深度学习视角下初中数学专题课的教学探索
——以“完全平方公式的变形”为例

刘 鹏，虞秀云，龙晓玉
(江西师范大学数学与统计学院)

摘 要：基于拓展延伸的数学专题课注重对一类知识点的深入探索，从而完善学生的数学知识体系．以“完全平方公式的变形”一课为例，以深度学习理念为导向，得到了深度学习视角下专题课的教学启示，即以情境教学促深度体验，以核心问题促深度思考，以变式训练促深度理解．

关键词：数学专题课；深度学习；教学设计
中图分类号：G633.6 **文献标识码**：A **文章编号**：1673-8284（2024）04-0053-04
引用格式：刘鹏，虞秀云，龙晓玉．深度学习视角下初中数学专题课的教学探索：以“完全平方公式的变形”为例[J]．中国数学教育（初中版），2024(4)：53-56.

一、深度学习与专题课教学内涵

《义务教育数学课程标准（2022年版）》指出，义务教育数学课程要帮助学生建立能体现数学学科本质、对未来学习有支撑意义的结构化的数学知识体系．关于深度学习，黎加厚教授依据布卢姆认知学习领域的教学目标理论指出，深度学习是一种在理解知识的基础上积极主动地批判和整合知识，构建知识体系，并将所学的知识迁移运用到新情境中的学习．深度学习主张学生在原有的知识经验基础上批判性地学习知识，对知识进行整合和深层次的加工，将一些零散且碎片化的知识建立联系，从而建构起数学知识结构体系，将对知识的浅层理解转向深层理解，并最终将新知识有效迁移应用到新的情境中，在控制计算量的同时，增大思维量，提高学习效率．

数学专题课是指将数学知识依据其内在联系进行整合，使之形成模块化专题的课堂．专题的设计往往聚焦于某一类问题的解决，帮助学生融合知识、技能，贯通思想、经验，助力学生数学品质与学习习惯的培养．在深度学习理念的指导下，开展基于真实情境的专题教学，能够使学生全身心地参与其中，深化知识理解，完善知识建构，促进专题知识的应用与迁移，从而能够创造性地将知识运用在多变的问题情境中．本文以深度学习视角下的“完全平方公式的变形”专题课的教学设计为例，探索数学专题课中深度学习的实施，旨在对指向深度学习的初中数学专题课教学提出一些启发．

二、“完全平方公式的变形”教学设计

1．内容分析

本节课是人教版《义务教育教科书·数学》八年级上册“14.2 乘法公式”的拓展内容．完全平方公式是进一步研究一元二次方程和二次函数的工具性内容．本节课的教学重点是让学生掌握完全平方公式的结构特点；教学难点是引导学生熟练地对公式进行变形，且对变形式进行灵活运用．

本节课基于深度学习理念设计，把浅层学习中的接受式学习转变为探究式学习，让学生通过数学活动自主探究得到完全平方公式的变形式，促进学生对完全平方公式的深度理解，进而能够灵活运用完全平方公式解决问题．

作者简介：刘鹏（1999— ），男，硕士研究生，主要从事数学教育研究；
虞秀云（1972— ），女，教授，主要从事数学教育研究和教师培训研究；
龙晓玉（1999— ），女，硕士研究生，主要从事数学教育研究．

2. 教学过程

环节1：回顾旧知，在认知冲突中发现问题．

复习回顾：试写出完全平方公式的表达式．

问题1：已知 $a-b=4$ ，$ab=2$，求 $(a+b)^2$ 的值．观察这个式子，你能否直接求出 a ，b 的值?

追问：在无法求出 a ，b 的值的情况下，能否直接利用 $a-b$ 和 ab 的值来求解呢?

【设计意图】深度学习重视学生已有的认知基础，在学生已有的活动经验基础上批判性地学习新知．对于问题1，学生发现不能直接利用计算求值的方法求出答案，此时需要寻求新的解题方法，在认知冲突中激发学生的学习动机，从而引发学生深度思考：在不计算出 a，b 的值的情况下，如何求解出 $(a+b)^2$ 的值?在此基础上引导学生利用整式之间的关系来求解，培养学生的自主性，为接下来的探究活动作铺垫．

环节2：创设情境，在深度探究中加深体验．

情境：如图1，学校准备举办校园文化艺术节，需要将4块长为 a 、宽为 b 的长方形红毯拼接，围出一个正方形舞台．

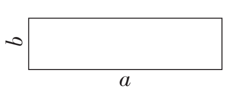

图1

活动1：请同学们利用手中的纸片拼接得到如图2所示的舞台设计，并回答以下问题．

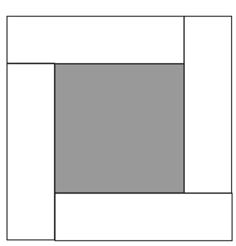
图2

试求：(1)图2中两个正方形的边长；(2)图2中阴影部分的面积．

大正方形的边长为 $a+b$ ，小正方形的边长为 $a-b$ ．阴影部分的面积有两种表示方式，分别为 $S_1=(a+b)^2-4ab$ ，$S_2=(a-b)^2$ ．由 $S_1=S_2$，得 $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$ ．

追问：当 $a=-3$，$b=-2$ 时，等式依旧成立吗?

学生能够发现题中所求的是图形的面积．因此，在这个情境下，a 和 b 的取值仅限于正数．就公式而言，当 a 和 b 为负数时，等式依然成立．因此，该等式在实数范围内有意义．

【设计意图】通过创设与实际相关的情境，将拼接红毯的生活实例抽象成数学问题，带领学生感悟“为什么学”，激发学习兴趣，引发学生深度探究．通过设计拼接长方形纸片的数学活动，将式子的求解问题转换成求正方形面积的问题，将代数和几何问题相结合，从而渗透数形结合思想．以探究性学习的方式突出学生的主体地位，不仅有利于学生主动学习和深度学习，还有利于增强学生思维的深刻性．

问题2：观察完全平方公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 和 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ，你能从中得到哪些由 a和b 组成的式子?

教师引导学生将所得到的式子归纳成四类：$(a-b)^2$，$(a+b)^2$ ，a^2+b^2 ，ab ．

追问：观察式子 $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ ，它和我们归纳出的四类式子有什么关系?

学生发现这个等式是由其中的三个式子组成的．

问题3：现从① $(a-b)^2$ ，② $(a+b)^2$ ，③ a^2+b^2 ，④ ab 这四个代数式中任选三个组成一个等式，有多少种组合?

师生总结：有四种组合，分别为①②③，①②④，①③④，②③④．

【设计意图】在学生得到阴影部分图形的两个面积公式时，结合完全平方公式的特征，以追问的方式循序渐进地引导学生剖析得到的两个式子，引发学生深度思考，归纳出可用以探究的式子，为公式变形的探究活动作准备．

活动2：请同学们仿照以下示例，对其余的三个组合进行探究，根据其中的两个式子推得第三个式子，可以得到多少个公式?

示例：以①②④为例，推导“根据 $(a-b)^2$ ，$(a+b)^2$，求得 ab ”的公式．

由 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ，(1)

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ，(2)

由(2)-(1)，可得 $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ ．

学生通过运算，能够得到完全平方公式的变形式，但不同的变形式也可以归类到同一个组合中．例如，$(a+b)^2-4ab=(a-b)^2$ 和 $(a-b)^2+4ab=(a+b)^2$ 都属于①②④的组合．

教师引导学生对变形得到的等式进行整理，可以

归纳为四类，如图3所示．

① $(a-b)^2$	② $(a+b)^2$	③ a^2+b^2	⇨	$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$
① $(a-b)^2$	② $(a+b)^2$	④ ab	⇨	$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$
① $(a-b)^2$	③ a^2+b^2	④ ab	⇨	$(a-b)^2-(a^2+b^2)=-2ab$
② $(a+b)^2$	③ a^2+b^2	④ ab	⇨	$(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$

图3

结果总结：像这样通过组合完全平方公式的结构得出的等式，称作完全平方公式的恒等变形式．

方法总结：对于公式变形的方法本质上是“知二求一”，即根据需要求的式子，将已知的两个完全平方公式进行移项，并利用加减运算推导得出公式．

结合以上推导过程，让学生再次尝试解决问题1．

【设计意图】学生在探究活动中积累了对完全平方公式变形的活动经验，体会了“知二求一”的基本思路．在此基础上，引导学生将变形的方法迁移应用到新的整式组合中，探索变形公式，并以小组合作的形式进行交流．通过不同结果的呈现，能够引发学生的质疑和深度思考，有利于培养学生的批判性思维和推理能力．在深度学习中，学生既可以对公式的生成过程有充分的认识，也能熟悉公式的推导方法．

环节3：变式训练，在思维碰撞中深化理解．

练习1：已知 $a-b=4$，$ab=2$，求 a^2+b^2 的值．

变式1：已知 $a^2+b^2=4$，$(a+b)^2=2$，求 ab 的值．

变式2：已知 $a^2+b^2=4$，$a-b=2$，求 ab 的值．

变式3：已知 $(a+b)^2=4$，$ab=2$，求 a^2+b^2 的值．

【设计意图】深度学习重视内容和变式，通过一个问题的解决达到对一类问题的熟练掌握，并在相似的问题情境中举一反三，迁移应用．基于问题1进行变式，设计了练习1，旨在强化学生推导、变形公式的能力．在此基础上，进一步设计了变式1～变式3，使学生既能在变式训练中巩固解题方法和逆向思维，又能在思维碰撞中提升观察能力，在题型变化中归纳方法，感悟数学本质，从而进一步理解知识．

练习2：已知 $x-\frac{1}{x}=6$，求下列式子的值．

（1）$x^2+\frac{1}{x^2}$；（2）$x^4+\frac{1}{x^4}$．

追问1：观察 x 和 $\frac{1}{x}$，它们有什么联系？

追问2：观察式子 $x^2+\frac{1}{x^2}$ 和 $x^4+\frac{1}{x^4}$，它们有何相似之处？

追问3：已知 $x^2+\frac{1}{x^2}$ 的值是由 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=6^2$ 化简所得，那么如何推导 $x^4+\frac{1}{x^4}$ 的值呢？

方法小结：解决练习2的过程中，主要用到了整体思想和类比的方法，即将 x 看作 a，将 $\frac{1}{x}$ 看作 b，再运用完全平方公式进行求解．对于 $x^4+\frac{1}{x^4}$，可以类比 $x^2+\frac{1}{x^2}$ 的解题方法来解决．

【设计意图】深度学习要求学生深入思考问题，而非停留在问题的表面．练习2旨在培养学生应用整体思想解决问题，找到推导公式的要素．部分学生可以描述出解题的一般步骤和变式结构的相似点，但并不是所有学生都能准确表述出整体思想及类比的解题方法．因此，教师需要在引导学生解题的基础上，进一步总结，突出整体和类比的思想方法．

拓展题：已知 $(2\,000-m)(1\,998-m)=1\,999$，求 $(2\,000-m)^2+(1\,998-m)^2$ 的值．

【设计意图】解决拓展题时，学生需要利用整体思想解决，即将题干中的两个整式作为完全平方公式的要素来看待．根据完全平方公式的变形式，发现题目中隐藏的信息，即 $(2\,000-m)$ 和 $(1\,998-m)$ 之间的关系，从而利用“知二求一”求解．

环节4：回顾课堂，在整体感知中建构体系．

问题4：本节课中，我们针对完全平方公式进行了哪些方面的拓展学习？

追问1：对完全平方公式的变形，我们收获了什么成果呢？

追问2：运用公式解题时，体会到了什么思想方法呢？

【设计意图】深度学习强调让学生系统学习，以达到对知识体系的整体建构及灵活迁移．课堂小结环节以学生为主，给学生充分思考的时间，在充分调动学生思维最近发展区的基础上，整体把控本节课学习的完全平方公式变形的基本知识脉络，帮助学生构建知识体系，在知识的回顾梳理过程中进一步加深对知识的理解．

三、教学启示

1．结合情境教学，促进学生深度体验

“活动与体验”是深度学习的核心特征，亦是学生

进行深度学习的内在动力．深度学习重视以学生为主体的活动，需要学生主动参与，积极投入知识的生成过程中，从而才能更好地获得个体全部身心投入活动时的内在体验．因此，教师要想让学生在数学专题课中深度学习，就要以学生的兴趣为支撑，以学生的已有经验为基础，创设多样化情境，以加深学生的深度体验．在本节课中，教师创设了以下三个情境：创设问题情境，引发学生的认知冲突，体会学习本节内容的必要性；创设生活情境，与学生一起经历数学抽象的过程，进一步将问题情境与生活情境相结合，使学生批判性地理解 a 和 b 取值的非负性，实现知识与经验的相互转化；创设活动情境，让学生亲历公式变形的推导过程，从而在切身体验中领悟推导方法．

2. 设计核心问题，启发学生深度思考

深度学习的发生需要教师深研教材，站在整体的视角找准新知的切入点，结合学生的认知水平，设计出相对具有思维价值、有利于学生思考技能、能揭示数学本质的核心问题，并从核心问题出发派生出与之相关的其他问题，从而整合重点教学内容．同时，教师需要充分发挥其引导作用，以学生为中心，留给学生充足的独立思考、主动探究的时间与空间，引领学生的思维活动聚焦于数学本质，促使学生深度思考．本节课中，教师以三个问题为核心启发学生深度思考．通过问题1引导学生发现已学的完全平方公式不足以解决新问题，暴露出学生思维的障碍，为后续的探究学习埋下伏笔；用问题2引导学生观察完全平方公式，深度分析其结构特点，体现本节内容的思维突破点；用问题4引导学生整合本节课所学知识，建构知识体系，结合追问引导学生再次对知识进行深度思考，在课堂反思中深化学生对完全平方公式的认识．

3. 利用变式训练，强化学生对知识的深度理解

深度学习重视知识的迁移运用和问题解决．变式训练能使学生在解决针对性问题的过程中达到对数学本质更好的理解，进而能促进其思维的深度发展．专题课中的变式训练亦是提高教学效率的重要方法，通过变式训练可以改变学生对公式的机械记忆，锻炼其创造性地运用完全平方公式变形的能力．教师要通过设计变式让学生主动发现和理解数学知识的本质，从而学会对学习对象进行深层次加工．本节课中，教师基于问题1设计了四个变式，在多变的题型中，帮助学生进一步认识到完全平方公式变形的本质——知二求一，进而理解各个量在变形前后的变化．练习2中，第(2)小题是第(1)小题的变式，需要学生类比第(1)小题的解答，进一步将第(1)小题中所求式子的构成要素分别当作整体看待，达到对整体思想的再利用，使学生既能在问题的形式变化中把握知识本质的不变性，又能在变式训练中培养学生对整体思想和公式变形方法的迁移与应用能力．

四、结束语

初中数学专题课的教学并非单纯的习题训练，同样需要激发学生深度学习的动机，使学生在深度体验中亲历知识的生成过程从而加深理解．学生只有对数学知识深入思考后才能强化掌握，并将知识创造性地迁移应用于解决问题中．在具体的数学专题教学中，教师要善于创设多样化的数学情境，设计统领数学知识，折射数学教学重点、难点，反映数学知识本质并能派生其他相关问题的核心问题，引导学生循序渐进地投入深度学习中，并且使学生在变式训练中深化对知识的理解，培养学生对数学知识迁移应用的能力．

参考文献：

[1] 何玲，黎加厚．促进学生深度学习[J]．现代教学，2005(5)：29-30.

[2] 吕亚军，顾正刚．初中数学深度学习的内涵及促进策略探析[J]．教育研究与评论（中学教育教学），2017(5)：55-60.

[3] 王方．专题式教学在初中数学教学中的应用与设计研究[D]．武汉：华中师范大学，2021.

[4] 谢发超．促进数学深度体验的教学设计[J]．中国数学教育（高中版），2018(4)：6-9.

[5] 马华平．核心问题引领，在深度学习中逼近数学本质[J]．数学教学通讯，2019(16)：47-48.

[6] 朱向阳，陈于青．要素与结构：变式教学促发深度学习：以“确定位置”课时教学为例[J]．中国教师，2022(3)：47-51.