教师进修

讲清楚　讲透彻　讲本质

——中考数学题的讲题分析兼议教师如何讲题

江苏省常州市正衡中学(231000)　丛晓娜
新北区教育管理服务中心(213022)　万荣庆

笔者最近参加了本市组织的初中数学教师解题、命题、讲题比赛，其中数学“讲题”是笔者第一次接触. 组织者对比赛提出了一些基本要求：“深入研究2022版新课标，提高初中数学课堂教学品质，并发挥试题对教学的促进作用. 在所给材料中任选一个大题作为讲题素材，根据题型特点和学生实际，录制8-12分钟的模拟课堂微视频(教师需要出镜)”. 笔者根据比赛要求，通过赛前对“讲题”的理解到“讲题”比赛的过程展示(模拟课堂微视频)以及赛后的反思，对数学“讲题”本身价值，及数学“讲题”对青年教师自我专业发展有了更鲜明的认识.

一、对讲题的初步理解

数学“讲题”不同于传统的数学“说题”. 数学“说题”面向的对象主要是同行，是考查教师基本能力的一种传统方式. 说题是把数学题的来源背景、价值功能、怎样解题、为什么这样解、教学导向等进行阐述. 而数学“讲题”面向的对象主要是学生，“讲题”一是帮助学生分析题目的条件、题目的大致意思，要特别注意挖掘题目中的隐含条件. 二是要强调解题的过程、方法、步骤、解答的格式和表述，方法要符合学生实际，题目的难点和关键点. 三是要强调及时反思解题过程，指出易错点，揭示解题规律. 四是要强调问题适当拓宽引申，拓宽学生学习的视野. 由于本次讲题比赛采用的形式是8-12分钟的模拟课堂，没有学生现场直接参与，因而这种讲题又不同于课堂上对数学题的现场教学，它更需要教师在讲题的具体过程中，准备预设学生的已有基础，重视审题分析启发诱导，点明解题的突破点，讲究思想方法，并适度进行题的变式与拓宽，把题讲通俗、讲透彻.

二、讲题素材分析

讲题素材(常州市2021年中考数学26题)：

【阅读】通过构造恰当的图形，可以对线段长度、图形面积大小等进行比较，直接地得到一些不等关系或最值，这是“数形结合”思想的典型应用.

【理解】(1)如图1，$AC\perp BC,CD\perp AB$，垂足分别为C、D，E是AB的中点，连接CE. 已知$AD=a$，$BD=b(0<a<b)$.

①分别求线段CE、CD的长(用含a、b的代数式表示)；

②比较大小：CE____CD(填“<”、“=”或“>”)，并用含a、b的代数式表示该大小关系.

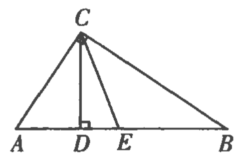

图1

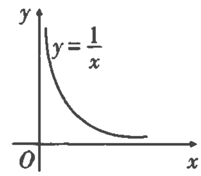

图2

【应用】(2)如图2，在平面直角坐标系xOy中，点M、N在反比例函数$y=\frac{1}{x}(x>0)$的图像上，横坐标分别为m、n. 设$p=m+n$，$q=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$，记$l=\frac{1}{4}pq$.

①当$m=1$，$n=2$时，$l=$________；当$m=3$，$n=3$时，$l=$________；

②通过归纳假设，可得l的最小值是__________. 请利用图2构造恰当的图形，并说明你的猜想成立.

素材分析：本题是一道阅读理解应用题，是在初步阅读感知的基础上，分别以直角三角形、反比例函数图象为背景，考查三角形中线段长度的计算，反比例函数的基本性质，重点考查数形结合思想和几何直观意识. 特别是素材【应用】部分题干虽简洁明了，但构图视野宽，解题路径广，有效考查了学生解题能力. 因此在讲该题时，要求教师在了解学生的基础上，多引导学生联想，关注学生几何推理与代数推理能力的培养，关注构造图形解决代数问题的数形结合思想渗透，促进学生综合解题能力的提升.

三、讲题过程分析

环节一：素材【阅读】部分讲解. 教师引导学生阅读素材【阅读】内容后提出如下问题：

问题1：请你构造能表示$a+b>c,ab>b^2,a^2+b^2=c^2$的几何图形. 同伴交流后教师呈现学生可能构造出的如图3的几何图形，并进行式与形的对比分析.

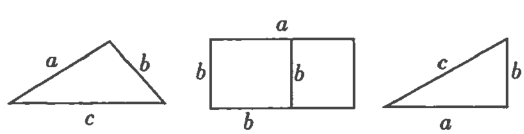

图3

讲题说明:本题素材的【阅读】部分学生往往不重视,但这部分内容除了对一些代数式直接进行推理比较外,也可以通过构造恰当的图形,对线段长度、图形面积大小等进行比较,从而得到一些不等关系或最值,这是“数形结合”的典型应用.讲题时,教师可以让学生根据已有认知例举数形结合事例,体会数形结合思想的作用.

环节二:素材【理解】部分讲解.在原素材【阅读】的视角下,再通过具体问题进行“数形结合”思想的理解与渗透.教师出示素材【理解】部分后,引导学生分析题目条件及图形特征,提出如下问题:

问题1:请根据图1的图形特征,求出线段CE、CD的长.

在图1中,学生能根据已有知识,依据直角三角形斜边上中线是斜边的一半求出线段$CE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(a+b)$.再根据$Rt\triangle ADC\backsim Rt\triangle CDB$,得出$CD^2=ab$,即$CD=\sqrt{ab}$,这是通过图形的几何性质定理推导而得.

追问:请你利用图1中线段的大小,先计算DE长,再根据DE、CE求CD的长.

学生通过提示,能计算出$AE=EB=\frac{a+b}{2}$,从而得出$DE=\frac{a+b}{2}-a=\frac{b-a}{2}$,进而在$Rt\triangle CDE$中,由勾股定理知:$CD^2=CE^2-DE^2=(\frac{a+b}{2})^2-(\frac{b-a}{2})^2=ab$,所以$CD=\sqrt{ab}$,这是从计算的视角,通过代数推理求得$CD$的长.

问题2:你从怎样的视角判断CE与CD的大小的?

大部分学生是通过CD、CE分别为$Rt\triangle CDE$的直角边与斜边,来判断$CE>CD$.这时教师还需进一步引导学生,发现CD是直线AB外一点C到直线AB的垂线段,而CA、CE、CB是直线AB外一点到直线AB的斜线段,根据直线外一点到直线上所有点的连线段中,垂线段最短,可知$CE>CD$,即$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$($0<a<b$).

讲题说明:本环节是以一个典型的几何图形来进一步理解“数形结合”思想的,让学生先通过几何推理或代数推理,得出一些相关线段长,再通过几何图形或利用数学基本结论得出$CE>CD$,即$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$($0<a<b$),理解用几何图形说明算术平均数大于几何平均数($a\neq b$时)这一基本不等式.特别是在计算CD时,渗透了代数推理与几何推断,同时,在判断CE与CD的大小时,引导学回归到“直线外一点到直线上所有点的连线段中,垂线段最短”的结论,突出对数学本质的理解.

环节三:素材【应用】部分讲解.素材【应用】部分是该中考题的重点部分,具有较强的综合性、灵活性,教师应充分引导学生阅读素材的题干,并在初步理解的基础上提出如下探究问题,展开讲题过程.

问题1:在图4的反比例函数$y=\frac{1}{x}(x>0)$的图像上,取点M、N,标出它们的坐标,并说出图形中矩形面积的特点.

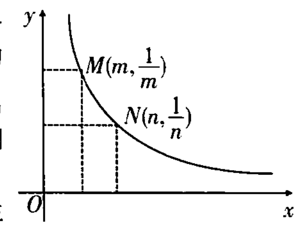

图4

针对问题1,使学生根据$y=\frac{1}{x}$,可知$xy=1$,所以图中矩形面积始终为1,进一步理解$y=\frac{k}{x}$中的k的几何意义,以及反比例函数图像上点的坐标与形的关联,大部分学生根据已知能得出结论.

问题2:完成填表,并通过表格归纳猜想l的最小值

m	n	l
1	2	
2	3	
3	3	
4	5	

原素材中只设计了两组数,不具有归纳猜想的一般性,因此这里采用列表的方式,呈现四组数让学生进行归纳猜想.学生独立思考后,大都能得出正确的猜想:l的最小值为1,且当$m=n$时,l取得最小值.

问题3:请利用图2,构造恰当的图形说明你的猜想成立.

教师可引导学生从$l=\frac{1}{4}(m+n)(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})$代数结构上进一步分析,得出$l=\frac{1}{4}(1+\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+1)$,结合这种代数结构特点,我们可以从$\frac{n}{m}=n\times\frac{1}{m}$视角构造出如图4的大矩形,并根据大矩形可分割为4个小矩形,从而可知:

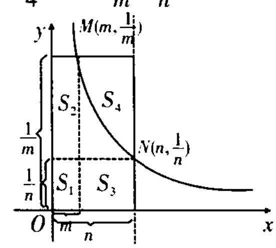

图4

$$\frac{m}{n}=S_1,\ \frac{n}{m}=S_1+S_2+S_3+S_4,\ S_1+S_2=1,S_1+S_3=1.$$

所以$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}=S_1+S_1+S_2+S_3+S_4$,则$l=\frac{1}{4}(2+\frac{n}{m}+\frac{m}{n})=\frac{1}{4}(2+2+S_4)=1+\frac{1}{4}S_4$.当$M$、$N$越来越接近时,$S_4$的面积越来越小$S_4>0$,则$l>1$,当$M$、$N$重合时,$S_4=0$,$l=1$,故$l$的最小值为1.

问题4:你还能构造怎样的图形来说明你对l的猜想.

虽然有了前面的铺垫,但对于学生来说还很难理解这里的$p=m+n$、$q=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$、$l=\frac{1}{4}pq$与图形的关联,因此教师提出如下追问思考:

追问:请认识$l=\frac{1}{4}pq=\frac{1}{4}(m+n)(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})$,思考:如何

用图形表示 $m+n,\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$及 $(m+n)(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})$?

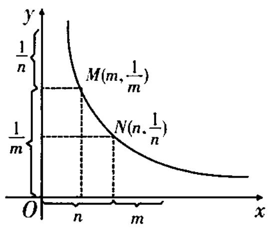

图5.1

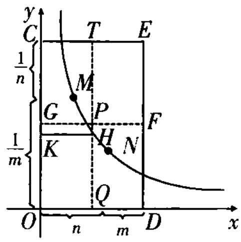

图5.2

我们发现：$m+n$ 就是点M、N的横坐标之和，$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$就是点 M、N 的纵坐标之和，可以构造图5.1，同时由 $l=\frac{1}{4}(m+n)\cdot(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})$可以构造边长为$m+n$、$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的如图5.2矩形 $CODE$，则其面积为 $(m+n)(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})$．另外将 $(m+n)(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})$ 对应的矩形 $ODEC$ 构造后，分析要出现 $\frac{1}{4}(m+n)(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})$，可将图5.2中矩形四边中点连线交于$P$点．

这时矩形 $PQOG$ 的面积 $=l=\frac{1}{4}(m+n)(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})$．这时直线 TQ 交反比例函数图像于 H 点，过 H 点作y轴垂线交轴于K点，则矩形 $OQHK$ 的面积为1．由于画草图的不准确性，不能判定点P是否一定在H点的上方，所以具体讲题时教师需要追问．

追问：P点一定在H点的上方吗？说明理由．

学生通过比较点P、H的纵坐标，来判断P、H的相对位置．容易得出 $P(\frac{m+n}{2},\frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{2})$，则 H 的纵坐标 $y=1\div(\frac{m+n}{2})=\frac{2}{m+n}$，$y_P-y_H=\frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{2}-\frac{2}{m+n}$，整理后 $y_P-y_H=\frac{(m-n)^2}{2mn(m+n)}$，可知 $y_P-y_H\geqslant 0$，当M、N重合时，点P与H重合，否则，点P在H的上方．

综上可知矩形 $PQOG$ 的面积大于或等于矩形 $OQHK$ 的面积，当点M、N越来越接近时，矩形 $PQOG$ 的面积越来越接近矩形$OQHK$的面积；当点M、N重合时，矩形 $PQOG$ 的面积等于矩形 $OQHK$的面积，所以有$l\geqslant 1$，当点M、N重合，即$m=n$时$l=1$，故l的最小值为1．

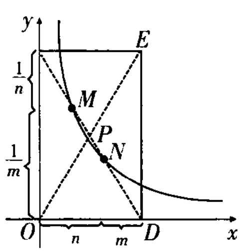

图5.3

问题5：在图5.3中，如果连矩形对角线分得的三角形 POD 面积也是 l，请你思考，能否利用三角形 POD 的面积说明 l 的最值也是1．

讲题说明：素材【应用】部分是该中考题的核心部分，考查学生“数形结合”思想的综合应用能力，其中寻找恰当的图形来说明 $l=\frac{1}{4}(m+n)(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})$ 的代数表达式是关键，也是学生理解应用的难点．为此笔者在讲题时，一方面引导学生从式子 $l=\frac{1}{4}(m+n)(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})$ 的代数结构进行整理分析，得出 $l=\frac{1}{4}(2+\frac{n}{m}+\frac{m}{n})$ 的代数结构形态，构造恰当的图形．另一方面又从代数式的原始结构 $m+n$与$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的特征出发，帮助学生思考如何构造出恰当的图形，同时进一步分析如何构造出恰当图形．另外针对部分学生，如果知道了两点$A(a,b)$、$B(c,d)$，线段AB的中点坐标$(\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2})$这一公式，还可发现 $l=\frac{1}{4}(m+n)(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})=\frac{m+n}{2}\cdot\frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{2}$，恰好是线段$MN$中点横坐标与纵坐标的积，于是就有，在图6中连接$MN$，取中点$P$，得 $P(\frac{m+n}{2},\frac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{2})$，如图构造矩形$PEOD$，$S_{矩形PEOD}=l$，根据 k 的几何意义，当点P不在图像上，$l>1$，此时点M、N重合，$l=1$，故l的最小值为1．

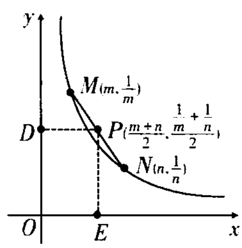

图6

四、比赛后的思考

讲题比赛是促进青年教师专业发展好的举措，也是推进教学、改进教学方式的重要手段．通过这次数学讲题大赛，笔者感悟到三点体会．

数学“讲题”要讲清楚．张景中院士告诉我们：把数学变容易基本的想法是，熟悉了就容易了，将学生熟悉的东西串通起来；简单了就容易了，包括简单的表达方式，通用的解题方法；想通了就容易了，将前后左右知识串通，把道理讲清楚；直观了就容易了，充分利用形数结合、动静结合，在数学实验、信息技术中体验，变抽象为具体．因此数学讲题首先要把数学题将清楚，就是要用教学语言把数学问题讲明了．本题在环节一中，从学生已有知识出发展开讲题，让学生在清晰的数学内容中理解．接着在环节二中，又通过学生熟悉的内容，理解数形结合．特别在环节三中，通过对l的代数式结构的清晰分析、前后知识的清晰串通，特别是通过几何图形分析将该问题从通俗、清晰的层面化解难点、突破难关，因此，讲清楚是数学讲题的首要任务．

数学“讲题”要讲透彻．波利亚在《怎样解题——数学思维的新方法》一书中，提出了解题的一般方法，找准条件，翻译条件，审清所求，建立关系，寻求突破．依循这样的思路开展讲解，这样才能将数学问题讲透彻．讲透彻就是要从多方位、多视角去分析问题，寻找多样的解决问题的途径，探寻不同的方法．(下转第64页)

（8）$b=c=d=e$，$2\angle B+\angle C=\angle D+2\angle E=360°$.

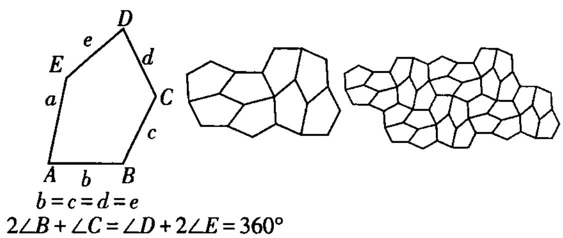

图8

（9）$b=c=d=e$，$2\angle A+\angle C=\angle D+2\angle E=360°$.

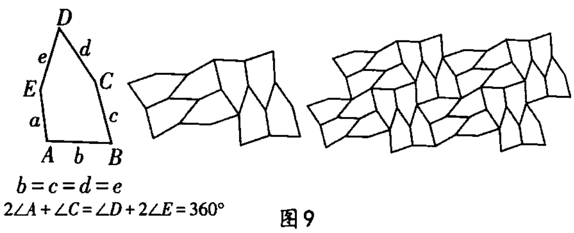

图9

（10）$a=b=c+e$，$\angle A=90°$，$\angle B+\angle E=180°$，$\angle B+2\angle C=360°$.

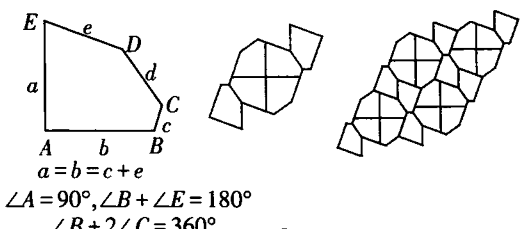

图10

（11）$2a+c=d=e$，$\angle A=90°$，$2\angle B+\angle C=360°$，$\angle C+\angle E=180°$.

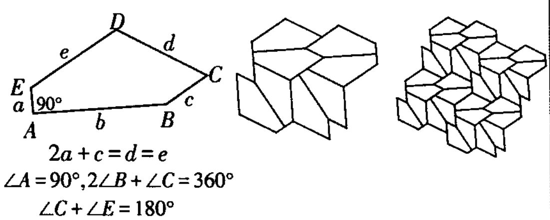

图11

（12）$2a=d=c+e$，$\angle A=90°$，$2\angle B+\angle C=360°$，$\angle C+\angle E=180°$.

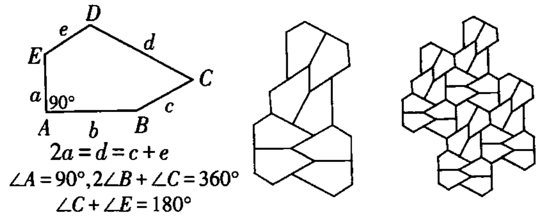

图12

（13）$d=2a=2e$；$\angle B=\angle E=90°$，$2\angle A+\angle D=360°$.

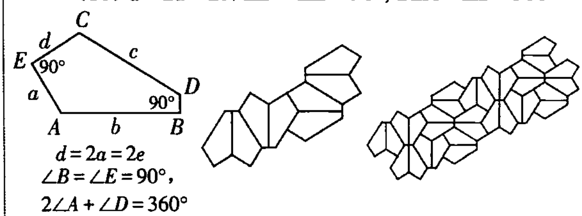

图13

（14）$2a=2c=d=e$，$\angle A=90°$，$2\angle B+\angle C=360°$，$\angle C+\angle E=180°$.

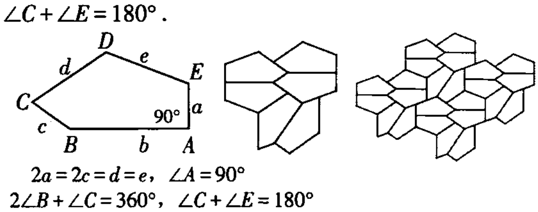

图14

（15）$a=c=e$，$b=2a$，$\angle A=150°$，$\angle B=60°$，$\angle C=135°$，$\angle D=105°$，$\angle E=90°$.

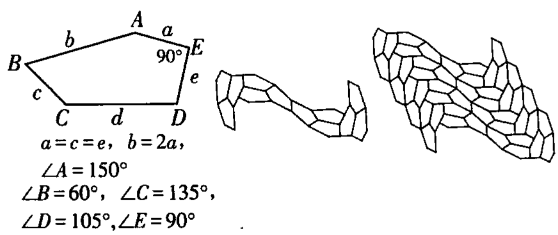

图15

参考文献：

数学八年级上册教师教学用书[M] 北京：人民教育出版社，2013：54−55.

（上接第59页）笔者在该题环节二的讲解中，对于求CD，不仅从几何性质视角出发，还从代数的视角进行推理运算得出CD. 在环节三中，不仅从$l=\frac{1}{4}(m+n)(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})$的代数化简后的结构进行图形构造分析，还从$M$、$N$的坐标特点构成几何图形，甚至拓展到线段中点坐标公式的视角展开图形构造. 从多方位、多视角，把该问题讲透彻.

数学“讲题”要讲本质. 数学学科的本质是对基本数学概念的理解，对数学思想方法的把握，对数学特有思维方式的感悟，对数学美的鉴赏与领悟，对数学精神的追求（理性精神与探究精神）. 数学讲题只有讲到数学本质，触及数学的灵魂，这样的讲题才能真正提高学生的素养，激发学生持久的学习兴趣，这样的讲题才是有真正价值的. 在讲题环节二判断$CE>CD$时，笔者不仅从直观上判断，更是从“直线外一点到直线上所有点的连线段中，垂线段最短”这一数学本质上让学生去理解. 在环节三讲解时，特别从数形结合的数学思想方法的本质上引导学生去分析、去思考、去探究. 同时对代数式的结构美、图形结构美的特征上去分析. 边探究问题边欣赏数学美，理性地思考、分析、表达. 这是我追求的数学讲题.