

二次类比：由单一走向关联，由常态引向深层

——探究函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 图象与性质的课堂教学片断分析*

曹 宣 (江苏省常州市新北区实验中学 213022)

万荣庆 (江苏省常州市新北区教师发展中心 213022)

前阶段,笔者参加了由万荣庆老师领衔的江苏省第四届初中数学乡村骨干教师培育站组织的区级课堂教学评比活动,授课内容是探究函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的图象与性质.该内容不是苏科版教科书上的教学内容,确定该课题一是基于学生通过一次函数,尤其是反比例函数的学习,掌握了研究函数图象与性质的一般方法;二是基于苏科版教科书八年级下册第八章反比例函数章节后的复习题(P145第13题):“我们知道,一次函数 $y=x-1$ 的图象可以由正比例函数 $y=x$ 的图象向下平移1个长度单位得到.函数 $y = \frac{2}{x+1}$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象有什么关系?”笔者基于上述两方面的思考,在课堂上通过两次类比,将知识与方法由单一走向关联,将学生的思维由常态引向深层.现将教学片断呈给大家,分享教学过程中的精彩.

1 教学片断1:利用函数图象与性质研究的一般方法,类比研究函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的图象与性质

师:请同学们回顾我们前面是如何研究反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象与性质的?(独立思考)

生1:先研究 $y = \frac{1}{x}$ 中两个变量 x, y 的变化特点,发现 $x \neq 0, y \neq 0$,图象与 x 轴、 y 轴没有交点; x, y 同正同负,图象在第一、三象限.

生2:我发现当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小,说明图象向右越来越接近 x 轴(同时用手比划).当 $x < 0$ 时, y 随 x 的减小而增大,说明图象向左越来越接近 x 轴(仍用手比划).

生3:我可以用列表、描点、连线画图,画出函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象,这样能更直观地看出其性质.

师:同学们讲得很好.要研究一个函数的图象与性质,我们可以从解析式上先看看两个变量之间的

变化规律,想象其大致的图象,再用列表、描点、连线画图的方式得出图象并直观找到其性质.那么请你类比上述分析方式,分析函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的两个变量 x, y 有怎样的特点?(独立思考,同伴交流)

生4:我从函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 中发现 $x \neq -1, y \neq 0$,图象与 x 轴没有交点.

生5:我发现,因为 $x \neq -1$,所以图象应该在直线 $x = -1$ 的两边.

$x > -1$ 时, y 随 x 的增大而减小,其图象应该是这样的;(生5用手比划)

$x < -1$ 时, y 随 x 的减小而增大,其图象应该是这样的.(仍用手比划)

生6:我把 $x+1$ 看作一个整体,所以 $x+1$ 与 y 同正同负,也就是 $x > -1$ 时 y 为正; $x < -1$ 时 y 为负.

师:同学们用类比的方法从解析式中初步获得了函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 中变量 x, y 的特点,也对其图象有了一个大概的认识,但还不明晰其图象到底是怎样的.如果想更深入地了解它,我们应该怎么做?

生7:我们可以类比反比例函数 $y = \frac{1}{x}$,对函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 用列表、描点、连线画图的方式.

师:请同学们尝试.(学生独立完成,教师巡视后呈现学生典型问题)

生8:因为在 $y = \frac{1}{x}$ 中, $x \neq 0$,所以列表时 x 在0的两边取值,在这里,由于 $y = \frac{1}{x+1}$ 中 $x \neq -1$,所以列表时 x 在 -1 的两边取值,画出的图象如图1.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	...
y	...	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	/	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$...

* 本文系江苏省中小学教学研究2019年度第13期重点课题“基于三个理解的初中数学教材教学化的实践研究”(编号:2019JK13-ZB29)的阶段性研究成果.

师:这个图形看上去“扁扁的”,那么事实是这样吗?(教师说明列表中取值的特点).为了保证图象的完整性,我们可以再多取些点,这些点可以怎样取?(学生继续交流)

生9:我们可以再取些点,发现画出的图象如图2,这个图象比刚才更有整体感.

x	...	-4	-3	-2	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	1	2	...
y	...	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-3	-2	/	1	3	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$...

师:我们发现图2是两支曲线,但我刚才发现还有部分同学在连线时仍然用线段连结描出的点,那么图象是不是这样的一组折线(教师用几何画板演示)呢?你认为应该怎么办?

生10:我们在分析反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 图象时,也遇到过这样的问题,刚开始我们也是用线段依次连的,后来老师又取了很多点,发现这些密密麻麻的点若用线段连接起来,整体的感觉就是曲线.

师:非常好!我们在描点连线时,当取更多点时,这些点并不在原有的折线段上,形成了更细小的折线段.(教师再次用几何画板演示)如图3,因而得知,函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的图象可以看

作由密密麻麻很细小的折线段连成,最终形成两条光滑的曲线,因而任意两点间的图象不是折线而是光滑的曲线.

师:结合图象说说其性质(略).

教学分析 学生学习一次函数尤其是反比例函数后,已初步具备了研究其他特殊函数图象与性质的一般方法与基本经验,即遇到新的特殊函数时,可先从解析式中分析两个变量的变化特征,初步感

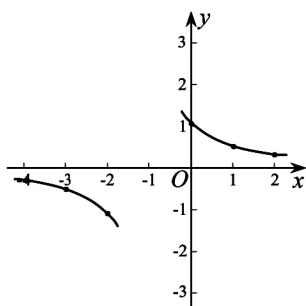


图1

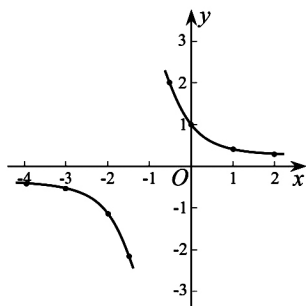


图2

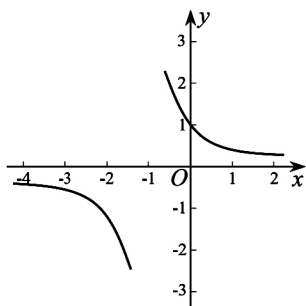


图3

知图象,接着通过列表、描点、连线画图,直观地认识图象及其性质,由数到形,数形结合.因而对于函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的图象及其性质的研究,同样可以类比采用这种研究函数的一般方法,这也是本节课的根本.在这个教学片断中,笔者再次花了大量的时间让学生类比研究反比例函数的一般方法,对函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的图象与性质进行细致的探究,展开不断的辨析,培养学生严谨的数学思维.特别地,笔者针对课堂中个别学生再次出现用线段连线描图的现象(这种错误对八年级学生来说是正常的),又进行了深入分析,让学生充分体会数学中曲直变化的哲学思想,其内容虽深刻但教学过程较容易地渗透了极限的雏形,触及了数学的本质,这种深入浅出地渗透数学思想的辩证思维,又一次将学生的思维向纵深推进.

2 教学片断2:利用函数与函数之间的关联,类比

研究函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的图象与性质

师:刚才我们利用研究函数的一般方法,研究了函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的图象与性质.下面我们换个研究视角看看,请同学们回顾函数 $y = x + 1$ 的图象是怎样由函数 $y = x$ 的图象变换得到的.(小组交流)

生11:函数 $y = x + 1$ 的图象可由函数 $y = x$ 的图象向上平移一个长度单位而得.

生12:函数 $y = x + 1$ 的图象可由函数 $y = x$ 的图象向左平移一个长度单位而得.

师:非常好!我们若从 x 变化的视角看,函数 $y = x + 1$ 的图象可由函数 $y = x$ 的图象向左平移一个长度单位而得.如图4所示,其实所谓 $y = x$ 的图象向左平移一个长度单位,就是其图象上每个点都向左平移一个长度单位(教师取点演示).

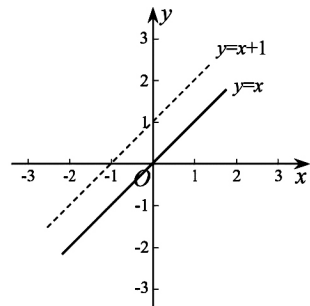


图4

师:请你类比上述过程,分析函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的图象怎样由函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象变换得到.

生13:类似,只要将函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象向左平移一个长度单位.

师:请在图5中画出函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的图象.

(独立完成,教师巡视后呈现学生的典型问题)

生 14:我在将函数的图象 $y = \frac{1}{x}$ 向左平移一个单位时,因为图象是曲线,我不会画.

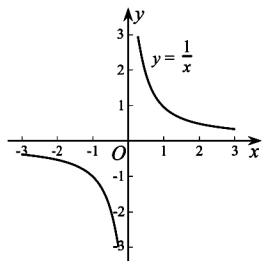


图 5

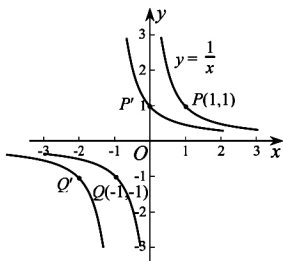


图 6

生 15:我在函数的图象上取两个特殊点 $P(1, 1)$ 、 $Q(-1, -1)$,将它向左平移一个长度单位得到 $P'(0, 1)$ 、 $Q'(-2, -1)$,然后以这两个点为基础画图,但画图时,掌握不了函数的弯度与其他点的位置.(图 6)

师:嗯!双曲线的左右平移没有直线平移那么直观,也没有那么好画.如何大致地画出平移后的图呢?我们可以在原图象上取几个特殊点,将这些点向左平移,这样连线即可(教师用几何画板演示如图 7).同学们现在可以再尝试一下(学生继续独立完成图象平移).

师:有没有更好的方法呢?上述过程我们是将 $y = \frac{1}{x}$ 的图象向左平移一个长度单位,其中坐标系 xOy 并没有动,那么我们能不移动函数的图象,而反过来平移……

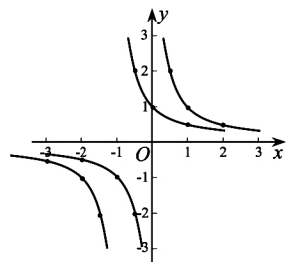


图 7

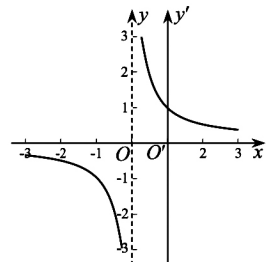


图 8

生 16:可以将坐标系 xOy 向右平移一个长度单位变成新的坐标系 $x'O'y'$.

师:非常好!左右平移坐标系 xOy 就相当于平移 y 轴,这样解决问题简单明了,这时函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的图象就如图 8 在坐标系 $x'O'y'$ 中所示(尝试擦掉 y 轴).

教学分析 研究函数不仅可用一般方法进行,还可以从函数关系的角度进行.上述环节,针对学生已初步具备的以下两点经验:一是函数 $y = x + 1$ 的图象可由函数 $y = x$ 的图象向左平移一个长度单位

而得,了解平移函数图象的特征,积累图象平移的经验;二是基于函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 与函数 $y = \frac{1}{x}$ 在形式结

构上的类似,函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的图象与反比例函数

$y = \frac{1}{x}$ 的图象有共同特征的经验.该环节教师基于

上述两类经验进行类比分析,通过理清函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 与函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象与性质的联系,达到逐步

清晰函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的图象与性质特征,这是研究函数

的又一种视角.这种视角的拓展更加丰富了学生的认识,提升了学生的数学学习能力,将学生思维引向了深层.特别是笔者在平移图象时,初步渗透了相对平移的方法,即图象不动,移动坐标系,这种方法虽然要到高中阶段才进行系统学习,其知识与方法的要求较高,但在这里只是让学生直观感知图象的相对平移,从课堂上学生的反应来看,他们是能够理解的,这种直观感知将其思维又一次引向了深层.

3 结语

初中阶段通过研究一次函数、反比例函数、二次函数这三种重要的特殊函数,进一步强化学生对三类函数现实意义的理解,也进一步突出了研究函数

的一般方法.对于函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的图象与性质,一

般的教学往往采用一次类比,即类比前面学过的研究函数的一般方法展开教学活动,这是研究函数

图象与性质的最基本方法,也是我们后续进一步研究一些特殊函数图象与性质的基本方法.但由于函数

$y = \frac{1}{x+1}$ 与函数 $y = \frac{1}{x}$ 有着密切的关联,因此笔者

采取了两次类比:第一次类比反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 图

象与性质的一般研究方法,开展函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的图象与性质的研究,这次类比的重点是突出研究函数

的一般方法;第二次从函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 与反比例函数

$y = \frac{1}{x}$ 形式结构之间的联系进行类比,展开函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的图象与性质的研究,这次类比的重点是突

出函数与函数之间的关系及其图象之间的联系.通过这两次类比,引导学生将研究从单一的基本方法

走向知识关联的结构方法.同时,在每次类比中,更是将学生从常态的思维方式引向了深层思考,激发了学生的思辨能力,拓宽了学生的思维视角,提升了学生的数学素养.