

# 整体教学：理解数学概念的应然视角

## ——“分数的意义”教学设计与说明

黄剑峰（江苏省常州市新北区安家中心小学）

教学内容：苏教版《义务教育教科书·数学》五年级下册第52页例1，“练一练”，练习八第1~4题。

设计背景：

整体教学是《课程标准（2022年版）》要求下的常态教学。蔡宏圣老师认为，整体教学就是整体厘清学习内容中的本质与结构，整体把握学生学习该类内容的经验与关键，指向发展学生核心素养的教学设计与实施。整体教学有利于学生对数学概念的本质形成整体理解，能突出知识结构的整体性和连贯性，形成简化的结构。

分数的认识相较于整数、小数的认识更为抽象。苏教版教材为了使学经历更充分的感悟和体验过程，降低学习的难度，对分数的内容进行了螺旋渐进式的编排。学生在三年级经历了等分一个物体和等分许多物体组成的整体的具体情境，初步认识了分数产生的过程，直观理解了分数可以表示部分与整体之间的关系。因此本节课教学应在充分激活和系统梳理学生已有认知经验的基础上，厚积薄发、水到渠成地抽象概括出单位“1”、分数单位等概念，引导学生整体理解分数的意义，并在此过程中培养数学眼光，发展数学思维，增强数学表达能力。

张奠宙先生认为，分数的定义应包括份数定义、商定义、比的定义和公理化定义四个方面。比照这四个维度的定义，本单元的前三课时均属于“分数定义”的教学范畴，第一课时“分数的意义”教学份数定义，第二课时“分数与除法的关系”教学商定义，第三课时“求一个数是另一个数的几分之几”教学比的定义，公理化定义不在小学数学的研究范畴。另一方面，分数的本质应是商定义，因为分数作为一个

数，它的本质是除法实现封闭运算的需要，也是数系扩张的需要。正如弗赖登塔尔所说，测量产生的是小数而不是分数，分数的出现是为了使除法可以进行下去……一旦接受了 $\frac{3}{7}$ ，那么在计算中便可将其作为除法的商加以处理。但是从商定义入门学习分数的意义对于小学生来说过于抽象，不利于学生的理解。而通过“等分”表示“部分与整体关系”的份数定义，优点是能通过几何直观有效降低学生理解分数含义的难度。因此选择份数定义作为小学生学习分数的“敲门砖”“登山拐”是非常必要的。然而在日常教学中，许多教师常常片面地将分数理解为“把单位‘1’平均分成若干份，表示这样一份或几份的数，叫做分数”。这样过分强调直观的“等分”，势必弱化学生将分数抽象为一个“数”的过程。

基于以上对分数意义的整体理解和分析，本节课教学主要分三个板块进行。首先是引领学生系统回顾和梳理学习分数的历程，在温故中观察、比较、推理，抽象、概括出单位“1”和分数的含义，直观理解分数可以表示部分与整体的关系，突破对单位“1”的理解。其次是在直观理解分数单位后，使学生明白分数和整数、小数一样，都是若干个相同计数单位累加的结果。最后将分数对应到数轴上的点，进一步使学生形成对分数单位和分数的抽象认知，明确分数是数系的一部分，并感悟自然数“1”通过不断累加，可以生成无穷的整数；不断细分，又可以生成无穷多的分数，使学生对数的形成有一个更为完整和深刻的认识。

教学目标：

1. 使学生通过分物、度量等具体的活

动理解单位“1”、分数单位以及分数的含义，感受分数也是由计数单位累加的结果，体会分数与整数、小数的一致性，能联系实际情境解释或说明分数的具体含义。

2. 使学生经历由具体到抽象的认识、理解分数意义的过程，培养观察、比较、分析、抽象、概括等思维能力，进一步发展数感、模型思想、推理意识，发展核心素养。

3. 使学生体会用数学方法表示具体问题的力量，感受认识分数对于现实生活的意义和价值，产生学习数学的兴趣和积极性。

教学重点：理解单位“1”及分数单位的含义。

教学难点：能结合具体情境解释分数的含义，理解分数是一个“数”的本质。

教学过程：

一、系统梳理，温故知新，抽象概括单位“1”和分数的含义

1. 在等分单个物体的过程中直观理解分数的含义。

课件出示圆形蛋糕图（图略）。

提问：4个同学分享一个蛋糕，怎样公平？你能用一个数来表示每个同学分到的蛋糕吗？

明确：把这个蛋糕平均分成4份，每个同学分得其中的1份，用分数 $\frac{1}{4}$ 表示。

动态演示分蛋糕的过程，在同桌间互相说一说 $\frac{1}{4}$ 的含义，同时说一说分数的读、写方法。

操作：把一张正方形纸对折，表示出它的 $\frac{1}{4}$ 。

汇报交流不同折法，相机出示相应的图示。

提问： $\frac{1}{4}$ 的分数线、分母和分子各表示

什么意思?

概括:把一个蛋糕平均分成4份,表示这样1份的数,就是 $\frac{1}{4}$ 。

板书: $\frac{1}{4}$  表示这样的1份  
平均分成4份。

追问:2个同学一共能分到这块蛋糕的几分之几?3个同学呢?4个同学呢?你是怎样想的?

明确:2个 $\frac{1}{4}$ 是 $\frac{2}{4}$ ,3个 $\frac{1}{4}$ 是 $\frac{3}{4}$ ,4个 $\frac{1}{4}$ 是 $\frac{4}{4}$ 。

追问: $\frac{4}{4}$ 是分数吗?表示什么意思?

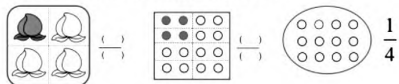
讨论:为什么不同形状、大小的蛋糕平均分成4份,每一份的形状、大小也不同,却都可以用分数 $\frac{1}{4}$ 表示呢?

明确: $\frac{1}{4}$ 表示每人分到蛋糕的份数与蛋糕总份数之间的关系。这与分什么物体、物体是什么形状无关。只要是把一个整体平均分成4份,表示4份中的1份,都可以用 $\frac{1}{4}$ 表示。

2.在等分许多物体组成的整体的过程中直观理解分数的含义。

课件出示:

根据图形写出分数,或根据分数进行涂色。



学生独立完成后,组织全班交流。

提问:把许多物体看成一个整体后平均分,得到的结果也可以用分数表示。为什么平均分的整体不同,每份的数量也不同,每一份却都能用分数 $\frac{1}{4}$ 表示呢?

明确: $\frac{1}{4}$ 表示涂色的份数与总份数之间的关系,与物体的具体数量无关。

3.在度量单位的细分过程中直观理解分数的含义。

课件动态演示用米尺度量两根绳子的长度,第一根绳子的度量结果是整米数,第二根绳子的度量结果不是整米数。

提问:第二根绳子剩下的长度不能用整米数表示,怎么办呢?

启发:如果测量时用1米作单位不能

正好量完,可以把1米平均分成10份,取其中的1份也就是 $\frac{1}{10}$ 米作为新的长度单位继续测量,如果还不能量尽,可以继续平均分成更多的份数,创造出更小的长度单位如 $\frac{1}{100}$ 米、 $\frac{1}{1000}$ 米……进行测量,直至量尽。这样就能用分数来计量物体的长度了。长度单位1分米、1厘米和1毫米,其实就是1米的 $\frac{1}{10}$ 、 $\frac{1}{100}$ 、 $\frac{1}{1000}$ 。

出示其他计量单位表示的分数,指名回答。

追问:把不同的计量单位平均分成4份,每份为什么都能用分数 $\frac{1}{4}$ 来表示呢?

明确: $\frac{1}{4}$ 表示部分与整体的关系,与具体的计量单位无关。

4.在充分表征和感悟的基础上抽象出单位“1”和分数的含义。

提问:人们在分物和度量的过程中创造了分数。不同形状、大小的物体,不同的整体,不同的计量单位等,平均分成4份,每份都能用 $\frac{1}{4}$ 表示,这是为什么呢?

强调:分数表示部分与整体的关系。

启发:先有“整体”,后有“部分”,刚才我们是把哪些事物看作“整体”来平均分的?

概括:一个物体、许多物体组成的整体、一个计量单位等都可以看作平均分的整体。这个整体可以用自然数1表示,通常我们把它叫做单位“1”。

提问:举例说说单位“1”可以表示哪些物体?

感悟:一个物体、许多物体组成的整体、一个计量单位等都可以看作1个单位的数量,它们都有一个共同的身份——平均分的“整体”,也就是单位“1”。

概括:把单位“1”平均分成若干份,表示这样一份或几份的数,叫做分数。(板书)这就是分数的意义。

【说明】整体教学要求教师能整体把握教学内容,重视对教学内容的整体分析,了解数学知识的产生与来源、结构与关联、价值与意义,了解教学内容的安排意图。本节课教学的关键是引导学生抽象概括出单位“1”和分数单位这两个概念。理解了单位“1”,学生便理解了分数

的意义;理解了分数单位,学生便认识了分数是一个“数”的本质。这是学生对概念的理解从“感性具体—感性一般—理性具体—理性一般”的逐步抽象过程。

基于以上理解,我们从“分物”和“度量”两个维度入手,紧抓 $\frac{1}{4}$ 这个分数做文章,遵循学生学习分数的历史进程,从“等分单个物体”到“等分许多物体组成的整体”再到“等分度量单位”(度量来源),分三个层次帮助学生充分温故、充分提炼、充分感悟,并聚焦核心问题四问学生“为什么都可以用分数 $\frac{1}{4}$ 表示”,学生通过多元表征一次次领悟 $\frac{1}{4}$ 表示的是“部分与整体的关系”,从而对分数意义的理解从感性上升为理性,同时数感、几何直观和推理能力等核心素养也得到发展。

二、数形结合,先分后数,依托分数单位理解分数是一个“数”的本质

活动一:根据分数的意义,在折纸的操作中创造出分数单位。

让学生用长方形或圆形纸片,通过对折,表示出不同的几分之一的分数。

小组讨论:

(1)对折的次数与平均分的份数有什么关系?

(2)平均分的份数与每一份的大小有什么关系?

(3)通过几分之一的累加,还能得到哪些分数?

概括:把单位“1”平均分成若干份,表示这样1份的数,叫做分数单位。(板书)

启发:把单位“1”平均分成2份,每份用 $\frac{1}{2}$ 表示;平均分成3份,每份用 $\frac{1}{3}$ 表示……平均分成 $n$ 份呢?

板书: $1 \div n = \frac{1}{n} (n \neq 0)$ 。

再问:一个 $\frac{1}{n}$ 是 $\frac{1}{n}$ ,2个 $\frac{1}{n}$ 是 $\frac{2}{n}$ , $m$ 个 $\frac{1}{n}$ 呢?

板书: $\frac{1}{n} \times m = \frac{m}{n}$ 。

活动二:观察分数墙,强化对分数单位的理解。

课件出示分数墙(图略)。

启发:观察“分数墙”,说说有什么发现?

预设1:同一个单位“1”,平均分的份数越多,分数单位就越小。

预设2:分母是几,分数单位就是几分之一。

预设3:分数都是由若干个分数单位累加得到的。

预设4:有些分数在分数墙上看起来大小是相等的,比如 $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \dots$

明确:分数的计数原理和整数、小数一样,都是若干个计数单位累加的结果。比如整数8是由8个1累加得到的,小数0.8是由8个0.1(十分之一)累加得到的,分数 $\frac{8}{9}$ 是由8个 $\frac{1}{9}$ 累加得到的。区别在于整数和小数的计数单位都是十进制单位,而分数单位则是几分之一。

练习:完成“练一练”第1题和练习八第2、3题。

【说明】整体教学要求强化对数学知识本质的理解,提炼能打通数学知识之间的关联、发挥核心作用的数学概念,由此确立合适的学习主题,建构起数学学习主题统整下的脉络清晰、条理分明、相互联系的数学知识体系,并通过教学使学生形成简化的、本质的、对未来学习更有支持意义、内在逻辑性较强的数学基础知识结构。

数的认识一般包括数的意义与读写、计数单位、数的性质、比较大小等内容。理解分数是一个“数”的本质,关键是理解“分数单位”的含义。本环节通过创设“折纸创造分数单位”和“观察分数墙”两个活动,引导学生直观感受分数单位产生的原因和特点,以及分数的计数方法,认识到分数和整数、小数一样,都是由若干个相同计数单位累加而成的“数”,也为进一步学习真分数、假分数、分数的基本性质等后续知识做好准备。

三、逐级抽象,合情推理,借助数轴让分数融入数系“大家庭”

课件动态演示在数轴上依次出示自然数0、1、2、3、……

通过交流,使学生体会自然数是由若干个1累加而成的,每一个自然数在数轴上都有一个点与之对应。

提问:0和1之间还有其他的数吗?

预设:有分数(或小数)。

课件动态演示把0~1之间的一段平

均分成6份的过程。

小组讨论:

(1)每个点分别对应哪个分数?

(2)表示 $\frac{2}{6}$ 的点,为什么也可以用 $\frac{1}{3}$ 来表示?表示 $\frac{3}{6}$ 、 $\frac{4}{6}$ 的点,也能用其他的分数来表示吗?这说明了什么?

(3)把1平均分还能产生哪些分数?

(4)在1的右边还有没有分数?

明确:在0~1之间有无数个分数;相同单位的分数在数轴上的分布是等距的;不同单位的分数,大小也可能相等;1的右边还有无数个大于1的分数(或小数)。从数轴上可以直观地看出,把1不断累加,可以产生无穷多个自然数,把1细分,可以产生无穷多个分数。

【说明】整体教学要求教师在教学中能引导学生在数学概念、原理及法则之间构建起有效的知识结构,体会不同教学内容之间数学研究方法的一致性和可迁移性,帮助学生学会用整体的、联系的、发展的眼光看待问题,形成科学的思考习惯,发展核心素养。

根据认识整数、小数的经验,分数要真正获得“数”的身份,还必须融入数系这个“大家庭”中去。而能直观地帮助学生整体认知数系扩充的法宝,就是“数轴”。本环节依托“练一练”第2题中的数轴,借助课件动态演示使学生直观地理解:将自然数1不断细分可以产生任意的分数单位,而相同分数单位的累加又可以产生无穷无尽的分数。同时,还能从中直观地看到,不同的分数,大小却可能相等,体会等值分数的特征,也为进一步学习“分数的基本性质”作必要的铺垫。至此,分数和整数、小数一样都是一个“数”的观念,最终在学生的头脑中得以确立,他们对数的整体认知也达到了一个新的高度。

四、聚焦本质,巩固拓展,深度理解分数的意义

出示练习八第4题:

4. 说出分数表示的含义。

(1) 五年级一班学生中,会打乒乓球的占 $\frac{5}{9}$ 。

(2) 地球表面有 $\frac{71}{100}$ 被海洋覆盖。

(3) 一节课的时间是 $\frac{2}{3}$ 小时。

讨论:第(3)题中的分数与上面两题中的分数有什么区别?单位“1”是什么?

明确:(1)分数表示两个数量的关系时,不带单位名称。(2)分数和整数、小数一样都能表示具体数量的多少,这时带单位名称。(3)带单位名称的分数,都是把相关的1个单位的数量看作单位“1”平均分后得到的。

出示练习八第13题:

13. 有12支铅笔,平均分给2个同学。每支铅笔是铅笔总数的 $\frac{(\quad)}{(\quad)}$ ,每人分得的铅笔是总数的 $\frac{(\quad)}{(\quad)}$ 。

读一读、分一分,比较两个问题的异同,体会读懂和分析分数问题的方法。

明确:两个问题的单位“1”是相同的,但是每份数不同,所以单位“1”等分的份数也不同。理解分数问题的关键是要找准表示单位“1”的数量,厘清部分量和单位“1”之间的关系。

【说明】练习八第4题的教学,第一层次是学生能在具体情境中判断单位“1”的量,理解分数的意义;第二层次是帮助学生初步认识分数有量纲、无量纲的两种应用。分数带不带单位,该如何区分?这是学生学习分数时经常感到困惑的问题,要解决这个困惑,可以引导学生回忆学过的倍数问题。学生已经知道表示两个数量的倍数关系时,得数后面不带单位,而本节课的分数表示“部分与整体的关系”,即比的关系,所以也不带单位;其次分数除了可以表示两个数量的关系外,还可以和整数、小数一样表示具体数量的多少等,这时要带单位。由此得出,不管是分数、整数还是小数,表示“倍比关系”时都不带单位,表示具体数量时都带单位,经过这样的整体认知,应能有效帮助学生解除困惑。

五、全课总结(略)

(责任编辑 常学莉)

