；若是偶数，就将该数除以2. 反复进行上述两种运算，经过有限次运算后，必进入循环圈 $1\to4\to2\to1$，这就是“冰雹猜想”．在平面直角坐标系 xOy 中，将点 $(x，y)$ 中的 x，y 分别按照“冰雹猜想”同步进行运算得到新的点的横、纵坐标，其中 x，y 均为正整数．例如，点 $(6，3)$ 经过第1次运算得到点 $(3，10)$，经过第2次运算得到点 $(10，5)$，以此类推．则点 $(1，4)$ 经过2 024次运算后得到点________．

答案：(2，1).

2. 经历发现、论证、迁移的全过程，锻炼迁移能力

在问题导向的探究性学习中，学生应处于主体地位，参与并主导知识的发现、论证、应用及迁移的全过程．发现阶段是知识探索的起点，它要求学生从被动接受知识转为主动探索知识．论证过程强调逻辑性和严谨性，更重要的是论证之后的迁移阶段，学生需要将习得的研究方法或解题思路灵活应用于解决其他

中国知网 https://www.cnki.net

相关问题．这需要学生能够洞察不同问题背后的共通性规律，既是对知识迁移能力的培养，也是学生创新能力与问题解决能力的重要体现，让学生在此过程中深度思考，体会数学学科的本质，积累数学活动经验，提升数学综合能力和核心素养．

例5　（吉林・长春卷）【问题呈现】小明在数学兴趣小组活动时遇到一个几何问题：如图22，在等边三角形 ABC 中，$AB=3$，点 M，N 分别在边 AC，BC 上，且 $AM=CN$，试探究线段 MN 长度的最小值．

【问题分析】小明通过构造平行四边形，将双动点问题转化为单动点问题，再通过定角发现这个动点的运动路径，进而解决上述几何问题．

【问题解决】如图23，过点 C，M 分别作 MN，BC 的平行线，并交于点 P，作射线 AP．

在【问题呈现】的条件下，完成下列问题．

（1）证明：$AM=MP$；

（2）$\angle CAP$ 的大小为________，线段 MN 长度的最小值为________．

【方法应用】某种简易房屋在整体运输前需用钢丝绳进行加固处理，如图24所示．小明收集了该房屋的相关数据，并画出了示意图，如图25，$\triangle ABC$ 是等腰三角形，四边形 $BCDE$ 是矩形，$AB=AC=CD=2$ 米，$\angle ACB=30°$．MN 是一条两端点位置和长度均可调节的钢丝绳，点 M 在 AC 上，点 N 在 DE 上．在调整钢丝绳端点位置时，其长度也随之改变，但需始终保持 $AM=DN$．钢丝绳 MN 长度的最小值为________．

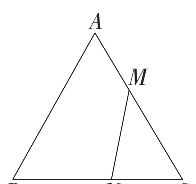


图22

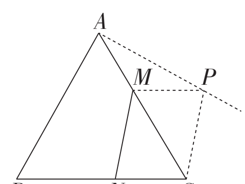


图23

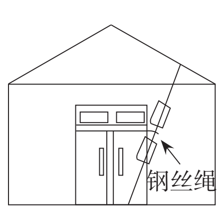


图24

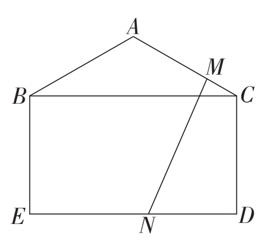


图25

题意理解：该题给出了等边三角形的边长和线段之间的数量关系．第(1)(2)小题主要是利用等边三角形和平行四边形的性质，寻找线段长度关系和角度关系．第(3)小题则将数学问题应用到现实生活情境中，设问与第(2)小题保持一致，说明可借鉴前两道小题的研究思路．解题的关键在于“问题分析”中提到“通过构造平行四边形，将双动点问题转化为单动点问题，再通过定角发现这个动点的运动路径”，这是解题的核心思想，引领问题解答的全过程．

思路探求：（1）先证四边形 $MNCP$ 是平行四边形，得到 $AM=CN=MP$．（2）由(1)可知存在等腰三角形，再利用外角的性质推出存在定角，从而将问题转化为顶点到定直线的最小值问题，利用“垂线段最短”即可得到答案．（3）在第(2)小题的思路引导下构造平行四边形，过点 M，D 作 ED，MN 的平行线，将 MN 转化为 DP，从而将问题转化为点到直线的最小值问题，利用30°角所对的直角边是斜边的一半，以及勾股定理即可求解．

解：【问题解决】(1) 因为 $CP \parallel MN$，$MP \parallel NC$，

所以四边形 $CPMN$ 是平行四边形．

所以 $MP=NC$．

因为 $AM=CN$，

所以 $AM=MP$．

（2）因为 $AM=MP$，

所以 $\angle CAP=\angle MPA$．

因为 $\angle PMC=\angle ACB=60°$，

所以 $\angle CAP=\angle MPA=30°$．

因为四边形 $CPMN$ 是平行四边形，

所以 $MN=PC$．

当 $PC \perp AP$ 时，PC 的长最小，MN 也有最小值．

此时 $PC=\frac{1}{2}AC=\frac{3}{2}$．

所以线段 MN 长度的最小值是 $\frac{3}{2}$．

故填30°，$\frac{3}{2}$．

【方法应用】如图26，过点 M，D 作 ED，MN 的平行线，则四边形 $MNDP$ 是平行四边形．

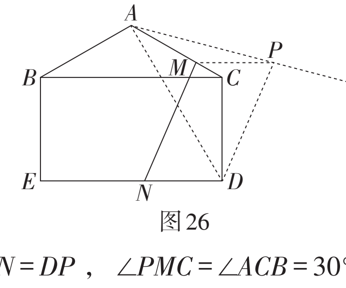


图26

所以 $MN=DP$，$\angle PMC=\angle ACB=30°$．

中国知网 https://www.cnki.net

所以 $\angle PAM=\angle APM=15°$.

当 $DP\perp AP$ 时，DP 的值最小.

因为 $\angle ACD=120°$，

所以 $\angle CAD=30°$.

所以 $\angle PAD=\angle CAD+\angle PAM=45°$.

在 $\triangle ACD$ 中，可得 $AD=\sqrt{3}AC=2\sqrt{3}$.

所以 $DP=AD\sin 45°=\sqrt{6}$.

故填 $\sqrt{6}$ 米.

回顾反思： 该题主要考查了等边三角形的性质、平行四边形的判定和性质、等腰三角形的性质、矩形的性质、解直角三角形等知识. 该题难度适中，掌握相关知识并理解题意是解题的关键. 该题以“运输简易房屋”为背景，考查了学生发现问题、分析问题和应用成果解决问题的全过程，体现了任务导向的命题原则，让学生经历知识的发现、论证和应用的全过程，促进学生对知识的迁移与应用能力的发展.

拓展练习：（江苏·扬州卷）在综合实践活动中，“特殊到一般”是一种常用方法，我们可以先研究特殊情况，猜想结论，然后再研究一般情况，证明结论.

如图27，已知 $\triangle ABC$，$CA=CB$，$\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，点 D 在 $\odot O$ 上（$AD>BD$），连接 AD，BD，CD.

【特殊化感知】（1）如图27，若 $\angle ACB=60°$，点 D 在 AO 的延长线上，则 $AD-BD$ 与 CD 的数量关系为________.

【一般化探究】（2）如图28，若 $\angle ACB=60°$，点 C，D 在 AB 的同侧，判断 $AD-BD$ 与 CD 的数量关系并说明理由.

【拓展性延伸】（3）若 $\angle ACB=\alpha$，直接写出 AD，BD，CD 满足的数量关系（用含 α 的式子表示）.

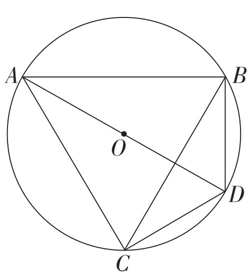


图27

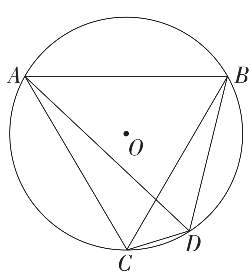


图28

答案：（1）$AD-BD=CD$.（2）$AD-BD=CD$，理由略.（3）当点 C，D 在 AB 的同侧时，$AD-BD=2CD\sin\frac{1}{2}\alpha$；当点 C，D 在 AB 的两侧时，$AD+BD=2CD\sin\frac{1}{2}\alpha$.

3. 动手操作与探究，积累数学活动经验

数学活动经验是在“做数学”中体现出来的，这就需要学生的参与，开展动手操作和数学探究. 在真实的问题情境中，学生通过动手尝试和实验操作，既可以感受数学与现实世界的紧密联系，也可以运用数学知识解决问题. 通过具体的操作过程，把抽象的数学变为具体的活动或实验，让学生真实体验数学在解决实际问题中的作用，有助于学生开展数学探究，积累数学活动经验，培养学生的模型意识和应用意识.

例6（河北卷）【情境】图29是由正方形纸片去掉一个以中心 O 为顶点的等腰直角三角形后得到的. 该纸片通过裁剪，可拼接为图30所示的钻石型五边形，数据如图所示.（说明：纸片不折叠，拼接不重叠、无缝隙、无剩余.）

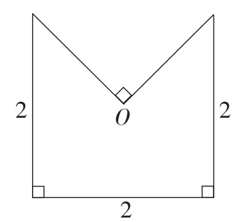


图29

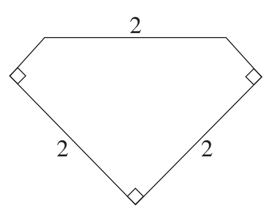


图30

【操作】嘉嘉将图29所示的纸片通过裁剪，拼成了钻石型五边形.

如图31，嘉嘉沿虚线 EF，GH 裁剪，将该纸片剪成①，②，③三块，再按照图32所示进行拼接. 根据嘉嘉的剪拼过程，解答问题.

（1）直接写出线段 EF 的长；

（2）直接写出图31中所有与线段 BE 相等的线段，并计算 BE 的长.

【探究】淇淇说：将图29所示纸片沿直线裁剪，剪成两块，就可以拼成钻石型五边形.

试按照淇淇的说法设计一种方案：在图33所示纸片的 BC 边上找一点 P（可以借助刻度尺或圆规），画出裁剪线（线段 PQ）的位置，并直接写出 BP 的长.

中国知网 https://www.cnki.net

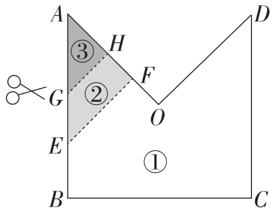


图31

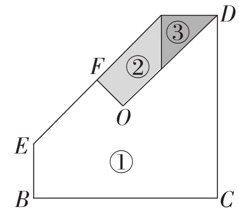


图32

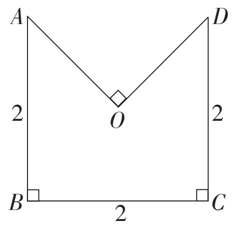


图33

题意理解： 由情境背景可知，要求将图29的纸片通过裁剪，拼接为如图30所示的钻石型五边形，确保纸片不折叠、不重叠、无缝隙、无剩余，说明裁剪前后面积不变．图29是由正方形纸片去掉一个以中心 O 为顶点的等腰直角三角形后得到的，隐含条件 $\angle A=45°$．在操作部分，嘉嘉提供了一种拼成钻石型五边形的方案，需要注意剪拼前后图形全等，说明对应边长度相等．在探究部分要求将如图29所示纸片沿直线裁剪，剪成两块，拼成钻石型五边形，说明需要通过“补形”的方法，裁剪下一个与 $\triangle AOD$ 全等的三角形．

思路探求： 第(1)小题，将图29所示纸片裁剪拼接成钻石五边形，重点要把握拼接前后图形全等，对应边的长度相等．第(2)小题利用第(1)小题的结果，分别计算出对应线段的长，可得答案．对于探究部分，仔细观察图29和图30，可以发现是将同一个正方形去掉了不同位置的形状和大小相同的一个等腰直角三角形，即一个正方形的四分之一，要将图29变为图30，可以通过“补形”的方法实现．总体思路是只需要裁剪下的三角形和 $\triangle AOD$ 全等即可，把裁剪下的三角形补到 $\triangle AOD$ 的位置．

解：（1）如图34，过点 G' 作 $G'K \perp FH'$ 于点 K．

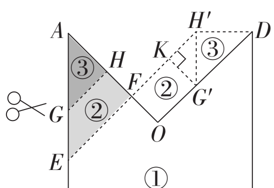


图34

由题意，得四边形 $FOG'K$ 为矩形．

所以 $FO=KG'$．

由拼接，可得 $HF=FO=KG'$．

由正方形的性质，可得 $\angle A=45°$．

所以 $\triangle AHG$，$\triangle H'G'D$，$\triangle AFE$ 为等腰直角三角形．

所以 $\triangle G'KH'$ 为等腰直角三角形．

设 $H'K=KG'=x$，

所以 $H'G'=H'D=\sqrt{2}x$．

所以 $AH=HG=\sqrt{2}x$，$HF=FO=KG'=x$．

因为正方形 $ABCD$ 的边长为2，

所以对角线 AC 的长为 $2\sqrt{2}$．

所以 $OA=\sqrt{2}$．

所以 $x+x+\sqrt{2}x=\sqrt{2}$．

解得 $x=\sqrt{2}-1$．

所以 $EF=AF=\left(\sqrt{2}+1\right)x=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)=1$．

（2）$BE=GE=AH=GH$．

因为 $\triangle AFE$ 为等腰直角三角形，$EF=AF=1$，

所以 $AE=\sqrt{2}EF=\sqrt{2}$．

所以 $BE=2-\sqrt{2}$．

因为 $GE=H'G'=\sqrt{2}x=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)=2-\sqrt{2}$，$AH=GH=\sqrt{2}x=2-\sqrt{2}$，

所以 $BE=GE=AH=GH$．

【探究】方法1：如图35，以点 B 为圆心，BO 长为半径画弧交 BC 于点 P'，交 AB 于点 Q'，则直线 $P'Q'$ 为分割线．

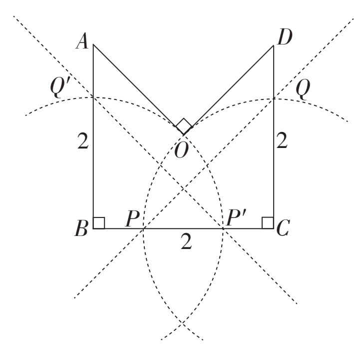


图35

此时 $B'P'=\sqrt{2}$，$P'Q'=2$，符合要求．

方法2：如图35，以点 C 圆心，CO 长为半径画弧，交 BC 于点 P，交 CD 于点 Q，则直线 PQ 为分割线．

中国知网　https://www.cnki.net

此时 $CP = CQ = \sqrt{2}$，$PQ = 2$．

所以 $BP = 2 - \sqrt{2}$．

综上，BP 的长为 $\sqrt{2}$ 或 $2 - \sqrt{2}$．

回顾反思：该题考查了正方形的性质、等腰直角三角形的判定与性质、勾股定理的应用、二次根式的混合运算等知识，题型新颖，强调信息的提取与理解，对学生的直观想象、推理能力要求较高．通过解此题，学生经历了一个完整的观察、思考、发现、验证、应用的全过程，因此需要具备丰富的数学活动经验．

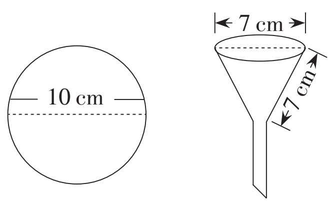
拓展练习：（广东卷）综合与实践．

【主题】滤纸与漏斗

【素材】如图36所示：

① 一张直径为10 cm的圆形滤纸；

② 一只漏斗口直径与母线均为7 cm的圆锥形过滤漏斗．



（a）　（b）

图36

【实践操作】步骤1：取一张滤纸；

步骤2：按如图37所示步骤折叠好滤纸；

步骤3：将其中一层撑开，围成圆锥形；

步骤4：将围成圆锥形的滤纸放入如图36所示的漏斗中．

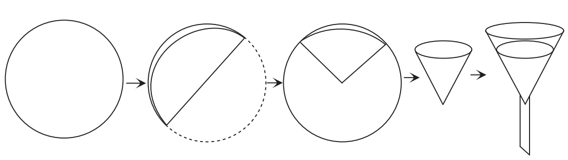


图37

【实践探索】（1）滤纸是否能紧贴此漏斗内壁（忽略漏斗管口处）？用你所学的数学知识说明．

（2）当滤纸紧贴漏斗内壁时，求滤纸围成圆锥形的体积．（结果保留 π．）

答案：（1）能，理由略；（2）$\dfrac{125\sqrt{3}}{24}\pi\ \text{cm}^3$．

三、复习备考建议

根据《标准》的要求，综合与实践问题以解决实际问题为核心，具有跨学科的特点，而且和项目式学习有一定的联系．因此，在复习中，要根据试题的特点开展相关的教学活动．

1．开展数学探究活动，体验问题解决过程

综合与实践课程旨在培养学生的创新意识、实践能力、社会担当等综合品质，这对于课堂教学有着较高的要求，学生不仅要掌握基本的数学知识和技能，更要能够发现问题、提出问题，开展数学探究，自主或合作解决问题．数学探究是指学生围绕某个数学问题自主探究、学习的过程，即学生在教师的指导下，从自身的学习生活和社会生活、自然界及人类自身的发展中，以数学家的眼光、探究方法主动获取知识、应用知识、解决问题的学习方式．在探究中，学生要观察、分析数学事实，提出有意义的数学问题，猜测、探求适当的数学结论或规律，并给出解释或证明．数学探究可以在研究性学习、课题学习中开展，也可以在课堂中进行微探究，也就是在发现问题、提出问题、分析问题和解决问题等环节中，对学生进行有指导的探究发现活动．微探究属于课堂教学的某些片断或教学的某个环节，可以是课堂引入、概念获得、原理分析、问题解决、归纳总结，也可以是某个活动过程，发现问题的活动、交流互动的活动、汇报活动，等等．

2．研究跨学科问题，经历数学项目学习

数学应用广泛．初中的数学模型比较丰富，如函数模型、方程模型、几何模型、概率统计模型等，这些模型能够应用于各类生活或科学情境中，而综合与实践问题正是基于数学模型应用的跨学科问题，这对学生的数学学习有着较高的要求．在针对该部分内容的复习教学中，教师要结合不同情境，寻找学科融合的切入点，设计跨学科问题，帮助学生把问题数学化，使用数学的方法解决问题．在研究跨学科问题中，项目式学习是一个很好的途径．项目式学习可以

中国知网　https://www.cnki.net

从不同的情境、学科出发，让学生综合应用所学知识，根据驱动问题开展数学探究，得到“项目产品”，这是考查学生综合能力的重要途径之一. 开展项目式学习，解决跨学科问题，可以让学生学会分析复杂的问题情境，寻找解决问题的方向，合理使用各种数学模型，从而更加从容地解决综合与实践问题.

3. 提高数学阅读素养，合理进行数学表征

从对2024年中考试题的分析可以看出，综合与实践试题的篇幅较长、内容丰富，涉及多个学科知识和情境，甚至包括数学文化，这就要求学生能够从复杂的问题表述中寻找有用的信息，对问题进行重新表征，变成自己熟悉的数学语言；这就需要学生具有良好的数学阅读素养，合理对问题进行转化和表征. 在解决综合与实践问题的过程中，收集、组织解题信息的能力是基础，而阅读能力、建模能力和求解能力则更为关键. 对于多文字、多学科、多任务的问题，学生要能够领会题中的信息，把握题干中的核心概念，理解问题的本质；能够把综合问题进行分解，用图表、图形、符号对问题进行多重表征，简化压缩信息，使之成为简洁的数学问题；能够建立不同知识体系之间的联系，结合原有的认知结构寻找问题解决的突破口，使用合适的数学语言表达问题.

参考文献：

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准（2022年版）[M]. 北京：北京师范大学出版社，2022.

[2] 史宁中，曹一鸣.《义务教育数学课程标准（2022年版）》解读[M]. 北京：北京师范大学出版社，2022.

[3] 苏洪雨. 基于问题设计的数学微探究评价体系构建[J]. 数学教育学报，2019，28（1）：19–24.

（上接第49页）

想方法，形成和发展学生的模型意识、创新意识，提高学生解决实际问题的能力，发展学生的数学核心素养. 教学中，应注重对数学思想方法的提炼和总结，进一步深化学生对数据的收集、整理和分析，以及对简单随机事件概率等知识的理解；要加强函数与方程、数形结合、化归与转化等思想方法的渗透，提升学生的数学逻辑思维和推理能力，从而实现从发现问题到提出问题再到解决问题的转化，进一步发展学生的运算能力、推理能力、数据观念、应用意识和模型意识等数学核心素养.

4. 经历真实的实践过程，发挥育人功能

《标准》指出，要设计合理的生活情境、数学情境、科学情境，关注情境的真实性，适当引入数学文化. 对于“统计和概率”领域的教学，要注重让学生在对数据进行收集、整理及分析的基础上，充分理解简单随机事件的概率本质，感知大数据时代数据分析的重要性，养成重证据、讲道理的科学态度. 2024年全国各地区中考“统计与概率”试题多采用项目式学习等形式进行考查，注重呈现统计与概率的过程，有效创设问题情境，渗透中华优秀传统文化、革命传统文化和社会主义先进文化等. 因此，在教学中，教师要积极创设问题情境，设计切合实际的实例和活动，让学生在真实的实践过程中经历发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的过程. 这样的过程，不仅能让学生感悟数学的价值与意义，还能够培养他们的数学思维、解决问题的能力及合作与创新精神，从而为学生的终身学习和未来发展奠定基础.

参考文献：

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准（2011年版）[M]. 北京：北京师范大学出版社，2012.

[2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准（2022年版）[M]. 北京：北京师范大学出版社，2022.

[3] 史宁中，曹一鸣.《义务教育数学课程标准（2022年版）》解读[M]. 北京：北京师范大学出版社，2022.

中国知网 https://www.cnki.net