“分数乘法”单元教学片断与思考

黄剑峰 （江苏省常州市新北区安家中心小学）

《数学课程标准(2022年版)》明确指出，“数的运算教学重点在于理解算理、掌握算法”，要让学生“经历算理和算法的探索过程，理解算理，掌握算法”，要让学生“感悟数的运算以及运算之间的关系，体会数的运算本质上的一致性，形成运算能力和推理意识”。

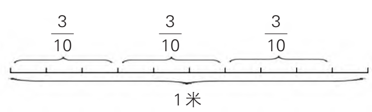
苏教版教材六年级上册第二单元“分数乘法”的教学内容大致可以分为“分数乘整数”“整数乘分数”和“分数乘分数”这三个部分。其中，“分数乘整数”表示“求几个分数相加的和”，它的运算意义与整数乘法是一致的，都是基于“量”的运算。而“整数乘分数”和“分数乘分数”则需要将乘法运算的意义由“求几个相同加数的和”拓展到“求一个数的几分之几是多少”，这是有关“率”的运算，其意义更为抽象和难以理解。因此，要使学生感悟乘法运算的一致性，首先就要帮助他们理解乘法运算意义的一致性。另外，分数乘法是小学阶段乘法运算教学的最后一部分内容，在教学中要注意将其与整数、小数乘法的运算意义、算理和算法进行适当整合，引导学生从更高的层面感悟乘法运算的一致性。在教学中先以图形直观显示乘法运算意义的一致性，再以简单推理解释相关算理的一致性，应当是帮助学生感悟乘法运算一致性的重要途径。下面选取本单元的三个关键内容，具体谈谈自己的教学思路和思考。

片断一：分数乘整数，用线段图凸显计数单位的累加

出示实际问题：做一朵绸花要用$\frac{3}{10}$米绸带。小芳做3朵这样的绸花，一共用绸带几分之几米？

师：可以怎样解答这道题？

生$_1$：我画线段图表示，把1米看作单位“1”，平均分成10份，这样的3份就是$\frac{3}{10}$米。3朵绸花要用3个$\frac{3}{10}$米，是$\frac{9}{10}$米。



师：我明白了，你是从线段图上直接数出了结果。能具体说说是怎样数的吗？

生$_1$：每次数3个$\frac{1}{10}$米，一共有9个$\frac{1}{10}$米，9个$\frac{1}{10}$米是$\frac{9}{10}$米。

生$_2$：可以用加法算式$\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{9}{10}$(米)表示这个过程，也可以用乘法算式$\frac{3}{10}\times 3=\frac{9}{10}$(米)表示这个过程，而且乘法比加法更简洁。

师：是的，和整数乘法一样，求3个$\frac{3}{10}$相加的和也可以写成$\frac{3}{10}\times 3$，$\frac{3}{10}\times 3$就表示求3个$\frac{3}{10}$相加的和。可以怎样计算这道乘法算式呢？先想一想，再把你的想法表达出来。

学生各自进行思考，并表达自己的思考过程。

生$_1$：我是这么想的，$\frac{3}{10}$表示3个$\frac{1}{10}$，$\frac{3}{10}\times 3$表示求3个$\frac{3}{10}$相加的和，只要把分子相加，就能得到$\frac{1}{10}$的个数。而3+3+3可以写成3×3，这样就能算出结果是$\frac{9}{10}$。

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{3}{10}\times 3&=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{3+3+3}{10}\\&=\frac{3\times 3}{10}=\frac{9}{10}\end{aligned}}$$

生$_2$：从图上可以看出，$\frac{3}{10}$表示3个$\frac{1}{10}$，3个$\frac{3}{10}$相加就是(3×3)个$\frac{1}{10}$，也就是9个$\frac{1}{10}$，是$\frac{9}{10}$。

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{3}{10}\times 3&=(\frac{1}{10}\times 3)\times 3=\frac{1}{10}\times(3\times 3)\\&=\frac{1}{10}\times 9=\frac{9}{10}\end{aligned}}$$

师：积的分母为什么不变？3×3表示什么意思？

生：因为分数单位，也就是$\frac{1}{10}$没有变，所以积的分母不变；3×3表示的是分数单位$\frac{1}{10}$的个数。

师：用一句话说，分数和整数相乘可以怎样算？

生：分数和整数相乘，用分子和整数相乘的积作积的分子，分母不变。

课件出示：

$30\times3=(10\times3)\times3$
$=10\times(3\times3)$
$=10\times9$
$=90$

$0.3\times3=(0.1\times3)\times3$
$=0.1\times(3\times3)$
$=0.1\times9$
$=0.9$

$\frac{3}{10}\times3=(\frac{1}{10}\times3)\times3$
$=\frac{1}{10}\times(3\times3)$
$=\frac{1}{10}\times9$
$=\frac{9}{10}$

师：观察上面三道题的计算过程，你有什么发现？

生$_1$：这三道题都要算“3×3”，得到的都是9个计数单位。

生$_2$：一个数乘整数，就是算这个数的计数单位的个数。

师：是的，一个数乘整数都表示求几个相同加数的和，只要算出相同加数的计数单位的个数就可以了。

【思考】分数乘整数是分数乘法的基本内容，它是学生有效迁移原有乘法经验、理解分数乘法基本含义的桥梁。学生只有理解了运算的意义，才能顺理成章地理解算理、掌握算法。上面的教学首先依托几何直观，借助加法模型进行类比推理，使学生自然悟出求几个相同分数的和也可以用乘法计算，由此实现乘法运算意义的迁移；接着，聚焦线段图中的分数单位，使学生直观地看到，几个相同分数相加的本质就是相同分数单位个数相加，即“分数与整数相乘，分数单位不变，分子乘整数算出分数单位的个数”；最后，通过相关整数乘法、小数乘法和分数乘法的对比，帮助学生归纳出计算方法中的共同点，感悟乘法运算的本质在于计数单位个数的累加，它们的算理和算法是一致的，从而为后续的分数乘法的学习积累经验。

片断二：整数乘分数，用示意图实现“率”与“量”的转换

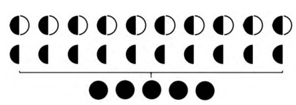
出示实际问题：中秋节小月妈妈做了10块月饼，晚上赏月时全家吃了其中的$\frac{1}{2}$。一共吃了几块月饼？

师：根据题意，你打算怎样解决这个问题？

学生各自思考、解答后，组织交流。

生$_1$：我是画图表示的——先画10个圆表示10块月饼，再把它们平均分成2份，涂色表示其中的1份，也就是5块月饼，列式是10÷2=5(块)。

生$_2$：我也是画图解答的，不过我是这样分的——把每块月饼都平均分成2份，每份是$\frac{1}{2}$块月饼，10块月饼的$\frac{1}{2}$就是10个$\frac{1}{2}$块，求10个$\frac{1}{2}$块是多少，列式就是$\frac{1}{2}\times10=5$(块)。



生$_3$：也可以把10块月饼叠起来平均分成2份，每份是10个$\frac{1}{2}$块，求10个$\frac{1}{2}$块是多少，列式是$\frac{1}{2}\times10=5$(块)。

师：三个同学都根据分数的意义用几何直观的方法求得了结果。第一个同学用除法表示10块月饼的$\frac{1}{2}$，列式是10÷2=5(块)；另外两个同学是把10块月饼分别平均分成2份，变成10个$\frac{1}{2}$块，列式是$\frac{1}{2}\times10=5$(块)。从这里可以看出，“10块月饼的$\frac{1}{2}$”就是“10个$\frac{1}{2}$块”。求“10个$\frac{1}{2}$块是多少”，可以用乘法计算。

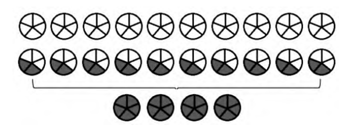
出示实际问题：爷爷和奶奶吃了10块月饼的$\frac{2}{5}$，爷爷和奶奶吃了几块月饼？

师：这个问题又应该怎样解答？先想一想，再求出答案。

学生各自解答后，组织交流。

生$_1$：我还是画图表示——根据“爷爷和奶奶吃了10块月饼的$\frac{2}{5}$”这个条件，就要把10块月饼平均分成5份，每份是2块月饼。爷爷和奶奶吃了这样的2份，就是4块月饼。列式是10÷5×2=4(块)。

生$_2$：也可以把每块月饼都平均分成5份，吃掉其中的2份，也就是吃掉$\frac{2}{5}$块。爷爷和奶奶吃了10块月饼的$\frac{2}{5}$，相当于吃了10个$\frac{2}{5}$块，求10个$\frac{2}{5}$块是多少，列式是$\frac{2}{5}\times10=4$(块)。



生$_3$：还可以把10块月饼叠起来平均分成5份，吃掉其中的2份，也就吃掉10个$\frac{2}{5}$块。所以，求10块月饼的$\frac{2}{5}$是多少和求10个$\frac{2}{5}$块是多少，都可以用乘法计算，列式是$\frac{2}{5}\times10$或$10\times\frac{2}{5}$。

师：从讨论中可以发现，“求一个数的几分之几是多少”可以转化为“几个相同分数相加的和”，所以也可以用乘法计算。

【思考】本节课的教学重点和难点是帮助学生理解“求一个数的几分之几是多少”为什么可以用乘法计算。解决这个问题的关键是选择合适的直观模型帮助学生实现“率”与“量”的转化，进而实现乘法运算意义的拓展。分数乘整数表示的是相同数量的不断累加，利用线段图就能非常清晰地展现这样的累加过程；而整数乘分数表示的是数量之间的比率关系，更复杂一些，它实际上是将第一个乘数的计数单位按第二个乘数的分母进行细分，进而产生新的计数单位(计数单位乘计数单位得到新的计数单位)，并将新计数单位的个数进行累加的过程。为此，上面的教学充分利用“分饼”操作，通过不同的“分饼”操作，直观地展示求10块月饼的$\frac{1}{2}$是多少块，既可以理解为把10块月饼平均分成2

份，求这样的1份（10÷2），也可以理解为把10个1块月饼都平均分成2份，得到10个$\frac{1}{2}$块（新计数单位），进而计算10个$\frac{1}{2}$块是多少块的过程（$\frac{1}{2}\times10$或$10\times\frac{1}{2}$）。这样便实现了“率”与“量”的转换，较好地解释了求10的$\frac{1}{2}$是多少就是求10个$\frac{1}{2}$的算理，完成了求一个数的几分之几是多少可以用乘法计算的推演，体现了分数与整数相乘在算理和算法上的一致性。

片断三：分数乘分数，用面积图聚焦分数单位的变化

出示实际问题：一块长方形地的$\frac{1}{2}$是菜地，菜地的$\frac{1}{4}$种萝卜。萝卜地的面积占整块地的几分之几？

师：你准备怎样解决这个问题？先想一想、画一画，再列式计算。

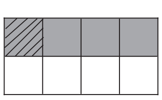
学生各自思考、画图、计算。

生$_1$：根据“菜地是整块地的$\frac{1}{2}$”这个条件，就要把整块地看作单位“1”，平均分成2份，菜地是其中的1份；根据“萝卜地是菜地的$\frac{1}{4}$”这个条件，就要把菜地看作单位“1”，平均分成4份，萝卜地占其中的1份。通过画图可以直观地看出，萝卜地是菜地的$\frac{1}{4}$，也就是整块地的$\frac{1}{8}$。

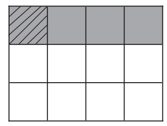
生$_2$：这道题里的单位“1”是变化的。要求“萝卜地占整块地的几分之几”，其实就是求菜地的$\frac{1}{4}$相当于整块地的几分之几，也就是求$\frac{1}{2}$的$\frac{1}{4}$是多少。因为求一个数的几分之几是多少可以用乘法计算，所以列式是$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$。

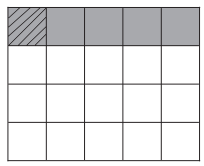
师：积的分母为什么变成8了呢？

生：把一个长方形平均分成2份，每份是这个长方形的$\frac{1}{2}$；把长方形的$\frac{1}{2}$继续平均分成4份，就相当于把整个长方形平均分成（2×4）份，每份是整个长方形的$\frac{1}{8}$。



课件依次呈现一个长方形的$\frac{1}{3}$以及$\frac{1}{3}$的$\frac{1}{4}$、一个长方形的$\frac{1}{4}$以及$\frac{1}{4}$的$\frac{1}{5}$，要求学生分别说出$\frac{1}{3}$的$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{4}$的$\frac{1}{5}$各是整个长方形的几分之几。





师：通过刚才的演示和计算，你有什么发现？

生$_1$：计算几分之一乘几分之一，可以用分母与分母相乘的积作积的分母，分子还是1。

生$_2$：分数单位乘分数单位，积就是一个新的分数单位。

师：为什么新的分数单位的分母是两个乘数分母的积？

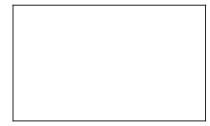
生：从图上可以看出，求几分之一的几分之一是多少，其实就是把第一个几分之一按第二个几分之一的分母再次平均分，从而把整个“1”细分为（分母×分母）个更小的分数单位。因此新的分数单位的分母也就是乘数中两个分母的积。

师：两个分数单位相乘会产生一个新的分数单位，这种现象在整数和小数乘法中有没有？先在小组里讨论，再结合具体的例子说一说。

生$_1$：10×10=100，10×100=1000，100×100=10000，……整数的计数单位只要不是和1相乘，也会产生新的计数单位。

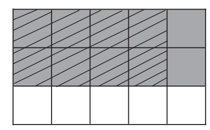
生$_2$：0.1×0.1=0.01，0.1×0.01=0.001，10×0.01=0.1，……不仅小数的计数单位相乘会产生新的计数单位，整数的计数单位和小数的计数单位相乘也能产生新的计数单位，当然1除外。

出示操作题：根据乘法算式$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$，在长方形中画一画、分一分，再通过涂色和画斜线表示出计算的结果。



学生各自操作后组织交流。

生：可以先沿长方形的宽把长方形平均分成3份，涂色表示出第一个乘数$\frac{2}{3}$；再沿长方形的长把涂色部分平均分成5份，画斜线线表示出第二个乘数$\frac{4}{5}$。可以看出，整个长方形被平均分成了15份，$\frac{2}{3}$的$\frac{4}{5}$就是其中的8份，所以$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$。



师：斜线部分一共有多少个$\frac{1}{15}$？

生：斜线部分一共有8个$\frac{1}{15}$。

师：$\frac{1}{15}$是哪两个分数单位相乘的结果？

生：$\frac{1}{15}$是$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{5}$相乘的结果。

师：8又是哪两个数相乘的结果？

生：8是$\frac{1}{3}$的个数与$\frac{1}{5}$的个数，也就是2和4相乘的结果。

师：根据上面讨论的结果，你能完成下面的填空吗？

出示：

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=(\frac{1}{3}\times\square)\times(\frac{1}{5}\times\square)$$
$$=(\frac{1}{3}\times\frac{1}{5})\times(\square\times\square)$$
$$=\frac{1}{\square}\times\square$$
$$=\frac{\square}{\square}$$

学生填空后，要求他们用上面的方法分别计算下面各题。

出示：

$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$　　$\frac{8}{9}\times\frac{3}{4}$

师：比较各题的计算过程，再想一想，积的分子其实都是哪两个数相乘的结果？

积的分母呢？

生：积的分子都是两个乘数分子相乘的结果，积的分母都是两个乘数分母相乘的结果。

师：现在你能用一句话简要概括分数与分数相乘的计算方法吗？

生：分数与分数相乘，用分子相乘的积作分子，分母相乘的积作分母。

师：通过刚才的学习，我们知道分数与分数相乘，就是先用两个乘数的分数单位相乘得到新的分数单位，再用两个乘数分数单位的个数相乘得到新分数单位的个数。这种计算方法在整数乘法、小数乘法中也有过应用吗？先在小组里讨论，再结合具体的例子说一说。

生$_1$：计算30×50时，也可以先算10×10得到新的计数单位100，再算3×5得到一共有15个100，得数就是1500。

生$_2$：计算0.3×0.5时，也可以先算0.1×0.1得到新的计数单位是0.01，再算3×5得到一共有15个0.01，得数就是0.15。

师：确实如此，整数、小数、分数乘法的计算方法看起来各不相同，但实际上都是计数单位与计数单位相乘以及计数单位的个数与计数单位的个数相乘。也就是说，它们的算理和算法是一致的。

【思考】理解分数乘分数的算理和算法要分两个层次进行。第一个层次是使学生直观理解分数单位乘分数单位实际上就是把第一个分数按第二个分数的分母进行细分，对“1”进行二维度量，进而产生新的分数单位的过程。第二个层次就是使学生认识到分数乘分数其实就是先用分数单位与分数单位相乘得到新的分数单位，然后求新的分数单位一共有多少个的过程。显然，要使学生理解如此抽象的算理，就需要借助于直观的手段，而面积图在这个过程中所发挥的作用是不可忽视的。在全面理解分数乘法的算理和算法之后，顺势引导学生在整个乘法运算的大背景中进行回顾、反思，寻找整数乘法、小数乘法和分数乘法在算理和算法上的一致性。这样组织教学，有助于学生优化认知结构，加深对所学知识的理解，发展核心素养。

(责任编辑 常学莉)

（上接第74页）

题算的是103×2.5，积应该是几位小数？如果算的是103×0.025呢？

生$_1$：如果算的是103×2.5，积就是一位小数，因为这里的积应该是2575个0.1。

生$_2$：如果算的是103×0.025，积就是三位小数，因为这里的积应该是2575个0.001。

师：所以说，积的小数位数其实和乘数中小数的什么有关？

生：（齐）计数单位！

【思考】在教学例题中的第二个问题之后，着重引导学生对积的小数位数和乘数中小数位数的关系进行研究。问题明确，所以结论也很直接。教学中，一方面引导学生基于具体的例子进行归纳，另一方面则启发他们联系计数单位的知识进行说明。这样，不仅能使得到的结论更加严谨，而且进一步突出了计数单位在算法归纳中的作用。

片断三：灵活思考，深入感悟计数单位对结果的影响

出示题组：14.8×23，148×0.23，1.48×23。

师：这几道小数乘整数的算式，你通过观察，有什么想和大家交流的吗？

生：这三道乘法算式都要先算148×23，第一题积是一位小数，因为14.8的计数单位是0.1，第二和第三题中一个乘数的计数单位都是0.01，所以积都是两位小数。

师：如果老师告诉大家第一题的得数14.8×23=340.4，你能很快告诉我另外两道题的得数吗？

生：都是34.04。

师：说说你是怎样想的。

生：根据14.8×23=340.4，就能知道148×23=3404，而第二、三题中都有一个乘数是两位小数，所以得到的结果都应该是3404个0.01，也就是34.04。

师：猜一猜，如果积是3.404，题中的两个乘数可能各是多少？在自己的作业单上独立写一写。

学生在作业单上各自写算式，然后组织交流。

生：我是这样写的，因为148×23=3404，所以0.148×23=3.404，148×0.023=3.404。

出示：(　　)×(　　)=0.9。

师：如果在括号里填一个整数和一个小数，你能想到哪些填法？

生$_1$：可以填0.3和3，因为0.3×3的积是9个0.1。

生$_2$：也可以填0.9和1，因为0.9×1的积也是9个0.1。

生$_3$：还可以填0.1和9，因为0.1×9的积还是9个0.1。

师：如果老师在括号里填的是0.18和5这两个数，行不行？

生：不行，因为0.18×5的积一定是若干个0.01，积是两位小数。

师：真的不行吗？大家试着算一算。

学生各自计算后，发现括号里填0.18和5也是可以的。

师：这究竟是怎么回事呢？

沉默片刻之后，有学生兴奋地举手。

生：我明白了！计算0.18×5时，先算18×5=90，因为0.18的计数单位是0.01，所以得数是90个0.01，而90个0.01可以写成0.90，也可以写成0.9。

师：0.9和0.90有什么关系？

生：根据小数的性质，把0.90化简结果就是0.9。

师：如果让你在上面的括号里填一个三位小数和一个整数，你能做得到吗？

【思考】上面的教学通过设计不同角度的练习，着力引导学生感悟乘数中的小数计数单位对积的小数位数的影响。一方面，学生需要根据乘数中小数的计数单位确定积的小数位数；另一方面，他们也需要根据积的小数位数确定乘数中小数的计数单位。在这个过程中，学生充分经历了由此及彼的推理活动，体会到小数末尾有0时需要注意的地方，感受到小数乘整数的本质就是相同计数单位个数的运算，加深了对乘法运算本质的理解。

(责任编辑 常学莉)