中考数学新题例析

江苏常州　于新华

在中考复习过程中，练习一定数量的数学试题必不可少. 常见的常规问题我们已经练习很多，但每年各地中考与模考试卷中还会出现许多立意新颖、解法巧妙的问题，解决这些问题需要我们有开阔的视野与较强的思维能力. 下面我们摘取一些新题供同学们分析与练习.

一、分式化简

例 1　按下列程序计算：

n→平方→$+n$→$\div n$→$-n$→答案

(1) 填表

输入 n	3	$\frac{1}{2}$	-2	-3	…
输出答案	1			1	

(2) 请将题中计算程序用代数式表达出来，并化简.

分析　第(1)题较容易，只要按程序所提供的运算方法和顺序进行计算，就能得到正确的答案. 有趣的是，尽管输入的 n 不同，但输出答案均是 1. 进而可以猜想第(2)题的所列代数式化简后的结果应是 1.

解析　(1) 均填 1.

(2) $\frac{n^2+n}{n}-n$；$\frac{n^2+n}{n}-n=\frac{n(n+1)}{n}-n=n+1-n=1$.

点评　这道题目通过文字叙述与相应的运算，让我们感受到“变中不变”的有趣现象，从而引起我们思索这是为什么，然后用字母运算，推理解释相应的规律.

例 2　(1) 请你任意写出五个正的真分数：________、________、________、________、________. 请给每个分数的分子和分母同加上一个正数得到五个新分数：________、________、________、________、________.

(2) 比较原来每个分数与对应新分数的大小，可以得出下面的结论：给一个真分数 $\frac{a}{b}$ (a、b 均为正数，$a<b$) 的分子、分母同加上一个正数 m，得 $\frac{a+m}{b+m}$，则两个分数的大小关系是：$\frac{a+m}{b+m}$

______ $\frac{a}{b}$.

(3) 请你用文字叙述(2)中结论的含义：______________________________.

(4) 如图1所示，有一个长宽不等的长方形绿地，现给绿地四周铺一条宽相等的小路，原来的绿地与现在铺过小路后的绿地的长与宽的比值是否相等？为什么？

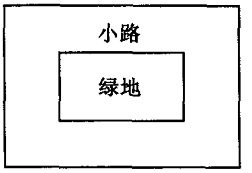

图 1

(5) 这个结论可以解释生活中的许多现象，解决许多生活与数学中的问题. 请你再提出一个类似的数学问题，或举出一个生活中与此结论相关的例子.

分析 把"发现问题，提出假设，解释和证明，实际应用"的认知思维过程融入一道探索题中，让同学们在做数学题的同时，体会和感悟到对终身发展都有价值的探究事物的过程.

解析 (1) 略；(2) $>$；

(3) 给一正的真分数的分子、分母同加一个正数，得到的新分数大于原来的分数.

(4) 两块绿地的长与宽的比值不相等. 理由略.

(5) 数学问题举例：

① 若$\frac{a}{b}$是假分数，会有怎样的结论？

② a、b 不是正数，或不全为正数，情况如何？

点评 这是一道由我们自己举例运算并发现规律的题目，经历了"从特殊到一般"发现结论的过程. 题目最后还要求我们运用规律及对规律作变式思索，引导我们将研究推向更高层次.

二、定义新运算

例 3 在实数的原有运算法则中我们补充定义一种新的运算"$\otimes$"如下：

当 $a\geqslant b$ 时，$a\otimes b=b^2$；当 $a<b$ 时，$a\otimes b=a$.

则当 $x=2$ 时，$(1\otimes x)\cdot x-(3\otimes x)$的值为________.（"$\cdot$"和"$-$"仍为实数运算中的乘号和减号）.

分析 本题对任意两个数 a 与 b 定义了一种新运算$\otimes$，在计算新运算的结果时，仍用到了我们平时的常规运算. 需要同学们仔细阅读题目，透彻理解题意，然后"依葫芦画瓢"就可以得到正确答案.

解析 因为 $1<2<3$，即 $1<x<3$，所以 $1\otimes x=1$，$3\otimes x=2^2=4$.

所以$(1\otimes x)\cdot x-(3\otimes x)=1\cdot x-4=2-4=-2$.

点评 本题注重了对同学们的自学能力的考查，要求同学们理解新的运算法则，并能加以运用，从而实现信息的迁移. 第一次遇到这样的题目，可能会感到有点意外甚至费解，但适当训练后，便会发现，解答这类问题十分容易.

三、探索规律

例 4 如图2，将边长为1的正方形 $OAPB$ 沿 x 轴正方向连续翻转2 012次，点 P 依次落在点 $P_1, P_2, P_3, P_4, \cdots, P_{2\,012}$的位置，则 $P_{2\,012}$的横坐标 $x_{2\,012}=$________.

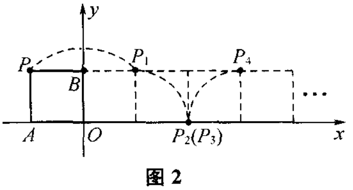

图 2

分析 最终的数字 2 012 较大，暗示翻转过程中落点与横坐标存在某种规律，因此我们只要耐心将正方形 $OAPB$ 转动几次，观察其摆放的位置何时重复出现.

解析 点 P 为正方形 $OAPB$ 左上角顶点，当正方形 $OAPB$ 连续翻转 4 次后，得到的正方形左上角顶点为 P_4. 由此可知，后面继续翻转时，必然每转动 4 次，点 P_i(其中 i 是 4 的倍数)就出现在正方形左上角，从而点 P_i 的横坐标 $x_i=-1+4\cdot\frac{i}{4}=-1+i=i-1$. 自此要研究点 $P_{2\,012}$的横坐标，只要研究数字 2 012，2 012 恰巧是 4 的 503 倍，因此 $x_{2\,012}=2\,012-1=2\,011$.

点评 要求点 P_n 的横坐标，即使 n 不是 4 的倍数，也可以先求出与数字 n 相邻的 4 的倍数 n'，然后根据规律求出点 $P_{n'}$ 的横坐标，在此基础上，再翻转有限的几次，就可以得到点 P_n 的横坐标.

请同学们进一步思考下面两个问题：

(1) 你能写出点 P_n 一般形式的坐标吗？

(2) 从点 P 翻转 n 次至点 P_n，在转动过程中，点 P 经过的路线长度是多少？

例 5 有两个边长均为 1 的等边三角形(或正方形)，将$\triangle A'B'C'$(或正方形 $A'B'C'D'$)的顶点 A'固定在$\triangle ABC$(或正方形 $ABCD$)的中心 O 上. 保持$\triangle ABC$(或正方形 $ABCD$)不动，让$\triangle A'B'C'$(或正方形 $A'B'C'D'$)以 $A'B'$ 与 BC 相交并垂直时为起始位置，绕点 O 作逆时针方向旋转.

下面研究在旋转过程中，两个图形的重叠部分 $OMCN$ 的面积是否变化？如果变化，变化规律是什么？

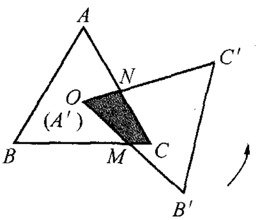

图 3

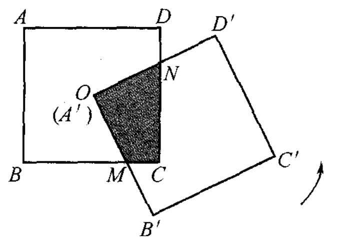

图 4

如何着手研究这类问题？你是怎么想的？下面提供了一些思考步骤，但顺序被打乱了：

① 当自变量确定后，则通过运算，具体写出面积关于这个自变量的函数关系式.

② 在建立面积关于某个变量的函数关系式时，首先要做的事是，寻求一个自变量，用这个自变量来刻划图形在旋转过程中的不同位置状态.

③ 为了探索重叠部分面积变还是不变，先找几个特殊位置，分别计算出它们的面积.

④ 如果不变，则尝试证明；如果变化，则着手研究面积的变化规律. 具体说，力求建立面积关于某个变量的函数关系式.

⑤ 根据几个特殊位置上的计算结果，对面积是否变化初步提出猜想，是变还是不变.

(1) 结合自己的思考方法，填写你认为合理的顺序：________________________.

(2) 探索研究，填写结论(用“不变”与“变化”填空)：

图 3 中重叠部分的面积是________的；图 4 中重叠部分的面积则是________的.

(3) 当重叠部分面积是变化的，并想建立其关于某个变量的函数关系式时，你打算选择哪

个量作为函数的自变量(可在原图中添加点、线加以辅助说明,至少给出两种方法)?

(4) 研究无止境!如果对这类问题作进一步探究,请你提出一到两个值得研究的其他问题(只需提出问题,不作具体研究).

分析 探索面积变还是不变,急于建立函数,就显得仓促盲目.直觉引导是非常重要的,可通过特殊位置的适当计算,形成合理猜想,再作相应的研究,这才是科学的研究方法.

解析 (1) ③→⑤→④→②→①;

(2) 变化,不变.

(3) 过点 O 作 $OH\perp BC$,H 为垂足,则选择自变量的方法至少有两种:$\angle MOH=x°$,或以点 H(或点 B)为起点,点 M 经过的路程为自变量 x(当点 M 旋转到另一条边上时,x 为折线长度).

(4) 如果有兴趣探究,可以继续关注下面问题:

① 当重叠部分的面积发生变化时,被旋转的图形分别旋转到什么位置时,重叠部分的面积取得最大值与最小值?

② 对于等边三角形,重叠部分的面积是变化的;对于正方形,重叠部分的面积则是不变的.那么对于正五边形,正六边形,……,结果分别如何呢?对于最一般的情形:正 n 边形,结果又如何呢?

点评 同学们可能还会提出用其他变量的描述方法,但未必正确,比如 $OM=x$,因为对于同样的 OM 的长度,$\triangle A'B'C'$(正方形 $A'B'C'D'$)的位置不确定.

这道题目对我们的启发是,在学习过程中,既要会解决已有的问题,更要学会发现问题,提出问题,并科学地研究问题,这是当代人必须具备的素质.

四、错题纠正

例 6 数学教师在讲完公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 后,要求同学们相互编题考查对方.很快,小明同学就“精心”地策划出如下题目:

已知 a、b 均为正数,且 $a^2=4$,$ab=22$,$b^2=16$,求 $a+b$ 的值.

对于这个问题,小明心中的解法是这样的:

$\because (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,$\therefore (a+b)^2=4+2\times22+16=64$.

$\because a+b>0$,$\therefore a+b=8$.

其实小明所编之题是一道条件多余而且矛盾的病题!这是由于:

$\because a^2=4$,$a>0$,$\therefore a=2$.

$\because b^2=16$,$b>0$,$\therefore b=4$.

$\therefore ab=8$,这与条件 $ab=22$ 矛盾.

因此,只要将条件中的 3 个等式任意去掉一个,题目就“健康”了.

阅读上述材料,请思考并解决与上面类似的一个问题:

在图 5 的 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,点 D 在 AC 边上,若 $AB=2\sqrt{3}$,$DB=2\sqrt{2}$,$\angle ABC=60°$,$\angle DBC=45°$,求 AD 的长.

(1) 请你分析说明这是一道条件多余而且矛盾的病题.

(2) 请你去掉一个条件,然后完成相应问题的解答过程.

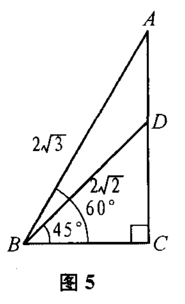

图 5

解析 (1) 方法不唯一,过程略.

(2) 若去掉条件$\angle ABC=60^\circ$,则结果为 $AD=2(\sqrt{2}-1)$;

若去掉条件$\angle DBC=45^\circ$,则结果为 $AD=3-\sqrt{5}$;

若去掉条件 $AB=2\sqrt{3}$,则结果为 $AD=2(\sqrt{3}-1)$;

若去掉条件 $DB=2\sqrt{2}$,则结果为 $AD=3-\sqrt{3}$;

若去掉条件"$\angle C=90^\circ$"和"点 D 在 AC 边上",则结果为 $AD=\sqrt{6}-\sqrt{2}$. 具体解法见图 6.

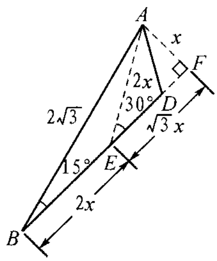

图 6

点评 这道题目颇有新意. 平时我们解答的都是正确的题目,偶尔题目有错误时,我们却不知道,仍在傻傻地做,浪费了时间,浪费了精力. 这对我们的启发是,要深刻分析题目,理清内在联系,找准解题突破口,从而形成解题思路.

五、欣赏数学美

例 7 在学习"黄金分割"时,我们遇到了两个数$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$与$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 这两个数很有趣.

其一,两个数分别由$\frac{\sqrt{5}}{2}$与$\frac{1}{2}$通过加减运算而得;其二,两个数的乘积为 1;其三,两个数化成近似值(精确到 0.001)时,小数部分相同($\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$,$\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.618$). 请解答下列问题.

(1) 严格意义上,$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$与$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$均为无理数,因此在将它们化成小数时,都只能写成无限不循环小数. 现在的问题是,如果将$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$与$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$化成小数时,无论精确到哪一位,你能肯定它们的小数部分一定相同吗?说明你的理由.

(2) 你能否找到两个正实数,使它们既互为倒数,同时在它们化成小数时,其中一个数的整数部分为 2,而小数部分就是另一个数?写出你的探求过程.

分析 解决本题的关键在于如何表示$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$与$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$的小数部分.

解答 (1) 方法 1:由于$\frac{\sqrt{5}+1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=1$,因此$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$与$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$的小数部分必定相同.

方法 2:由于$\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,且 $0<\frac{\sqrt{5}-1}{2}<1$,所以$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$的整数部分为 1,小数部分就是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,因此$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$与$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$的小数部分必定相同.

(2) 设小数部分为 x,则其中一个数为 $2+x$,另一个数就是 x. 由题意得 $x(x+2)=1$,解之得 $x=\sqrt{2}-1$(另一个根 $x=-\sqrt{2}-1<0$,舍去).

因此这两个实数为$\sqrt{2}+1$ 与$\sqrt{2}-1$.

点评 本题饶有趣味,让人忍不住模仿一句名言:数学中并不缺少美,而是缺少发现美的眼睛.

六、解决生活中的问题

例 8 商家为了吸引顾客眼球，非常注重商品的外包装. 如图 7，商家拟用绸带对某件商品进行斜着缠绕包装(图 7 中两个矩形分别是绸带与商品的示意图，不考虑厚度)，期盼达到图 8 的效果.

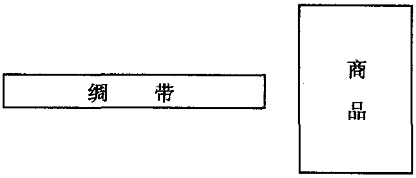

图 7

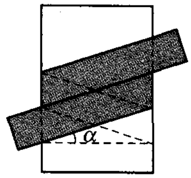

图 8

思考并解决下列问题：

(1) 将绸带(图 9)沿 MN 折叠成“V”形(图 10)，若 $PM'=5$，求 PN' 的长(要有说理过程).

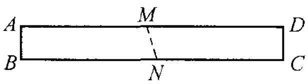

图 9

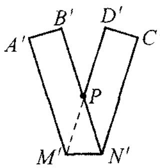

图 10

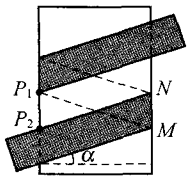

图 11

(2) 显然，倾斜角 α 过大，包装将会太松，商品将有部分露在外面(图 11)；倾斜角 α 过小，包装将会太紧，绸带将出现交错重叠.

若已知绸带的宽度为 2，商品的宽度为 10，则倾斜角 α 多大时，才能做到恰到好处包装(即达到图 8 的效果)？(求出 α 的某个三角函数值即可)

分析 本题的合理性是很容易感受到的，关键是如何转化为数学问题来解决.

解析 (1) $\because AD /\!/ BC$，$\therefore \angle DMN=\angle BNM$(如图 9).

$\because$ 在折叠过程中，$\angle DMN=\angle D'M'N'$，$\angle BNM=\angle B'N'M'$，

$\therefore \angle D'M'N'=\angle B'N'M'$，$\therefore PM'=PN'$(如图 10).

$\because PM'=5$，$\therefore PN'=5$.

(2) 图 12 是图 10 中 $\triangle PM'N'$ 的放大图. 如图，取 $M'N'$ 的中点 E，连接 PE，则 $\angle EPM'=\angle N'PE=\angle\alpha$. 作 $N'G\perp PM'$，G 为垂足，取 GM' 的中点 F，连接 EF，则 $EF /\!/ N'G$，且 $EF=\dfrac{1}{2}N'G$.

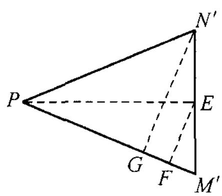

图 12

$\because N'G$ 为绸带的宽度，PE 为商品的宽度，

$\therefore N'G=2$，$PE=10$，$\therefore EF=1$.

$\because \triangle PEF$ 中，$\sin\angle EPF=\dfrac{1}{10}$，$\therefore \sin\alpha=\dfrac{1}{10}$.

点评 学会用数学的眼光观察生活，并能够用相应的数学知识解决问题，这是学习数学的目的之一. 前面的解答应用了中位线知识，也可以采用相似或者面积的方法解决.