

知易行难：践行“运算的一致性” 理念过程中的困惑与思考

——以苏教版六上“分数除法”教学为例

◎黄剑峰

【摘要】分数除法是学生体悟运算一致性的关键内容与主要难点。本文围绕运算教学实践中师生遇到的困惑，阐述一些思考和建议。

【关键词】分数除法 运算一致性 算理 算法

分数除法是小学阶段初等运算的压轴部分，也是学生感悟运算一致性的关键内容和主要难点。它的算法并不困难，困难的是如何统整“除数是整数”和“除数是分数”两种分数除法的算理，以及厘清“颠倒相乘”与“计数单位与计数单位相除，计数单位的个数与计数单位的个数相除”这“一乘一除”两种算法之间的关系，使学生体悟到除法运算的一致性。

一、“除数是整数”和“除数是分数”两种除法算理表述不一致的困惑

整数除法的核心在于计数单位的细分，即在继续除的过程中，将大的计数单位细分成小的计数单位，使计数单位的数量增加，从而能够继续除下去。在这个过程中，被除数被分解成不同计数单位下的若干部分，它们分别参与运算，而除数整体参与运算，没有被分解。^[1]比如 $144 \div 12$ 的算理： $144 \div 12 = [12(\text{十}) + 24(\text{个})] \div 12 = [12(\text{十}) \div 12] + [24(\text{个}) \div 12] = 1(\text{十}) + 2(\text{个}) = 12$ 。我们不会也无法写成 $144 \div 12 = (12 \times 10 + 24 \times 1) \div (1 \times 10 + 2 \times 1)$ 的形式计算。“分数除以整数”的算理与整数除法的算理是一致的，教学中并不解释成“计数单位的个数与计数单位的个数相除，计数单位与计数单位相除”。^[2]事实上直到“除数是分数”的除法出现，其算理才第一次真正需要表述为如上形式。这是因为在具体问题情境下，“一个数除以分数”的运算意义一般表示为“求被除数里包含有几个除数（包含除）”。如教材例4：量杯里有 $\frac{9}{10}$ 升

果汁，玻璃杯的容量是 $\frac{3}{10}$ 升，量杯里的果汁能倒满几杯？算理表达： $\frac{9}{10} \div \frac{3}{10} = (9 \times \frac{1}{10}) \div (3 \times \frac{1}{10}) = 9 \times \frac{1}{10} \div 3 \div \frac{1}{10} = (9 \div 3) \times (\frac{1}{10} \div \frac{1}{10}) = 3$ 。学生在结合直观图理解算理时，需要先统一被除数和除数的分数单位，才能对计数单位个数的运算进行合理解释。至此，学生遭遇了“除数是整数”和“除数是分数”的除法算理表述不一致的困惑。而如何帮助学生厘清这两种表述之间的关系并统整为分数除法的通理，是体悟除法运算一致性的关键。

二、理解算理到底是基于运算意义还是基于数学推理的困惑

现行教材教学“除数是分数”的除法的基本思路是：先结合问题情境通过直观表征的手段理解基于计数单位个数运算的算理，再结合学习“分数除以整数”的经验，提出“颠倒相乘”的猜想，然后通过计算验证的方法证明其合理性。在这“化除为乘”的过程中，学生就产生了困惑：直观图上明明讲的是基于计数单位个数运算的除法的“理”，但是归纳出的却是看起来“风马牛不相及”的“颠倒相乘”的乘法的“法”。教学过程重法轻理、法理不通、逻辑不清，让人一头雾水。于是有学者提出，可以运用运算的法则、性质等进行复杂的演绎推理，证明“一个数除以分数等于乘这个分数的倒数”。对此，笔者的困惑是：（1）基于运算定律、性质的推“理”与基于运算意义

和计数单位的算“理”是同一个理吗？(2) 演绎推理本身是一种抽象的运算过程，用它解释算理并不需要依赖具体的问题情境，我们为何还要在具体问题情境下学习分数除法？

三、思考与建议

1. “除数是整数”和“除数是分数”的除法实际上都是基于计数单位个数的运算。只不过在不同问题情境和运算意义下，“除数是整数”的除法算理常表述为“把被除数分解为若干个计数单位后等分成除数份”。而“除数是分数”的除法算理表述为“先统一被除数和除数的计数单位，再作计数单位的个数运算”。事实上“除数是分数”的除法算理表述才是除法运算通理的标准表述形式，“除数是整数”的除法算理表述只是其中的特殊情况，是可以通过推理统整为“统一计数单位后，计数单位个数的运算”的通理。

因此，笔者认为，现行教材先教学“分数除以整数”虽能和整数除法的算理实现关联融通，但与学生理解“除数是分数”的除法算理并无太多因果关系，而这才是分数除法运算的重点和难点，也是体现除法运算一致性的关键。本单元不如先教学“除数是分数”的除法，使学生理解“分数除法”与“分数加减法”一样，都是先统一计数单位后再运算的道理，再通过推理的方式把“除数是整数”的特例统整进来。也就是说在运算一致性理念的认知逻辑下，分数除法的教学不应用“除数是整数”的老瓶装“除数是分数”的新酒，而应用“除数是分数”的新瓶装“除数是整数”的老酒。

2. 基于对我国古代分数除法发展的了解，笔者认为，重新设计分数除法教学内容时可先只教学“经分术”，使学生清楚理解分数除法本来的算理和算法，感悟除法运算的一致性。然后另设一课时，引导学生用数学推理的方法将“经分术”转化为“颠倒相乘法”，将“颠倒相乘法”作为分数除法基于运算法则推理得到的一种简便算法。这样就既可以在“计数单位”这个核心概念统领下解释清楚分数除法的算理算法，使学生充分体悟到运算的一致性。也使“颠倒相乘法”可以脱离具体情境的束缚，运用数学推理的方

法在抽象层面进行合理解释，发展了学生的推理意识和运算能力。具体设想如下。

第一课时，先教学例4“同分母分数除法”，结合问题情境的直观图，学生易于理解：同分母分数相除，因为分数单位相同，所以只要把分数单位的个数（分子）相除就行了。然后通过算式的恒等变形使学生理解，同分母分数相除，分数单位和分数单位相除，分数单位的个数与分数单位的个数相除。接着通过“试一试”教学“异分母分数除法”。引导学生明白，只要像“异分母分数加减法”那样，把“异分母分数除法”转化为“同分母分数除法”即可。


第二课时教学例2、例3的“整数除以分数”。比如例3的“ $4 \div \frac{2}{3}$ ”，学生借助几何直观容易想到，整数4就是12个 $\frac{1}{3}$ ，即 $\frac{12}{3}$ ， $4 \div \frac{2}{3} = \frac{12}{3} \div \frac{2}{3} = (12 \div 2) \times$

$\left(\frac{1}{3} \div \frac{1}{3}\right) = 12 \div 2 = 6$ ，因而又转化为“同分母分数除法”

计算。然后在“练一练”中让学生说一说例1“分数除以整数”的算理与算法。注意，此处不建议要求学生转化为“同分母分数除法”计算，而应用“除数是整数”的除法算理解释。但在厘清算理的基础上可以让学生通过以下推理过程感悟运算的一致性。 $\frac{4}{5} \div 2 =$

$\frac{4}{5} \div \frac{10}{5} = \left(4 \times \frac{1}{5}\right) \div \left(10 \times \frac{1}{5}\right) = 4 \times \frac{1}{5} \div 10 \div \frac{1}{5} = 4 \div 10 \times$

$\frac{1}{5} \div \frac{1}{5} = (4 \div 10) \times \left(\frac{1}{5} \div \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$ 。

第三课时教学“颠倒相乘”算法的推理过程。此时可以脱离具体的问题情境，分类呈现分数除法、整数除法、小数除法及相应的颠倒相乘的乘法算式，使学生通过计算发现结果总是相等的规律并提出猜想，然后让学生举例验证初步得出结论，再引导学生运用运算律、运算性质等进行灵活多样的恒等变形和数学推理，最后用字母式的形式进行代数推理从而得到“甲数除以乙数（0除外），等于甲数乘乙数的倒数”的一般化表达。

（作者单位：江苏省常州市新北区安家中心小学
本专辑责任编辑：王彬）

[1] 巩子坤, 刘萍. 论数的概念与运算的一致性之三: 整数运算算理、算法的一致性 [J]. 小学数学教师, 2022 (10): 77-81.

[2] 巩子坤, 张丹. 论数的概念与运算的一致性之四: 分数运算算理、算法的一致性 [J]. 小学数学教师, 2022 (12): 85-88.