中小学数学教学论著译丛

中小学生数学能力心理学

[苏] 克鲁捷茨基著

上海教育出版社

B843·2
90-3U

中小学数学教学论著译丛

中小学生数学能力心理学

（苏）克鲁捷茨基 著

北京印刷学院藏书
图书馆
S0161711

李伯黍 洪宝林 艾国英
李绍煌 吴福元 孙名之 等译校

上海教育出版社

Крутецкий В. А.
ПСИХОЛОГИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ
СПОСОБНОСТЕЙ ШКОЛЬНИКОВ
«Просвещение»
Москва 1968

本书根据芝加哥大学1976年出版的英译本译出

中小学生数学能力心理学

（苏） 克鲁捷茨基 著

李伯黍 洪宝林 艾国英
李绍煌 吴福元 孙名之 等译校

上海教育出版社出版发行
（上海永福路123号）
各地新华书店经销 江苏宜兴印刷厂印刷
开本850×1156 1/32 印张16.75 字数413,000
1983年12月第1版 1987年4月第2次印刷
印数18,801—23,000本

统一书号：7150·2959 定价：3.00元

中译者序言

本书是苏联教育科学院普通心理与教育心理研究所副所长兼能力研究室主任克鲁捷茨基关于中小学生数学能力的一本心理学专著，1968年在莫斯科出版。我们根据由美国杰尔米·基尔帕特里克(Jeremy Kilpatrick)教授和艾扎克·维斯佐普(Izaak Wirszup)教授主编，琼恩·泰勒(Joan Teller)翻译的英文版把它译成中文，以供心理学工作者，数学教师、教育科学研究人员以及大专院校相应系科的学生参考。

参加本书翻译工作的同志有：李伯黍(序言和前言)，王玲(1、3、4参考文献英译本编者注)，柴紫菡(2)，岑国桢(5、7、9、10)，李维(6、15、16)，艾国英、乐竟泓(8)，李绍煌(11)，冯忠武(12、14)，冯忠武、林自钊、金惠堂(13)，孔祥善、林明(17、18)。

参加初稿校对工作的同志有：洪宝林(1、3、4)，李伯黍(2、5、6、7、9、10、13、15)，吴福元(12、14)，孙名之(16)。

参加全书统校工作的同志有：李伯黍、艾国英、李绍煌、孙名之。

本书在翻译过程中，得到上海师范学院教育科学研究室很多同志的鼓励和帮助。对此，我们表示衷心的感谢。

本书翻译中的错误和不当之处，谨希读者予以批评指正。

1982年12月

英译本编者序言

1963年，克鲁捷茨基向在华盛顿举行的第十七届国际心理学大会，递交了一篇关于数学能力的研究报告摘要(«心理学报», 23, 1964, 314～315)，西方心理学家和数学教育工作者才第一次知道他的研究。同年又见到一本苏联教育心理学研究文集的英译本(B. 西蒙和J. 西蒙编«苏联教育心理学», 斯坦福大学出版社)，其中有一篇克鲁捷茨基的论文："数学能力低的学生思维的某些特点"。

我们对克鲁捷茨基的研究之所以感兴趣，不仅是因为看来他是苏联心理学家中唯一研究数学能力个别差异的人，而且是因为他在研究中所使用的数学题目是如此的多样和巧妙。六十年代末，中小学数学研究小组和近期东欧数学文献研究部联合译出了一批苏联的数学教育文献(«苏联数学教学心理学研究»)，编选者对克鲁捷茨基的研究是如此感兴趣，以至把丛书的整个第二卷都用来刊登克鲁捷茨基的四篇论文了。

尽管克鲁捷茨基的这些短文和研究报告的译文都是有用的，但这些译文所反映的只不过是他研究工作的部分观点。1968年，本书的俄文原版本出版了。它包括了克鲁捷茨基十二年来理论研究和实验研究的完整报告，这是苏联第一本关于中小学生数学能力的心理学专著。本书经苏联教育科学院心理研究所科学委员会批准在莫斯科出版，由国立莫斯科大学数学教授、教育科学院副院长A. I. 马库希维奇，物理学与数学科学博士V. I. 勒维因以及教育科学博士E. N. 卡班诺娃-梅勒审阅。全书有431页，初版印数

为 25000 本。

该书的现译本是由芝加哥大学近期东欧中小学和大学数学文献研究部提供的。我们向精心翻译并协助编辑工作的琼恩·泰勒女士深致谢忱。向帮助核对参考文献的剑桥大学、英国博物馆、芝加哥大学和哥伦比亚大学师范学院图书馆的馆员们致谢。我们还向芝加哥大学的查尔曼·乌习斯金致谢，他对稿本提出了不少建议。向阅读并打印稿本的卡伦·基尔帕特里克以及给予行政和编辑上支持的哈维·爱德伯格致谢。最后，我们得向斯坦福大学原中小学数学研究小组主任 E. G. 贝格尔致谢，感谢他发起这个协作计划。

杰尔米·基尔帕特里克
艾扎克·维斯佐普

俄文原版序言

本书反映了我们从1955年以来，在理论上和实验上对中小学生数学能力研究的主要成果。我们必须强调，我们的研究是严格的心理学的研究，因此不论现在或将来，我们都不想剖析当前的数学教学方法或是创造一种新的教学方法。我们深信这不是心理学家的事，而是从事研究工作的数学家、教育工作者或教学法专家的事，也就是说，在相应领域里的那些有资格的学者的事。心理学家可以而且也应当在某些特定的问题上和他们协作，提供必要的材料并进行心理学的研究。

我们打算今后在以下一些方面继续我们的研究：

1. 在同数学家的密切合作中，研究发展到最高程度的数学创造力（一个从事研究工作的数学家的能力）的结构。

2. 试图协同生理学家共同探索数学能力的生理实质。

3. 同教师和教学法专家一道，在先弄清现行的数学教学系统在实际形成学生的数学思维或数学能力上能达到什么程度的情况下，研究在学龄期形成和发展数学能力的最佳途径。

在写作本书时，我们面临着很大的困难，其中主要是，在苏联的文献中缺乏有关能力的心理学、教育学的科学研究。但是前几年（大约是1959年以来），人们对这个问题的兴趣显著增长，而且已经出版了几本有价值的理论和实验的著作。不过，多方面发展正在学习和成长中的青少年的能力在当前是非常重要的，如果考虑到这一点，那么这些著作还是非常不够的。

我们希望本书会对心理学家、数学教师、数学教学法专家、研究生以及大专院校相应系科的学生有所帮助。我们决不认为本书是没有缺点的。我们将愉快地接受并悉心研究读者们的一切评论、建议和意见。

心理学家 A. A. 斯米尔诺夫、B. M. 捷普洛夫和 P. A. 舍瓦列夫等教授，教育科学(心理学)博士 E. N. 卡班诺娃-梅勒和数学家 A. I. 马库希维奇、V. I. 勒维因等教授，以及 I. K. 安德罗诺夫、E. B. 邓金等教授，由于他们对本书的关心，并提出了许多宝贵的建议，作者谨向他们表示衷心的感谢。

英译本编者前言

近几十年间，美国和其他西方国家的教育心理学家，在他们的研究工作中取得了很大的进展。这些进展，至少部分地可归因于他们采用了在心理学和其他科学中已被证明为有用的技术。当前西方为进行和报告研究项目而形成的一些标准是一种显著的成就，其价值不容轻视。但是，研究技术的进展并不是无价之宝。有些从事教育研究的学者已在怀疑，在尊崇实验室实验的情况下，他们是不是不会忽略一些重要的教育问题①。

试看数学能力的研究。新近几乎每一个关于这一课题的研究项目，大体上都使用同样的方式。研究者拼凑一套假定与数学能力有某种关系的测验题，以中小学生为样本进行一些测试，获得每一个儿童对各种测验的分数。然后用因素分析的统计技术，从那些测验分数之间的相关情况中去决定这些测验是怎样联系着的。那些在分数上高度相关的测验可推定是测量同样的潜在能力；那些在分数上不相关的测验则是测量不同的能力。这种方法的目的是用较少的因素去说明测验的分数，其中每种因素各代表一种不同的能力。不同的因素分析方法会得出不同的能力结构。但是在各种情况下，研究者必然会碰到这个任务，就是要从凑拢起来产生因素的那些测验中，去推测共同的东西，以辨识各种能力。

① 比如，参见 L. S. 休尔曼，"教育研究的重建"（"Reconstruction of Educational Research"），《教育研究评论》（Review of Educational Research），40，1970：371～396。

因素分析在西方国家的能力研究中是一种爱用的方法。尽管在"应该如何使用它"的问题上有不少争论，但因素分析能从一组测验分数中抽出有价值的信息，这一作用是没有人否认的①。不过那正是问题之所在：测验为什么记分数？为什么要假定测验分数是数学能力的唯一的(甚至是最好的)信息来源？因素分析的有效性(更不必说在几秒钟里完成所规定的计算任务的计算器了)不会使研究者看不到别的研究方法吗？人们可能是需要通过仔细阅读不同学派的研究者的著作，来对自己的研究倾向获得某些新的看法。

1936年苏联在党中央委员会禁止使用心理测验后，对能力个别差异的研究就停止了。尽管一些成绩测验继续被用来衡量学校工作的进展情况，但其他各种测验，教育工作者和科研人员就不准使用了。苏联的观点认为，测验只能提供反映当前学习状况的一种指标，它对学生的潜在的成就水平，或是学生在回答测验项目时的那些过程，并没有给出什么信息。测验会助长学生贴标签的倾向，并会对学生在学校里应学些什么、怎样学习设立框框。它妨碍对有效的教学程序的研究。

苏联教育心理学家为了响应禁用智力测验的号召，便采用别的研究方法。为了弄清某个学生的心理过程，教育心理学家就向他提出问题，要他在解题时说出他的想法。如果学生不能解答这道题，他们就给他暗示，或是换一道题目。为了防止学生在谈话中神经紧张，他们就反复和他谈话，以至谈上几个月，直到他习惯起来。有时候也让这个学生的老师充当谈话者。在研究概念学习时，他们会整学期同教师一起工作，设计一系列的课，应用个别进行的成绩测验、并辅以谈话法去探索学习过程。在出了一大批有

① 作为因素分析及其在能力研究中的作用的导论，可参阅P. E. 阜农《人的能力的结构》(The Structure of Human Abilities)，第二版，伦敦：梅逊，1961年。

关各科学习的研究成果后①，这些方法在几年内得到了发展与提炼。但是，儿童是怎样想的，怎样学的，其中的差异却很少用这些方法去加以探索。

能力上的个别差异的研究，在苏联是近二十年间才逐渐重新兴起的。虽然同这一运动有关的人有好几位，但苏联教育科学院心理研究所教育心理学部能力研究室主任克鲁捷茨基显然是一位带头人。克鲁捷茨基研究的主要兴趣是数学能力的结构及其形成，而且他还倡导对天才儿童作个案研究。他在设计给学生做的各种各样的数学作业上是特别具有独创性的。

本书是克鲁捷茨基从1955年起至1966年止的研究情况的报告。这个计划的目的是探究数学能力的性质和结构；他后来研究的课题是能力在教学中增长和发展的一些问题。

研究数学能力就是假定有些学生必然比另一些学生更有能力，这是违犯苏联的准则的；为了减轻来自这方面的批评，克鲁捷茨基的这本专著开宗明义，就令人信服地指出，每个学生在他所致力的某些方面，会具有潜在的能力，但是没有理由假定，这种潜在的能力在各个方面是相等的，也没有理由说，教学不能改变人的各种能力的一些侧面。他责备非共产主义（资产阶级）的心理学家假定各种能力都是遗传的、相对地固定的、并且是能用各种测验来测量的。由于美国和英国的教育工作者信赖客观的测验，克鲁捷茨基对他们特别粗暴苛刻，指出那些测验并不是学生潜在能力的准确的指示器，因而不能用它们来决定学生该受何种教育。克鲁捷茨基谴责那些依赖测验的研究者"盲目相信测验结果的数学处理，对过程本身的研究完全缺乏兴趣"。他说明，一道数学题目如何可从不同的途径获得同样的解法，从而断言，人们通过分析测验的结

① N. A. 梅钦斯卡娅，"苏联教学心理学五十年"，载《苏联数学教学心理学研究》，第一卷，《数学概念的学习》，J. 基尔帕特里克和 I. 维斯佐普编，第5～27页（斯坦福，加州：中小学数学研究小组，1969）。

果，对于思维发现不了多少东西。再则，照克鲁捷茨基看来，在教室里强调结果，不重视过程，就会使学生对数学形成一个错误的观念。

由于克鲁捷茨基谴责外国心理学家（除一些例外）关于能力的决定论观点和对测验的依赖，赞扬俄国心理学家（也有一些例外）关于这个论题的明智的（尽管是不完备的）处理方法，因而他对研究文献的评论，非常偏向他力图证明的东西。不过，第二、三章对苏联、欧洲和美国的关于数学能力的文献的评述，比起以往所作的评述来毫无疑义是最广博的，而且它本身对数学教育是一个巨大的贡献。

第四章中，克鲁捷茨基提出了他的关于能力性质的看法。他认为先天的、生物学的素质对以后的能力发展是必需的，但并不是充分的，他还认为能力只有通过活动才能形成和发展。他把能力定义为使一个人迅速、成功地完成某一任务的一种个人特性，而不是一种习惯或技能，后面这些是一个人活动的特征。

克鲁捷茨基在第五章中叙述了他在研究中所用的各种方法。本书的大部分资料，都是他和他的助手们在给大约两百名学生解各种各样的题目系列时进行个别谈话而获得的。他们要求学生在解题时把所想的说出来，遇有必要就给予暗示。学生的年龄不同，从6岁至17岁。这些学生是根据他们的教师的初步分类选出来的，他们被分成数学上很有能力、较有能力、能力中等或能力较低这几种情况。克鲁捷茨基主要是通过比较不同年龄、不同学生的能力，来研究能力的发展的，但是对有些学生组，则是通过几年来对他们进行的各种纵向比较来研究的。这些补充性的研究包括上一些特殊课，进行一些课堂观察和家庭访问。

克鲁捷茨基编制了一些有关数学能力性质的问卷，询问数学教师和数学家。他分析了著名数学家和物理学家的传记，弄清他们数学才能的发生和特征。他分析了中小学的数学课程，研究其中

包含着的能力。他收集了莫斯科一些中学上千名学生的大量资料，比较他们在数学上和其他学科上的进展情况。同时他对九名有特殊数学天赋的儿童进行了个案研究，不过这些儿童并不是他主要研究的方面，他对这些儿童进行了好几年的观察和谈话，研究他们在数学上发展的特点。他还仔细查阅了以往文献中记载的有关数学天才儿童的一些个案研究。

克鲁捷茨基的研究不仅以所用方法的多样化而著名，而且也因他所设计的用来与学生谈话的作业题目的丰富多彩而著名。第八章列举了他所使用的全套二十六个系列的题目。每一系列都是一组类型相同而难度不同的题目，都是设计出来测查他在第六章中所假设的一种或几种数学能力的。类型包括证明题目，不切实际的题目，缺少信息的题目，数学诡辩，以及关于视觉化的题目。这套题目对教师和研究者来说是一个令人难忘的资源。这些题目可以直接应用，也可以用来再拟一些同一类型的题目。

在克鲁捷茨基看来，解一道数学题有三个基本的心理活动阶段：收集解题所需的信息，对信息进行加工从而得出解法，以及保持这个解法的信息。其中每一阶段都有一种或几种能力与之相应。数学上有特殊能力的学生要比能力较低的学生更能立刻掌握题目的实质。有能力的学生能迅速、容易地概括数学材料；他们趋向跳过逻辑论证的中间步骤，容易转到另外一种解题方法上去，并且在可能的情况下力求一种"优美"的解法；他们能够在必要时顺利地把自己的思路逆推回去。最后，有能力的学生趋向于记得题目中的各种关系和解法的本质，而能力较低的学生甚至只能回忆起题目的一些特殊细节。

克鲁捷茨基坚决主张有一种象"数学气质"的东西，这是一种用数学语言来解释世界的倾向，这种倾向在有特殊数学天赋的学生身上可以明显地看到，他认为这类素质可能是在出生时就具有的。克鲁捷茨基分辨出三种基本的数学气质类型：分析型（这一类

型的人倾向于用语言-逻辑的词语去思考),几何型(这一类型的人惯于用视觉-形象的词语去思考),和混合型(这一类型的人综合了上述两类特征)。

克鲁捷茨基在分析了前面提到的全部资料后作出这样的表述,就是那些已被识别出来的特殊能力与第六章中所假设的没有多大不同。但是,主要的资料是从谈话中取得的,包括学生完成数学作业的质上与量上的分数。因为苏联的教育研究宁愿沿用原始的资料分析方法,因而克鲁捷茨基应用因素分析是出乎意外的。不过他是在一种人为的、有选择的情况下使用因素分析的。克鲁捷茨基分析了假定为测量同一种能力的一组测验的相关性,然后利用一个单一的共同因素的存在,来论证一种能力已被分离出来了。他于是继续分析另一组测验,并且重复这一论证。问题是,他是用不同的方法来描述每组测验中所共有的普遍因素的。他从来没有通过把所有测验都包括在同一种分析里的办法来证明,他所设计的那些组是和不同的因素相联系的。这就有可能是,比如说,这些测验如此高度地相关着,以致于同一种因素(同一种普遍的心理能力)构成了全部测验的基础。这种可能性似乎是很少的,但克鲁捷茨基的分析却并没有排除这种情况。

读者会觉察到,苏联的研究报告并不符合西方的彻底性和客观性。对克鲁捷茨基应用因素分析,应当同对他对文献的评述以及他的关于研究程序和结果的零星报告一样看待,就是说,他并不是使那些假设去经受经验性测验的严格检验,而是用他的研究和分析的结果去维护他正要证明的东西——一种建立在他的先入之见、他的直觉、以及在某种程度上是经验材料的基础上的东西。

那么,克鲁捷茨基的研究报告价值何在呢?我们说,这一著作在数学教育上的影响,可以与皮亚杰的著作所已经产生的影响相媲美,这是并不夸大的。正象皮亚杰的研究已为教师和研究者所适应和采用一样,克鲁捷茨基的这些研究(它们与中小学数学课程

的联系更为紧密），会被同样地适应和采用。皮亚杰的智力发展的思想，已使数学教育工作者认识到不同年龄的儿童在思维上的差异。同样，克鲁捷茨基的关于数学能力结构的思想，会使他们认识到能力的不同成分以及它们可以怎样在一起发生作用。而且，正象皮亚杰已经在什么是恰当的研究方法这个问题上扩大了我们的观念一样，克鲁捷茨基将会更进一步地扩大这种观念。

过去二十年中，美国中小学数学课程的改革，没有伴随着在数学测验上进行相应的改革。今天正在应用的大多数标准化了的数学测验，充其量只是作过少量的修改，教师们还在徒劳地寻找测量新课程所要求发展的"高级认知能力"的方法。我们没有努力改进测验，没有长远的研究规划，也没有可以使数学教育工作者理解这些高级能力可能是什么的基础理论，对怎样才能发展这些能力放任不管。本书中的研究报告可以使教育工作者和研究人员不再把测验分数信奉为一种能力的指示器，同时还能促使探索测量数学思维过程的更有创造性的方法。

杰尔米·基尔帕特里克
艾扎克·维斯佐普

目 录

中译者序言 ……i

英译本编者序言 ……ii

俄文原版序言 ……iv

英译本编者前言 ……vi

1 研究的问题和目的

1 现代苏联科学和教育中数学能力问题在理论和实践上的重要性……3

2 关于数学能力方面的外国心理学文献……9

3 苏联革命前后关于数学能力方面的心理学文献……59

4 研究的问题和目的……75

2 研究的方法和组织

5 一般方法和组织……103

6 关于数学能力成分的假设……107

7 实验研究的方法……113

8 研究中小学生数学能力的实验题目系统……124

9 实验研究的组织……211

3 中小学生数学能力结构的分析

引言……219

10 关于中小学生数学能力成分的非实验性资料的分析……221

11 几童中具有数学天赋的个案分析 ……231
12 有数学能力的学生信息收集(对题目的最初定向)的特点……273
13 有数学能力的学生在解题过程中信息加工的特点 ……289
14 有数学能力的学生信息保持(数学材料)的特点 ……362
15 中小学生数学能力结构中的一些特殊问题 ……370
16 数学能力各成分上类型、年龄和性别的差异 ……384
17 数学能力和个性 ……423
18 关于数学能力结构的一般问题 ……431
参考文献 ……448
主题索引 ……493



研究的问题和目的

1 现代苏联科学和教育中数学能力问题在理论和实践上的重要性

共产主义社会中人的个性的全面、和谐的发展，需要对人从事某些类型的活动的能力有一个详尽的科学论述。对这一问题的苦心钻研具有理论和实践两方面的价值。苏联心理学关于能力的理论，在分析形成和发展各种特殊类型的活动能力的结构与条件这方面，是非常贫乏的。虽然在过去十年中，苏联心理学界对这一问题的兴趣已经明显提高，但上述情况本质上没有改变。在资产阶级心理学中，这个问题没有得到正确的解决，因为在这个问题上大多数学者对能力的真正实质有一种错误的理解。因此，解决能力问题对我国仍然具有巨大的实践价值。恰当的人事安排应使每一个人的潜能得到最大限度的发挥，而要做到这一点，我们必须了解如何去发现和发展这些潜能。

能力问题是个别差异问题。假如每一个人对任何方面的发展和从事任何一种活动都具有相同的潜能，那么能力问题的讨论也就毫无意义。当我们论及能力时，我们就先假设人们之间存在着某些个别差异。没有一个人对任何事情都是无能的。每一个人总有善于做某件事情的能力，这是苏联心理学基本原则之一，但人们对同一件事所具有的能力在程度上有所不同。每一个人对某些类型的活动能力较强，而对另一些类型活动的能力较差。认为

某个人在某一方面是笨拙的(不仅可在音乐、舞蹈或美术等方面，而且同样也可在数学方面)，并不就是说他一般地是低能的或毫无才能的。这不过是说他的能力可能在其他方面。能力并不是天生的；能力是随着生活并通过工作而发展起来的。但不能因此就认为没有必要去发现能力和重视能力。

所有这些论述都适用于学校的教学实践。苏联心理学家一致认为，所有儿童都是可以教育的；每一个正常的心理健康的学生都能够接受中学教育，都能够掌握学校课程所规定的教材；并且教师务必注意使所有的学生都能这样做到。正如莫斯科的教学法专家A. A. 巴达尼伊所说："不可能在各门学科中找到这样一个单元，这个单元将被证明是学生(能力发展水平低的学生——克鲁捷茨基注)所不能掌握的。我们也没有遇到过一个能力水平如此低的学生，以致他不能在普通学校完成学业(指在普通学校中接受教育的正常儿童)"(63，第6～7页)①。著名数学家A. N. 柯尔莫戈罗夫院士提出权威性的证词："学习和理解数学需要特殊才能这一说法常常是言过其实的。……如果有好的指导或好的教科书，那么只需要普通中等水平的能力，就足以掌握中学所教的数学"(180，第8～9页)。

但决不能因此说，对所有学生都能同样容易地进行教学。在这里"劳动投资"的分量是完全不相等的。在教学方法组织得非常好的情况下，一个学生在某一方面的进步会比其他方面来得顺利和迅速；而在某一特定的方面，有些学生会显示出比别的学生更有成就。毫无疑问，这成就在很大程度上不仅取决于学生的兴趣和爱好，而且也同样取决于他们的能力。某个学生在较短的时间内并未付出特别的努力和劳动就获得极高的成就和巨大的进步；而另一个人，虽然顽强地尽了最大的努力也达不到这一水平，或者很难达到这一水平。在这个意义上，我们确实可以说有些学生的能

① 括号内的数字63，表示请参看书末参考文献第63条所列的书目，下同。

力比较高或比较低，而且完全可以用这些术语来描述学生在学校活动中的个别差异。两个学生都有潜能，并都能掌握中学的课程，但他们的"潜能"是有差异的。

当然，"潜能"并不是恒定的或者是不可改变的。教师不能满足于下面这种见解，即认为儿童们的不同成绩（比如说数学成绩）是他们能力水平的反映。能力并不是预先注定面一成不变的东西；能力是通过教学、实践和掌握一项活动而形成和发展的。因此，我们说有必要形成、发展、培养和促进儿童的能力，同时却不能精确地预计发展所能达到的程度。但是这些情况并不排除需要重视并进而研究"潜能"，以求了解这些"潜能"的性质和设计发展这些"潜能"的方法。最近巴达尼伊论及当前流行的"一种把学生进步慢完全无条件地归咎于教师的奇怪趋向"（63，第3页）。一些心理学家和教育家今天还是这样说，"没有不好的学生，只有不高明的教师"，因而否认儿童个人特有的心理品质会影响教学的成绩。对这些教育家和心理学家来说实际上不存在能力问题。他们深信，如果我们承认能力在教学中的作用，我们就得承认一定数量的儿童是注定要失败的。在他们看来，教学的成就和极高水平的知识、能力和技能仅仅取决于完善的教学方法，也就是教师的技巧。当然，这些因素的确起着巨大的作用，但要人相信一切都决定于教师的技巧是不可能的。D. N. 波果亚夫连斯基和 N. A. 梅钦斯卡娅在讨论学生处于同样的教学条件下而掌握知识有差异这种情况时，曾指出必须从学生本身的品质中去找解释，这是完全正确的（44，第250页）。大量从事实践的教师（特别是被询问到这一问题的数学教师）会举出有份量的理由，表明中小学生中存在着影响教学成绩的个别心理差异。

当然，一个人学习的成绩，掌握知识、技能和培养习惯的成绩，并不仅仅决定于个人的能力。很多苏联心理学家和教育家的研究证明：教学内容和方法，以及学生对学科的态度都是重要的。因

此，教学的成功与失败，如果孤立地加以考察，其本身不能作为判断学生能力性质的基础。特别是，学生进步慢并非必然是能力低的指标。正如 S. L. 鲁宾斯坦所说："不同学生所取得的同样的进步可能是不同能力的标志，而那些具有相同能力的学生，又可能取得不同的进步"(354，第 544 页)。但是，在其他条件相同的情况下，每当同样的练习、同样的教学方法产生了根本不同的结果时，这些不同的结果就可以用学生能力的差异来进行解释。

因而，正是由于有些学生在某一方面显得能力低，教师就不免尽可能地去培养他们这方面的能力。但同时关于每一个学生，还有另外一个问题，即是要发现他最有潜能的方面，并千方百计去发展他这一方面的能力。这样，就可以使在某一方面最有潜能、最有才能的学生和超常的青年易于得到充分的发展。

认为特别重视培养有天赋的儿童与全面发展每个儿童的能力这一目标相矛盾，这是一种最大的误解。应该相信，通过理想的教学(我们正在为此努力)，会使每个学生达到同样的(很高的)知识水平，会使每个人的能力获得高度发展，因此，会使不同的人的能力实际上相等。

但是，即使有完善的教学方法，就能力水平不同这一意义来说，个别差异终究是不会消失的。每个人都会各有所能，不过在这方面依然是不平等的。在任何特定的知识领域中，有些人的能力比较强，而另一些人的能力则较弱。

全面发展学生能力的目标，不仅不与发掘和发展每个学生的基本的或主要的(即最显著的)能力的目标相矛盾，而且前者要以后者为先决条件。教师必须力求使每个学生的全部能力发展到他可能达到的最高程度，而更重要的是要发展学生自己的主要能力，作为他确定将来职业方向的基础。因此，无论是要培养能力，还是要选择有能力的人，都不会而且不可能会使人顾此失彼，进退两

难。这两方面都是必要的。

最近很多国家对数学教育这个问题的兴趣日益增长。这种增长与数学在人类社会中的重要性的日益增长有关。在苏联共产党纲领中，数学在党特别重视加以发展的科学的各主要分支中被列为首要学科(13, 第 266 页)。数学的不断发展是一系列重要知识领域的进展和发挥更大作用所必需的。正如各方面权威所强调的(385, 68, 93)，当前科学发展的特征在于它们有一种更为数学化的趋势，这一情形不仅出现在物理学、天文学和化学方面，而且出现在这样一些学科，如现代生物学、考古学、医学、气象学、经济学、规划学、语言学等等方面。数学方法和数学的思维方式正到处渗透，难以找到一个与数学无关的知识领域。在人类所致力的各个领域中，数学将得到日益广泛的应用。正如柯尔莫戈罗夫所指出的，数学可应用的领域原则上是无限的(178)。

因此，我们国家对数学家的需要与年俱增。近年来，这种需要显然未能得到满足；"数学家日益缺乏"。(参见柯尔莫戈罗夫的著作，79 和 180 第 4～5 页；格涅坚科的著作，93，第 3 页。)

众所周知，对某一门科学显示出才能的人们，会对那个领域的发展作出重要的贡献。所有这些使苏联学校面临着最大限度地发展学生的数学能力、爱好和兴趣这一任务，面临着提高学生数学修养水平(学生的数学发展水平)这一目标。同时，我们的学校必须特别注意那些显示出有高度数学能力的学生，并要促进那些特别爱好学习数学的学生在数学方面的发展。正如 S. L. 索波列夫院士所说，由于"从事研究工作的数学家的黄金时代"开始于 22～24 岁之间(385)，因面数学才能必须在中小学里从儿童中及早发现。

有些人认为：我们应该着手研究所有学生在数学上最大限度发展的可能性，面不必去选择有数学能力的学生。可是这两方面始终是互相补充的，因为尽管采用了最完善的教学方法，数学能力

的个别差异总会出现，有些人的数学能力可能比较强，而另一些人则较弱。在这一方面将永远不会达到平等。因此，数学教师要对发展所有学生的数学能力，对培养他们的数学兴趣和爱好，进行系统的工作；同时必须对那些显示出数学能力在中等水平以上的学生给予特殊的注意，为他们组织专门的活动，以进一步发展他们的数学能力。

2 关于数学能力方面的外国心理学文献

国外对能力心理学研究的进展

许多外国著作对能力和天资问题作了专门研究。可是多数著作并不具有真正的科学性质，其中充斥着严重违反辩证唯物主义心理学观点的倾向。许多著作是直接为资本主义社会中阶级、民族和种族之间的不平等而辩护的。

基本问题是在能力形成和发展上，先天遗传和后天获得之间的关系问题。在这个基本问题上，关于能力的许多外国理论，其反动性是极为明显的。

大多数资产阶级心理学家承认能力的先天遗传生物学本性。在他们看来，发展能力的过程就是在一定社会条件下，实现发展有机体生物学遗传特性的过程。每个人能力的发展水平是由这些先天特性命中注定的，是由他的"基因频率水平"预先决定的。曾经有一个时期，一位杰出的外国心理学代表、算术和代数教学心理学专家、美国的心理学家 E. L. 桑代克坦率地论及学生的"本能"和他们的"先天倾向"(他把那些积极思维能力，推理能力和求知欲都归属于此)。他也提到环境和教养的影响，但他却把它们放在次要的、从属的地位。他说："自然赋予每个人一定的资本；教育必须了解它，并最充分地促使其实现"(502，第 33 页)。当然，"自然资本"对发展设置了界限："(有些学生不能超过某种水平)尽管他们花费

了大量的时间。他们就是解不出那些稍具复杂性和抽象性的问题，就好象他们不能跳过五英尺高的栅栏或举起五百镑的重量一样”(501，第142页)。“有些学生不论教学多么差劲，学习仍然很好。而有些学生不论教学怎样出色，学习仍是很差”(502，第33页)。桑代克的这些观点，早在1936年就受到A.A.斯米尔诺夫的严厉批评(383)。人们可能认为，这种观点现在只有历史的意义了，其实不然。在第二次大战后美国出版的一本心理学百科全书中，“个别差异”一条是这样写的：“人不是生来就平等的，提供任何数量的训练或任何的环境也不能造成他们的平等。”这样就必然得出人们不仅在心智上而且在社会上也是不平等的结论(563a，第251页)。1963年出版的一本德文书中写道：“天才由先天的和自发的各种因素所决定，它对于在各个领域中心理的和精神运动的表现，是一种潜在的创造性素质”(巴姆加顿，524)。

确实，近年来只有少数资产阶级心理学家公开发表这种显然是无科学根据和本质上反动的观点。他们中的大多数，特别是由于认识到教养和教育的重要作用，也就是环境的作用，正开始采取一种不同性质的保留观点。可是在这种观点中，充其量也不过是两个独立的、分别发生影响的因素，在同时或平行地起着影响而已。这两个因素就是先天的生物学特性和社会环境，或者说是在遗传因素明显占优势下环境的社会影响。遗传规定着发展的限度，这是任何情况下都不能逾越的。

当然，这种对整个资产阶级心理学的批评，是不能用在每一位研究者身上的。例如R.卡彭特，在一本论述创造能力的性质和本质的著作(547)中说，所有的学生都具有某一方面的创造力。只是由于教师关心不够，才使他们的发展受到阻碍。这些能力在每一个儿童身上都可能得到发展(虽然并不是无限制的)。教师的责任就是要发现每一个儿童身上最能充分发挥其创造力的方面。但是，我们必须重复指出，这种观点并不是资产阶级心理学的代表观点。

一位德意志民主共和国的马克思主义心理学家罗申费尔德，在他的一篇论文(682)中正确地写道："在资产阶级心理学中，把一些人处于优越地位而其他的人处于低一等地位，解释成是由先天遗传和不变的天赋潜能所决定，而不是由于社会历史原因所造成。这种解释没有考虑到知识的最高水平乃是社会上的特权地位的结果。"罗申费尔德引用了资产阶级心理学家 H. 渥尔塔的研究，渥尔塔在调查了 10000 个人后，发现其中上层社会有 94.6% 的儿童属于有天资的(682)①。

在最近出版的一些比较主要的外国著作中，可以见到类似的意见。一本重要著作《差异心理学》的作者美国心理学家 A. 安纳斯塔西强调："因为智力较高的父母往往生有智力较高的子女，因而上层社会的儿童总会更聪明一些"(514, 第 521 页)。她甚至提到种族间的生物学上的不平等：人种在它们的"基因频率"上是有差别的(514, 第 569 页)。

为了"最大限度地利用人类资源"(D. A. 高斯林, 585, 第 166 页)，在资本主义国家(特别在美国和英国)，测验作为一种研究心理禀赋的方法早已广泛流行了。高斯林在他的一本重要的概论性著作《能力研究》中说："在过去五十年中，……测验已经逐渐稳固地构成美国文化的一个部分"(585, 第 20 页)。他引述了一种看法，认为："在苏联和美国争夺世界领导权中，……美国的测验和指导技术可能成为（帮助我们超过苏联的）'秘密武器'"(585, 第 191 页)。

40 多年前，W. 斯腾曾指出，在那时"(做)少量不同形式的测验都有困难"(506, 第 67 页)。从这以后，测验的数目就显著地增加了。近年来，有大量的论文发表，并涌现出多得数不清的各种测

① 克鲁捷茨基的引文弄错了，罗申费尔德所引用的 10000 个人的数字是摘自另一个研究，而百分比是指能升入中学(Oberschulfahig)的学生，而不是指有天赋的。——英译本编者注。

验。尽管测验这种方法遭到某些立场比较进步的资产阶级学者们的尖锐批评，但外国的、尤其是美国和英国的心理学杂志和教育杂志，所登载的关于智力测验、特殊能力测验和成就测验的文章，关于测验结果的比较，对于企图寻找预测未来成就的方法的分析，以及关于能力诊断和预测方法的文章，仍是使人眼花缭乱。据高斯林指出，"关于测验用在多大范围的情报虽然不多，但在美国，每年在中小学、大学、企业和政府机构直到军事机构中，看来有一亿五千万到二亿五千万次各种各样的标准化能力测验在进行着"，这些测验用来评价并选择最合适的求职者(585，第13和第176页)。

测验("测验"这一术语在俄语里没有一个确切的同义词)大约始于1905年，基于A. 比奈关于人的心理发展可能加以测量和量度，以及可能按人的心理禀赋程度来分配(分等)这种思想，测验逐渐成为一种诊断预测的工具，作为"一种迅速决定个人价值的简单工具"(斯腾，506，第66页)。

必须指出，就连那些坦率的测验拥护者，也从一开始就看到了测验的缺点。他们说："决不能过高地评价心理测验，仿佛它们是测量心智的完美无缺的会自动起作用的方法。它们充其量不过是一种最起码的心理描述，这种描述使我们对那些没有其他任何方面可供了解的人们，有了一个初步印象，它们也可用来补充和提供可资比较的和客观分等的其他观察，如心理学的、教育学的、医学的观察(斯腾，507，第12页)。有人甚至还提到限制测验成为心理禀赋指标的那些因素，比如受试者的疾病，神经过敏，以往的训练和练习的影响，受试者可能对测验缺乏兴趣以及疲劳等(W. 默德和H. 皮奥尔柯斯基，491，第8～19页)。

但是，在对测验的无限赞美声中，测验被看作是一种评定天赋水平的"易行的和廉价的"方法，是一种"才能的指标"。因而上述疑惑很快就消失在这种背景中了(J. L. 霍兰德和A. W. 阿斯丁，610)。斯腾试图使他的读者相信，测验所评定的等级比教师要观

察几个月才能评定的等级更为精确。O. 伯特认为测验提供的情况甚至"比一个认真细致的教师经过多年观察所提供的情况还要准确"(506, 第 232 页)。

美国学校已广泛运用测验。据高斯林提供的资料，有百分之七十五到九十的学校，在幼儿园儿童到 12 岁儿童之间至少采用一次标准化测验(585, 第 57 页)。高斯林写道："标准化测验是用来提供某些必要的关于学生的信息，……在相对稳定的量表上比较他们"(585, 第 56 页)。测验的目的何在？他的回答是，为了在一个班级内或是在特殊组别中把学生编组，也为了选择有才能的儿童。显然，这是测验的主要目的，尽管他还指出了其他的目的，比如考查学生对学习新学科知识的准备情况，客观地衡量不同教学方法或课程内容的相对效果等等。能力测验是美国学校选择学生的依据。根据智力测验的分数，让儿童们接受不同种类的教育。

最有趣的是，高斯林间接地承认，尽管美国已普遍采用测验，但却没有人知道智商测验究竟在测量什么。严格地说，这种测验除了测量一个人在测验情境下完成规定任务的能力外，就不再有别的了。但是一个人在狭窄的测验情境下的表现，却被用来预示他在广阔无际的日常情境中的表现。高斯林试图挽回一下他的立场，于是他指出：一般说来，没有一个人对什么是能力有一个清晰的概念，能力不是别的，恰恰是一种"假设的结构"，而且不同的作者对智力的解释各不相同。

如果认为所有研究能力的资产阶级学者都只限于采用测验方法，那是错误的。能力分析可以有两种研究途径。除采用测验并用各种统计的和数学的方法处理结果外，也还有在不同深度上对天资的全面情况进行个案的分析，结合传记资料进行的分析，以及活动产品的分析。在这方面，应该指出 L. M. 特尔曼(709, 710), L. S. 霍林沃尔斯(611, 612)和 P. A. 威蒂(733, 735, 736, 737, 738, 739, 741, 742)等人的研究。

1963 年美国心理学家 T. E. 纽伦德(661)对儿童天资的研究作了一次评论性的考察。他十分正确地指出，在这项研究中缺少协作，以致于研究中意见分歧，在术语方面缺乏一致性和严密性，使用的研究方法和手段不可靠，数据的有效性成问题，在一些实例中不能提供可靠的心理学基础，而且叙述又欠准确。尽管如此，美国做过的有关有天赋的儿童的研究提供了有益的材料，虽然这些材料还有待于正确地解释。

让我们转到测验和使用测验的研究上来。个别测验作为揭示思维和能力心理特性的实验心理学任务，苏联心理学并不否认它的价值。同样，他们也不否认应用测验进行个别研究的价值。如果某一测验是明确的，简短扼要的，其中的严格标准化试验是关于特定的心理现象的，并可以用数值表示从而为数学处理创造条件的话，那么在原则上就没有根据去反对诸如测验的简略、它的标准化、企图用数量形式表示测验结果、或对资料作统计处理了(B. M. 捷普洛夫，405，第 4 页)。

个别数学测验是富有科学价值的，而且确能成为真正的科学实验的基础。例如，瑞士学者 I. 魏德林(727)在一项极为重要的关于数学能力的研究中，所应用的测验里，有一个测验是关于动态空间这一值得注意的概念的。内容如下：出示"不同方位的正六面体，它的每一面都有字母，看不见的各面上的字母是什么？(见图 1)

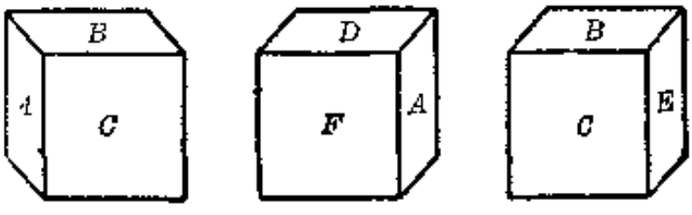


图 1

这些测验中的另一个测验也值得注意：某人乘气球飞行，他先上升 200 米，再朝西北方向飞行 1000 米，下降 100 米后再向东北

飞了500米，接着他转向东南飞行了1000米，然后下降100米，问气球离出发点多远？

虽然苏联心理学家对于个别测验，甚至对运用测验的个别研究持肯定意见，但是他们断然否认心理测量学是一门科学。这种观点的确定，并不仅仅是由于测验是为资产阶级的阶级目的服务的。正如捷普洛夫所评述的，任何方法都可以被各种阶级目的所利用。我们对测验的批评采用的是另一种方针。

捷普洛夫在一次关于测验的讲话中，明确表明了他对测验的基本的责难(408，第513页)。其要点如下：在多数情况下，测验所测定的心理本质是完全不清楚的。在资产阶级心理学中，测验并不能起到一个心理指示器的作用，也就是说，不能作为一定的心理特性的标志。例如，斯腾就认为，心理禀赋在其本质不被了解时也可以诊断出来(507，第5～6页)。默德和皮奥尔柯斯基的看法也完全一样(491，第39页)。英国一位主要的测验学家P. E. 阜农认为，只有外部表现才构成现实，因而一个人不必相信还有什么内部的东西能被研究(723)。资产阶级研究人员对测验感兴趣的只是这项测验和其他测验的相关程度是多少。

正如苏联心理学家经常指出的，绝大多数测验并非建立在牢固的科学基础之上，因而使测验研究的心理学意义含混不清(捷普洛夫405，第4～5页)。甚至许多资产阶级心理学家也认为，测验只具有准科学性质。我们的批评既针对研究性测验，也针对诊断性测验。测验研究的这种基本缺点完全是固有的，因为这是由测验研究的典型特性所决定的，关于这一点将在后面加以讨论。

一个真正的科学的心理学研究，应该使用那些心理学意义明确的技术。而且用这些技术所得到的指标，其心理学意义也应该是明确的。一个"未知事物"的指标，如果不是某种心理现象或心理特性的指示器，那么它本身就不可能引起研究者的兴趣。如果研究者所涉及的是上述这种指标的话，那么他就会致力于揭示这

些指标究竟指的是什么，揭示以所得指标作为指示器的那些特性的性质。心理测量学意味着除了属于测验本身的特定表现之外，原则上排斥任何其他事物的知识(进步的法国心理学家J. F. 列耐正是从这一点出发，对资产阶级心理学进行了尖锐的批评[637])。

替换研究对象是心理测量学的典型做法。对能力水平的研究变成了对已有知识和技能水平的研究。大多数测验都具有这样一种性质，即进行这些测验，不仅仅依赖于，并且是经常取决于受试者的知识、技能、经验和"可教性"。测验研究的基本缺点是仅用统计方法对能力进行研究和评价，也就是盲目崇拜对测验结果的数学处理，而对研究解题过程本身完全没有兴趣。

测验提供的仅仅是受试者完成某项任务的最后结果，而忽视了达到该结果的实际过程的本质。在这一点上，测验只指向了所研究现象的定量表现，而丝毫不能反映出它的质的特性。由于这些测验不能揭示通向特定结果的心理过程，因而它们对被探索的现象并不提供完整的画面。不对过程进行分析，就别指望能发现这些结果的心理本质，也别指望能描述出这些能力之间的质的区别。测验研究只能以数值表示的分数和年级绩点分数，为我们提供一个形式上的定量评价。

进步的美国心理学家E. 埃乌塞尔曼(597)写道，测验表明了哪些工作是儿童能做的，哪些是不能做的，但是测验并不揭露儿童是怎样对某个问题得出实际的解答的；测验也说不出其失败的原因。G. T. 布斯伟尔和L. 约翰也注意到，测验并没有使我们对于过程有所认识(543，第86～87页)。

最近，统计方法成了特别重要的形式，这和运用计算机处理团体测验的大量结果有关。这种团体测验通常只要求受试者回答选择题(是非型)，或者从许多答案中选择并划出正确的答案，等等。甚至受试者本人往往也被赋以一个数以志标记。而作为一个

人，研究者对他却毫无兴趣。

我们可以提出J.默莱1949年发表的关于几何能力的分析研究(659)，来说明上述测验研究的缺点。作者使用完全不顾解测验题过程的测验技术发现：顺利地掌握几何知识，和诸如推理能力、"把握"空间关系能力等等的特殊能力之间，是有相关性的。与此性质相同的研究还有：W. A. 肯尼迪等人新近关于有数学天赋的青年的研究(623)。E. 洛克的下述研究：科学上有天赋的青年的智能指数，与在课内、课外成就中得到的这些青年的个性特征之间，相关程度如何(640)。还有其他许多研究。但很难理解这些研究如何对理论或实践有所贡献。例如，肯尼迪的研究，他计算了130名算术有天赋的青年在不同种类测验中的分数，并研究了各种不同测验之间的相关性，发现某些相关是显著的，而另一些则不显著。研究者对解题过程毫不关心。可是如果研究一下130名有数学能力的青年的数学思维过程，将会给我们提供多么丰富的材料啊！

让我们考察几个例子，以便尽可能地说清楚我们的批评的实质。在大多数情况下，即使所得出的测验结果相同，产生这同一结果的心理过程也可能根本不同。而正是这种差异，才是判断受试者心理特性(即他的能力)的最有价值的材料。出于这种考虑，下面讨论几个我们研究中的实例：几个用不同心理手段达到相同结果的实例。

1．题目　三个朋友去图书馆的日期不同：第一个人每三天去一次，第二个人每四天去一次，第三个人每五天去一次。上一次他们在图书馆相遇的日子是某个星期二，问多少天后他们还会在图书馆相遇，那一天将是星期几？

解法　学生G. S.（七年级男生）迅速地从1起写下一连串连续数，并且很快地在一些数上划个记号，即每逢第三个数上画一条线，每逢第四个数上点一个点，每逢第五个数上打一个叉。他用机

械的方法得到了正确的答案：60天。他敏捷地算出那一天是星期六。答案正确，解题时间为2分2秒。

学生Yu. A.（七年级女生）想了一会儿，然后说："这是最小公倍数！"她不慌不忙地计算（3·4·5=60）。她将60除以7，得到8周余4天。她说："星期三，星期四，星期五，星期六，两个月后的星期六。"答案正确，解题时间为1分22秒。

两个学生所得结果相同，于是心理测量学家对两个学生的评价一样（至多再根据解题时间对上述评价作一些"修正"）。但他们的解题过程是在完全不同的水平上进行的。

2．题目　写下100，101，102，…。这三个小点表示什么？你写出的第一个数是什么？第一个数字是什么？第三个数字是什么？问：第十三个数字是什么？第二十一个数字是什么？

解法　学生A. K.（五年级男生）只是继续写下数列，简单地数出指定位置上的数。答案正确；时间为29秒。

学生S. B.（六年级男生）他大声地从1起读出（并扳手指）每个数字，直到所需要的结果。答案正确，时间为21秒。

学生R. V.（六年级女生）思考一会后，已经注意到每个数都有三个数字，她大声地三个三个数字地念，而不写出整个数列。答案正确，时间为24秒。

对这三个学生来说，结果是相同的；答案都正确。此外，解题时间也很接近。任何心理测量学家不得不把这三个学生看作是完全一样的。但是即使是对心理学外行的人也非常清楚，得出这相同结果的心理途径是多么不同啊！

为了表明一个学生独特的解题方法是何等重要，以及关于过程的分析对研究工作是多么有用，我们以三位学生解两道题目的答案作为一个实例（我们将对解答作简要的说明）。测验题目选自魏德林的研究（727）、由莫斯科一些学校中的学生解题。

题1　某数与360的和等于该数与4的积，求这个数。

题 2　母亲的年龄是女儿的三倍，十年后，她的年龄只有女儿年龄的二倍，问母亲几岁？

萨莎 R. 的解答(七年级)。迅速地、毫不犹豫地列出方程式并进行解答。

1.　$360+x=x\cdot 4$,

$360=3x$, $x=120$。

2.　x, $x+10$; $3x$, $3x+10$,

$3x+10=2(x+10)$,

$3x+10=2x+20$。

$x=10$。

拉娅 Ts. 的解答(七年级)。迅速地、毫不犹豫地作出图解：

360

÷

1.　□ = □□□□　□=120

2.　□+○

□□□+○

□□□○=□○□○　□=10 岁(女儿)

罗勃脱 N. 的解答(七年级)。不写什么，也不画什么。很快地说，对于(1)"加 360 和乘 4——因为都一样，所以 360 是三个相等的因素。这个数是 120。"(2) "母女年龄之差始终是女儿最初年龄的 2 倍，10 年后，这个最初年龄的 2 倍将等于女儿十年后的年龄，也就是说，10 年后女儿的年龄将是她现在年龄的 2 倍，所以女儿是 10 岁，母亲是 30 岁。

三个学生都解答了这两道题，三个人都被认为是有能力的学生，他们解题的时间也差不多。心理测量学家对这三个人的评价应当是完全相同的。但是即使只对过程作一些肤浅的分析，也会使我们看出，这些学生的心理过程有本质上的不同。

我们已经对上述问题作了过细的论述。这是因为，具体地指

出被测验忽略了的各种不同的可能性及其结论的错误性，是极为重要的。对上述各例，心理测量学家必然会得出这几个学生在数学能力的表现上是相等的结论。与此相反，对于过程的分析却告诉我们，前两个问题涉及到的是数学能力的不同水平，而后两个问题涉及到的是各种不同的数学能力。

测验研究的一个大缺点，在于它忽略了不少会以各种方式影响测验完成的因素，特别是各种个人因素（如动机，态度，兴趣，等等）。它没有考虑到一项任务对受试者具有的意义。比如自然的激动、焦虑以及神经过敏这些因素会影响一些儿童，这些儿意是把一次新奇的考试理解成会影响他今后命运的（这样的情况是可能发生的：例如英国学龄儿意到了11岁都要参加一种叫"11+"的考试①，这种考试决定着他们未来将能受到怎样的教育[B. 西蒙，499]）。在这种情况下，儿童可能会干出与正常情况下完全不同的结果来。

我们还应该指出测验的另一个缺点。测验常常是一次性的，因此不能反映出所研究现象的发展动态，特别是能力发展的实质。但是心理测验却完全符合心理测量学家下述见解（这种见解现在也动摇了）的精神：他们正在研究的是一种稳定的功能因素，即一个人的智力水平在他一生中总是保持不变（或者只有轻微变化）的，因而甚至在儿童的幼年时期就能预测出他的心理能力最后能达到什么程度（西蒙，499，第34页）。

我们毋需讨论那种对测验结果的完全不能允许的解释，也毋需讨论资产阶级教育学和心理学从测验得出的不可接受的结论。如果工人子弟测验分数较低，这决不表明他们的天赋较差。测验所测量的是一个人的准备状态，而生活条件并没有给工人子弟的

① 英国学校在儿童十一岁左右举行的甄别考试，目的在于确定他们是进"文法学校"、"技术中学"还是"现代中学"。内容包括语文、数学科目的成绩测验和"标准智力测验"。——中译者注。

能力有充分发挥的余地。对未来的预测尤其应该予以反对。难道心理测量学家有权作出预测的结论吗？即使上面讨论的所有缺点在测验中都不存在，也不可能得出这样的结论。一个人在某一时刻的情况并不是命中注定地决定了他的未来发展。即使测验能够预测，预测的结论也只能是近似的和暂时的。

在资本主义国家里，测验是为统治阶级利益服务的，是用来证明工人子弟智力水平低下而统治阶级儿童具有特殊天赋的。

通过上面的讨论，人们必然会同意捷普洛夫的观点，他认为，总的来说，测验还没有为心理的个别差异研究扫清道路，他说："在科学方面已经证明测验是没有效果的，在实践应用方面有时简直是十分有害的"(405，第5页)。

自从测验甚至在许多资产阶级心理学家的心目中也显得有失声誉以后，关于研究心理发展，智力，能力和天赋的其他方法最近被广泛地应用起来了。在这类研究中，美国进步心理学家E.埃乌塞尔曼(597)所进行的研究是颇有意思的，他的《论学前儿童的发展潜能》一书，最近已被译成俄文。埃乌塞尔曼提出了关于儿童心理的"教育的"或"结构的"分析原则，也就是对儿童心理发展特性的质的分析。J.L.霍兰德和A.W.阿斯汀也谈到了要仔细研究人格，人格发展史以及能力倾向特殊表现的必要性(610)。他们现在开始重视收集和分析专家们关于智力特性和个人特性的论述，因为在他们看来，这些特性构成了创造力的基础。

最近几十年中，所谓的"因素分析"在外国心理学中已广为传播。在国外，因素分析在研究智力和能力的结构中应用得特别广泛，出版了许多这类著作。因素分析的本质是从各种测验结果的相关中分析出一些共同的因素。因素分析与相关系数一起起作用，揭示出了测验分数之间的相互依赖性和相互联系。这些相互依赖性和相互联系并不是一眼可以看出的，而是以某种隐蔽的或潜在的形式存在着。许多心理学家认为，这就提供了一个机会，可

以确定在实现某项适当的活动中，有哪些共同的心理特性和品质参与其中。然而一本关于因素分析的重要著作的作者H. H. 哈曼(604)警告说，谁也不能指望因素分析会使我们发现各种因素背后的心理学范畴。

完成一次因素分析之后，一项困难的工作就是要从心理学上对所选择的各种因素进行解释。但并不是所有的心理学家都认为，用心理学概念去进行解释是可能的和必要的。L. L. 塞斯顿认为这是必不可少的，否则分析出来的各种因素就失去了任何意义，他说："解释分析出来的各种因素这一工作，显然是因素研究中最重要的部分"(717，第337页；727，第41～42页)。

英国学者(C. 伯特，P. E. 阜农，G. 汤姆生等人)已经考虑到对因素作心理学上解释是不可能的，因而审慎地不越出这些因素的严格的数学意义范围。他们强调各种因素都是数学的和统计学上的抽象观念，所反映的仅仅是一组测验结果之间的相关性，而不能等同于心理学概念(参看阜农，723，第9页和汤姆生，712，第257页)。正因为这个理由，英国学者们宁愿用符号表示因素，而塞斯顿则用众所周知的概念来说明这些因素。看来两种意见都有一部分是正确的。后者要求作心理学上的解释无疑是对的，否则，心理学家探究因素又有什么用处呢？但是前者也是正确的，这是因为只要我们把自己限制在因素研究上，就不可能有一个适当的、可靠的解释。

早在本世纪初，英国心理学家C. 斯比尔门提出了"智力功能普遍一致性"定律，根据这个定律，他主张构成任何一种智力测验作业基础的总是两个因素：一个是普遍因素，为所有测验所共有(好比心理的一种基本特性)，另一个是每个测验所特有的因素。虽然斯比尔门和他的追随者并不否认存在某些群因素(为某一群测验所共有)，但他们认为这些群因素的作用是微不足道的。斯比尔门的因素模型是从只存在着普遍因素(g)和特殊因素(s)而展开的，

因而称之为二因素论(690, 691, 693)。

在三十年代，美国心理学家塞斯顿提出了他的多因素分析学说。以后他在许多著作中发展了这一理论(716, 717, 718, 719, 720)。他的理论的出发点，一方面是否定有一个普遍因素的存在(比较确切地说，他并不是从否定普遍因素，而是从否认它对心理学家有任何意义出发的)，另一方面是承认有许多群因素的存在。

还有一种所谓因素层次结构学说(伯特，阜农)，这种理论承认斯比尔门的普遍因素 g，也承认有许多群因素(先分离出两个主要的群因素，即相当于"言语"和"实践"能力的群因素，这两种群因素再分为第二层群因素)，同时也承认有许多特殊因素(参阅安纳斯塔西，514，第 327～328 页)。

塞斯顿最初是分离出十二种群因素——一类"主要的心理能力"。这些能力包括：

1．S——空间的(对几何关系的操作，处理图形)。

2．P——知觉的(视知觉的速度和精确度)。

3．N——计算的或计数的(简单算术运算)。

4．V——言语的(言语类比，言语推理)。

5．W——言语的"流畅性"(词汇的丰富程度，字词联想的丰富性)。

6．M——联想记忆。

归纳因素和演绎因素也被分离了出来，有些因素未辨别出来，也没有给它们命名。后来又识别出一个 R 因素(推理能力)。

最后这种结构变得十分混杂，很多因素被证明是复杂的，又被分("分裂")成几个其他的因素，并出现了一些新的因素。1951 年在智力方面总计已经有近 20 个因素。当分离出来的因素超过 50 个时(按吉尔福特设想的一个模式，总数至少有 120 个因素，也许还要多得多)，这种把智力分解成无限多个因素的趋势就应加以控制了。但美国心理学家 L. G. 汉弗莱在 1962 年还写过关于不

断增长的意见，认为可以把测验编制成几乎无数个具体的方面，于是这些因素就可以无限制地分解或分裂(615)。因此，人们就有充分的理由注意这些有损于心理学内容的对统计形式的狂热，注意这种数学拜物教的表现。

部分外国心理学家在忽视过程的心理分析的同时，想把因素分析作为唯一的分析心理材料的方法，这种企图并未得到证实。我们对智能的心理结构不会有一个清楚的概念；充斥着各种因素分数的假设性结构是一些形式结构，还远不是一种真正的心理学理论，对实践也毫无裨益。

在评价外国心理学家以因素分析为基础的研究时，我们必须分清两个问题：一是作为一种对某项研究的数值结果进行处理的数学方法，因素分析本身的价值如何；二是如果一项研究单单依靠因素分析，并且完全忽视导致同一结果的各个过程之间的质的区别，那么这项研究的有效性如何。

当然，因素分析对心理学的巨大价值是毫无疑问的。它是一种高度精巧的数学工具，可以揭示隐藏在经验数据中的各种关系。对于以因素分析为基础的大多数外国研究工作，人们的态度应该有所不同。在我们看来，这些研究工作的最大缺点就是企图用因素分析去限制研究，企图不加任何分析地对分离出来的各种因素作心理学的解释，而不管受试者正在解实验题(测验)的思想过程。换句话说，就是企图把一个人限制在因素分析范围内去回答心理学问题，而不顾过程的心理内容。事实上，对一个因素的内容解释，其唯一基础就是要考查何种测验对该因素具有最大的影响。捷普洛夫正确地强调指出，对一个因素的内容解释，并不是由作为一种数学方法的因素分析直接得出的(410)。因素分析本身并不提供，也不可能提供出关于某种因素的心理学本质的理解。然而正是这种本质，才是心理学家的兴趣所在。我们应当努力使我们的科学成为客观的，反对随心所欲地作解释；但是在外国心理学家们

的因素研究中“仍然为解释和结论中的主观主义留下了相当大的余地”(V. D. 尼拜利青, 309, 第 45 页)。

因素分析必须与质的心理分析相结合，其理由如下。因素分析能够成功地用在材料的质上确有一致性的时候。例如，对于神经系统的拓扑特性的研究，因素分析就是有效的(捷普洛夫，尼拜利青)。但是在分析人的高级复杂的能力结构时，这种质的一致性就不能经常得到保证了。在解答标准题目时，难道所有受试者的解题方法在质上真的都是一致的吗？在测验研究中(国外把它作为因素分析的基础)，正如我们在前面力图说明的，尽管用完全不同的心理学手段可以得到相同的结果，但被处理材料的质的侧面却是不予考虑的。就是说，这些相同的结果可以具有完全不同的心理学本质。在这种情况下，对于过程的质的分析是必不可缺的。

因此，我们可得出如下的结论：只有当因素分析和对过程的心理分析相结合时，它才可以，而且应当用来分析复杂的心理现象的结构。在我们看来，在 A. A. 斯米尔诺夫指导下的 V. I. 莎莫克瓦洛娃所作的关于记忆不同种类材料中个别差异的分析研究(368a)，是这种结合的一个良好范例。

外国心理学中关于数学能力的研究

正如前述，有许多外国著作是专门研究有关能力心理学问题的；但是在这大量的著作中，只有少数著作是纯粹研究数学能力问题的。可是即使是为数不多，从整体来看，其研究数量还是相当可观的。

一些心理学学派的杰出代表，如 A. 比奈，E. L. 桑代克和 G. 雷韦兹以及杰出的数学家如 H. 庞加莱和 J. 阿达玛，对数学能力研究都作出了贡献。J. 皮亚杰作为当代主要心理学家之一，对数学能力理论作出了众所周知的贡献。同样还有如 K. 邓克尔、N. R. F.

梅伊尔和 L. 斯泽凯利等实验心理学家，也作出了贡献，虽然他们并没有搞过以探讨数学能力为直接目的的研究。

各种各样的倾向性使数学能力研究的手段、方法论技术和理论概括方面多样化了。有时候结果似乎彼此矛盾，或确实产生了矛盾；有时又对结果作出不同的(有时则是完全相反)的解释。

数学能力的定义

自然，数学能力的研究应从研究主题的定义(那怕仅仅是一个顶用的粗线条的定义)着手。这种尝试已经进行过不止一次，但是迄今为止没有一个确定的数学能力定义能使每个人感到满意。也许所有的研究者都赞同的唯一的一件事，就是应该把掌握、再现以及独立运用数学信息的那种通常所说的"学校式"能力，与关系到独立创造了具有社会价值的新成果的创造性数学能力区别开来。关于这方面的内容，我们不准备在这里详细讨论，而准备放在以后各章里专门研究。

大多数主张"学校式"能力的外国心理学家倾向于把"学校式"数学能力理解为一种做数学测验和解数学题的能力。当然，这样的定义是没有内容的，需要使之具体化。有些心理学家已经注意到某些基本的心理特性，他们认为这些基本特性是构成数学学术能力的基础。

早在 1918 年，在 A. L. 罗杰斯(680)的一本著作里，就曾区别出两种数学能力：再现能力(与记忆功能有关)和创造能力(与思维功能有关)。作者根据这个分类创立了一种众所周知的数学测验系统。W. 贝兹(478，第 74 页)把数学能力定义为清楚地了解数学关系的内在联系和能用数学概念精确地思考的能力。A. 温兹尔(726)把数学能力定义成是建立数学材料之间有意义联系的能力。A. M. 布拉克韦尔在他 1940 年发表的关于数学能力因素研究的论文(529)中指出，这些能力可以理解为在定量关系(定量思维)范围内的选择性思维能力和演绎推理能力，以及在数、符号、几

何图形范围内把一般原理用于特殊情况的能力。W. 利兹曼(638, 第 4～9 页)则注意到了在特定情境下用数学语言中的符号进行推理的能力。芬兰心理学家 R. 梅南德把数学能力说成是一种包括智力、记忆、兴趣和意志等因素的综合属性。这是关于能力的大量个人理解中的一种新的提法。

知名的心理学家 G. 雷韦兹在他 1952 年出版的(676)«才能和天才»一书中,检查了数学能力的两种基本形式:应用性能力(不经预试就能迅速地找出数学关系,并能在相似事例中应用适当信息的能力),和创造性能力(揭示那些无法从已有信息直接得出的相互关系的能力)。

1955 年 D. M. 列伊发表了一篇关于数学特殊能力的因素研究的论文(634)。在这篇论文中,列伊给"数学上获得成功的能力"下的定义是理解(掌握)数学的基本概念和熟练地使用它们的能力。

我们认为瑞士学者 I. 魏德林(727)给"学校式"数学能力下的定义最有意义而且最为广泛。以后我们将详细地分析他的著作,并引述他的这个定义。现在我们只是指出,他的这个定义,牵涉到学生对数学符号和方法的理解,记忆和应用各方面。

在关于数学能力是先天的还是获得的观点上,国外研究者们是非常一致的。尽管已经把能力分为"学校式"能力和创造性能力两类,但对创造性能力的看法却是完全一致的:即认为一个数学研究工作者的创造性能力是先天形成的;只是为了这种创造能力的表现和发展,一个有利的环境才是必不可少的。这就是那些对数学创造性问题感兴趣的数学家们的观点,见庞加莱(498)和阿达玛(595)。贝兹也论述过数学才能的先天性,强调数学才能的先天性问题就是指独立地揭示数学真理的能力,"因为每一个人都能大致地了解别人的一些思想"。最近几年,雷韦兹极力提倡数学才能的先天性和遗传性的论点(通过实践这种才能只是得到发展而已)(676, 677),雷韦兹在他的一本著作中(677)为追溯家谱的方法辩

护，认为“对子女的特殊数学才能父母的贡献要负大部分责任。”

然而，关于“学校式”能力，外国的心理学家却不是没有分歧的。在这里，二因素（生物潜能和环境）平行作用论可能占优势。“学校式”数学能力是先天的这种观念迄今仍然流行。例如在二十年代，桑代克的观点占统治地位，这个观点直截了当和肯定地认为，学生们只有在心理发展上达到某种测验分数时，才能顺利地学习初等代数(715)。儿童中间出现的差异……多半是由于他们本性上的先天差异所致。如果真有一种奇迹，（一些科研人员研究的）儿童们生下来以后就接受完全相同的教养……他们在算术能力上仍然会有极大的差异，这种差异多半几乎与他们现在所表现出的差异一样大(503，第293～294页)。桑代克甚至对算术的先天倾向（智慧倾向和好奇心）也进行了讨论。

心理学家A. 阿德勒，E. 比克和W. 伏格特等早在三十年代就发表过同样性质的论文(510，525，724)，在论文中，他们坚持儿童的数学能力是先天的。他们认为“儿童对数学抽象的准备是比较少的”（伏格特），“能够懂得中小学数学课程的人数和能够精通音乐的人数是一样的”（比克）。的确，在这些论文中，尤其是在阿德勒的论文中，也讨论了环境的影响、教师和教学方法的作用、学生们的工作能力以及家庭的“数学”传统等，但这些作用都被看作是次要的。

A. L. 罗杰斯(680)L. E. 门森凯姆普(655)，K. E. 布朗和P. J. 约翰逊(535)等人也谈到先天能力同时又是“训练的有关结果”。他们注意到，在中小学里，并非每个学生都能达到对于数学的高度掌握，学生不具备先天的能力，他们就会在数学学习中感到困难。

最近几年来，外国心理学家们逐渐离开他们在这个问题上的极端立场。有时我们甚至会看到相当进步的观点。例如，法国的数学家、教育家和教学法专家A. 福契(568)在他的著作《数学教学

法» (La pédagogie des mathématiques)中，公开坚决反对把能力倾向的先天性概念用于数学教育上。他认为不存在先天的数学禀赋。这种神秘的、虚构的能力只是一种偏见，它会使孩子们泄气，对自己的能力丧失信心。

国外数学能力(包括"学校式"能力和创造性能力)研究中的一个基本主题，曾经是而且现在仍然是"能力的复杂心理学构成的本质"。我们可以列出下列三个重要问题：

1．数学能力的特殊性问题　数学能力是作为一种与一般智力范畴不同的特殊构成物而存在的呢？还是一般心理过程和一般特征的一种在质上的特殊化呢？就是说，它们是相应于数学活动而发展起来的一般智慧能力吗？换言之，是不是可以说，数学禀赋不过是一般智力加上了对数学的兴趣和学习数学的偏好？

2．数学能力的结构性问题　数学禀赋是单一的(单个的，不可分解的)，还是综合的(复合的)特性？如果是后者，人们就会追问数学能力的结构，追问这种复合的心理构成物的各个组成部分。

3．数学能力的类型差异问题　数学禀赋是不是存在着不同类型？或者，差异是不是纯粹由于对一些数学学科的兴趣和偏爱才产生的？

这些问题已经用不同的方法探讨过。第一种方法，就是在解数学题时对思考过程进行的心理观察法和实验内省分析法。在法国和德国研究者中，最典型的就是用这种方法。这种研究方法的价值随着心理学上的相关分析和因素分析的发展已明显减小。

第二种方法是相关分析，接着就是因素分析。这一派思想从20世纪初开始发展，现在已在能力的心理学研究中占有最主要的地位。在美国和英国的心理学家中，用这种方法是典型常见的。

让我们把这两种方法称之为"内省派"和"因素派"。两派的代表彼此进行着有节制的批评。因素派的拥护者指责他们的对手在数学能力研究中迷恋内省，轻视甚至明显地忽视定量的方法。在

他们看来，内省的方法会使研究不够完善，因而价值也较小(魏德林，727，第52页)。他们的对手也不甘示弱。他们指责因素派在研究象数学能力这样复杂的心理现象中热衷于统计分析，并在研究中缺乏真正的心理分析(斯屈恩兹，702，第181～183页)。

关于数学能力的特殊性问题，尽管不能说意见是一致的，但大多数专家，其中如著名的心理学权威比奈和雷韦兹，以及著名数学家阿达玛和庞加莱等，都明显地倾向于承认数学才能的特殊性。因素派心理学家在这个课题上的意见是特别矛盾的。可以这样说，各种各样的意见都是由关于智力因素结构的各种不同观点所决定的。

正如斯比尔门及其追随者所认为的那样，如果解答每一类型的测验题只需要一个普遍因素和一些特殊能力，而没有群因素(或者说它们的作用可以置之不理)的话，那么从整体上讲，数学能力的任何特殊性，就无从谈起了。换句话说，就是不存在什么特殊的数学群因素，而且人们只可以论及数学上一个普遍因素(一般智力)的各种表现，只能论及独立的、高度专门化了的算术、代数和几何等因素的表现(相对而言，尽管正如前面讲过的，心理学上的这些派别不从内容方面处理所选出的因素，但算术的、代数的和几何的能力是被看作彼此各自独立的因素)就行了。如果问题真是这样提法的话，那么数学能力的结构问题，就应当被看作是揭示作为数学活动本质的一般智力的各个方面了。

塞斯顿的多因素论的辩护者为了否定普遍因素的价值，曾经力图揭示群因素，或揭示作为所谓数学能力基础的“主要心理能力”(因为按照他们的意见，前面提到的各种主要心理能力，经过各种各样的结合，可以构成任何活动的基础)。

当然，数学能力特殊性问题的解决，要依赖于能力究竟意味什么：是创造力，还是学习数学的能力。有关创造力的各项内容准备在下面讲述。

比奈直接而明确地说："数学头脑以一种完全特殊的能力为前提"(479, 第156页)。庞加莱(498)和以后的阿达玛(595)探讨了数学家思想的特殊本质，讨论了数学家所特有的原始"数学直觉"，以及潜意识的创造性活动。尽管阿达玛提到数学天资和数学创造力与一般智力及一般创造力有着某种相关(指数学天赋和其他领域的天赋之间的联系)，他也指出了数学头脑的"局限性"的一些特例。在他看来，这是"学校式"数学能力的典型表现——好比一个学生在数学上名列前茅，在其他学科却居于末位(595，第5页)。阿达玛指出，一个数学家当然必须进行逻辑思维，但是这是一种特殊的逻辑，是一种数学对象范围内的逻辑。所有的思想家都运用逻辑，但是许多人对于数和符号仍然十分反感。阿达玛问道：是不是每一个逻辑思维能力得到充分发展的"极有"智慧的人都能成为数学家呢？他的回答是否定的。

贝兹也为数学能力的特殊性进行辩护，他把人分成"数学家"和"非数学家"两类(478，第73页)。

雷韦兹在他1940年的著作中，用相当多的篇幅叙述数学才能的特殊性和数学家思想方法的特征。他提出数学才能的创造方式是不是一种特殊的东西，是不是只能在一定的范围内(即数学范围内)得到应用，或者说我们能不能把它看成是一般科学才能的特殊形式。在答复中，雷韦兹坚信，数学才能是与其他形式不同的一种特殊形式的科学才能。数学才能可以同别的才能一起表现出来，但是它们之间并没有有机的联系；没有数学才能，甚至在它完全缺乏的情况下，其他科学才能也可能存在。此外，雷韦兹强调指出，每一个人都承认数学才能的特殊本质，包括数学家在内。他们是从未怀疑过这一点的。

显然，除了一本著作之外，我们找不出其他新近出版的心理学著作是否认数学能力的特殊性的。德国心理学家K. 斯屈恩兹在他1962年出版的《数学思维教育心理学》(702)一书中，提出了这

样的看法：数学天赋不是一个特殊概念，因素分析不能为讨论特殊的数学天赋提供根据，它也不是一种会在许多领域中出现的单独因素。他强调指出："人们可以认为，特殊天赋与'一般能力在不同的领域内发展情况也不同'这一点有关"(702，第181页)。斯屈恩兹写道，假如我们承认特殊的数学天赋，那么为什么我们不能承认有具体的算术能力、代数能力甚至单有一个数论的能力呢？于是，这种分类就不知道该分到何时为止了。斯屈恩兹还进一步说，当在数学方面成就突出而在其他科学领域成就非常低下(或者相反)时，有人就把这称为是特别的数学天赋。但是在他看来，象这样的例子是十分少见的。斯屈恩兹的最后说法使人们感到困惑。在数学方面取得或功，而在其他科学方面不能成功的例子并不罕见，这一事实对于斯屈恩兹的观点不能说是有利的。

对于因素学派的心理学家来说，学校式数学能力的结构性问题，主要在于是否有一个数学群因素存在，或者说是否可以考察更小的概念，即彼此之间相对独立的算术、代数和几何群因素。换句话说，我们是应该把数学能力看作是一种单一特性呢，还是考察单独的算术、代数和几何等能力这种做法更加正确些。

最早的研究认为不存在一种什么数学群因素，而只有一种普遍因素和关于算术、代数、几何测验的一些特殊因素。早在1909～1910年，C. W. 斯东(700)和S. A. 柯蒂斯各自独立地研究了算术学业成就和各种算术能力，得出不能把数学能力(即使对算术来说)看作是一个单独的整体的结论。斯东指出，擅长于计算的儿童常常在算术推理方面是落后的。柯蒂斯也认为一个儿童在算术某个分支获得了成功，而在另一分支中却可能失败。所以，他们两人的结论是每一种运算都需要特殊的、相对独立的能力。

不久以后，G. R. 戴维斯做了一个类似的研究(554)，以便弄清是否存在一个有关算术的一般能力。或者是象人们所说的，存在着与算术的不同部分相关的特殊的能力。研究的结果表明，算

术的各个不同部分和运算的成绩之间存在着高度的相关(大约0.70),作者认为这就证实了他的最初假设。

在与此同时或稍后的一些研究中, W. H. 温契(732)和 C. 伯特(54)的结论认为,不仅在算术上存在着一种特殊形式的能力,而且认为在数学的各个分支内其成就之间也存在着很高的相关。不过,作者们都撇开了数学群因素是否存在的问题。

D. J. 柯莱尔(551)企图弄清楚特殊的算术能力是不是存在,这种能力对于代数或几何能力来说,是特殊的和相对独立的。他设计了一套测验,用以研究算术的三个基本方面(关于法则的知识,计算能力,解算术题的能力)。作者得出一张相关值表,其中的值相当高。因面他假定:有一个心理因素在所有各种算术活动(即算术能力)中起着作用。

1951 年, B. 麦克阿列斯脱对 70 名小学生做了一个类似的研究(651)。作者探讨了这样的问题,即算术能力是一种包孕算术中所有心理运算的一般能力,还是一些与算术不同部分相联系着的相对独立的特殊能力。除了一个普遍因素外,他没有得到什么确定的结果。面这个普遍因素照他看来应该是算术能力的基础,但却被大家"忽视"了。

1910 年, W. 布朗的重要论文《数学智力的客观研究》发表了。文中计算了数学不同分支的成绩之间的相关程度。证实了这些相关程度很高(算术和代数之间的相关为 0.79, 几何和代数之间为 0.66, 算术和几何之间为 0.58),然而作者认为并不存在一种数学群因素,而认为算术,代数和几何等能力都是相对独立的结构。布朗认为,他的数据表明,代数和几何能力只与算术能力(作为一种初等算术运算能力)在多大程度上可以构成代数和几何的基础有关。布朗的研究尽管是别人批评的对象(例如 J. 赖格莱曾指出过布朗在研究方法上的一些缺点),但却是一系列这类研究的起点。

从本质上说，在 A. L. 罗杰斯的研究(680)中也没有找到一种数学的群因素。他在 12 岁到 16 岁的 114 个儿童 (61 个男孩，53 个女孩)中进行了一套特别编制的测验，得到的相关系数普遍较低(从 0.01 到 0.59)，罗杰斯就认为这个结果证实了布朗的观点，即代数和几何中的成绩是由性质不同的特性所决定的，因此并不存在构成数学各种能力基础的共同特性(680，第 84 页)。

10 年后，斯比尔门用因素分析方法对罗杰斯的研究结果重新进行了分析。他企图证明，即使在罗杰斯已经获得的，算术测验分数和几何测验分数之间相关极高的那些实例中，也不可能说是存在着一种数学群因素。斯比尔门在他以后的研究中继续为这个观点辩护(693)。

在罗杰斯的研究发表几年后，L. E. 门森凯姆普 (655) 的研究发表了。这篇论文证明了代数和几何分别与不同类型的活动有关。代数能力和几何能力测验分数之间的相关，并没有超过其中任何一种能力和言语能力之间的相关(代数能力和几何能力的相关系数是 0.54，而代数能力和言语能力的相关系数是 0.57，几何能力和言语能力的相关系数是 0.59)。作者参考了其他的研究，认为代数能力和几何能力的相关，并不高于它们中间任何一种能力和德语能力之间的相关 (655，第 159～160 页)。他的结论是，所谓数学智力具有一种复杂的结构，它包括特别是口头表达数学关系的能力。1925 年发表的 A. E. 卡默隆的研究包含着同样的结论(545)，尽管赖格莱对构成此项研究基础的测验效度表示怀疑。

在一些批评家看来，前面引证的所有研究，其弱点在于它们并没有令人信服地设法分清普遍因素的影响。L. 福莱于(569) 1926 年发表的一篇研究报告，专门作了排除普遍因素的尝试。作者运用一套特别选出的 11 个测验的结果(包括几种塞斯顿关于空间关系的测验)，计算了相关系数，结论指出，“由于已经排除了来自一

般智力的因素，因而不同算术测验之间的联系就可以说是提示了特殊的(几何的)能力了"(569，第205页)。但是必须说明，作者是在有意识地把"几何"和"空间关系"的概念等同起来(他的所有的几何测验都是关于"掌握"空间关系)的情况下，作出上述结论的。

1937～1940年间进行的一系列因素分析研究进一步证实了没有数学群因素的结论。1937～1938年H. W. 奥德姆分两部分发表了他的论文«数学能力的心理学研究»(663, 664)。作者在对410名9～15岁中小学学生(140名男生，261名女生)进行智力、算术、代数和几何等测验后，得到以下的相关程度：代数和算术的相关是0.60；算术和几何是0.47；几何和代数是0.59。算术、代数、几何等测验和智力测验的相关显然较低(分别为0.40, 0.27和0.31)。奥德姆认为不存在任何明显的群因素，来统一算术、代数和几何等测验，只存在对应于每一组测验的(算术的、代数的和几何的)一些特殊因素，由于对这项研究的结果的解释，该研究受到P. E. 阜农，M. K. 巴拉凯特和几个瑞士心理学家，特别是魏德林的严励批评。阜农指出作者过低估计了普遍因素，在这个研究中不存在普遍因素这一点只是被假定为已得到证实了。

与此同时(1938年)，F. W. 米契尔的重要论文«数学思维的本质»(658)发表了。这也是一项因素分析的研究(应用塞斯顿的形心法)，对象是170名13岁到16岁的学生。米契尔从层次理论的观点出发断言：数学能力是一种包括一个普遍因素、一些群因素和特殊因素在内的复杂的性质。围绕这项研究展开了一场剧烈的争论，主要是关于作者是否确切地解释了他的因素。赖格莱(747)的批评特别严厉，他指出测验选择不当，因素分析方法上也有错误(尤其是批评了不成功的轮组方法)，以及把普遍因素与斯比尔门的g因素错误地等同了起来。

1940年，A. M. 布拉克韦尔发表了他对数学能力的因素研究

(也用了塞斯顿的形心法)(529)。作者用了200名学生(100名男生和100名女生)进行研究。最有趣的是他发现男生和女生的因素数目不一样(男生有3个因素，女生有4个因素)。这个问题留待以后讨论。两种性别下都显示出有一个普遍因素(象斯比尔门的g因素)和一些特殊因素。

布拉克韦尔的研究同样受到了批评，事实上，对他的批评和对米契尔的批评是一样的。对因素分析研究的这类批评是十分典型的，这些批评清楚地论证了因素分析的弱点。批评家们通常认为这类研究有两个主要的缺点：第一个缺点是测验的选择。测验选得是否恰当？因为研究的结果是直接依赖于测验的选择的。当然，在任何测验系统中总可以找到一些缺点，谁也不能保证哪一个测验系统是最好的。第二个缺点是对获得的因素的解释。在这个问题上总是有争论的。有时，人们非常惊奇地发现，不同的研究者对同样的结果(通常是用相反的方法)作出完全不同的解释。

稍后，又出现了另一种观点，主张存在着一种数学群因素。这个观点似乎在1921年B. R. 柏金汉姆的研究里初露端倪。柏金汉姆研究了有关普遍因素(即一般智力)的数学能力(537)。他根据对某些测验分数间相关性的研究，得出结论说：数学能力并不明显地和一般智力有关。按平均数计算，这种关系的相关系数约为0.40(不同情况的变差为：0.21, 0.25, 0.38, 0.40, 0.41等等)。作者认为，在相关性研究中通常应用的标准测验，是为分别测量不同数学学科的成绩而设计的。但是他坚信存在一种一般的数学能力(很明显，是一个数学群因素)。代数测验和几何测验的分数是彼此相对独立的，但是每一种测验分数都受着所谓的一般数学能力的影响。

1926年，W. S. 弗莱克发表了他对数学能力的研究(565)。他仔细地设计了一套测验，并用这套测验研究了一个班级的29个学生。他的研究结果据说是支持存在着数学群因素的主张的，因为

"一个人在某一学科上表现出来的能力，一般地说，是他在其他分支能力的良好征兆"(565，第49页)。但是这项研究没有特别的影响，因为它得自一群比较少的学生，而碰巧他们又处于相同的学习情境。

1933年，J. H. 威尔逊发表了他的因素研究(731)。他研究了371名学生在若干学科(英语、法语、历史、地理、算术、代数、几何)上的学业成绩间的相关性。他发现了英语与法语之间的相关，也发现在算术，代数和几何三门数学学科之间有明显的相关。

威尔逊的研究的第二部分，用了另外110个学生，和另一"组"学科——英语、法语、代数、几何、地理、植物学、等等，在数学学科中又一次发现了群因素。所有这些情况，使这位作者得出了确有一种数学群因素的结论，它的"负荷"大大地超过g因素的"负荷"。作者认为这完全是正常的，因为代数和几何的内容和算术有许多共同之处，而且，在几何中，比如说，是要用到代数符号的。

1934～1935年，H. R. 哈姆莱出版了两本关于数学机能思维的著作(599，600)，这两本著作有助于改变对待学校数学教学的某些态度(特别是机能性概念应该作为注意的中心)。作者提出了研究数学思维的最初模式。他分析出三种运算过程或形式作为数学思维的主要成分(元素)：类(归类成或分成若干具有共同特性的材料群)，序(找出这些群范围内的主要的即描述出它们的内容的序)，以及对应(发现不同群的成份之间的对应关系)。在哈姆莱看来，这些过程是关于数学材料的任何运算的典型过程，而其他关于数学思维的模式——例如似然(相似)、合取、根据这三元组——对所有数学材料来说，并不具有同样的关系(判断相似的过程和几何有关，合取更多地和代数有关，等等)。上述过程应该联系各种基本类型的数学材料(算术数，代数符号和空间图形)作检验。在哈姆莱看来，数学上取得成就的能力，就和完成关于上述三类数学材料的运算能力相一致。J. W. 詹金斯(619)后来对这一模式作了

改进，指出还包含着变异性这一概念，变异性的发现是在群的形成之前。在很长时间内，哈姆莱的模式是编制研究数学能力的成套测验的基础。

早在五十年代，M. K. 巴拉凯特提出了他对数学能力的因素研究的报告(519, 520)。作者在四所文法学校里，用各种测验对300个学生进行了研究。他成功地得到并鉴别出六种因素——g(普遍的)，V(言语的)，S(空间的)，N(数字的)，M(记忆的)以及所谓的数学因素——按照他的说法，每一种因素在数学思维中都起着一定的作用。他试图说明，数学因素是熟练地使用数学模式和数学关系的能力。

在此同时，M. 哈姆泽的因素研究发表了(601, 602)。他用一套特别设计的测验，对一大批其数学发展属于正常或落后的儿童进行了研究。他按照哈姆莱的观点，把对不同材料的(数的、几何的、符号的和言语的)各种运算(归类、次序关系等等)，作为他进行各种测验的基础(599)。正如这位研究者所说，在一批数学发展落后的儿童中可以特别清楚地看出数学群因素的存在；落后的情况照例总是同时地在算术、代数和几何三个数学学科中表现出来。

D. M. 列依在1955年发表的因素研究(634)也主张有一种数学群因素的存在。作者选择了三种数学学科中她所认为的典型活动(计算算术百分比，解代数二次方程，证明几何中关于圆的一组定理)，并且与哈姆莱的四种过程组合起来。结果组成了12种测验。列依对文法学校中不同年龄的100名儿童进行了研究。她运用塞斯顿的形心法，设法分离出若干"能力"，在她看来，这些"能力"通常和上述数学思维的结构相对应，这些结构具有一般的数学特性(因为这些结构对中小学数学所有学科都有同样的关系)。

让我们试从前面提到的问题里，选出外国心理学家们认为与数学能力有特殊关系的几个因素来评论一下：

1. 普遍因素 g　数学测验中这一因素的负荷通常是很大的。

在这些数学测验与各种一般智力测验之间发现有相当高的相关(桑代克发现的相关为0.55～0.70. 这个数值与罗杰斯、柯莱尔、斯堪的纳维亚的一些心理学家和其他一些研究者所得的数值相近)。但是对数学中的计算来说，g的作用最小(根据某些资料，智力测验和计算能力测验之间的相关接近零或等于零)。所有这些都提示研究者，数学能力构成了一般智力的"中心部分"。

2．数字因素N　算术测验中以这个因素的负荷最高(D. C. 艾特金，K. J. 霍尔津格，T. L. 凯利，桑代克，塞斯顿等)。人们认为这个因素对计算速度和解算术问题都有价值。

3．空间因素S(视觉因素Vi)　关于视觉测验和几何测验之间的联系有一些假设(未充分证实)。米契尔和布拉克韦尔发现数学测验中Vi因素的负荷很小。

4．言语因素V和W　有些作者(例如罗杰斯)已经发现数学测验和言语测验的相关很高，尤其是在言语测验与算术推理测验、代数测验以及几何测验之间存在着很高的相关。其他研究者们的数据没有表明在数学测验中言语因素有显著的负荷。门森凯姆普发现了如下一些相关：代数和言语能力之间0.57；几何和言语能力之间0.59(655，第159页)。作者的结论是：数学关系的口头表达能力是重要的。

5．推理因素R　许多研究者将这个因素分解为若干成分(特别是演绎成分和归纳成分)。大多数作者得到，数学测验中归纳因素和演绎因素的负荷是高的。至于R因素本身，它的含义过于一般和广泛(它既可作为一种一般思维过程，又可作为一种解题过程，这个过程是和在新的，特殊的等等条件下熟练使用符号和抽象概念有关的——参看D. C. 阿特金斯和S. B. 莱尔利509)。当然，在一切情况下，R因素显然应该在数学能力本身的结构中起决定性作用。

四十年代前后，一般能力问题，特别是数学能力，引起了斯堪的

纳维亚心理学家们的注意，他们进行了一些适当的因素分析研究。近年来最值得注意的有关数学能力的研究，无疑当推瑞典心理学家 I. 魏德林在 1958 年用英文发表的《数学能力》一书(727)。这项研究，运用了因素分析(塞斯顿的形心法)，无论从那一方面来看，这本书都称得上是外国心理学中现代能力研究学派的代表。所以我们对它作一些比较详细的探讨。

作者的基本计划是以智力的多因素理论作为基础来分析中小学学生数学能力的结构，说明塞斯顿学派心理学家们以前研究中所确定的每个因素在这一结构中的相对作用，以及决定数学能力同一般智力方面的关系。魏德林把"学校式"数学能力(这种能力通常要由多种条件来确定)看作是解各类题目的能力，从而把下述数学能力的定义作为他的出发点："数学能力是理解数学的(以及类似的)问题、符号、方法和证明的本质的能力；是学会它们，在记忆中保持和再现它们的能力；是把它们同其他问题、符号、方法和证明结合起来的能力；也是在解数学的(或类似的)课题时运用它们的能力"(727，第 13 页)。魏德林认为，再现性和创造性的侧面、理解和应用等都包括在这个定义中了。因为他觉得在一项研究中要把数学能力的所有方面都考虑到是有困难的，所以他决定把他的研究限制在一个主要方面，即创造性侧面(解决问题)。后来，他提到教学方法可能会影响学生数学能力的性质。他说："当实验对象已经学了新的方法并实践新的法则时，我们不知道他解某种类型课题的能力结构是否会改变。当我们讨论数学能力时，必须参考被试者的(数学)训练"(727，第 15 页)。他表示将从他很熟悉的现代瑞典学校的教学实践着手，继续进行研究。

其次，他论述了用学校教师的评分和专门测验来测量数学能力这一方法的相对价值和客观性问题。他认为学校的评分对能力的测量是不可靠的、主观的、而且是不真实的，不同的教师使用着不同的标准(对有些教师来说，分数甚至带有惩戒的意义)，因此分

数是一种"复杂的现象"。魏德林对测验分数有偏爱。当然，他认为测验应该"成套"编制，这样分数便具有足够的代表性。

作为塞斯顿学派的拥护者，魏德林认为需要对已发现的因素作心理学上的说明，虽然他表示这是很困难的，因为各种因素可能最后弄清楚是"实验条件的作用"，也可能是反映了受试者的经验，等等。他说："如果这样，一种能力就只不过是一种假设的现象了，它的真正的本质是无法解释的"(727，第 40 页)。他也承认"纯粹"的因素研究不能揭示已知因素的心理本质，它只能或多或少地有助于对因素作些心理学的解释，而根据这样的解释，"我们不能得到很多的信息"(727，第 27 页)。然而他相信，比起那些不用这种数学工具的早期研究(特别是内省研究)来，因素分析能更好地回答数学能力的结构问题。但是他认为，"内省法"有助于解决用因素法所不能解决的问题：它有助于解释因素分析的各种结果。

魏德林在他的数学能力研究中，编制了一套 53 个的测验，其中包括其他研究者曾经用过的以及他本人创造的测验。有一些测验是由于普遍因素 g 的负荷较高而被选入的(例如，找出一已知数列的构成规则并把这个数列继续写下去，或者剔去不属于此数列的某个数)。

魏德林选用的其他一些测验，是由于在这些测验中数字因素 N 有较高的负荷(简单的算术四则运算题，布列并解出含有一个未知数的方程，等等)。

第三组测验是言语因素 V 有较高负荷的测验。(关于选择同义词和同音词的测验，关于理解口头指导语的测验，指出已知单词可以归属的范畴的测验，等等)。

第四组测验是视觉形象因素 Vi(或空间因素 S)有较高负荷的测验，这些测验还与想象出二维或三维图形的成功程度有关(例如，怎样将已知立体切开，使得从右边看出是两个立体。或者已知一种各个表面上写有字母的立方体，然后按不同位置画出，问图

上看不见的表面上写的是什么字母)。

选用第五组测验，是因为这些测验中推理因素 R 有较高的负荷(例如，已知左边有 4 个数，右边有 5 个数，试在右边的数中找出一个数，使得它应该是左边数列中的第 5 个数。其他的测验包含确定从一个已知的三段论中得到的结论是否正确，以及找出数的、空间的和言语的关系)。

在这方面，我们可以提供一组属于数学本身的问题。这组问题是魏德林按照他对数学能力本质的理解(和定义)，如这与掌握中小学数学知识有关，而选出来的。尽管作者坚持他自己是把主要注意放在中小学数学能力的创造性侧面而不是放在再现性侧面，这一组中的绝大多数题目还是偏于确定一个人的数学信息、习惯和技能水平。(例如，解方程：

$$x+\frac{3x-1}{5}=1-\frac{3+x}{15}。$$

或者解这个题："一个三角形的底边为 6 厘米，高为 8 厘米。另一个三角形的面积等于前一三角形的面积，但其高为 3 厘米，其底边是几厘米？")然而我们很难同意作者对他的测验的保证，说什么他的测验"确实测量了一种对中小学数学极为重要的能力"(727，第 110 页)。他显然把数学思维的创造性侧面当成了一种解答中小学数学课中的标准问题的能力了。

魏德林假设，如果因素分析能证明数学测验的显著负荷，以及他前面的五组测验的显著负荷，都和某一特定的因素有关，那么这个因素在数学能力结构中就占有一个重要地位。如果这两种测验是由不同因素组合起来的，那就不可能得到适当的结论。

在魏德林的基础研究中，选用了 36 种测验，测验对象是 217 名 13 岁至 17 岁的学生(基本年龄是 14 岁到 15 岁)。测验是个别地或分小组进行的。得到下列结果：

1. 数学测验在 N 上的负荷非常小。

2．数学测验在 V 上的负荷较小。

3．数学测验在 Vi(或 S)上没有显著的负荷。

可是，魏德林深信，必需对这个问题作进一步的调查，因为数学能力的类型可能有所不同，并非所有类型的数学能力在他的这组测验中都有所表现。

这样，数学测验的上述数字因素、言语因素和空间因素 (N、V 和 Vi-S) 的负荷都不明显而数学推理因素 R (这个因素我们将在下面讨论)具有较低的负荷(魏德林把推理因素分成两个因素：D，代表演绎因素和 R，代表数学推理因素)。这意味着数学能力本身与计算能力、言语能力或视觉-空间能力并无联系。

虽然在演绎因素和数学推理因素之间有比较高的相关(相关系数是 0.56)，但数学测验中演绎因素负荷的显著性还不清楚。魏德林认为很可能的是，演绎能力对于中小学数学是很重要，但在他看来，这个问题还需要进行专门的研究。

最后，推理因素(一般数学推理)被证明是在数学能力结构中起决定作用的因素：围绕着这个因素所作的大多数测验都是数学性的，而所有的数学测验中推理因素都有显著的负荷。魏德林表明他已经分析出另一个因素(第六因素)，对于这个因素他虽未能成功地作出心理学上的解释，但他倾向于把它看作是一个“残余因素”。

后来他又证实，和其他因素不一样，推理因素同 g 因素之间存在着较高的相关(相关系数是 0.86)。这意味着数学能力(照魏德林对它的理解和定义)在一般智力中有它的根基。

魏德林为了估量他的因素研究的效度，决定找出推理因素和数学考试分数之间的相关。结果证明相关相当高(从 0.53 到 0.81，平均为 0.60～0.70)。在他看来，这足以证明他所选择的数学测验确实是数学能力的指示器。但在我们看来，这样的相关所表示的是另一些东西。数学考试分数(等级或分数)，正如大家所熟知

的，代表的是一个人的数学知识和技能的水平(这就是分数所能起的作用)，因此这就有理由说，魏德林的数学测验是数学知识和技能的指示器，而不是数学能力的指示器。

现在我们已能撇开对运算过程的心理分析，来概括和估量数学能力的因素分析本身究竟提供了哪些东西。魏德林确实认真地进行了一项艰巨的研究(我们知道，必须对30个测验计算出82250组四分差)，并且写出了一本很厚的书。结果是，他以数学推理能力是构成数学能力的基础这个见解，丰富了我们对能力结构的认识。但是恕我们直言，他们的结论并没有轰动一时。其实他们等于什么也没有说。最明显的、最一般的(因而也是最不确定的)能力被找到了，V. D. 尼拜利青把这种能力说成是"最复杂和最不确定的因素"(309，第58页)。但这种"能力"仍然需要专门的研究。一句话，魏德林的终点恰恰应当是起点。当然，在这里因素分析是没有错误的，它已提供了它所能提供的一切。但是数学能力确实应该联系对解题过程的分析而进行心理分析。在魏德林的研究中这方面是完全没有的。在他的研究中没有去分析解题过程，没有对儿童的描述，没有对儿童进行长期观察。显然甚至作者本人也有所觉察，他写道："因素分析的方法在某些方面是肤浅的……它们应该同时伴有实验分析和内省分析"(727，第148页)。魏德林曾尝试在一种特殊情况下进行这种分析，以检验他下面的假设：在计算因素N后面存在着使人的推理自动化的能力，这个因素反映了一种没有任何推理细节的高度自动化过程。然而他只是以他自己的内省为基础，去解决如此重要的问题。学生自己应该估计过他们解一道题比解另一道题的自动化程度高多少(727，第177～178页)。

这一学派的其他研究在原则上和魏德林扎实的研究完全没有区别，也没有得出什么新东西：每一次，都有不少因素被分离开了，以便估量这些因素对数学能力结构的价值，但是每次都把过程本

身忽略了。在魏德林的著作出版前不久，美国心理学家 R. H. 柯尔曼(550)在一项研究中也发现了计算能力(N)和有效记忆(M)同数学能力并无直接关系，并且发现了演绎因素对数学能力能起多少决定作用。英国心理学家赖格莱 (747) 在英国和爱尔兰的文法学校和技术学校里运用因素分析研究学生的初等数学能力结构，发觉到数学能力和一般智力之间有联系；就是说，在赖格莱看来，g 因素对顺利学习中小学数学是很重要的。如果正好是 g 因素把中小学各种数学学科"联结"起来的话，那么这些数学学科之间的关系就要比预料到的更密切些。这就有可能证明存在着一种明显的群因素。和魏德林相反，赖格莱更明确地证实了几何中的活动与空间因素有关；算术中的活动和数值因素有关，而数值因素和数学能力本身之间则较少联系。不同类型的学校和不同地区民族(英格兰和北爱尔兰)的学校，其因素分析结果大致相同。

R. M. 加涅和 N. E. 巴拉台斯在他们 1961～1962 年 (572, 573)发表的论文中，报导了关于"获得数学知识因素"的类型(那就是，影响个人学习数学成绩的因素)，并且在这基础上试图阐明建立学校新课程(尤其是计算机程序)的原则。这个研究的特点是作者们试图在单个的典型学校作业(约简分式，解方程等)中确立这些因素的表现形式。

M. 卡尼霞 1962 年的研究 (546) 调查了 150 名学生。采用了由 36 个测验组成的一套测验，分析出 12 个形心因素。简要地说，得出的结论如下：数学能力的基础就是运用符号进行推理的能力。"数学的"思维过程是与得出结论，构成结构以及处理关系等能力有关。

从对数学能力的因素分析研究所进行的分析中我们得到一个结论，那就是：企图用测验，然后用因素分析来揭示数学能力的本质和结构，而对各种过程不进行心理分析，这种作法是没有价值的。这种片面的分析对于数学能力结构提供出的概念是不精确的

和无意义的。数学能力的假设的"因素"结构业已证明是无定形的，粗线条的，而且是缺乏内容的。所以从理论和实践的价值来看，都没有必要花费那么多的力气去研究它。

外国心理学家在非因素性的研究中，又是怎样描述数学能力结构的呢？

必须指出，决不是所有有关这个问题的著作都充分揭示这个结构(即不象那些作者自己所认为的那样)。某些论文的作者并不抱有这样的目的，只把自己限于说明结构的个别成分。在某些研究中，所选定的结构成分其心理学(形式的或意义的)方面是清楚的；而在其他一些研究中，有关因素问题的心理学解释常常是不清楚的，是有争议的。

大约在50年前P. 鲁特所做的研究 (683) 是关于数学能力结构的第一个较有意义的内省研究。在这项研究中，作者分析出"形成数学才能的全部功能部分"。这些功能部分，事实上，就是刻划了一个具有数学能力的人所具有的智力活动特性。作者在对学生解许多题目的过程进行了分析之后，选出了这样一些成分：(1) 抽象能力，(2)空间概念的能力，(3)思维的功能性质，(4)演绎能力，(5)看出空间的和算术的关系的能力，(6)高度专心的能力。这些成分确实反映出数学思维的基本方面，但有些成分则太一般化(例如1，3，4)或太含糊不清(例如5)。

二十世纪，又出现了几篇关于数学天赋的结构的内省研究报告。A. E. 卡默隆(545)选出下述一些因素(成分)：(1) 分析一个数学结构，并把这个结构的成分重组的能力，(2) 对数值的和空间的资料进行比较和归类的能力，(3)应用一般原理对抽象的数量进行运算的能力以及(4)想象力。V. 科梅里尔的著作 (628) 列举出下述因素：(1)清晰的逻辑思维，严格运用逻辑方法，(2) 抽象力，(3)组合能力，(4) 形成空间概念的能力和用空间形式进行运算的能力，(5) 批判性思维，抛弃错误思路的能力，(6) 记忆力。H. 汤

姆斯在他的《数学才能》(711)一书中，区分出这样一些成分：(1)抽象能力，(2)逻辑推理能力，(3)特殊理解力，(4)直觉力，(5)应用公式的能力，(6)数学想象力。汤姆斯也注意到了推理的非常"自动化"和用数进行运算的非常"自动化"的重要性。

上面我们讲到的这些研究，其不足之处是很明显的。分析出来的各个成分不能代表一个和谐的，有规律的系统；其中有些成分过于一般化，另外一些成分说有多么含糊就有多么含糊，而其余的一些成分的含义则完全不清楚。尽管这些研究在许多方面是不完善的，但是作为一种对数学能力的单个成分进行鉴别的尝试，它们多少还是有点意义的。

著名的美国心理学家 E. L. 桑代克在二十年代发表的关于代数和算术教学心理学的一系列著作，对数学能力研究作出了巨大的贡献，其中一些最主要的著作已被译成俄文(500, 501, 502, 503, 713, 714, 715)。桑代克关于教学的一般概念，由于它十分机械并且渗透着有关能力先天性的宿命论观点，过去和现在都不能被苏联的心理学和教育学所接受（参见 P. P. 布隆斯基，42，第595～599页，和 A. A. 斯米尔诺夫，383），但是他的专题研究和他的某些方法论建议仍然是有价值的（参见 D. M. 梅安高兹的论文，270）。桑代克在他的一本著作中讲到，学生掌握代数有困难是由于他们不懂得字母表示数这一实质，以及不了解必须与形式地机械地学习作斗争。他分析出一些在学习算术过程中得到完善和发展的功能，这些功能是：理解数的意义；熟悉十进位制；理解算术四则运算的意义；熟悉分数的意义；用般（整数和小数）进行运算的能力；熟悉图解，常用的量度、名词、符号，等等。这张长长的目录表，事实上，是一张学生在算术课上所必须培养的知识、习惯和技能的清单。当然，象桑代克那样，把清单上的那些项目称之为特性或功能，声称这个清单揭示了数学能力的组成（或结构），那是没有根据的。

让我们参考一下桑代克的《代数心理学》(715)，在这本书里，他提出了一组确定和测量能力的包罗万象的代数测验。他分析出好几种一般代数能力：(1)使用符号的能力，(2)选择和证明关系的能力，(3)概括和系统化的能力，(4)对基本元素和数据作出适当选择的能力，(5)使想法和技能系统化的能力。他还曾明确地分析出一些代数能力：(1)理解和构成公式的能力，(2)表述公式中数量关系的能力，(3) 变换公式的能力，(4) 列方程表示已知的数量关系的能力，(5)解上述方程的能力，(6)完成代数计算的能力，(7)图示一个量对另一个量的依赖关系的能力，等等(500，第113页)。很明显，第二组的全部"能力"和第一组的某些"能力"根本不是什么能力，而只是典型的学会了的技能。显然，尽管作者用了"能力"这个术语，他研究的对象与其说是能力，还不如说是知识和技能。他就是这样写的：每个学年结束，学生应该已经掌握了一定数量的在学校代数教学过程中获得的"能力"。在这本书中，他没有提出促进顺利掌握代数的个性心理特性的问题，尽管在这一点上他提到存在着先天的差异。

V. 埃克尔和济亨在1931年发表的论文(596)是数学思维结构研究中最有趣的研究之一。他们基本上用内省法进行研究。可是，许多后来的研究者(特别是那些因素派)都认为他们的许多见解是缺乏说服力的(魏德林，727，第50～51页)。埃克尔和济亨最初分析出构成数学思维"核心"的四种基本的复杂成分：空间的，逻辑的，数的和符号的。后来，他们又试图把这些成分中的每一个再分解为更简单的成分。其模式如下：

A. 空间成分

1. 理解空间图形、形状和它们的复合体(综合，完形)，

2. 对空间形状(空间概念)的记忆，

3. 空间的抽象(观察出空间对象的一般特征的能力)，

4. 空间的组合(理解并能独立发现空间对象间的联系和

关系)。

B. 逻辑成分

1. 概念(如"正弦"、"对数"、"张量"等)和概念抽象作用的形成,

2. 理解、记忆和独立发现一般的概念联系,

3. 理解、记忆并独立地根据形式逻辑的法则作出结论和证明。

C. 数的成分

1. 数概念的形成,

2. 对数字、数值解答的记忆。

D. 符号成分

1. 理解各种符号,

2. 记忆各种符号,

3. 用各种符号进行运算。

这个模式是有趣的,但显然是表达得不高明的。尤其是不同成分的构成要素之间,其关系是不清楚的。例如,理解符号的能力和形成"对数"或"张量"概念的能力之间是什么关系呢?是前一种能力由后一种能力产生,还是后一种能力由前一种能力产生?

30年代末期,相继发表了一系列研究报告。布拉克韦尔(529)提出所谓数学功能的复合本质,它包括如下一些成分:一种普遍的、主要的成分(选择性思维能力,特别是,关于数值和符号的演绎推理能力,抽象和概括能力)和其他成分,如所谓把握空间对象的能力,言语能力。还有一种特殊成分,可以叫做"精确和准确因素",它表现为以确切的方式把资料保留在人的记忆中的能力。

H.R. 哈姆莱也谈到数学能力是一种复杂的(复合的)功能,其中视觉表象(与一般智力一道)以及"理解数和空间定形并把这些定形作为智力模型保留下来的能力"起着基本的作用(600,第28页)。F. W. 米契尔著的关于数学思维的本质一书(658)中,列举

下面几个过程：(1)归类，(2)理解和应用符号的能力，(3)演绎，(4)不借助具体事物以抽象形式使用观念和概念。他写道人们特别可以把这些过程视为具有数学思维的特性。

让我们再谈谈五十年代的某些研究。K. E. 布朗和 P. J. 约翰逊叙述 1952 年在美国举行的有关"鉴别和测定在科学和数学上有潜力学生的方法"会议(535)时，提到作为发现有数学潜力的主要工具的那些标准化测验，就是用来测量这样一些潜力因素的，诸如：一般智力，抽象推理能力，空间概念，阅读和领会科学课文的能力，解释相互关系的能力，等等。作者指出，有实践经验的教师已经分析出具有数学潜力学生的一些特征是：(1)非凡的记忆力，(2)智力上的好奇心，(3)抽象思维能力，(4)将知识应用于新情境的能力，以及(5)解题时能迅速"看出"答案的能力。

G. L. 克佩斯(624)引证 S. K. 兰格尔的著作，谈到由于学习代数而发展起来的一些心理功能，没有这些功能就不可能真正懂得数学。他把抽象思维(认知，分析一般特征和关系)和在问题情境中进行推理的能力归之于这类功能。

E. R. 邓肯(560)在分析了许多能验研究结果的基础上，认为可以得出如下的结论：有数学能力的学生，除了一般智力外，还必须具备发展良好的关于数量关系的思维、丰富的视觉想象、极强的记忆力、创造性的科学方法，以及善于应变。

在总结我们对外国心理学家著作中关于数学能力结构成分各种论据的评述时，应该指出他们并没有给出一个清晰的，准确的结构概念。此外我们应该记住有些著作中的资料是通过不客观的、内省的方法得来的，而其他一些著作则以单纯数量研究为特征，忽视了思维的质的特点。假如我们对上面提到的研究结果加以概括的话，我们只能得到对数学思维的极其一般的描述，诸如抽象能力，逻辑推理能力，良好的记忆力，空间概念能力，等等。

在这本书中我们不打算讨论关于数学能力诊断和发展方面的

外国著作，这个问题准备在我们即将出版的另一本著作中讨论①。这里我们只打算再探讨一个问题，就是数学能力中的类型差异问题。

在外国心理学中最流行的是一门关于数学才能的类型学。这种类型学的基础，就是把一种由详细的元素所组成的零散的思维过程，与一种同直接"掌握"必要关系有关的直觉思维过程相比较。甚至笛卡儿在他的《指导心灵的法则》(486)一书中也把连续逻辑演绎链，与作为不同现象间联系和关系的直接感知的直觉，作了比较。

根据这个观点，庞加莱第一个按照在数学思维中哪种过程占优势，把数学家们分为两种类型。但是要象庞加莱那样(尽管他不无保留)，把"直觉"型和"几何"型这两个概念放在一起，那几乎是不会正确的。在他看来，直觉表现为不同方式：可以看作是一种直接感知主要联系和关系的、几乎是无意识的、极为迅速的过程，也可以看作是一种与形象成分和空间概念紧密联系的过程。这两种模式是能够很好地"区分"开的。

阿达玛正确地指出，庞加莱的划分，与其说是属于散学的不同领域(对代数的分析法，对几何的直觉)，还不如说是属于思维的方法更为合理。思维(逻辑)的分析型(方法)和直觉型(方法)也许既能为"分析的代散学家"又能为"几何学家"所使用。阿达玛明显地倾向于，赋于"分析家"和"几何学家"这两个术语以同巴甫洛夫信号系统的含义接近的意义：第二种类型倾向于形象的概念化，而第一种类型不具有这样的特点。另一方面阿达玛又提到逻辑的和直觉的散学思维(以及相应的数学家类型)。"逻辑"的思维特征是：它是一种无意识"成分"显然很少、指向更窄的思维，是前后一贯的，思维过程分段清楚。"直觉的"思维的特征是：无意识"成分"很

① 克鲁捷茨基提到的显然是一本规划中的有关数学能力形成与发展的研究著作，也就是在前言中提到的今后的三个研究方向中的一个。——英译本编者注。

多，是更为"分散的"思维，迅速而且思维过程简缩(简化)了。G. 雷韦兹(677)也从几乎类似的观点出发，区分出逻辑的(推理的)数学才能和直觉的数学才能。

格式塔学派心理学家们的一些著作对数学能力心理学具有一定的价值。按照格式塔的理论，问题解决的过程，就是把最初的问题情境(一个人是用不同方式感知情境的)逐步变换，直至问题最终解决。情境的动态部分是思维过程。例如，格式塔派心理学家把复杂的数学证明过程看成为对情境作一系列的再解释，而不顾达到这一系列解释的思维过程问题，在苏联，我们公开地批评了格式塔派心理学，因为格式塔心理学把思维归结为一种个人对于问题情境的构作，而没有考虑到思维主题的作用，并且事实上忽略了一个人过去经验的影响(参看 S. L. 鲁宾斯坦，353 与 A. M. 马丘什金，281)。尽管如此，格式塔派心理学家的个别研究还是有一定价值的。

特别是 K. 邓克尔的实验研究，以及 L. 斯泽凯利和 N. R. F. 梅伊尔对这个研究的扩展是有价值的。因为他们试图在解决抽象问题(特别是数学问题)的推理过程中分析个别元素，阐明创造性思维的机制，对在问题解决过程中出现的个别差异和作为这些个别差异基础的思维的个性特征，他们也表示了一些想法。

在这一点上，邓克尔的重要著作《创造思维心理学》(487)，特别是其中有关解数学题的过程一章无疑是很重要的。作者问道：一个解法是怎样从问题情境中产生的呢？他认为解法是从立足于"求什么"而对问题的原始资料进行考察中产生的，是从一系列对于情境的重新构作中产生的，在这些重新构作中顿悟的时刻也随之出现了，邓克尔试图考察解数学证明题的过程，分析受试者对下述问题的解法："276276，591591 和 112112 各数是否都能被 13 整除？"在最成功的解法中，受试者找到了有关这些数的一般公式($abcabc = abc \cdot 1001$)并检验 1001 是否能被 13 整除。邓克尔把这个过程看作是对已知问题情境的一系列重新构作，他试图找出有利

于这种重新构作的条件。当受试者在解这个问题时，邓克尔采用了6种不同类型的指导语("暗示")，借以观察哪一种指导语最起作用。

邓克尔提出了一些关于数学能力的个别差异的见解。"人们在所谓……'智力天资'上的最深刻的差别，可能是以他们完成这些重新构作的自如程度为基础的"(487，第131页)。在讨论为什么许多人("拙劣"的数学家)对证明所必需的各种转化感到很大困难时，邓克尔提出了这样一种可能的解释："拙劣的数学家不能轻而易举地实现转化，是因为那些内容在他的想象中是相对固定的和不变的，因此产生重新构作就有困难了"(487，第231页)。

邓克尔说，一个人的能力越强，他就越能一眼看出某一情境的更多方面，而不需要在"杂乱状态"中长时间地摸索，他就越能区别这些方面之间的差异。对于一位"非数学家"来说，一个数学观念几乎没有方面可言(487，第146页)。邓克尔也提到从特殊知觉特性中独立进行抽象的能力存在着个别差异。这种能力对于从具体事实中发现一般原理是非常必需的。他把这种能力看作是数学思维的元素之一(487，第223～224页)。因此，邓克尔把思维的广度，思维的多面性，以及根据具体内容独立进行抽象的能力看作是影响顺利地解数学题的思维特性。

N. R. F. 梅伊尔(489，643，644)为了弄清过去的经验在问题解决过程中的作用(问题这个词作广义理解)，他引用"思维过程的方向"或"解法的方向"的概念来表示受试者得出解的特有的具体方法，问题中的数据就是根据这种方向重新组合的(489，第262页)。梅伊尔强调，当受试者不囿于习惯的运算方法时，他们就能更积极地考察不同的途径，去求出一个正确的解法。他指出，一个习惯性的运算方法会妨碍作出一个正确解法(643)。因此，他引用一种突出的思维灵活性作为顺利地解决问题的前提。

斯泽凯利在"学习和思维中的创造性过程"一文中，谈到任何

新问题的解决都有赖于该问题情境的结构。他指出："创造性过程的基本事实……就是受试者按照超越材料个别属性的组织原则来掌握结构关系。那些已被证实为更能进行这种概括性理解的受试者，在眼下这个实验中也完成得更好"(706，第 401 页)。因此，这实际上是一个关于突出的概括能力的问题，这种能力在解各类不同问题的过程中具有巨大价值。

我们再一次强调，尽管这一学派的心理学家们是从不正确的观点出发，来研究创造性思维的机制问题的，但是他们的实验数据和后来的结论对数学能力心理学还是具有一定价值的，这是因为他们注意到某些思维特性对解数学题同样具有重要意义。

著名心理学家 J. 皮亚杰的著作对数学能力心理学来说是重要的。皮亚杰最近关于思维的概念，本书不拟论及，因为它不在我们的问题范围内。我们在这里，只涉及与数学思维问题有联系的某些方面，面这些方面皮亚杰也曾作过一些研究(493a，494)。

皮亚杰把思维看作是一种认知活动，他特别偏重于作为思维着的主体的活动——运算。知识是在人的思维(认知)活动过程中形成的。L. 约翰诺特在他 1947 年发表的《青少年的数学推理能力》一书中(620)所用的概念与皮亚杰的概念完全一致，他指出：研究数学，不能把数学概念与用来形成这些概念的运算分割开来(620，第 54～56 页)。例如，元素 2 和 5 可以组成下列的表达式(把元素并列或者加一个符号)：25，52，2.5，$\sqrt{5}$，2/5，2^5，等等。每一个表达式都是一种关于运算的符号重现，要理解每一个符号表示的意义，不但必须懂得每个表达式中单个元素的含义，而且也必须懂得通过不同的排列或加上常用符号而体现出的运算的含义。因此，一个不懂得适当运算的儿意，尽管他可能熟悉这些数字，但却不能理解 $\sqrt{5}$，3^7 等意味着什么。但是，如果我们对他解释一个符号表示里隐藏着一系列必须完成的复杂运算时，那他就有可能理解了。因此任何数学上的表达式，都是一些特定运算的

惯用表记，学生们应该懂得这个道理。

在考察个体发展期间的智力发展阶段时，皮亚杰分出了具体运算阶段(没有充分形式化的与具体材料相关联的运算)和概括化了的形式运算阶段(这与一个结构整体上的运算组织相关联)。他提到思维运算的可逆性，这是一种明显的正反两向的思维灵活性，与运算的内部组织有关。他指出每一个思维运算都有一种逆向运算，这种逆向运算从原始运算的结果出发，能够还原出原始数据。尤其是，代数概念的形成是与对运算可逆性观念的掌握有关。皮亚杰把他的思维运算结构学说与 N. 布尔巴基①关于构成数学知识基础的三个基本结构(在"数学结构"(481)这篇论文中有所阐述)的观点加以比较。布尔巴基把这些结构确定为代数结构，序结构和拓扑结构(481，第 105～106 页)。皮亚杰在他的"数学结构和思维运算结构"一文(494)中论及数学结构和思维结构之间的联系及其对应关系时说："假如我们去追溯一个儿童意识中的算术、几何运算的发展和逻辑运算的特性时，我们就会发现与数学结构完全一致的所有类型"(494，第 13 页)。因此，他认为在教数学时，在数学家揭示出的数学结构和心理学家揭示出的思维运算结构之间，应该会有一种特殊的综合。C.加泰格诺在他的"数学教学法"一文(484)中曾具体地指出在数学教学中怎样才能够达到皮亚杰的目的，但对这个问题的分析不属于本书范围。

在结束本章之前，我们还想提一下关于教学思维过程的最早的观点，这种观点是一些著名数学家(庞加莱和阿达玛)主要通过自我观察的资料而发展起来的，而且得到一些心理学家们(雷韦兹等)的支持。

庞加莱在 1908 年发表了他的关于数学创造力的本质的见解(496，670)。阿达玛的著作发表得晚多了(1945 年)(595)。这两位从事研究的数学家都提出了关于数学创造力的"无意识"侧面的某

① 这是一个法国数学家集体采用的笔名。

些有趣见解。按照他们的观点，数学创造力的“无意识”侧面是所谓灵感的经常性源泉，这是创造性地解决数学问题的前提。庞加莱根据他自己的经验指出：数学创造力与解决问题的最后想法从意识中突然出现有关，这些想法的正确性可以被立即觉察出来(498，第11～13页)。他指出，对他来说，这往往是先前有意识的紧张智力活动的结果，也是当他的意识离开问题徘徊或是意识完全被问题所占据时，连续长时间无意识工作的直接结果。他说：“数学发现中这种无意识工作所起的作用，对我来说，似乎是无可置疑的”(498，第14页)。庞加莱倾向于肯定这种潜意识工作的基本意义，而不认为它只是一种辅助作用，他说：“意识阈下的自我在数学发现中起着极为重要的作用……意识的自我失败了，意识阈下的自我却成功了”(498，第16～17页)。

庞加莱的一个重要观点，就是在“有成效的无意识工作”之前，总要经历或多或少长期“初步有意识的工作期”，这一观点有助于正确地了解“灵感”的性质。在庞加莱看来，潜意识自我“说得很多”，但却只有一部分(主要是有用部分)“进入意识”。为什么呢？庞加莱的回答是，数学家们有一种特殊前，与众不同的审美感(或者毋宁说是一种特殊的“审美本能”)，一种关于数学的美、优雅以及关于数字、形式和谐的感情。由无意识的“我”设想出来的组合若不能导向目的，就是无用的，因而对上述审美感觉也没有作用；相反，有用的和必需的组合会影响这种感觉，因而引起注意而进入意识的领域。所以这种审美的感觉起着一种精致的“筛子”的作用(498，第20页)。

阿达玛也曾试着辨明数学创造力的本质。他认为庞加莱描述的一些关于“潜意识观念的发展”的事实并不普遍，与此相反，而是与某些数学家的思维中的个性品质有关。尽管如此，阿达玛仍旧指出创造过程中的无意识的各种表现形式。很多观念的组合是发生在潜意识领域里的。只有有用的组合变成有意识的，而绝大部分

(都是无用的组合)连本人都不知道。在这一点上,阿达玛同情庞加莱的上述思想——关于"数学美与和谐"的感觉的作用。但是,阿达玛采取一种比庞加莱更为现实主义的立场。首先,他认为意识的界限是那样的不确定,而且意识和无意识彼此转化发生得那样迅速和连续不断,以致不可能知道究竟什么内容是来自意识的作用,什么是来自无意识的努力。其次,阿达玛认为,在紧张的有意识工作之后那种看起来仿佛是一种"观念的酝酿"和"灵感",仍然能够用头脑"清新"(在这件工作后头脑的放松)来加以解释(在这一点上,他想起冯·赫姆霍尔兹的说法:一个疲劳的头脑是不可能产生幸运的思想的)。我们认为这个解释是正确的。科学的心理学不能建立在庞加莱提出的那种对思维过程的神秘解释之上。A. G. 科瓦列夫和 V. N. 米亚西谢夫对类似的事实作出了一个正确解释(174)。他们指出,在科学家的思维过程中不是每一步都能成为有意识的。科学家们不仅以"分得很细"的零散思维为特征,而且也以简缩了的"省略的"形式进行的所谓直觉思维为特征。直觉思维理解和揭示主要关系,要比零散思维借助于活动证明一个对应的关系来得快(174,第 132~133 页)。这也常常被理解为一种无意识的创造性工作。

在创造性活动中有一种"无意识"的心理过程,这一概念已在心理学家中找到了它们的拥护者。A. 比奈同情他们的观点,他把庞加莱观点具体化为有点儿象一个体系,在创造性过程中建立了几个明确的阶段:(1) 无成效的有意识思考时期;(2) 在工作中进行抽象的时期,即休息或者转向其它活动的时期,在此期间潜意识思维积极活动,产生思想的"酝酿";(3)"灵感"突发,这时一个人极少考虑到对象,而在这一瞬间发现了真理;(4) 有意识的工作重新开始,分析思想并对它进行细致的加工。雷韦兹也谈论过"观念的下意识直觉"。他在他的著作《才能与天才》一书中,把创造性过程列为四个阶段:(1) 准备阶段(掌握材料,把思想集中在创造性

任务上)；(2)酝酿阶段(在尚未具体化的思想上进行尚未认识到的工作)；(3)创造性的直觉(以一种还不清楚的形式寻求解答的要点)；(4)创造性目标的出现。

M. L. 卡特莱特在《数学智慧》一书中论及数学家的创造性工作的前提时，谈到"观念的无意识直觉"(549，第16～18页)，谈到这方面的个别差异。美国心理学家C. W. 泰勒和F. 巴龙在他们于1963年出版的《科学的创造力》文集(707)中，试图用生理学资料解释潜意识思想的性质。这本书指出，大脑皮质的一些部分在不受外部新信息干扰的情况下进行"探索"的时候，思维过程处于最佳状态，这表明心理过程是同时在两种水平上(即有意识的和无意识的水平上)进行着的。这种解释似乎没有说服力，特别是因为上面提到的那个生理学概念只是一种假设。

3 苏联革命前后关于数学能力方面的心理学文献

在革命前俄国的心理学和教育文献中，关于一般能力心理学和特殊的数学能力心理学，只能找到一些零星的著作。在俄国作家的著作中，我们必须提到D.莫达克海-波尔托夫斯基发表于1908年的有独特见解的文章“数学思维心理学”(300)。作者是一位有权威的数学家，他是从唯心主义出发来写这篇文章的，例如，他给“无意识的心理过程”以特殊重要性，他宣称“一个数学家的思想……深深地根源于无意识领域，有时浮现于意识中，有时潜入无意识的深处。……数学家意识不到他思维的每一个步于，就象乐师意识不到他在拉琴弓一样”(300，第507页)。他写道：“我们长时间不能解决的某个问题的最终答案，之所以会突然出现在意识中，得用无意识思维来加以解释，正是这种无意识思维……一直卷入这一问题……而答案终于跨进了意识阈”(300，第505页)。在莫达克海-波尔托夫斯基看来，心智能够在下意识中从事冗长而复杂的工作，所有“艰巨”的工作都是在下意识中完成的，无意识观念的特色，在于其错误较少于有意识观念(300，第503～504页)。这些观点与法国数学家庞加莱的观点一致，庞加莱的文章也在1908年发表(670)。

莫达克海-波尔托夫斯基指出了数学才能和数学思维的全部特殊性。他断言，数学能力并不总是天才的人们所固有的，数学头脑与非数学头脑是有根本区别的(300，第492页)。

他分离数学能力成分的尝试是很有趣的，尤其是他所列出的这些成分：(1) 一种“强有力的记忆”，但他所指的是“数学记忆”，即是对“与数学有关的那种对象”的一种记忆，其特征是对观念和思想的记忆而不是对事实的记忆（“日常”记忆或者音乐记忆可能是平庸的记忆）。(2) “智慧的敏锐性”，这是指把两个不相联系的思想领域内的一些概念“纳入统一观点”的一种能力，从已知事物中发现有什么相似之处的一种能力，在一些关系最远的领域中在一些显然是十分混杂的对象中寻找出有什么相似之处的一种能力。(3)思维的敏捷性(可用无意识思维推动有意识思维所进行的活动来解释；在作者看来，无意识思维的进程要快得多)。可惜的是，正如作者自己说明的，这些理论上的解释是推测的，主要用的是自我观察，而没有用实际材料来证实(300，第 49 页)。

莫达克海-波尔托夫斯基，还对推动“几何学家”、“代数学家”等各种不同数学家进行研究的种种数学想象，表达了他的想法。“算术家、代数学家和一般分析家的发现，是用一个个数学符号及其相互关系的最抽象的形式来完成的，他们并不能以几何学家所用的那种方式进行想象”(300，第 514 页)。这里也表明了关于“几何学家”和“代数学家”记忆品质的一些有价值的观点。我们将有机会回到莫达克海-波尔托夫斯基这篇文章的个别论点上来；现在我们仅指出他的许多建议所具有的价值。

A. F. 拉祖尔斯基的著作《个性的分类》一书，是致力于研究能力心理学的一般问题的(236)。但在另一本我们更有兴趣的选集《自然实验及其在学校中的应用》里，拉祖尔斯基直接涉及了数学思维和数学能力的问题。在这本著作中，他进行了有趣的尝试，企图找出学习数学的独特能力(235，第 168～169 页)。他和他的同事们分析了掌握算术的过程，找出了“一些在其他学科的教学中很少运用的心理机能”：(1) 思维的条理性和顺序性；(2) 思维的明了性；(3)概括能力；(4)机智的敏捷性；(5)在获得的数学知识与生活

现象之间建立联系的能力；(6) 对于数的记忆力。遗憾的是，作者对他所列举的那些"心理机能"，没有充分揭露其心理本质。所进行的讨论比较简单肤浅，而对有些"机能"(象机智的敏捷性)仅仅提及而已。对作者是在什么基础上正确地选出这些"机能"的，也没有论述。对促进上述某些心理机能发展的各种算术练习，作了简要而有意义的说明。拉祖尔斯基在讨论发展心理机能的种种练习时，阐明了一些有关的概念的内容。例如，有条理、有顺序的思维表现在：对解题过程的明了而连贯的描述上，解题的计划上，对于没有现成解题规则或诀窍的例题的解答上(通常的题目是依靠事先已学会的方法机械地解答的，而不是有意识地创造解题方法)。概括能力可以使人遇过许多特殊的具体的例题，发现一般规则并列出公式。当一个人有机会用特殊的例题说明规则或者按照规则自编题目对，就显示出能够在抽象思维和具体现象两者之间建立联系的那种能力。最后，数的记忆，不仅仅是指对数字本身的记忆，而且包括对数的关系的记忆和对算术术语的记忆。

在二十年代和三十年代初期(苏联心理学最初形成的时期)，能力问题的研究还受到两种观点和趋势的支配，不加批判地搬用当时流行的资产阶级心理学的学说和概念。在那些年代里，苏联的科学和教育浸透着所谓儿意学，这一学说把儿意的能力看作是遗传决定的不变的品质，它不仅致命地决定着儿童的发展，而且决定着他们生活和工作的前途。正是这些移植在我们苏联国土上的资产阶级科学原则，深刻地危害着真正的苏联心理学和教育学。反科学的资产阶级儿童学，出于阶级的利益，"证明"剥削阶级和"高等"人种代表者的特殊天才，同时也"证明"工人阶级和"低等"人种代表者的精神贫乏和注定了的命运。自然，不加批判地接受和输入哪怕是一点点资产阶级儿童学的观念到我们的心理学和教育学中来，即使作了一些保留和"修正"，也会给苏联科学和教育造成严重伤害。

在我们党中央委员会于1936年7月4日作出了"关于教育人民委员部系统中的儿童学曲解的决定"这一著名决议以后，对儿童学进行了清算，并且完全恢复了教育学作为一门科学的地位，苏联心理学家面临的任务，是对这门科学的基本原则进行彻底的再审查，并使这门科学摆脱任何反科学的理论。这样就使研究能力的实验方法的发展多少受到一点障碍。而且，有些心理学家走向极端，开始否定有必要探索研究儿童能力的实验方法，拒绝讨论能力诊断的客观心理学方法，这种观点是有害于苏联心理学精神的。

关于能力的苏联理论，是由一些最有名望的苏联心理学家通力合作而创建的，在他们之中必须提及的是B. M. 捷普洛夫(408, 409, 412, 413)，以及L. S. 维戈茨基(76, 77)，A. N. 列昂节夫(257, 258, 259)，S. L. 鲁宾斯坦(351, 352, 354, 355, 356, 357, 358)，和B. G. 安南耶夫(19, 20, 21)。他们最近提出了这样一个重要的观点，即能力的发展要与各种个性品质结合起来进行研究。近年来，A. G. 科瓦列夫和V. N. 米亚西谢夫，对能力问题一直在进行着有成果的研究(170, 171, 172, 173, 301, 302, 303, 304, 305)。

除了对能力问题的一般理论的研究外，B. M. 捷普洛夫在他的专著«音乐能力心理学»一书中(411)，开创了对特殊类型活动的能力结构的实验分析。捷普洛夫研究工作的价值，超出了音乐能力的本质和结构这一局部问题；他还对有关研究各种特殊类型活动的能力的原则等基本问题作了回答。与传统的方法相反，能力问题被认为主要是质量问题而不是数量问题。这就对研究能力问题的方法在原则上引起了新的探索：注重力主要应集中于发现各种活动能力在质上的特征，以及发现显示出某种活动能力的那些人在质上的个别心理差异。

跟在这一研究后进行的类似的研究，有关于艺术活动(V. I.

基林科，168；E. I. 伊格纳捷夫，142），文艺能力（A. G. 科瓦列夫，172；V. P. 亚贡科娃，468），教学能力（N. V. 库兹敏娜，228；F. N. 戈诺鲍林），技术工程能力（P. M. 雅科布松，472；N. D. 列维托夫；V. N. 科尔班诺夫斯基，176a），以及数学能力（V. A. 克鲁捷茨基）等方面的研究。

N. S. 列伊捷斯的著作《勤奋是才能的因素》（254），开拓了能力研究的另一个方向（对儿童期才能的个别实例的仔细描述和研究）。列伊捷斯从这些实例的研究中分析出才能的一个基本因素：勤奋好学、积极用脑。他研究的所有有才能的学生都有强烈需求脑力活动的特点。

在S. L. 鲁宾斯坦（352，353）领导下，开始了对思维基本原则的研究，揭示了描理过程的机制，并涉及一些智慧能力（包括数学能力）的问题。在鲁宾斯坦作出理论上的研究和概括之前，苏联心理学把思维基本上看作是运用以前所形成的概括与方法。鲁宾斯坦指出，问题在于研究概括过程的本身（即"探究"过程），在于研究独立地达到新概括的能力（这也是智慧能力的基础）。鲁宾斯坦的目的不在于研究思维活动的结果，而在于研究达到这一结果的过程。

在鲁宾斯坦的指导下，进行了很多研究，以揭示解决问题的思维过程的机制，并描述了分析，综合和概括的过程。K. A. 斯拉芙斯卡娅（379，380，381），在研究高中学生和成年人对几何题的解答时指出：一个问题的解法向另一问题的"迁移"，依赖于一种综合的作用，在这种作用下对两个问题进行比较，然后把它们并入一个单一的分析-综合活动中。A. M. 马丘什金（280，282，283）研究了分析在概括关系中的作用（用数的位值制）。

鲁宾斯坦和他的同事们（L. I. 安齐费罗娃、A. V. 布鲁希林斯基、E. P. 克林奇克、N. A. 曼苏罗夫、A. M. 马丘什金和K. A. 斯拉芙斯卡娅）的研究，得以把两种本质上不同的分析形式（所

谓过滤式的分析和通过综合的有方向的分析①）区分出来而加以仔细研究。

在 A. N. 列昂节夫的领导下完成了大量思维的实验研究(256)。一些创造性思维的问题被澄清了——特别是当一个人对问题的答案并不直接来自问题提供的条件时，他如何获得解决问题的想法。对于足以引起"猜测"或者"灵感"的某些情境（例如"指导性"练习的作用），进行了实验研究，由此得出一个有趣的关系：为导致正确解题而进行的辅助性练习，其效果大小，随着这些练习是在解决基本问题的哪一阶段上给出的而不同。

我们列举的所有研究，揭露了"猜测"和"急智"的本质和前提，这些心理品质，通常都被认为是一个具有高度智能水平的人的思维特征。

我们应该注意到与能力问题有关的苏联思维心理学的另一个重要趋势。有一个学派的代表者们所根据的是巴甫洛夫的某些论断，其大意是：理解、知识、思维是暂时联系的形成，而一切教育就在于形成这些暂时联系。根据这一解释，教育过程就是要形成以复杂方式相互作用的无数不同联系及联系系统，并使它们发挥作用，而"学习"能力（特别是数学能力），就是形成各类联系的能力。研究的目的在于探究联系的类型和它们的合成，对联系进行分类，并研究形成这些联系的规律。

P. A. 舍瓦列夫 (440, 441, 442, 443, 444, 445, 446)，以暂时联系理论的观点分析解代数题的推理过程，得出一个重要的结论，即是随着学生对数学推理过程和解数学题技能的熟练掌握，他们将渐渐意识不到所用的法则，虽然他们能正确地遵守这法则。推理过程渐渐缩短或"简缩"，有时甚至消失，虽然这一过程依然是进行运算的基础。暂时联系学说把这种情形解释为"符合规则"的概

① 参看谢·列·鲁宾斯坦《关于思维和它的研究道路》，上海人民出版社 1963 年版，第 29 页正文和 98 页脚注。——中译者注。

括化联系回路的闭合，这种联系回路的存在就简化并加速了解题的过程。这些联系之所以称为概括化的，是由于这些联系在所有类似的情况下都会实现，虽然这些情况的具体特征不同；它们是具有共同特性但外表不同的各成份之间的联结。这些联系之所以称为符合规则的，是因为每一个这样的联系都对应着一条确定的规则。这种联系的实现所产生的结果，与应用规则所产生的结果相同：受试者是按照规则演算的，尽管他不知道这种规则。这些联系的实现导致"简缩了的"演绎过程。推理过程和解题步子的速度与质量，被认为是直接与"简缩"演绎过程的存在和作用有关。对于上述情形，N. A. 梅钦斯卡娅在分析解算术题的过程时 (289, 290, 291)作了综合的说明。

N. F. 塔莉金娜(401)和 A. V. 斯捷潘诺夫(393)对几何题材的研究以及 L. P. 多布拉耶夫对自编方程式和解答方程式的研究，其目的都在于区分出作为解各种题目过程基础的各种类型的联系，并加以分析。塔莉金娜鉴别出两种类型的联系。第一类联系的实现，导致揭露所示几何图形及其元素的特性。第二类联系的实现，导致解题所必需的运算。多布拉耶夫区分出他叫做"暂时性"的联系，为了解答某一问题，这些联系在一定时间内建立并发生作用。斯捷班诺夫企图揭示，所谓学生的数学发展是由那些联系所制约着的。他研究了学生解证明题所采用的过程，得出这样的结论：数学上较高水平的发展，其基础就是联系回路的易于闭合和实现"相互关联"的联系的机会，正是这些"相互关联"的联系，把学校课程的不同部分的教材联合了起来。

简缩过程实际上是怎样完成的？促使推理过程缩短的原因是什么？这些问题，在 N. K. 英速克(145)和 A. N. 素科洛夫(387, 388)的著作中，以及在上述塔莉金娜和多布拉耶夫的研究中得到了详细的说明。他们表明，在推理中首先"出现"的是其根本的成份(这些推理成份说明为什么一个人必须按特定的方式而不是按

其他方式行动),而在意识中保持得最久的是推理中运算性成份(这些成份与领悟同已知问题的条件相联系的理论性情境的运算直接有关——所回答的是要做什么和怎样做的问题)。

Yu. A. 萨马林研究了在较广的框架中心理活动的联系的性质(362, 363, 365)。他按照联系的系统性对联系进行分类(把联系组合成不同水平的系统)。他区分出并研究了:(1) 个别现象之间的"局部"联系,或者初级联系;(2)"有限系统"的联系,存在于学校课程中个别课题或某一部分范围内;(3)"系统内部"的联系,按照一定原则使各联系系统化;(4)"各学科之间"或"各系统之间"的联系,这是在学习各学科的基础上形成的。

B. B. 科索夫在舍瓦列夫领导下所完成的研究 (190) 特别有意义。这位研究者发现,第一信号系统占优势的受试者,在解代数题时某些运算(特别是在改变同一类题目中无关的特征时)受到阻碍,而第二信号系统占优势的受试者并没有感到这些困难。

最近几年, N. A. 梅钦斯卡娅和她的一组同事们成功地研究了心理发展的问题, 这些研究起因于梅钦斯卡娅和 D. N. 波果亚夫连斯基的命题,其大意是:心理发展首先与暂时联系系统的积累(知识的储备)有关,其次,与熟练掌握并十分巩固的智力活动方式的大量积累有关,这些智力活动方式是属于智力技能方面的。

在这一组教学心理的研究中, 从不同的观点分析了学生在解各种学科问题时的心理运算。研究了思维的基本运算 (分析和综合, 抽象和概括), 并区分了它们的水平。这类研究中, 最新的是 G. P. 安东诺娃的研究(30, 30a), 她根据对小学生在解算术题和其他问题时所应用的过程的研究,鉴别出三种分析-综合活动的水平(与创造性思维的水平有关)。按照梅钦斯卡娅的术语, 这三种水平相当于初级的、复杂的和预期的分析水平。这三种水平基于:(1) 分析与综合之间的联系;(2) 这些过程赖以进行的方法;(3) 分析和综合的完整性。

梅钦斯卡娅的同事们在研究解题过程中的分析和综合水平的同时，还正在研究作为运算系统的智力活动方式，这些智力活动方式是为解决某一学科范围内某种类型的问题，或解决来自各门学科的范围广泛的一系列问题而特别形成的。运算、方法及其体系的迁移是学生心理活动的标志。E. N. 卡班诺娃-梅勒 (148)，D. N. 波果亚夫连斯基(43, 44, 45)和 S. F. 朱伊可夫，对这一方面一直在有目的地进行着研究。特别是，卡班诺娃-梅勒(148)正在设计特殊的和一般的心理活动方式，这项工作与心理发展和心理能力的问题直接相关。她指出，心理活动方式的广泛而积极的迁移，是学生心理发展的标志。她把"各学科间的方法"所概括的心理活动方式的形成，看作是心理发展的一个条件(147)。

梅钦斯卡娅和其他许多心理学家们对概括过程的研究，特别是对把一道算术题归类或确定其类型的过程的研究，从我们的观点来看，也是很重要的。梅钦斯卡娅(291)表明，辨认一个题目的类型，是同辨别它的有关特征及从无关的特征中抽出有关的特征相联系的。分离出一般类型的数量关系和指出一个题目是属于某一类型，两者都依靠题目本身的特征，并依靠学生对该题目类型的概念掌握得怎样。Z. I. 卡尔米科娃 (154, 155, 156) 研究了题目类型的概念的形成过程，这种概念的形成是在大量解某一类题目的过程中逐渐辨认并概括出这一类问题的有关特征和解题指导原则的结果。V. L. 亚罗休克(475, 476) 在研究把算术题目归类过程中的个别特征时指出，学生解题成功与否的差异，主要取决于按照题目类型把题目归类的能力。

L. N. 兰达的一系列研究与能力问题直接有关。在他的一系列著作中有一本早期著作《关于学生思维研究中的某些缺陷》(240)，在这本书中，兰达认为有必要揭示"思维技能"的心理实质和内在机制。在兰达看来，培养能力意即"训练思维方法"、形成分析-综合活动的技能与习惯。在另一本著作《关于智能发展的一些

资料»(238)中，兰达揭示，学生在掌握解几何证明题的新的推理方法方面，主要的个别差异有：学习新推理方法所需要的练习次数上的差异，证明步子上的差异，根据题目中条件的性质选择不同运算的这一能力形成上的差异，运算掌握上的差异。

兰达的另一系列著作是关于教育实验方面的：七、八年级学生在独立证明几何定理和合理思维中推理方法和技能的发展(237, 239, 241, 242, 243, 244)。在这些著作中，值得我们注意的不仅是关于进行上述教学的可能性的结论，而且还有下述事实：在这方面也出现了主要的个别差异，这些差异如果不是全部地，也至少可以部分地归因于学生能力上的差异。

D. B. 叶利科宁、V. V. 达维多夫(110, 460, 461)、L. V. 赞科夫(129)和 A. V. 斯克里普钦科(375, 376)等所进行的研究，对关于一般智能以及特殊的数学能力的理论都很有价值。所有这些研究都证明，在学习方面，包括数学学习，小学生的潜在智能明显地比人们所想象的要大得多。通常都认为，7～10 岁之间的儿童的思维是具体和形象的，抽象能力根低。在叶利科宁和达维多夫指导下的教学实验表明，在小学一年级，用特殊的教学方法，可以教给学生关于数量之间的关系和相互依存的一系列知识，而且能引导他们使用形式符号，即用字母来进行运算，这就是说，这种符号具有一般的形式。斯克里普钦科指出，在类似的情况下，三、四年级学生能够发展通过列出一元方程来解算术题的技能。不过，必须说明，个别差异的问题(这是能力心理学一个基本问题)超越了这些研究者的科学兴趣范围。

教学心理学中还有一个关于思维的学派是值得注意的，这一学派与加里培林的心理活动理论有关，这种心理活动理论是以 L. S. 维戈茨基和 A. N. 列昂节夫的一个观点为基础的。按照这一观点，在一个人的个体发展中，他的活动被内化了；外部活动渐渐转化为内部活动、智力活动。一个孩子最初进行的是外部活动，“只

是在后来，由于外部活动的渐渐转化（概括化，外部活动步子特有的简化，以及外部活动所进行的水平的变化），外部活动才得以内化，亦即外部活动转化为内部活动，这时内部活动就完全在孩子的头脑中进行了”（A. N. 列昂节夫，259，第304页）。

在上述基础上由加里培林建立的理论以及在教学中形成心理运算的教学法原则（78, 79, 80, 81），又经塔莉金娜加以发挥（399, 400, 402, 403）。这种理论和教学法原则，都与教学控制的组织方式有关，也就是，都与对知识和运算的发展过程加以控制的组织方式有关。虽然我们赞成这种心理运算形成理论的目的和实际应用，但还是想指出，在我们看来难以否认的事实是：这一理论抛弃了个别差异问题，因此，也抛弃了能力问题。

加里培林和他的同事们在形式上并没有抛弃能力这一论题，他在《关于心理运算假设的一些说明》中写道：“这样一个系统化的心理运算的形成，是否否认了能力和能力差异的存在呢？当然不是，它否认的并不是能力和能力的差异的存在，而是滥用能力的概念来为教育中的缺点辩护”（78，第144页）。但事实上，能力问题却被排除在这些研究之外。最初，研究者们显然强调，教学成绩几乎完全依赖于教学方法，并且强调，运用这教学方法，“每个学生”，很少例外，都获得“万无一失的成果”；个别差异就被滑过去了。后来，个别差异被注意到了，但又产生了一个惯常的问题（梅钦斯卡娅提出）：假如同一教师运用同样的发展心理运算的方法教同样一些学生，那么，如何解释对不同对象会有不同的教学效果呢？为什么在其他条件相同的情况下，有些学生形成“十分完满”的心理运算，而另一些学生却形成“有缺陷”的心理运算呢？

加里培林的回答是：“由于有如此众多的因素影响教学的总效果，因而把教学效果的差别直接归因于学生能力上的差异是愚蠢的”（78，第144页）。后来，他又说，只有当一个教师在心理运算形成过程中成功地完全消除缺点时，才能提出能力问题（78，第

145 页)。正是在这里，能力问题实际上被取消了，因为在科学发展的现阶段上，这一问题的研究被加里培林宣布为非法的了。

自然，最值得我们注意的，是探讨各种数学能力(这些是包括在能力这一复杂结构中的成分)的实质和结构的那些著作。苏联心理学中(不包括我们的研究)，直接接触到这一问题的一本几乎独一无二的著作，是 A. G. 科瓦列夫和 V. N. 米亚西谢夫合著的《人的心理特点》第二卷《能力》(174)，总共大约只有二十页(第144～164 页)谈到数学能力，但内容十分有趣。科瓦列夫和米亚西谢夫区别出一些"决定数学活动中心理过程特征的依据：(1) 在发展的最初阶段是对数的运算的爱好，随之而来的是对解数学题的爱好，在更高的发展阶段是对数学问题的爱好与兴趣；(2) 迅速掌握计算和算术法则；(3) 一种与众不同的思维品质，其特征是抽象思维、分析-综合活动、以及组合能力的发展，这种品质特别明显地表现在对数和符号的运算方面；(4)在学习数学过程中日益显示的解数学题的独创性，以及随着创造能力的日益提高，再现能力和创造能力的相关性；(5)在数学上刻苦努力的主动性和能力；(6)从爱好和兴趣向热爱转变，以致数学研究成为一种内心倾向；(7)数量很多和质量很高的活动，使成绩日益超过与自己同侪的人"(174，第 151 页)。

事实上，这正是顺利地掌握数学活动所需要的"全部品质"，科瓦列夫和米亚西谢夫在很多著作中发挥了这个观点。这个品质表中，最值得我们注意的是第(3)和第(4)两项，这两项可能最好地表明了数学思维的本质。应当指出，所列举的品质也是多种多样的。表内包括的各类品质中有几类内容很狭窄，如第(2)项，而有几类内容又很广泛，如第(4)或第(7)项；有几类是很基本的，如第(2)项，而有几类又十分复杂，如第(3)项；有几类较为明确，如第(5)或第(6)项，而有几类又比较不明确，如第(4)或第(7)项。

梅钦斯卡娅和她的同事们的著作是值得注意的，在这些书中，

运用了从研究掌握算术的个性品质中得来的材料，从中提取了算术能力(虽然作者避开这个术语)的成分。梅钦斯卡娅在《算术教学心理学》这本书中(她早在四十年代的著作中就发表过关于这一专题的见解，参见《解算术题的智力活动》一文，289)，以很多观察和实验为基础，挑选出"心理活动的性质或品质，并设想这些品质可作为区别学生的基础，而且它们在算术学习的进展中起一定的作用"(291，第375页)。她列举了这些性质：(1) 掌握学校算术教材的快慢；(2) 思维过程的灵活性(学生为适应变化了的题目条件而重新组织心理活动的难易)；(3) 思维的形象成分和抽象成分之间联系的松紧。梅钦斯卡娅倾向于把这些作为"算术方面的可教性"(而在我们看来，这正是掌握算术的能力的成分)。

在与M. I. 莫罗合写并发表于1965年的最近一本著作(292)中，梅钦斯卡娅在描述掌握算术的过程时广泛使用了"能力"这一术语。梅钦斯卡娅和莫罗描述了两种学生，即学习算术能力高和低的学生(292，第188～222页)。前者的特征是学习速度快，后者慢。速度快是与迅速的概括，即较高水平的分析-综合运算有关的，也与思维的多面性(灵活性)有关。学习速度慢是由于概括能力弱和思维迟钝(不灵活)所致。在G. P. 安东诺娃在梅钦斯卡娅领导下所完成的研究中(30，30a)，学习算术能力的特定性质问题，在一定程度上得到了解决。安东诺娃把"思维的效率"作为一种可教性的指标(其实，那是一般智能的一种指标)来加以研究，发现小学三、四年级学生的思维效率有显著的个别差异。一个学生在不同类型的活动中解不同种类的题目时，表现出同等的思维效率，这一情形使安东诺娃得出这样的结论：娃所涉及的纯粹是一般智能的表现。

卡尔米科娃对于中小学生掌握算术和物理的资料作了重要研究，这些资料与她所设想的学习进展速度的概念有关(150，151，152，153，158，159，160，161)，她设想学习进展速度依赖于学习新概念所需要的练习次数。在卡尔米科娃看来，学习进展的速度

取决于心理发展的水平。实验表明，学习进展的速度有很大的个别差异，从而表明心理发展水平也有很大的个别差异。（在一个研究[159，第43页]中，需要加以概括的具体实例的差距，从0到88）。学习进展的速度决定于形成新的概括化联系的速度，决定于从一个概括化联系系统向另一个概括化联系系统转换的速度（灵活性），并决定于区别不同的概括化联系的速度和准确度，但学习进展的速度并不与这些联系的稳定性相关（160，第181～182页）。卡尔米科娃最近研究的一个新的方面，是她试图把学习进展的速度看作是学生学习能力的指标，这就是说，把它看作是一个诊断性测验标准（159，第49页）。这当然是但得注意的。

特别有价但的，是苏联数学研究家们探讨数学能力某些方面问题的、那些为数不多但非常重要的著作。对心理学家来说，真正重大的价值在于这些著作是由数学专家们写的，他们讨论数学能力的成份及其发展条件时，能比别人提出更多的正当理由来加以论证。他们根据对数学作为一门科学的描述，根据他们自己的经验，根据他们训练出一批出色的有创造性的青年数学家的经验，讨论了一个人得以在数学领域成功地、创造性地从事工作面应具备的品质。

著名数学家 A. Ya. 辛钦在他的“数学课的教育效果”一文中（426），关于数学思维方式的特有品质是这样写的：（1）推理的逻辑结构占优势；（2）思路简洁（经常努力探索导向目标的最简捷的途径）；（3）把推理过程分解成条理清楚的一些步骤；（4）准确理解符号（每一个数学符号都有一个严密规定的含义）。在这篇文章里，辛钦还提及数学思维所特有的推论的高度价值，这种推论特别不能容忍不合逻辑的概括或者没有根据的类推。

在柯尔莫戈罗夫院士的《论数学家专业》（180）的小册子中，有以“论数学能力”为标题的专门一节（可惜只有三页）。柯尔莫戈罗夫指出，掌握中学课程范围内的数学，甚至掌握高等数学原理（加果

"有好的指导或好的教科书"),只需要普通中等水平的能力就可以了。但要成功地掌握较高水平的数学,作为将来的专业,就需要有良好发展的数学能力,因为大家知道,"不同的人是以不同的速度、不同的难易度和不同的成败率来领悟数学的论证、解决数学问题……以及获得新的数学发现的"(180,第9页),同时人们应该力求使那些将在数学领域工作得最好的人成为数学专家。柯尔莫戈罗夫后来提到了数学能力的成分,他区分出:(1) 熟练地变换复杂的字母表达式的能力,找出成功的方法来解不符合标准法则的方程式的能力,或者用数学家的语言,叫做计算或"算法"的能力;(2)对几何图形的想象力或"对几何图形的直觉";(3)精通连贯而又适当分段的逻辑推理,特别是,对数学家最为重要的逻辑上成熟的可靠标准,是对于数学归纳法原则的了解和熟练运用的技能。

与普遍流行的意见相反,柯尔莫戈罗夫还谈及与数学能力无关的一些心理活动的特征,例如,机械地记忆大量事实和公式的能力,或者在一个人的头脑里加或乘一长列多位数的能力。柯尔莫戈罗夫在结论中指出:数学能力的各个方面是以不同的组合方式出现的。他指出数学能力通常较早地就表现出来了,并需要继续磨炼,这一看法也是很有价值的。

苏联科学院院士 B. V. 格涅坚科在许多出版物中(92, 93, 94)指出数学思维的种种必要条件:(1) 发现推理中疏忽之处的能力和发现证明中短缺必要步骤的能力;(2)成熟的逻辑论证的习惯;(3)能把推理过程清晰地划分成几个步骤;(4)简洁的表达方式;(5)精确地使用符号。

教学法专家和数学家 S. I. 希伐茨伯德,在"论发展学生的数学兴趣、爱好和能力"(439)一文中,在概述教学法文献时,考察了许多数学发展的成分:(1) 空间概念的发展;(2) 善于把本质的与非本质的东西区分开来,善于抽象和抽象思维;(3) 善于把一个具体情境转变为对问题的数学表述,设法简明地表达事情的本质;

(4)善于演绎思维；(5)善于分析、研究特殊情况；(6)善于把科学的结论应用于具体材料；(7)善于评论和提出新问题；(8)数学推理能力的充分发展；(9)解数学题时非常耐心(439，第33页)。以上列举的性质和特点显得没有一定的体系，把真正的能力和技能、习惯以及个性品质并列在一起；有几种品质是数学活动所特有的，而另一些品质只具有很一般的意义。但上列各点，作为试图按照经验分离出有助于成功地掌握数学这门学科的某些品质的一种尝试，仍然值得重视。

最后，我们将探讨N. I. 科范佐夫的"数学能力是天生的吗？"(175)一文，这位数学专家、大学教授，对一般能力和特殊的数学能力的性质，以及对一个人心理上先天的和后天获得的东西之间的关系，提出了值得注意的意见。文章中涉及数学和数学能力的各节，当然是最值得我们注意的。在高等学校中二十多年的数学教学的经验，使作者可据以对自己的问题给以肯定的回答。他相信数学方面的创造能力(不同于"一般学习"的能力倾向)是先天的。我们将不挑剔他的术语，或者责备他复活了已被摒弃的唯心主义的能力先天说。从他的文章内容可以断定，作者正是在谈论数学能力的先天固有的倾向，这些先天倾向是各人不同的，是发展创造性的数学活动能力所必须具备的一种条件。按照这种解释，这篇文章原则上不会引起我们的反对。

在结束我们对有关数学能力问题的苏联心理学和教育学文献的概述时，应该指出，尽管在这一领域或者相近的领域有很多十分有价值的著作，但数学能力心理学还仍然没有得到充分阐明，特别是关于数学能力的本质和结构，这一结构发展的年龄动态，以及结构的各种类型，我们还没有明确的见解。没有这样的见解，也就不可能去设计诊断数学能力的客观的心理学方法，也不可能揭示在不同年龄阶段形成和发展数学能力的最适宜的条件。在下文，我们将力求填补这一空白。

4 研究的问题和目的

关于能力一般理论的几个问题

虽然我们并不想要把我们的研究工作，转向详细地阐明有关一般能力心理学的理论问题，但我们认为，对这些理论问题提出自己的观点是极其重要的，因为这种观点在很大程度上决定着我们探讨数学能力问题的途径和我们的研究方向。

关于人的能力学说的真正科学基础，在马克思、恩格斯的著作中已有所论及，他们提出了关于人的能力的社会历史性的论点(1, 2, 3)。苏联心理学家们遵照马克思列宁主义奠基人的一些著作，据以出发的立场是：对人的能力的发展，正象对人的整个心理那样，起决定性作用的是社会历史性原则。

苏联心理学家从马克思主义的立场出发，解决了能力心理学中一个最复杂的问题：能力的先天性和习得性之间的关系问题。苏联心理学关于这个问题的最基本的观点是：认为社会因素在能力的发展中具有决定性效力；人的社会经验(人的生活和活动的条件)起着主导作用。各种心理品质不可能是与生俱来的。同样可以说各种能力也不是天生的。各种能力总是发展的结果，它们是在生活中，在活动、教育和训练过程中形成和发展起来的。

按照 A. N. 列昂节夫的观点，当个人主动地掌握前人的经验时，各种心理机能，特别是人的各种能力，就在个体发育中形成和

发展起来(257, 第 28 页; 258, 第 11 页; 259, 第 305 页)①。人生来就只有一种能力：那就是形成人类特有的各种能力的那种能力(257, 第 39 页)。

在这一方面，具有重要意义的，是在列昂节夫指导下通过实验形成某些感觉能力的研究，例如，对一些被严格确定为不能辨别音调的人进行的形成音调听觉的研究 (257, 258)。列昂节夫强调指出："当然，这与实现，例如，识别逻辑关系或数学关系等行为有关的大脑机能系统的形成过程，是不同的"(257, 第 38 页)。但是，最重要的，是实际上确认了人的各种心理特性及各种机能器官的形成是人的一生的过程这一命题。

因此，社会经验，社会影响和训练起了决定性作用。那么，先天特性的作用又是什么呢？

当然，就每一项特定能力的形成来说，要确定先天性和习得性的相对作用是困难的，因为两者是融合在一起而难以区分的。但是苏联心理学对这一问题原则上的解答是：能力不可能是与生俱来的；只有能力的素质——大脑和神经系统的某些解剖的和生理的特点，才是一生下来就有的。

然而，这些先天的生理因素在能力发展中的作用是什么呢？先天的特性在能力形成和发展的复杂过程中是重要条件之一，这就是它们为什么被称为"素质"的原因。正如 S. L. 鲁宾斯坦指出的，能力不是预先注定的，但也不能纯然从外面移植进来，能力发展的先决条件、内在条件，可设想是存在于各个人之中的 (356, 第 4 页)。A. N. 列昂节夫和 A. R. 鲁利亚也谈到，素质是使能力得以产生的必要的内在条件(259, 第 288 页; 263, 第 110 页)。

但是，承认先天素质的实在效力，决不意味着同意能力的发展

① 列昂节夫谈及有必要区别人的两种能力：自然的或天生的能力(生物根源的能力，如迅速形成条件反射的能力)和人类特有的各种能力(社会历史根源的能力)(258)，在后面我们仅对人类特有的能力进行讨论。

是由先天的特性所命定的：这是苏联心理学家们的普遍观点。能力并非包含于素质之中的，能力并不是由内向外显露出来的，而是在个体发育中形成的。一种素质并不是一种潜在的能力（一种能力也不是一种发展了的素质）。因为一种解剖的或生理的特点在任何条件下决不可能发展成为一种心理的品质。还应该指出，固有的先决条件本身就是历史发展的产物。以一定的素质形式移植于神经系统并代代相传的东西，也都是长期种系发生发展的结果。

在A. G. 科瓦列夫和V. N. 米亚西谢夫的著作中（173，第192页；174，第61页），对素质作了稍微不同的解释。他们把素质解释为心理、生理的特征，特别是在掌握一定活动的最早阶段所表现出来的那些特征（例如，识别颜色、视觉记忆等）。换言之，素质是一种原始的天赋能力，还没有发展，但在一定活动的最初尝试中会自行表现出来。不过，即使在素质的这一解释中，也还保留著这样一个最基本的观点：就能力这个词的本来意义而言，各种能力是在活动中形成的；是在一个人整个一生中形成的。

素质这个概念，按照看待它的方式，也可以作为谬误的、反动的能力概念的理论依据。正如鲁宾斯坦所指出的（351，第289～292页；355，第127～128页），这样的素质概念包含于下面的见解中：每一种能力，在大脑形态结构的固定特点方面以及在神经系统方面，都有其预先形成的素质。根据这些见解，能力就是机体形态特点的具体化。这是不能接受的。

关于"素质"概念的特定意义可以说些什么呢？当人们谈及能力的素质时，通常首先是指神经系统的类型特性。这些类型特性对心理能力的特定的重要性问题还不清楚。对这一问题只能表述最一般的看法。

正如我们所知，神经系统的类型特性是人们之间个别差异的天然的基础。在这个基础上，产生反映外界影响的各种暂时联系的高度复杂的系统。这些暂时联系形成的特征（它们的形成速度、

强度、分化的难易度)依赖于类型特性。它们决定着集中注意的力量和智力活动的潜能。

N. E. 马尔科夫在一篇提出有成效的心理活动的天赋素质问题(272a, 第 39 页)的文章中，讨论了神经过程类型的个别差异在心理能力上的表现，马尔科夫深信，类型特性产生心理活动过程的动态特征。他举出下列例子作为其观点的依据：作为乘法表知识基础的是一定的暂时联系系统，后者在结构上对每一个人来说都是相同的。不过，对每一个人来说，按照其神经系统的特性，这些联系系统的功能(准确度、速度、强度)就各不相同了。马尔科夫主张，记忆的快慢，保持的分量，再现的准确度，分化的程度和关系的概括性，都是神经系统特性的功能，他建议把每一个心理过程或心理特性的结构看作是一个暂时联系系统，把这些心理过程或特性的动态特征，看作是神经过程特性的功能。马尔科夫的观点值得重视。但必须指出，还没有人能对心理活动的动态特征和相应的神经系统特性之间的直接关系加以证明。当然，一个数学家的工作速度，可能受制于他的神经过程进行的速度。但是，当我们谈到能力"进步的快慢"或"进步的节奏"的时候，那就不是上述那种"速度"问题了。一个人可能工作做得慢，但在学习一项课题时却进步迅速，反之亦然。这种情况多次出现，我们就会注意到有必要把一个人做工作的速度与他的进步速度，把他的工作速度与发展速度区别开来。

此外，如果把神经系统类型特性看作是一般心理能力的素质，那么把类型特性作为素质，对特殊能力(如数学能力)究竟有何重要性，就难以作出确切的说明了。有一项情况是清楚的：数学家是一些具有极其不同的神经系统类型特性的人们。

许多研究工作表明，除了作为整个神经系统特点的一般类型特性外，还有一些作为大脑皮质上个别区域活动特点的特殊的类型特性，这些显示在同各分析器和大脑系统有关的方面(捷普洛夫

和他的同事们)。与决定着气质的一般类型特性相比,这些特殊的类型特性,对特殊能力的研究可能有很大的价值。在我们看来,捷普洛夫的观点(407,第74~75页)是既正确又具有远见的。

我们还必须把第一和第二信号系统的相互关系,看作显示一般能力和特殊能力的素质——虽然第二信号系统特有的各种生理机制还有待于研究。各种分析器的生来特性几乎不容置疑地是一些特殊能力的素质(但当然,这不适用于数学能力)。最后,人们还必须探索在大脑两半球皮质结构的个别差异方面的各种素质,在这方面,现代脑细胞结构科学已为我们提供了资料。

然而,在能力的发展中,素质的特殊作用究竟是什么呢?说素质是能力发展的"条件"或"先决条件",这几乎并没说明什么。这些"条件"的实际效用是什么呢?素质的存在与否,对各种特殊能力实际上有何意义呢?

显然,必须根据人们所考虑的究竟是一般水平的能力还是有才能的人的杰出能力,来不同地看待素质的作用。比如,每一个正常的人,对于发展掌握中小学数学课程的能力,都具有足够的素质。但是,对于发展与科学创造和新的发现有关的较高水平的数学能力,并不是每一个人都具有相应的素质。

必须指出,虽然苏联心理学家一致认为能力是在整个一生中形成的,并否定它的先天性,但他们在能力理论的某些基本观点上,仍然有一定的分歧。

科瓦列夫和米亚西谢夫比其他的心理学家们更倾向于认为,能力发展的先天方面和天赋的先决条件多少具有稍大一些的重要性。J. I. 基林科(168,第18~23页)可以说也有同样的看法。显然,B. M. 捷普洛夫和S. L. 鲁宾斯坦的看法也可以列入这同一类。

A. N. 列昂节夫和他的同事们更倾向于强调培养在能力形成中的作用。当然,认为培养起决定作用的观点是很先进的,就这一

点来说，列昂节夫的观点必须予以肯定。但依然给人留下这样的印象：在许多事例中，未免把生活条件和培养的作用绝对化和实体化了①。显然，这种见解是很自然地从列昂节夫所表述的素质概念中得出的，他把素质当作这样一种天赋的先决条件，在能力的形成过程中这些天赋的先决条件只与一些个别特性的形成有关；而对于可能达到的成就的内容和水平，则毫无影响(257, 258, 259)。例如，列昂节夫以充分的理由指出，上述情况就是天赋的高级神经活动类型的影响。这是正确的，但素质概念并不是高级神经活动类型所能概括无遗的。

假如我们认为人们各种能力差异的原因仅仅在于他们的生活条件和培养的不同，那么我们似乎只能作出这样的结论：由于理想的教育和培养，任何正常的人在任何活动中都能达到任何水平，——通过培养，可以使任何人发展任何能力，发展的可能性几乎是不受限制的。假如一切才华只依靠培养，那么人们显然应该作出这样的结论：罗巴切夫斯基之成为数学家，柴可夫斯基之成为作曲家，普希金之成为诗人，似乎都只是归因于他们的生活与活动的环境。要是调一种环境，那么情况就会完全不同了：我们所认识和尊敬的就会是数学天才普希金和伟大的作曲家罗巴切夫斯基。然而，所有经验、实际生活、以及科学和艺术的权威代表们的意见，都证明是另外一回事。例如科学院士柯尔莫戈罗夫写道："比如说，从事数学研究、物理实验和构思新设计的才能，不是自然界赋于每个人的。任何坚持不懈的努力都不能代替这种天赋。只有当勤奋与天赋相结合，才能在科学上产生真正有价值的成果；同样，没有坚持而集中的努力，当然天赋也不会有什么成就"(179)②。院士 M. A. 拉夫连节夫(233)和 B. 康士坦丁诺夫 (185) 都曾论述"天赋特性"和"天赋才能"。S. L. 鲁宾斯坦以充分的理由断言，能力及其发

① 参见"列昂节夫访问记"，苏联《体育杂志》，1964年，第5期。

② 柯尔莫戈罗夫在讨论天赋时，显然考虑到能力的整个天然素质。

展并非完全取决于外界环境和外界影响(356)。

我们同意 V. I. 基林科所陈述的这一观点："教育方面的乐观主义并不在于断言，通过正确的教育和培养，每个人能够无限制地发展任何一种能力……，而在于承认并没有毫无所能的人。通过对一个人的全面发展创造种种有利的机会，我们就会帮助每个人展现出最突出的能力"(168，第 19 页)。

对能力的辩证唯物主义的解释，并不否定人的能力有个别差异。人们的能力并不是相同的。马克思坚决反对认为在共产主义制度下人们的能力将会被拉平的那种见解。列宁十分明确地指出："期望社会主义社会的人们在力气和才能上平等是愚蠢的"(6，第 139 页)。

让我们思考一下马克思列宁主义奠基人的这个指示：即使所处的社会制度对每个人的发展、教育、培养都能提供理想的条件，人们的能力仍不会一律平等。每个人的个性将获得全面和谐的发展，但能力的水平却不会拉平。然而，如果在外界对发展提供了理想的条件后，各人的能力还是不相同的话，那么，这就只能有一种解释了：这就是由于存在着天生的先决条件，它们之所以是能力发展的"条件"，不仅是因为它们给发展过程以独特性，而且还因为它们在一定的限度内会决定能力的内容，并且会影响成就的水平。

马克思在当时曾表述过这样的思想"每一个有拉斐尔的才能的人都应当有不受阻碍地发展的可能"(3，第 458 至 459 页)①。正如我们所理解的，马克思决不是断言每个人都能无限制地发展任何能力。并不是每一个有机会不受阻碍地使他自己发展的人，都可能成为拉斐尔——只有"具备成为拉斐尔那种可能性的人"，即具备适当的天赋素质的那种人，才有这种可能。当然，在数学方面也会出现同样的情况：要成为一个加罗伊斯或者罗巴切夫斯基，在某种意义上，他必须"本身具备他们那样的苗子"。同时，马克思并

① Raphael，文艺复兴时代意大利画家。——中译者注。

没有指出，要成为一个普通的美术人员或音乐人员，必须“本身具备苗子”。在这种情况下，天赋素质似乎只具有较小的效力。

我们相信，素质问题可以通过考虑素质会以不同的形式出现而加以适当解决。的确，有些素质并不决定能力的内容或可能获得的成就的水平；这些素质的效力受以下事实的限制：这些素质使能力发展过程显示出独创性，简化或复杂化它的发展。譬如，神经系统的类型特性，可能属于这一类素质。另外一些素质，虽然它们并不狭隘地“硬性地”决定能力的内容，但对能力的内容显然有很大的影响。属于这一类素质的，可能是分析器构造的一些特性，也可能是大脑两半球皮层个别部分构造的一些特性（对此后面将进一步说明）。但是，关于这些素质，它们本身并不具备能力的苗子，这一观点也是正确的。

只有这样看待素质，我们才能解释下列情况：

1．关于有些儿童在接受有计划的教育和训练之前，在他们开始有计划的学习活动之前就早期显示出种种能力的一些特殊情况。（这与上述认为能力在活动中形成和发展的观点并不矛盾。活动总是在进行着的。问题在还不是有计划、有目的、有组织的活动。）关于这方而后面将进一步说明。

2．关于有些人耗费毕生精力有计划有组织地从事其感兴趣的活动，却并未显示出对这种活动有何特殊能力的一些特殊情况。

3．有些儿童在显然不利的社会和家庭条件下显示出卓越的能力。人们可以回想起 M. V. 罗蒙诺索夫，A. M. 高尔基，F. I. 查里亚平和其他许多从人民中涌现出来的有才能的人，尽管他们的外界条件非常不利，却显示出他们各自的才能。

只有在具备良好素质的时候，能力才能得到发展：(1) 尽管处于不利的生活环境下发展还是非常迅速，(2) 达到很高的发展水平。

当然，即使是最好的素质，其本身也不能保证“自动化”地取得高度的成就。另一方面，一个人在缺乏良好的素质时(但当然，并非完全缺乏)，可能在一定条件下在某种活动中取得显著进步，但为此他需要花费大量的时间和精力。在其他条件相同的情况下，良好的素质，不论就发展的速度和耗费精力的程度，还是就成就所达到的水平来说，都会大大地简化能力的发展。

数学家N. I. 科范佐夫在他的“数学能力是天生的吗？”一文中，虽然没有分清“素质”与“能力”的概念，而且关于数学能力的先天性得出了错误的结论，但是他所指出的下面这种说法却是正确的，即如果我们同意每个人都能在数学上取得较高的发展水平，那么各人耗费精力的程度将是完全不同的。

因此，在我们看来，素质的存在，用数学家的话来说，是发展创造性数学能力的必要的、但不是充分的条件。一个人要能够学习中小学数学，并不一定要具备任何特殊素质；但要成为一个杰出的数学研究家，那么素质就显得非常重要了。

在结束本节时，我们把我们的研究所依据的关于能力一般理论的一些假设简述如下：

1. 能力总是指进行*某种特定活动的能力*；能力只存在于一个人的特定活动之中。所以只有在分析特定活动的基础上才能揭示能力。因此，数学能力只存在于数学活动之中，并应该在数学活动中加以揭示。

2. 能力是个动态的概念，它不仅存在和显示于活动中，而且是在活动中形成和发展着的。因此，数学能力只存在于变动状态和发展之中；它们在数学活动中形成并发展着。

3. 在一个人发展的一定时期，会出现形成和发展个别类型能力的最有利的条件，而其中某些能力是短暂的或昙花一现的。发展某种能力的最佳年龄期叫做敏感期(J. S. 维戈茨基，A. N. 列昂节夫)。显然，数学能力的发展也有最佳年龄期。

4．一项活动的进步依靠多种能力的复合。同样，数学活动的进步也并非单独依靠一种能力，而是依靠多种能力的复合。

5．在一种活动中的高度成就，可能受制于各种能力的不同组合，所以在原则上人们可以谈论包括数学能力在内的各种不同种类的能力。

6．由于某些能力可以在很大限度内被其他能力所补偿，一种较为薄弱的能力可以被另一种能力所补偿，以致不会阻碍某项活动的顺利完成（参见 N. D. 列昂节夫文章，247）。科瓦列夫和米亚西谢夫（174，第 45 页）更加广泛地解释补偿作用：他们谈到某种能力的丧失有可能被技巧或性格品质（耐心、毅力）来补偿。显然，对于数学能力也可能出现任何一种类型的补偿。

7．一般天赋和特殊天赋的相互关系问题是很复杂的，在苏联心理学里还没有结论性的解答。捷普洛夫（412，第 28～30 页）倾向于否定不涉及特定活动的一般天赋这一概念本身，而认为一般天赋这一概念与资产阶级心理学家所谓的一般智力在性质上有些类似。在捷普洛夫看来，“能力”和“天赋”这两个概念，只是对社会活动和研究活动的历史上形成的特定形式才有意义。在他看来，应该论及的是另一些东西——天赋方面的一些较为一般的和较为特殊的特征。S. L. 鲁宾斯坦（354，第 537～538 页）正确地指出不应该把一般能力和特殊能力相对立：特殊能力的存在使一般天赋带上确定的特征。而一般天赋的存在也影响着特殊能力的性质。B. G. 安南耶夫（20）指出，人们应该区别一般发展与特殊发展以及一般能力与特殊能力。这些概念每一个都是有效的；这两种概念彼此是相关的。安南耶夫强调一般发展在形成特殊能力中的作用。

这一问题的详细研究，并不是我们的任务。当前，我们只应注意到，在论及数学能力时，我们要注意数学能力结构的较为一般的和较为特殊的特征。

基本概念

在对我们所要涉及的一些基本概念下定义之前，必须注意到数学能力会以十分不同的活动水平表现出来。我们将从两个方面来看待数学能力的概念：

1．看作创造性(科学的)能力——科学的数学活动方面的能力，这种能力能产生对人类有意义的新成果和新成就，对社会作出有价值的贡献。

2．看作一般学习能力——学习(学会、掌握)数学(中小学数学课程)的能力，迅速面顺利地掌握适当的知识和技能的能力。

心理学家们和数学家们常常区别这两种水平。例如，法国数学家阿达玛提到了仅仅能达到"理解数学理论"的水平和"发现数学新理论"的水平；R. M. 加涅与N. E. 巴拉台斯采用了"再造性"(reproductive)和"创造性"(productive)数学能力这两个术语(572)。在苏联心理学文献中，A. G. 科瓦列夫谈到能力发展的两种水平——再造性反映能力(学习知识，掌握活动，按照模式完成活动)和创造性反映能力(创造新的、独特的成果)(173，第190页)。

于是就产生了这样的问题：就数学能力这个词的本意(科学创造性)来说，掌握数学的能力可以至少在某种程度上被认为是真正的数学能力的一种表现呢？(在什么条件下能这样被认为呢？)也许，它们是两种十分不同的能力，以致当掌握数学的能力表现出来时，而对真正的数学能力将来是否会出现，却根本不可能作出任何预期呢？当我们研究掌握数学的能力时，我们能否相信，这是在一定程度上，一定限度内研究真正的数学能力呢？

有些心理学家(特别是外国心理学家)，倾向于明显地区分数学能力的这两种水平，因此，如果一个人考查第一种水平的成就，

他就不能有把握地对第二种水平的成就作出任何结论。这可以在早期的一些著作中看到(如本世纪最初的廿五年中，B. R. 勃金汉姆，威廉·贝兹，W. 布朗等的著作)，同样，也可以在当代的著作中看到(如魏德林的著作)。勃金汉姆和贝兹认为，中小学的数学与真正的数学思维极少有共同之处(537，第 206 页)。布朗写道，有许多根据说明，中小学数学活动和真正的数学活动涉及两种不同形式的能力(533)。现代瑞典心理学家魏德林指出："所谓在中小学一定阶段上的数学能力未必等同于……据以对数学进行科学研究的那种能力"(727，第 14 页)。但有必要指出，在这些例子中，这些心理学家所考虑的是对普通学校中数学的掌握，而这种掌握与新的发现或创造性因素都没有关系。

在我们看来，两种活动水平之间的区别似乎不是绝对的。在研究中小学儿童的数学能力时，我们所考虑的不仅仅是他们的可教性。我们的研究的确要涉及学生的一般学习能力，然而还要涉及创造性的学习能力，这种创造性的学习能力关系到：在学校教学的条件下独立地创造性地掌握数学，独立地对不复杂的数学题目列出公式，并找出解这些题目的途径和方法，发现定理的证明，独立地推导公式，以及对非标准的题目探索出独创性的解法等。所有这些，无疑地也是创造性数学能力的一种表现。如果创造性要素的存在是真正的数学思维的标准，那么我们不应该忘记数学上的创造性能力可能不仅是客观的，而且也是主观的。A. 纽厄尔，J. C. 肖和 H. A. 西蒙在建立区别创造性与非创造性的思维过程的特定标准时，提出创造性思维的下列标志：(1) 这个心理活动的产物在主观和客观上都是新颖的、有用的；(2)思维过程也是新颖的，这表现在思维过程要求转变以前接受的观点或否定它们；(3)思维过程是以存在着强烈的动机和稳定性为特点的，这些特点或者在一个相当长的时期内，或者在其本身非常显著的情况下，可以观察到(493，第 502 页)。

如果我们从这些标准(我们相信是正确的)出发，那么很多在数学上具有天赋的儿童就会显示出一种创造性的数学思维。我们可略有把握地预先指出，我们研究的一些有天赋的学生，他们确实会自己"发现"中小学校代数和几何课程中的某些个别部分。他们正在发现着人们久已熟知的东西。他们创造的产物并无客观价值，但就学生自己的主观方面来说，无疑是对某种新东西的发现、发明和独创的成就。在某种意义上说，这种活动十分肯定地是数学创造能力的一个部分。正如纽厄尔、肖和西蒙所强调的，对已知东西的再发现也可以看作是创造，主观上这个产物可以是新的和独创性的(493，第506页)。R. 卡彭特进行了同样的观察：从客观方面来说产物并无创造性，但其过程仍然是有创造性的(547，第392～394页)。

因此，我们可以肯定，两种水平的数学能力之间有着确定的联系。阿达玛断言，在试图解代数题和几何题的学生的活动与数学发现者的活动之间，仅仅只有程度上和水平上的差异——这两种活动在性质上是相似的(595，第104页)。科瓦列夫和米亚西谢夫讨论了这样的观点：这两种水平"是由一个发生上的联系联结着的。在有利的形成条件下，"学生数学家"的这些能力就变成了真正科学家的能力"(174，第149页)。Yu. A. 萨马林也持有这种观点(360，第44页)。

因此，我们相信，对于学习数学的能力能否被认为是在严格意义上的数学能力的表现这一问题，应该给予肯定的回答。对数学的彻底的、独立的和创造性的学习，是发展创造性数学活动能力的先决条件——是对那些包含新的和有社会意义的内容的问题，独立地列出公式并加以解答的先决条件。正是由于这个原因，所以对中小学儿童的数学能力的研究，是对高度表现的数学能力进行研究的第一步。

为了研究起见，对能力的分析使我们有必要把作为一个方面

的能力概念同作为另一个方面的技能和习惯区别开来。这两类概念是互相关联、互相依赖的。S. L. 鲁宾斯坦曾论及"能力与技能之间独特的辩证关系"(354, 第533页)。一方面，能力是在获得知识、技能和习惯的时候发展起来的；能力不可能在掌握适当的知识、技能和习惯的过程之外形成和发展起来。另一方面，知识、技能、习惯的获得，除依赖其他条件外，还依赖学生的个性品质；能力可以使适当的知识、技能和习惯掌握起来更为容易、更为透彻。

我们相信，在能力和技能或习惯之间的事实上的密切联系和相互依赖，并不"排除"区别这两类概念的可能性。正如把它们割裂开来是不正确的一样，把它们彼此等同起来也同样是错误的。为了进行研究起见，在科学分析的过程中，不仅可能而且有必要对它们加以区别。

我们怎样才能具体区别能力与技能或习惯呢？这里存在着很大的困难。在苏联出版的有关能力的许多心理学著作中，都提出有必要区别这些概念；但通常在这方面都无特别的论述。面情况却进一步复杂化，因为在心理学文献中对这些术语的应用不相一致。我们经常在口头上和书面上谈到"思考能力"和"思维技能"，"计数能力"和"计算技能"，"感知技能"和"观察能力"等等。

在什么基础上才能"区别"这些概念呢？依据"先天性-获得性"这一参数吗？当然不能。能力、技能和习惯都是在生活和活动中形成并发展起来的，而且它们都是在生活和活动中获得成功的条件。

也许可以根据形成的速度来加以区别：是否技能和习惯形成得较快，而能力就形成和变化得慢呢？这种观点反映在 V. I. 基林科的著作中(165, 166, 168)，他的同事 B. M. 吕巴斯也谈到，如果一种品质能较为容易和迅速地发展起来，那它就难以被称为能力。这样的区别是含糊不清、没有意义的(由此类推，发展迅速的心理特征就得归入技能和习惯这一类；而发展缓慢的心理特征就

得归入能力那一类)，而且，在本质上也会产生争论：有些技能和习惯发展得很慢，而某些能力在一定条件下却可能形成得较快。

最后，它们能否按复杂性这一原则加以区别呢？能力是较为基本的形成物，而技能和习惯是较为复杂的形成物吗？ 这样区别本质上也是不明确并有争论的：能力、技能、习惯在结构上都是既很简单又很复杂的。

当然，如果我们从一般情况来考察这一问题，那么可以说能力同技能和习惯相比，其形成和变化通常因较难而显得慢些，能力是比较稳定的形成物。 可是，仍然不能依据这一原则来区别这两类概念，因为依据"多少"或"快慢"这些参数来进行区别，是毫无意义的。

我们在数学能力的研究中，对能力、技能和习惯的本质，试图从另外的解释出发。 我们的出发点是，在分析能力时所考虑的总是正在进行活动的人的特性或品质，而在分析技能或习惯时，所考虑的则是人们正在进行的活动的质或特点。在任何苏联心理学教科书中，"能力"概念的定义总是以描述一个人特有的心理品质为基础的。另一方面，习惯和技能的一切定义则都是从操作概念出发的。N. D. 列维托夫谈到，技能是指操作的顺利进行(249)；B. M. 捷普洛夫则认为，技能是有意识的操作的自动化成分；等等。这里的区别是：人们讲到能力时，所指的是从事活动的人的心理特征；而讲到技能(习惯)时，所指的则是这个人的活动的心理特点，因此，在我们看来，绝大多数心理学教科书把"能力"一章放在"人的心理品质"一篇里，而把"技能和习惯"一章放在"活动的心理特点"一篇里，是十分正确的。

所以，我们试图把这些概念区分如下：所谓能力，我们指的是一个人的那些有利于迅速而容易地掌握一定的活动(例如数学活动)——掌握适当的习惯和技能的独特的心理品质(这一概念来自对人的心理的分析)；所谓技能和习惯，我们指的是一个人在较高

水平上进行的活动(例如数学活动)中的特殊的动作(这一概念来自对特殊活动的分析)。能力不是习惯和技能;它们是使一个人容易掌握活动中的技能和习惯的那些独特的心理品质。

我们必须强调指出,在对技能、习惯,以及能力的分析中,我们分析的是活动。我们以一个人进行某项活动(例如数学活动)的特点,来判断能力的存在以及技能和习惯的存在。但是,也可以从另外的观点来看待活动,只要这种看法能决定能力同技能和习惯的差异。如果我们从一个人的有利于掌握某项活动的心理品质出发来分析该项活动,那么我们就是在进行某种能力分析。

从这一观点出发,我们就可以说"根据题目条件列出方程式的技能","变换代数式的技能",等等,因为根据题目条件列出方程式以及变换代数式这两种技能,都是学生的数学活动中的成分(即动作);这些都是他们数学活动的内容。我们也可以说"进行概括的能力","形成空间概念的能力","抽象思维的能力",等等。进行概括、形成空间概念、抽象思维——这几种能力也只存在于活动中,但它们并不是数学活动的个别的动作或成分。(在中小学数学中,人们并不把进行概括或空间概念本身作为学习的目的;在中小学数学课程中,我们找不到有关这些名词的内容。但是,能找到有关"根据题目条件列出方程式"、"变换代数式"等等的部分。)因此,研究学生的数学能力,也就是研究他的数学活动。不过,这种研究是从一定观点来进行的。

对上述这些概念作了必要的区分以后,我们就可以试图更彻底地揭示一般能力的概念和特殊的数学能力的概念。首先我们要指出,苏联心理学中对能力概念所采用的那些传统定义通常是不着边际的,因而不能完全令人满意。这些定义都引自捷普洛夫四十年代的著作(409, 412, 413),自那时以来几乎毫无改变。在N. S. 列依捷斯关于心理能力的论著中,把能力定义为一个人的独特的心理特性,这些心理特性,是实行一定类型活动所需的条件和完

成某一活动的可能性及其成功程度的依据 (252, 第 5 页; 255, 第 466 页)。

这种能力的定义已见于 N. D. 列维托夫 (249, 第 82 页), P. A. 卢迪克(359, 第 395 页), 和 E. I. 伊格纳捷夫、M. D. 戈罗莫夫及 N. S. 鲁津(144, 第 325 页)等人的教科书中。S. L. 鲁宾斯坦也给出了一个基本上相似的定义: 能力是"使一个人适宜于从事对社会有益的一定类型活动的一些心理特性的复杂组合"(355, 第 126 页)。V. A. 阿尔捷莫夫和 P. I. 伊凡诺夫在他们的教科书中 (32, 第 401 页; 139, 第 422 页), 也称能力是"一个人对一定活动的适宜性"。

所有这些定义的缺点在于, 如果从这些定义出发, 那么我们就可能漫无边际地把各类极其不同的心理特性(即顺利地完成一项活动所必要的一切心理的东西)都纳入能力概念, 尽管作者本身并无那种想法。确实, 如果能力是完成某一活动所依赖的, 或是作为这一活动"可能成功的主要条件"的那些心理特性或个性品质 (V. S. 梅尔林, 294, 第 123 页), 那么我们也就必须把一个人对待活动的态度以及关于他的意志和性格的某些品质这样一些心理特性, 都归入能力。(一个人成功地完成某项活动无疑地依赖于他对该活动的兴趣和爱好, 同样也依赖于勤奋、工作潜能和毅力等这样一些品质的存在。)显然, 能力并不是一项活动取得成功的一切条件的总和, 而仅仅是活动获得成功的条件之一——我们可以附带地说, 这正是上述所有作者共同的认识。列宁格勒的一些心理学家, 尤其是 B. G. 安南耶夫、A. G. 科瓦列夫和 V. N. 米亚西谢夫等, 他们的著作是以试图从个体的广泛方面来研究能力为特点的。他们正当地提出了有必要弥补能力与其他个性品质的研究之间, 尤其是能力与性格之间的裂缝 ("潜能与倾向性"——米亚西谢夫), 列宁格勒的心理学家们正是就个体的广泛方面研究能力的。事实上, 他们所研究的根本不是能力, 而是在研究与能力有关的人的整个

个性。这种研究方法也许既有缺点又有优点——一方面，正如已经谈到的，可以提供一个就个体的广泛方面来研究能力的机会，而另一方面，却隐藏着把"能力"概念"溶解"在"个性"概念中的危险，因而失去了研究的目的。在能力的研究中必须把两种研究方法结合起来。

在上述那些著作中，我们必须首先提及安南耶夫的文章"论能力和性格发展中的相互关系"(19)，文章揭示了性格和能力发展的共同的先天基础，说明了性格和能力这两者是如何在活动过程中形成的，以及这两者之间的联系如何产生用"才能"和"某种职业倾向"这两个术语来命名的新的心理形成物。安南耶夫倾向于把能力和性格的发展表述为个性的形成过程，这种倾向似乎是很有益的。

科瓦列夫和米亚西谢夫在能力研究中的出发点，是把能力解释为进行一定活动所必需的"各种特性的总体"，其中包括情感和意志方面的一系列态度和特征 (171, 172, 173, 174, 302, 303)。我们也是从类似的观点出发的，这个观点就是，学生在完成数学活动时所取得的成就，是由下述各种品质的一定组合所导致的：

1．对数学的主动、积极态度，对数学的兴趣和研究数学的爱好，这些发展到高度的水平，就变成热情奔放的积极性。

2．许多性格品质，其中主要的有勤奋、自律、独立性、目的明确、坚持不懈以及稳定的理智感(从紧张的脑力劳动中感到满足，从创造和发现中得到愉快等等)。

3．在进行活动时，具备有利于完成活动的心理条件 (参阅 N. D. 列维托夫，246)，譬如奋发鼓舞、聚精会神、积极的"心理状态"等等。

4．在适当的领域内具备一定的知识、技能和习惯。例如，一个人纵然具有充分的数学能力，但如果对数学没有最起码的知识、技能和习惯，那么他也不能胜任平凡的数学活动。

5. 最后，符合某项活动需要的感性和理智方面一定的独特的心理特征。

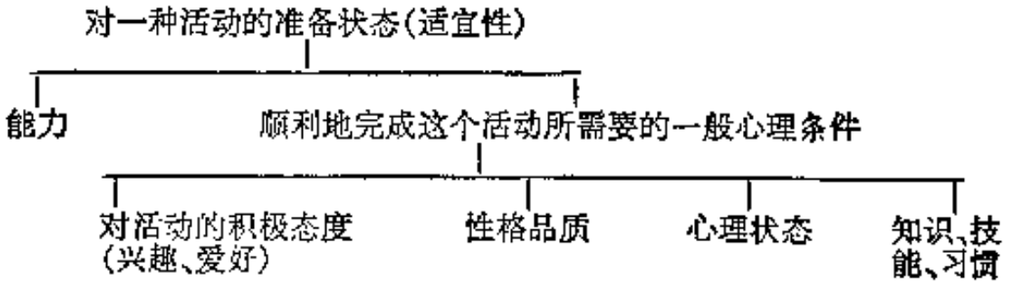
把所有这几类心理特性(当然，它们形成了一个有特色的"总体")，称为数学能力的成分是否合理呢？这里不可避免地会出现概念上的混乱，因为兴趣、爱好、性格品质、习惯、技能都被当作了能力的成分。

严格意义上的数学能力，只是上面的第5组心理特征。最好把其他品质原则上看作是有利于任何活动的极其普遍的因素和条件。(什么活动不需要兴趣、意志品质等等呢？)尽管我们完全同意，一个人要顺利地完成一项活动，必须有一定的意志和性格的品质，对活动的适宜态度(兴趣、爱好)等等，但我们仍在试图把严格意义上的能力概念主要限制在感性、认知和运动等方面。在这个问题上，我们的见解与列维托夫完全一致(248, 249)。

由于个性品质的完整的"整体"、综合体，是一个比能力更为广泛的概念，所以我们宁愿把它称为"对活动的适宜性或准备状态"。例如安南耶夫使用了这一概念，即"对在一定的工作和社会生活领域内的高度有效活动的准备状态"(20, 第16~17页；21, 第15页)。鲁宾斯坦使用了"适宜性"这一概念(354, 第533页；355, 第126页)，虽然他是把它与严格意义上的能力概念，而不是与个性品质的"整体"这一概念联系起来的。A. V. 亚尔莫连柯(474, 第78页)引用了兴趣(爱好)与能力彼此歧异的一个有趣的例子。在学生M的所有教师看来，他具有很强的数学能力，但是他明显地讨厌数学。严格地说，因为学生M没有把能力与爱好结合起来，亚尔莫连柯的结论是学生M"并无真正的数学能力而徒有其外貌，才导致了错误的诊断。"我们将作出不同的结论：学生M是具备能力的，真正缺乏的是准备状态或适宜性。那不是一个"错误诊断"的例子。然而，要是有人说学生M是适宜于数学活动的，那才是错误的诊断。我们的诊断是，由于他对数学完全缺乏爱好，所以他虽

有数学能力却不适宜于数学活动。

上述对活动的适宜性(准备状态)结构的解释,可以表解如下:



因此,对活动的适宜性(顺利地完成活动的能力,或者广义的能力),不可能仅限于受到所具备的严格意义上的能力的影响,而是要受到主要个性品质的整个组合的影响,其中包括理智、情感和意志。

因此,我们可以把对我们的研究至关重要的这个概念定义如下:所谓学习数学的能力,我们指的是符合中小学校数学活动需要的,并在其他一切条件都相同的情况下,影响着在创造性地掌握作为中小学校一门学科的数学上的成就的——特别是,能较为迅速、容易并透彻地掌握数学知识、技能和习惯的那些独特的心理特征(主要是心理活动特征)。关于数学能力概念的特定内容,我们将在以后分析能力的结构时加以揭示。

D. N. 波果亚夫连斯基和 N. A. 梅钦斯卡娅,在讨论儿童可教性的个别差异时,提出了在所有其他条件都相同的情况下决定学习成就的心理特性这一概念(44, 第182页)。他们未用"能力"这个词,但他们的观点基本上接近上述定义。如果就可教性而论,那么学习数学的能力,按照我们的解释,显然就是在数学创造性上的可教性的特征。

我们应当强调指出,能力包括各种心理过程——知觉、注意、记忆、想象、思维等方面的个性特征。不应当认为能力总是独特的一类特征,它们不能归结为知觉、记忆、思维等方面的特征。基林科曾因用研究视觉记忆、知觉等方面的个别差异来代替研究绘画

能力，而在当时受到指责。但是，视觉记忆是美术能力之一。同样，我们将断然拒绝任何这样的指责：认为我们研究的不是数学能力，而是表现，在数学活动过程中的知觉、思维、记忆、想象的个别差异。严格地说，绝大多数对于特种活动的能力的研究，都主要是通过分解出感觉、知觉、思维、记忆、想象等心理过程的个性特征作为其成分（或特殊能力）来进行的。在音乐能力成分中，我们发现一种听觉表象的能力（捷普洛夫，411）；在绘画活动能力成分中，我们发现知觉、视觉、记忆、以及鉴别明暗关系等成分的结合（基林科，168）；在文学能力成分中，我们发现形象思维和创造性想象（V. P. 亚贡科娃，468）；在工程技术能力成分中，我们发现空间概念化能力和技术思维能力（V. N. 科尔班诺夫斯基，176a；P. M. 雅科布松，472）。

可是，并非所有能力的成分都可能归结为心理过程的个性特征。此外，还有构成能力的较为复杂的个体心理品质：为适合某一类活动而发展起来的特殊形成物，它们并不能归结为感觉、知觉、思维、记忆和想象。这些形成物是在心理过程一定特征的基础上形成的，而且还包括情感-意志的特征和态度的因素——这些形成物都带有个性的色彩。例如，某种数学才能，是一种对与适当的态度和意图不可分割地溶合在一起的环境的独特的知觉（在后面论及数学才能时将加以详细讨论）。

在所有最广泛使用的与俄语способность（能力）相对应的外国科学术语中，以德语 Fähigkeit 最为接近我们的解释。可惜，对于英语中表示 способность 这一概念的下列三个术语，如果不附带重要的保留意见，我们是任何一个都不能接受的，在英国和美国的心理学和教育学文献中，采用了 ability（能力）、capacity（潜能）和 aptitude（能力倾向）这些术语，其中每一个在意义上都有细微的差别。ability 似乎介于俄语 способность（能力）和 умение（skill 技能）这两个概念之间（后者是指进行一种操作的技能，其中包括解决

智力问题的技能），虽然还有些专门术语——attainment（成就）、acquirements（习得）、knowledge（知识）——可用来表示苏联术语 приобретение（成果、获得）、знание（知识），умение（技能）[1]的类似语。捷普洛夫倾向于认为，英语中的 ability 所指的根本不是俄语中的能力（способность），而是表示习惯和技能的组合（408，第 11 页）。而在 capacity（潜能）这一术语中，对有机体的天赋的可能性方面强调得太过分。第三个术语 aptitude（能力倾向）使用得不很普遍，似乎重复 ability（能力）这个词的意义，但又包含着对一种活动的倾向。способность 通常译成英文为 ability（能力）。

数学能力（一般，象对于各种复杂类型活动的一切能力那样），是一种结构复杂的心理形成物。它是各种心理特性的一种独特的综合，是包括各个心理方面的一种整体的心理品质，它是在数学活动过程中发展起来的。这个组合是一个独特的，与众不同的整体：仅仅为了进行分析，我们才分解出其个别成分，但决不是把它们当作孤立的特性。这些成分密切联系、相互影响，并在它们的组合中形成一个单独的体系，其表现就是我们通常所称的数学才能的综合特征（即显示这种心理现象特征的一些相互联系的成分）。

"Giftedness"（天赋、天资、才能）这个术语在四十年代和五十年代曾流行于苏联心理学界。捷普洛夫（409，411，412，413）令人信服地指出，要完成任何一项相当复杂的活动，所需要的不是单独一种能力，而是一整套能力。捷普洛夫把顺利地完成一项活动的可能性所依赖的能力的独特组合，称为该项活动的才能（giftedness）。后来他又开始把"giftedness"一词用来表示一个完全不同的概念：一项活动所需要的天赋素质的组合。正如他自己所指出的，用 giftedness 这个术语来表示素质组合的唯一理由，是俄语中

① 克鲁捷茨基在这里把俄语中的某些单词译成英语。俄语中 приобретение（获得），знание（知识），умение（技能）等词，在一般俄英翻译中意思较为接近的翻译是 acquisement（习得），knowledge（知识），skill（技能）或 acquirement（习得），achievement（成就），skill（技能）。——英文版编者。

与英语“giftedness”相当的词的字面上的意义（одаренность——даровитость[giftedness 天赋、天资]——дарование[才能、才干]——дар [才能、才干、天赋]——这就是说，那是与生俱来的东西）。其他教科书和手册的作者仿照捷普洛夫采用了一套新术语。P. A. 卢迪克把“天赋”解释为“作为各种能力发展先决条件的先天特性”(359, 第 397 页)。P. I. 伊凡诺夫把“天赋”用来表示“随着他们的发展在各种能力中表现出来的先天品质”(139, 第 423 页)；N. D. 列维托夫则把天赋界说为“作为解剖或生理素质的能力的先天蕴藏”(249, 第 82 页)。

我们感到就心理学的现代发展水平来说，“天赋”的最后这个定义逐渐变得毫无意义。我们仍然不知道哪些特殊的解剖或生理特点是数学能力的素质，“天赋”这个术语（按素质的组合这一意义来说）依然是空洞而无意义的。也许这就是为什么有些列宁格勒主要的心理学家对于解剖或生理意义上的素质这个概念持否定态度的理由，而断言它是“仅仅一个逻辑上的推测……对一些未知原因的字面上的掩饰”(科瓦列夫和米亚西谢夫, 174, 第 63 页)。因此，我们认为还是回到“giftedness”这个术语的前一个意义上才符合情理。所谓数学才能（mathematical giftedness），我们所指的是为数学活动的顺利完成（或者，就中小学学生来说，是为创造性地掌握这门学科）提供可能性的各种数学能力的独特组合。

问题和目的

正如我们所知，在我们研究能力时，一项在心理学上具有重要实践意义的基本任务，就是要在不同的年龄阶段为各种能力的形成、培养和发展创造条件。这一点也适合于对数学能力的研究。对数学能力问题进行科学研究的基本目标，在于为能力的积极培育创造心理学基础。为了回答上述问题，我们要先了解数学能力

究竟是什么？究竟是哪些独特的心理特征影响着顺利地掌握数学，也就是说，使一个人具备数学方面的能力？

研究中小学生数学能力的这个总问题，促使我们试图在自己的研究工作中实现下列这些特定的目的：

1．正如巴甫洛夫所指出的，对各种现象进行研究的真正科学的途径，是必须对它们先有一个分析，把它们分解成一些比较简单的成分。同样，对于研究一种复杂心理现象所进行的分析-综合的途径，要求首先剖析它的结构，分解出它的成分。

捷普洛夫把对构成神经系统类型基础的个体特性进行初步分解和研究的原则，应用于高级神经活动类型的研究方面。鲁宾斯坦也曾谈及有必要研究复杂现象的结构，而能力就是这样一种复杂的现象(356，第9页)。现代大多数外国学者对能力的研究都归结到结构的分析(因素的分解)。

因此，我们首先的和基本的任务，在于研究学龄期数学才能(作为能力的一种独特的组合)的结构；换句话说，就是要对这一整体的心理特性进行分析，把它"分解"为在其结构中占有基本地位的个别成分。这一任务又局部地归结为一项比较明确而具体的工作：把那些具有数学才能的学生在他们解各种数学题时的心理活动所特有的各种特性分析清楚。

在研究这一问题时，我们使用过因素分析法。正如我们在前面说过的，把因素分析法当作研究人类比较高级和复杂的能力的唯一方法，是不合理的。因此，我们认为最合理的是选择另一种研究数学能力结构的方法，这一方法主要依靠对中小学生的数学活动进行质的分析，对他们解数学题的过程进行质的分析。我们只把因素分析法作为一种辅助方法。

2．我们研究的第二项任务是，为研究数学才能创造一些可能有独立价值的实验方法。

3．第三项任务是从捷普洛夫的下述观点出发的：能力结构有

多种多样的形式——高度的成就可能是由各种能力成分的不同组合而取得的。这项研究在确立了数学才能表现的独创性以后，还要揭示能力结构类型的差异。

4．第四项任务，涉及中小学生数学能力表现的年龄差异。我们要力求概括出数学能力成分发展的年龄动态，从这些能力成分在小学时期最低级的表现到高年级比较复杂而多样的形式中，观察出它们发展的基本阶段。

至于形成和有目的地发展数学能力的各种条件，这些不能完全列入我们现阶段的研究中。这一问题将是我们未来专门研究的课题。



研究的方法和组织

5 一般方法和组织

关于数学能力的研究，我们先后花了12年（1955～1966年）时间。在组织这一研究工作中，我们是从下面这个思想出发的，即对能力这样复杂的问题进行最富有成效的探索，将要综合运用多种方法，而其中有一个是主要的。我们觉得只有这样探索才能揭示出数学能力的结构。我们的基本材料是从实验研究中得到的，同时也运用了一些非实验性的研究方法。

研究数学能力的实验方法，就是编一些专为实验用的数学题，让具有不同数学能力的学生去解答，然后进行质和量的分析。

这些实验就象一个个微型断面，使发展过程中所发生的变化的实质在较短时间里被充分地揭示出来。关于数学能力的成分在年龄发展中的一般趋势，我们用以下两种方法加以研究：(1)比较从不同发展阶段不同的学生那里获得的"断面"结果；(2)比较从不同发展阶段同样的学生那里获得的"断面"结果。

在用这些"断面"对数学能力进行纯实验研究中，我们对若干组学生进行了持续性研究（延续了几年）。这些研究通常是跟实验研究结合进行的。比如，我们连续几年研究了一组数学天赋高的学生（共25名，对其中16名也作了实验研究），同时也用一年时间研究了一组相对来说没有数学天赋的19名学生。

对一组小学儿童的持续研究，于1963～1966年在我们指导下由心理研究所研究生I.V.杜勃洛维娜进行。与此相应的对一组高年级（九、十年级）学生的研究，是在1962～1964年由库尔斯克

市一位富有经验的数学教师 S.L. 夏皮罗按我们的规定进行的，他在实验中发挥了一个数学教师的作用，是整个教学过程的积极组织者。

本研究所涉及的学生总数为 201 名(对其中 192 名作了实验研究)。

对中小学儿童的补充性研究，包括在上课时观察他们(偶尔也在家中对他们进行观察)，同他们以及他们的父母、教师和朋友座谈讨论。同时，父母根据专门的指导仔细观察自己孩子的发展情况。

我们是从人的广泛含义上来研究儿童的。我们观察了儿童的爱好和兴趣(好学的和不好学的)，他们对不同学科(尤其是数学)的态度，以及他们的性格特点(特别是毅力、勤奋、主动性等)的发展情况。研究学生的计划，是在尊重 A.G. 科瓦列夫和 V.N. 米亚西谢夫童见(174，第 151～153 页)的基础上制定的。

实验、收集补充性材料和观察学生，开始于 1956 年，主要是在莫斯科的第 649、328、282、100、330、665、358、80、434、440、91 学校和第 12 寄宿学校及库尔斯克市第 6 学校进行的①。

至于非实验性研究方法，起了很大作用的是问卷法，它的目的是通过用书面或口头的方式询问特定的一组学生，来为剖析某些问题收集材料。当然，正如 S.L. 鲁宾斯坦指出的(354，第 33 页)，用这种方法获得的材料对研究问题不可能有独立的价值，但这些材料作为补充性资料是极为有用的。

首先，实际工作者(数学教师和教育工作者或教学法专家)的童见，毫无疑问会有助于分析学习数学的能力结构问题。他们的极为丰富的经验(往往在学校中工作了几十年)，以及很有价值的

① 本研究进行过程中，得到当时有关学校的校长，特别是 E. S. 科罗霍亭娜、A. T. 莫斯托伏伊、M. I. 罗若伊夫、L. D. 普尔雅科娃和 M. G. 斯托罗英娜诸同志的帮助。在此，向他们谨致谢忱。

观察和总结都是很宝贵的资料。为此，我们在1958～1960年间同来自莫斯科和苏维埃俄罗斯联邦共和国其他省、市的62名数学教师进行了交谈。我们感兴趣的是：教师对学习数学的能力有什么看法；他们以什么标准评价这种能力；他们认为哪种学生有这种能力，哪种学生没有这种能力，以及为什么。

我们按长远计划在1965年编制了一份教师书面问卷。问卷发给教师后，收到了56份答案。教师们对下列问题表明了自己的观点：数学能力是怎样表现出来的，有能力的学生具有哪些品质，这些品质在多大程度上对数学活动是特别需要的，他们注意何种数学能力。

同年，我们拟了一套书面问题（一份专门的问卷）给一些著名的苏维埃数学家，同时告诉他们，对我们感兴趣的问题有什么看法，不管怎样都可以讲，这对我们会有极大的价值。我们特别询问了如下一些问题：

1．按你的看法，什么心理品质使一个人具有数学能力？

2．数学能力在多大程度上是一般或特殊的智能？

3．你认为有哪些不同类型的数学能力？

这个问卷分送50位数学家后，收到了21份答卷，其中15份对问题作了评述，6份除回答问题外未作评述①。

此外，我们利用文献资料，分析了84位俄国和外国的著名数学家及物理学家的传记，弄清了他们是什么时候开始显示出数学才能的，数学才能又是如何表现的，并揭示了他们数学思维的某些特征。

---

① 15份有评述的答卷是院士P. S. 亚历山大罗夫，V. I. 斯米尔诺夫，苏联科学院通讯院士B. N. 狄隆涅，A. A. 马尔可夫，I. R. 萨法列维奇，物理学博士和数理科学教授N. Ya. 维仑金，M. Ya. 维果德茨基，E. B. 邓金，A. A. 基里洛夫，A. G. 库洛什，V. I. 勒维因，A. I. 马库希维奇，G. E. 希洛夫，物理学和数理科学候补博士A. S. 巴克霍敏科和S. V. 斯米尔诺夫做的。对所有这些同志，以及其他寄回答卷但未作评述的同志，我们表示最深切的谢意。

一个人的特殊能力，是由相应的活动领域对他提出的客观要求所决定的（B. G. 安南耶夫，20，第 16～17 页），因此我们收集了一些资料来对学校的数学学科进行分析，以求查明这一学科对人的心理活动有什么要求，人应该具备些什么心理品质才能顺利完成数学活动。这些资料是我们关于数学能力成分的假设的基础，这一假设后来被实验证实了。

团体调查也被用于其他一些非实验性方法。特别是，我们在莫斯科一些学校 7～10 年级的 1000 多名学生中收集材料，以比较他们在各科中的进步。我们用从一些地区性的数学奥林匹克和竞赛中获得的材料，从大量六、七、八年级学生数学系统复习的笔记本中获得的材料，以及从观察学生课内学习数学的过程所获得的材料，作为补充性资料。

6 关于数学能力成分的假设

在选择一个特定的实验性研究方法之前，我们为自己规定了一个任务，就是作为一种初步入门，去探究那些范围，在这个范围内学习数学材料有潜能的学生与潜能贫乏的学生之间的差异，表现得最为明显。换言之，我们假设了包含在这些能力的一般结构中的一些成分。对心理学和数学文献的分析以及试探性的实验，已经指出了探索能力的方向。

首先，我们假定具有特异能力、能学好数学的学生有如下特征：他们的概括数学材料的能力和回忆这些概括的能力在发展程度上存在着差异。

概括的能力曾在许多著作中被提到过。早在1908年，俄国数学家D. D. 莫达克海-波尔托夫斯基曾描述过数学家的一种被称为"智慧的敏锐性"的典型特征，意思是指一种"从最不相干的方面找出相似的东西"的能力(300)。A. F. 拉祖尔斯基和他的同事们作过一个有趣的尝试，意图把学习算术的能力分离出来(235，第168～169页)。他们从"某些在其他学科很少运用的心理机能"中指出一种"概括能力"，但没有充分地揭示这种"机能"的心理学实质。我们还应当提及美国心理学家桑代克的著作(715)，他在自己的著作中把这种"概括能力"说成是一种"代数"能力。

在P. A. 舍瓦列夫(441，442，443，445，446)，N. A. 梅钦斯卡娅(289，290，291)和他们的同事们的著作中，都有非常有价

值的材料。舍瓦列夫证实，概括的联想和孤立的联想对解代数题都是有价值的。L. P. 多布拉耶夫(114)、A.V. 斯捷潘诺夫(393)、N. F.塔莉金娜(399, 401) 和 V. L. 亚罗休克(475) 等人的著作，都指出了在概括数学材料方面的个别差异。

我们进一步假定，有能力的和能力低的学生，在他们"简缩"(即解题时缩短推理过程和有关的运算系统)的速度上应当有所不同。在有能力的学生中，推理过程和运算系统的"简缩"，其速度可能会变得十分快。

为了理解这个问题，上面提到的舍瓦列夫和梅钦斯卡娅的著作是很有价值的。舍瓦列夫指出，学生在解代数题时并没有执行那个形成解题过程的完整而详细的逻辑结构的演绎链。梅钦斯卡娅已经证实，甚至在学生解算术题时，也会出现逐步简缩推理过程的中间环节的情况。塔莉金娜(399, 401)、N. K. 英迪克(145) 和 A. N. 索科洛夫(388)等曾经应用几何学、化学和物理学中解题的材料，探究过逐步简缩推演的过程。

最后，我们的假设是，数学能力不同的学生，是以从一种顺向思维系列转到另一种逆向思维系列的能力的不同程度为特征的。显然，有能力的学生在完成这种转变时轻而易举，而对于大多数学生，要从普通的证法转到归谬法，或从一个定理转到它的逆定理，则存在着一定的困难。

心理学中有两种类型的联想是突出的："顺向"联想(从以前的刺激到后来的刺激) 和"逆向"联想(从后来的刺激到以前的刺激)。N. 卡班诺娃-梅勒应用地理学的材料已经证明，不是所有的学生都能独立地从顺向联想转到适当的逆向联想上去的。进步很快的优等生在一个方向上适当地建立了联结，就相当容易地转而形成相反方向上的联结。这一点对能力弱的学生来说是困难的：他们必须通过特别的练习才能形成这些逆向联结。

关于数学能力成分的这种假定的概念，也是我们设计一套实

验题目的主要依据，这套题目是在研究规定领域内个别差异的思想下构成的。研究的后一阶段，需要用一个更为完全的形式提出关于能力成分的假设来。

这方面的材料首先是由我们上面所提到的一些实验提供的（这些实验在事先揭示了数学上有能力的学生的其他一些心理特征），其次是通过对数学上有天赋的小学儿童的初步观察而取得的。两种实例的研究材料都表明，数学上有能力的学生，其特征可能是，对问题的条件具有独特的分析-综合的知觉；学生迅速地掌握了构成问题实质的基本关系，而且没有忘记特殊的数据。

此外，有能力的学生还可能有这样的特征：他们的心理过程具有明显的灵活性，即从一种心理运算迅速地转变到另一种心理运算的能力以及从陈规俗套的运算中解脱出来的行动。

最后，空间概念的能力虽然在有能力的学生身上按不同的方式表示出来，但它在数学能力的结构中还起着一定的作用，这一点可能与存在着各种不同类型的数学能力有关。

但是必须承认，直到现在还不可能提出有关数学能力结构的一套完整的假设来。我们所涉及的只是个别的、假设的成分。为便于以后研究起见，我们需要关于结构的比较完整的假设（因为一套完整的实验题目是根据它来设计的）。

为了使这一假设具有相对完美的形式，它的结构是从另外的方面来探索的。我们并不佯装已对作为一门科学的数学进行了深刻而富有意义的分析（这只是数学专家们的份内事，超出了我们研究的范围），而只对自己提出一个实事求是的目标，那就是：在数学对一个人的心理活动有要求（即在学校中掌握数学所必需的心理品质）的范围内，反映数学的基本的特性。就这个意义来说，数学能力的实质问题就是数学科学的实质问题的衍生物。

如前面所指出的那样，我们是把数学能力作为创造性地掌握学校数学课程的能力来研究的。当然，数学科学与被理解为学校

教学课程的数学是根本不同的。这一点在教学法的文献中已经不止一次地被提到过。I. A. 杰伯希写道："学校数学课程的各个独立分支(算术、代数、几何、三角)，作为学校中的各门学科，当然不会翻印相应的科学"(88，第108页)。V. L. 冈察洛夫在他的论文《作为学校中一门学科的数学》中讨论了同一个课题，但是他作出了一个重要的补充：即虽然科学和学校中的学科可以常常是不同的，但"它们仍然是紧密联系，不断地相互影响的"(98，第40页)。

根据恩格斯的经典定义，纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系(4，第35页)。这个定义也被《苏联大百科全书》所引用(178，第464页)①。恩格斯还指出，为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容。

数学原理的抽象性质导致了它们很大的概括性。通过概括过程，经过抽象而被分离出来的对象的特征和性质就被概括起来；这就是说，它们被延拓到某一类对象的整个集合。抽象和概括构成数学的实质，因而数学思维主要是抽象和概括的思维。

数学的抽象性和概括性的一个结果，是导致了它的下列特征：符号的出现，用特殊的数学符号进行运算，数量、数量关系和空间性质的习惯符号的指定。在这一点上，G. L. 克佩斯(624)认为：数字、关系和用语言来表达的数学法则的"符号性转换"(转换成符号语言)就是数学的(特别是代数的)特征。

作为一门科学的数学，它的一个特征就是形式化。根据 V. N. 莫罗德希依的观察，"约在十九世纪的后半期，从事研究的数学家们证明了数学内容的形式化表述。在这种数学理论的形式表述下，他们不考虑包括哪些对象，也不考虑被研究的对象会在其中出现的那些关系和联系具有怎样的特殊含义……但是，另一方面，他们却试图把对象所共有的基本关系和联系的结构描述得更加精确和

① 就我们所知，目前数学家们倾向于更广泛地去理解他们的科学对象。不过这个定义就中小学数学学科来说似乎是适用的，我们的研究与它有关。

完整”(299,第 131 页)。

数学的一个基本特征是公理法,「它是现代数学的风格(A. A. 李雅普诺夫, 269, 第 115 页)。如 A. A. 马尔可夫所指出的那样(276,第 338 页), 公理法是在逻辑上使数学系统化的最普遍的方式之一。它的本质是, 一些陈述得很精确的基本假定存在于一个理论之中, 不经过证明就被接受下来作为理论的基础(即所谓公理),从它们出发,通过被称为证明的论证,用逻辑的方法推演出该理论以后的全部内容。于是, 一个公理化的定义存在于下面的事实之中: 一个已知的概念系统中的每一个概念(其中没有一个和系统中其他被考虑的概念是一样的),是借助这个概念与系统中其余一些概念的关系来下定义的, 而后面这些概念是已经这样定义好了的 (I. A. 杰伯希, A. D. 赛莫欣和 A. I. 费季索夫, 89,第 9 页)。

A. S. 埃西宁-伏尔宾着重指出, 公理法已立即传播到数学的一切领域(125,第 122 页)。然而,柯尔莫戈罗夫注意到,数学作为一个整体是不能全部公理化的, 人们只能对个别的数学理论谈到公理系统(177, 第 613～616 页)。

数学的另一个特征是对许多数学问题的解答的算法性质。众所周知, 一种算法是指明了用什么运算和怎样的次序来解某一类型的任何一个问题。一种算法就是一种概括, 这是因为它可以适用于某一类型的所有问题。当然,大量问题是不能算法化的,是用特殊的方法来解决的。因此,如柯尔莫戈罗夫所说的那样,在不适宜用标准解法的情况下,寻找一个解题途径的能力,就是数学思维的本质之一(180,第 9 页)。

最后, 如果我们所说的就是从数学思维的基本特征中引发出来的数学能力成分的话,那么我们应该把这些能力列举如下:

1. 把数学材料形式化、把形式从内容中分离出来、从具体的数值关系和空间形式中抽象出它们、以及用形式的结构(即关系和

联系的结构)来进行运算的能力。

2．概括数学材料、使自己摆脱无关的内容而找出最重要的东西、以及在外表不同的对象中发现共同点的能力。

3．用数字和其他符号来进行运算的能力。

4．进行"连贯而适当分段的逻辑推理"的能力(柯尔莫戈罗夫,180,第10页),这种推理是证明、形式化和演绎所必需的。

下面我们再补充几种早先已分离出来的成分：

5．缩短推理过程、用简缩的结构来进行思维的能力。

6．逆转心理过程(从顺向的思维系列转到逆向的思维系列)的能力。

7．思维的灵活性,即从一种心理运算转到另一种心理运算的能力；从陈规俗套的约束中解脱出来。思维的这一特性对一个数学家的创造性工作来说是重要的。

8．数学记忆力。可以这样假定,它的特征也是从数学科学的特定的特征中产生的,是一种对于概括、形式化结构和逻辑模式的记忆力。

9．形成空间概念的能力，它与数学的一个分支如几何学(特别是立体几何学)的存在直接有关。

由此可见,我们在上述列举中试图排除非常一般的种类(例如抽象思维的能力),而尝试着把它们"分解"成比较确定和精确的种类。这就是我们关于数学能力结构成分的假定模式。它构成了我们实验研究的基础。

7 实验研究的方法

前面已经指出，我们研究的基本方法，就是分析数学能力处于不同发展水平的学生解实验题的过程。实验研究的主要意图如下：如果解题是两个因素（题目本身的特点和解题者的特点）所产生的结果，那么我们就应该让不同的受试者去解相同的题目和让同一个受试者去解不同的题目，这样一个一个地来确定这些因素。

我们是从下列原则出发，去组织我们的实验研究的：

1．遵照苏联心理学的基本原则，即必须在为研究能力而进行的活动中，并在分析这种活动的基础上来研究能力，我们认为，实验的题目一般应该符合学生的数学活动的特点。在学校教学中学生的数学活动，从广义上说，其实就是解各种类型的题目，包括证明题、计算题、变换题和作图题。因此我们研究中实验用的题目，主要就是这些数学题目。分析解题的情况，就使我们了解到有能力的学生的心理活动怎样不同于能力低的学生的心理活动，揭示出学生在解题中的心理活动的个别特点。

我们的实验题目是经过特别选择或编拟的，均等地体现出中小学数学（算术、代数、几何）的不同方面，相当充分地包含着学生数学活动的要素，并在某种意义上有助于形成这种要素。

实验题目中有许多是算术题。特别是考虑到当前对学校中解算术题所抱有的强烈的批评态度下，这是否恰当呢？

必须指出，关于算术题总是有各种不同的意见的。这个问题在《中小学数学》杂志上展开的最近的讨论中（1964，第1期）有明

确的说明。有些数学家和教学法专家认为，在学校里解复杂的算术题不很实用，因为有一种普遍的、更简便的、并且更一般的用列方程解题的代数方法。另一些赞成在中小学里广泛应用算术解法的人认为，算术解法能训练推理能力和发展逻辑思维。

算术题的价值可能有点被夸大了，这会助长中小学里让学生解这类题目的盲目热情。当然，解算术题在促进推理能力和逻辑思维能力上具有很大价值，这是无可否认的。这里不拟讨论这个问题。算术题本身不是我们实验研究的目的。它们本身并不使我们感到有多大的兴趣，我们只是把它们作为揭示思维品质、推理过程的特点的一种手段而已。解算术题将为我们清晰地揭示反省或推理过程，提供一种进入"思维试验室"的机会。

2．实验所用的题目应具有不同的难度（低、中、高），包括一些需要数学创造力因素的特殊题目。这些题目要按一定的"阶梯"进行编排，从最容易的、即使能力极低的学生也能完成的题目，直至最复杂的、不是每个有能力的学生都能通过的题目。但正如 L. B. 伊捷利松也谈到的，评定题目的难度是不很容易的。有时，对同一个题目的难度会有不同的看法。

我们首先根据对题目中已知关系的复杂性的客观鉴定来估量难度。举例来说，我们应用两数和的平方这一简化乘法运算的基本公式，编排出题目"阶梯"，下面就是难度怎样在客观上逐步增加的（我们在括号内说明了每一题是怎样变得比前一题更复杂的）：

$(a+b)^2$

$(2a+3b)^2$　　（引进了系数）

$(3a^2+4b^3)^2$　　（引进了指数）

$(7a^m+2b^n)^2$　　（用字母表示指数）

$\left(\frac{1}{3}a^m+\frac{1}{7}a^n\right)^2$　　（引进了分数系数）

等等。

其次，碰到难以判定的情况，就通过让很多学生在初测或预测中解这些题目来实际鉴定其客观难度。有些难以客观地判定难度的题目，让一大批不参加基本实验的学生去做，计算他们解出这个题目的百分数。一个题目的主观难度是用与解对的人数成反比例的量来标志的。比如，75% 的学生能解的题目，就比 25% 的学生能解的题目对他们来说主观上要容易些。

这样，我们就很有把握地将题目按难度作了分类（当然，故意不按难度编排的题目不在此列）。因此，很少有受试者能解"较高梯级"上的题目，而不能解"较低梯级"上的题目的情况。

3．实验用的题目必须有它们直接的目的：解这些题目会有助于弄清能力的结构。换句话说，当解这些题目的时候，数学活动所特有的心理活动的各种特点就会表现出来。正如捷普洛夫指出的那样（406，第 513 页），西方广为应用的测验并没有起到作为某种心理品质的指标的作用。它们使测验者只是对自己的测验与其他测验的相关感兴趣，而一项测验究竟是一种什么指标这一实质性问题，往往是完全不加考虑的。相反，我们的实验方法是考虑到它所得到的指标应是所研究的现象的最确切而可能的心理指标（即个体的心理活动的特征）而设计的。

在实验研究开始之前，我们证实了实验题的效度（适用性、合理性）。众所周知，测验题的效度决定于能否在实践中证实它们的结果。预备实验令人信服地表明，受试者数学能力越高，越能顺利地解实验题。另一方面，实践也表明，解实验题表现得好的学生，后来总是成为有能力的数学家，而那些表现得不好的则是学校中能力低下的学生。

题目的信度是从分数的稳定性上（使用能得出分数的题目系列）有选择地加以证实的。实验题的信度系数是按盖勒特的方法计算出来的（575，第 337～342 页）。很遗憾，我们的研究不能采用最简便的方法——"测验-复测（重复）法"，这是由于第二次重复解

题肯定会受第一次解题经验的影响，而且在较长的间隔后（六个月或更长一些），这期间的成熟以及在学校获得的知识、习惯和技能也一定会起作用。因此，我们在对于同一类型的题目有两套等量的形式时就采用"相当等量法"，又叫"对半法"(575，第337～342页)。结果，两者之间（一次测验①的等量的各半之间，或是它的两个等量形式之间）的相关在0.802～0.926之间，这说明信度是高的。

4．为了我们研究的目的，必须不单是，也不是在很大程度上去确定受试者完成作业的最后结果，而更重要的是必须了解其解题的过程。我们的题目在很大程度上不是为了满足对所研究的现象作出量的描述，而是要揭示出质的特点，舍此是不可能真正了解现象的全貌的。我们知道解题过程的研究是极其复杂的，因为它的过程并不总是能很客观地反映出来，解一道题的心理过程的许多环节易为研究者所忽视。虽然解题过程的数学结构，即组成解法的运算顺序，常常可以在解题记录中得到充分的反映，但表示解题过程特点的各种心理过程（思考、反省、不同可能性的比较等等）却很难从记录中得到客观的反映。梅钦斯卡娅(291)、V. L. 亚鲁休克(475)等许多人，已经特别注意到了这一点。

问题是在揭示这种复杂的智力活动过程的质的方面，为此我们必须尽可能揭示受试者在解实验题时真正的思维过程。在这种情况下，通常是要求受试者大声解题，不能默默地想，不管想法是如何肤浅或不合理(K. 邓克尔[487，561])。这种方法初看似乎很简单，其实则不然。由于受试者常常不自觉地用自我观察而不用言语表达来建立其心理过程，因而带来了极大的困难。

学生在作业时，要求他们大声地组织思维所造成的困难，有以下几种情况：

a）有些学生不懂怎样或不习惯大声地思考，他们对这样做感

① 在我们的研究中，实验题目的类型也称为测验（见后）。

到不自然，而有自己的思维习惯。要学生十分完整地大声思考以满足实验者的需要(不是要推理过程的完整，因为推理过程会被简缩——建立这种简缩是很重要的，而是要反映真正思维过程的言语表述的完整)，会使这些学生惶恐不安。把这种会使学生感到不自然的方法强加于他们，就是有意识地使自己接受对真实现象的可能的歪曲。

b) 经常这样要求学生，会被认为学校总是训练学生(尤其是年幼学生)大声思考。当然，实际并非如此。大声思考或大声解题同大声说出解法，是完全不同的过程。俄国教学法专家 F. N. 叶戈罗夫认为，解一道题同说出一种解法并不完全是一码事。一个对实验完全没有准备的学生会把"大声思考"的指导语当作强求他说明是怎样解题的。学生也知道，教师上课时要他"高声地解题"的意思是"解给别人听"，就是说，这是一种让别人理解解题过程的说明。

c) 有时候，学生(尤其年长的学生)可能以为是要他把自己解题中的心理过程加以观察和描述，也就是详尽无遗地说明自己是怎样思考的。在这种情况下，我们就会遇到一种自我观察，而且是一种笨拙的自我观察。不言而喻，这种观察的目的会使思想的写照完全失真。J. 皮亚杰的追随者、L. 约翰诺特在研究青年的数学推理能力时(620)，力图用下列方法克服这些困难：他向青年出示一道题目，让他一个人寻找解题方法。解题后，实验者马上同他公开讨论，目的是追溯其思维过程，彻底了解他用的是什么方法，阻碍他正确地解题的又是什么(620，第 25 页)。约翰诺特本人指出这一方法的主要缺点是，机灵的孩子常常揣摩实验者对他们的要求，并作出实验者所希望的回答。

我们将怎样去克服这些困难呢？首先，我们仔细地向受试者说明对他的要求：就是不要他讲自己是怎样想的，而只要他大声地想，不必费劲地对实验者说明解题的过程。我们的指导语是这

样的："大声地想，说出来，就象你一个人在家里做题目一样，行吗？把你头脑中与解题有关的任何想法都写在纸上。我感兴趣的不是你解题的最后结果，也不是解题所花的时间，而是你解题的过程本身。你不必向别人解释什么；就认为这里只有你自己，没有别人；不要你讲解法，只要你解题目。"然后让受试者试一试对他的要求，使他逐渐习惯于大声地思维。实验者就这样训练受试者，力求使他能自然而然地出声思考（即使是片断的、有插话的和分心的），不议论或品评他的思维过程。尤其是实验者力求不强加任何有关具体解法的指导语，以免其真实的过程受到干扰。

如果言语表达明显地阻碍了受试者的心理过程（这能很快地发现，否则学生本人也会提出），实验者就不要勉强地坚持这样做，不要去干预他内部的思路，让他按自己觉得方便的方式去活动。碰到这种情况，就得更多地依靠有关解法的记录以及事后同受试者的讨论。

这样，在我们的实验中，"大声地思考"的指导语几乎完全没有干扰受试者自然的思维过程。他们解题时，一面大声推理，一面写下解题的整个过程。我们用 E. I. 伊格纳捷夫的方法(142)（A. V. 斯捷潘诺夫[393]也成功地用过这种方法）记录解题过程的时间：解题笔记本首页下夹入一张复写纸，每隔规定时间把复写了的底下一页取出。这样，所得的各页依次包含了同等时间间隔内的作业记录。我们后来把这一方法加以简化，即按同等时距在解题纸上打一个红记号，来等时距地划分作业过程。

实验者仔细地记录"大声的思考"（笔录或录音）。若有必要（例如言语表达有障碍或记录需要说明），就对受试者问一些附加问题（"什么东西使你感到为难？""说明一下你在做什么和为什么。"等等），以弄清推理过程的个性特点，但力求不提同他的思路有关的暗示性问题。

我们通过对受试者的解答、运算的性质、作图及草稿等所作的

客观记录，通过解题过程中用语言揭示的反省过程的记录，通过解题时对提问所作回答的性质，通过解题后与受试者讨论解答所得的材料等，来判断解实验题时的真正的思维过程。这样，当受试者解完实验题后，我们就得到了关于学生心理活动性质的相当完全而客观的概念。当然，即使学生不会解一道题目，即使他选用了一些不正确的方法，或者即使他遵循了一条错误的思路，我们也应该用同样的方法加以分析。

5. 我们知道，影响解题有许多错综复杂的因素——特别是过去的经验以及知识、习惯和技能的积累。我们要研究的是能力，而不是知识、习惯和技能，尽管如前所说，这些概念是紧密地联系着的。要在这错综复杂的本原中分离出能力的因素是很艰巨的。显然，我们只能把那些能力对它们的解答起主要作用的题目选为实验题。

要完全排除过去的经验、知识和习惯的影响，显然是不可能的。根本的困难在于：如果实验题使得数学知识、习惯和技能不影响其解法，那么解这样的实验题就是另外一种非数学的活动了，这将同研究的基本原则相矛盾。N. D. 列维托夫在谈到技术能力问题的考查时，也提到了这一点(248)。他指出，实验题必须接近活动的正常条件，并对知识、技能和习惯相对独立。G. 罗斯(681，第 4 页)则指出有两类数学题目，其中每一类都与能力多少有关：(a)以知识为基础的题目(再现公式、定理和证明)；(b)以智力为基础的具有更多创造性的题目(同智力测验相一致)。但罗斯声明要设计没有知识的题目是难以办到的。

我们可以得出结论，凡想找到单靠能力而完全不靠知识、技能和习惯来解的数学题目的尝试，都注定是徒劳的。为此，我们选题时就必须放弃搜罗这类题目，并必须尽可能地去"削弱"这种影响——使所有其他条件最大限度地相等。我们并不"排除"知识、技能和习惯的影响，而是在某种意义上使所有受试者在这方面都均

等起来。这就是我们的目的在选实验题中的落脚点。否则，解题过程中的许多本质上的差异就会被认为是知识、技能和习惯上的差异。

我们用下列方法达到这种均等化：

a）我们选的实验题在解题时并不需要特殊的知识、技能或习惯，或者我们知道所需要的知识是所有学生都具备的。我们事先告诉学生解某道题所需要的知识、技能和习惯，我们相信这些学生实际上是具有这些专门条件的，而且他们都知道解这些实验题所需要的理论的。如果不是这样，我们就与学生一起回顾这一理论，使他们想起某些命题，但是我们做得很谨慎，以致学生不会猜到这是解下一道题时要用的知识。

b）很多实验题都是学生不熟悉的材料，而且对学生来说是全新的，所以过去经验的影响实际上是很小的。有些题目课内还没有讲到，有些题目在学校里是根本不讲的。当然，实验者要判断某道题是否是学生所熟悉的，估量每个学生的经验，这有时是很困难的，但是我们尽可能去这样做。

c）把新近学过的材料编成题目，使我们有机会探究掌能新技能（解某种类型题目的技能）的特点。这里，在整个实验过程中，实验者亲自组织指导语（他向学生讲解还没有熟悉的材料，讲解学校还没有教过但对各个问题的解答有影响的那些材料）。

d）我们还采用了一些带有数学创造性因素的题目——非标准题目。

6．我们知道，能力只有在活动中、在动态变化中、在发展中才表现出来。不用动态的观点，而只用成就的某一水平是不容易估量能力的。两个学生即使处于相同的成就水平，也不等于说他们的能力是一样的。只有了解到他们每个人为那种水平的成就做了多少工作和付出了多少努力，他在掌探一定习惯中的每一进展的快慢和难易程度，我们才能判断他们的能力。鲁宾斯坦写道：“可

以把能力发展过程中的速度、学习的轻松、进步的速率作为能力含义的主要指标"(354,第540页)。Z. I. 卡尔米科娃欢喜用"进步速度"这个概念(158, 159), V. S. 梅尔林则把"训练速度"作为能力的一种标志(294,第127页)。我们是倾向于"进步速率"的提法(因为从严格意义上说,"速度"只是描述运动的相对的快慢)。当然,不管是"进步速率"还是"进步速度",它们相对于时间来说,都还是更多地决定于(掌握某一技能所需的)练习的次数和思维程序的步数。一个学生的进步速率或速度常常同他个人的解题速度并不一致。

因此,这就决定了我们的实验方法应该既是教育性的又是诊断性的。我们测定学生解某种类型题目的进步的快慢,测定在解这些题目中所获得的技能的好坏以及在这一点上他的最大可能性是多少。我们特别注意一个学生在从最容易到最难的题目"阶梯"上的进步速率:(a)独立实现的进步速率,(b)在实验者稍加帮助下实现的进步速率。后一种情况极为重要。早在三十年代初期,著名的苏联心理学家 L. S. 维戈茨基就提出了重要的观点:发展的状况并不仅仅决定于成熟方面。不只是儿童已经学到了什么,而且他能学习什么也是很本质的。因此就需要有两个指标:他怎样独立地解指定给他的题目;他怎样在成人帮助下解同样一些题目。要记住,即使有了这种帮助,儿童也只能解他自己智力潜能区内的题目。这两种指标之间的不一致,大概就是儿童的所谓临近发展区的指标——这是全面估量其心理潜能时的一种重要成分。儿童在成人帮助下能够解的题目,标志着他的临近发展区。维戈茨基强调指出(76, 77),儿童今天在成人帮助下所做的,他将在明天有能力自己去做(也就是说,今天属于他的临近发展区的东西,明天将变成他的实际发展水平)。这种不仅考虑到已经达到什么水平,而且还考虑到接着会达到什么水平的观点,在我们看来是很有益的。因此,我们在实验中同时确定了受试者独立解题时所达到

的水平和在实验者稍加帮助下所达到的水平(所有对受试者的帮助,如暗示、提示、引导性问题、指导,都作了详尽的记录)。

实际上,在实验性的数学教学中研究能力时已经应用教学实验了。这就观察到在一定的教育影响下(在它们的变化中)个人的能力成分是怎样形成的。

7. 尽管我们把解题过程的质的分析作为研究的基本要素,但我们并不把自己限制在这一点上,我们也力求找出这些现象的量的特点。捷普洛夫在«个别差异问题»一书中强调,质的差异的分析构成了能力心理学的基本问题。但他同时指出,"在研究能力时,我们不能完全排斥从量的方面来进行探索的可能性。但是,它只可能跟着质的分析,从质的分析中来,并为质的分析所决定"(408,第23页)。让我们强调,在任何情况下,对我们来说,最重要的是过程的质的因素。当然我们不能把质和量的研究截然对立,因为有一定的量才能显现出某种质;量的指标在某种程度上也表现了能力的质的方面。

在估量"进步速率",即在估量学习解某一类题的技能的速率时(掌握新知识所必需的练习的次数,独立解答的题数、在实验者帮助下解答的题数、或不能解的题数,掌握测验中极其复杂的题目的解法所需要的练习的次数,等等),在估量推理过程的简缩("略去"的环节数)时,在估量心理过程的机动性(解一道题所用的不同方法的数目)等等时,我们应用了量的描述。在一些情况下,我们也出于特殊的目的对解题过程作了时间的描述(作了时间方面的研究)。在叙述个别的题目系列时,我们将对此作较为详细的讨论。在研究能力结构的某些问题时,我们还用了因素分析。

我们感到必须指出,我们的研究方法不论在它的题目上还是在它的组织上,跟国外心理学广泛应用的心理测量学毫无共同之处。我们的实验题目同国外心理测量学所用的测验有着根本的原则区别:

1，我们的实验题不是用来挑选智力上有天赋的或智力低下的学生的，也不是用以测定数学方面的智力天赋的程度的，而只是用作能力研究（一种结构的研究）的。如果把我们的那些题目叫做测验（这将在下面讨论），那么它们都是一种为了达到一定目的而编拟的研究性测验，而不是国外广泛应用的那种诊断性的测验（为了"严格的"预测的诊断）。

2．我们的实验题不单要得到结果，更主要是为了揭示解题过程以及获得结果的方法的质的特点。因此，对解答的描述就不限于量的指标：如数量指标或分数等级，我们的主要注意力是放在描述解答的过程上。

8 研究中小学生数学能力的实验题目系统

本实验研究方法的设计是以前述数学能力成分的假设为基础的。制订这一系统是实验研究的一个极其复杂而艰巨的部分，我们经过若干次试验后，才设计出这一特殊的实验题目系统，以揭示具有不同数学能力的学生的心理活动特征。在试验性实验过程中，曾对这个实验题目系统作过一些修改。我们不得不删掉某些已被实验证明缺乏指示性的题目类型和个别作业，而代之以对所研究的现象更能作出明确指示的题目。

本系统分类的基本单位是系列：实验题目的特定的种类。系列的名称在某种程度上是根据组成系列的题目的性质而定的。我们将在后面对各个系列分别予以说明。

所有系列归成四个基本类型，其中三个类型对应于解数学题的三个基本步骤(即收集解题所需要的信息，解题时加工这种信息，以及将解题的结果和推论保存在记忆中)。第四个类型涉及到数学能力的类型研究。每个类型内的系列按我们计划研究的数学能力结构的成分(先假设性提出，再用实验证实)结合成组。

按照实验目的把系列结合成组曾出现过一定的困难，因为一个系列很少仅适用于一个目的。这些系列通常为判断心理过程的极其不同的方面提供材料，于是，一个系列究竟应属于哪一组就成了问题。考虑到这一点，我们就以题目的基本目的作为分组的基础。所以，一个系列放在某一组是带有些条件的。在分析我们的分类

模式(见表1)时，必须牢记这一点。例如，从表1可见，虽然有8个系列为"记忆"这一主题提供材料，但在"记忆"组中，仅有一个系列，因为另外7个系列的基本目的属于其他方面，所以它们被归入其他组中。

每一系列有几组实验性的测验题。继捷普洛夫和一些其他苏联心理学家之后，我们打算恢复"测验"一词的真正含义。在科学史上这一概念的争论已妥善地解决了，并没有实质性的理由来舍弃这一严谨的科学术语。那种在国外形成的站不住脚的心理测量学是一回事；而测验则是另一回事，这种测验是较短的、标准化的试验，也是揭示隐蔽现象和原理的特殊考查，这种测验的结果能用数量表示，并能进行统计处理。我们是按后一种含义，使用"测验"这一术语的。必须强调指出，我们所使用的并非诊断性测验，而纯粹是研究性测验。每一系列的测验都是根据所包含的题目的种类而命名的(算术的，代数的，几何的，逻辑的等等)，并用字母来编码。因此，每个题目都可以很方便地用系列编号、测验编码和题目编号来标明。例如，XIII-A-2就表示系列XIII测验A的第2题。

本实验题目系统包括由79个测验组成的26个系列(其中22个测验是算术的，17个测验是代数的，25个测验是几何的，其他的测验15个)。乍一看来，这似乎相当复杂。但必须看到，研究能力的现代实验题目系统没有一个比我们的更简单。例如，前面提到的关于研究数学能力的最新、最重要的著作之一(727)的作者魏德林，在他的研究中，曾使用包含50多个测验的系统，其中相当多的测验是由几十个单独的项目组成的。能力的表现是多种多样的，面不同的特殊因素又往往影响这些表现。所以，只有采用全部实验题目系统，从不同的方面去分析一个单独的现象，才能得到所需要的材料。用不同方法所获得的结果的一致性，能以较大的概率说明所研究的因素的作用。正如捷普洛夫所指出的那样，不可

表 1　研究六、七年级学生数学能力的实验题目系统(可用于五至八年级学生)

类型	组	系列		测验		研究的特征	
		编号	名称	编码	类属	基本目的	次要目的
信息收集	知觉(对题目的解释)	I	未提出问题的题目	A B C	算术的 代数的 几何的	对题目中的关系与具体事实的知觉	
		II	缺少信息的题目	A B	算术的 几何的	对题目中的关系与具体事实的知觉	
		III	信息过多的题目	A B	算术的 几何的	对题目中的关系与具体事实的知觉	数学记忆
		IV	具有互相渗透的元素的题目	A	几何的	知觉(从背景中分离出几何元素与图形)	数学能力的类型
信息加工	概括	V	同一类型题目的系统	A B	代数的 代数的	概括(归入一概念)	知觉;推理过程的简缩
		VI	不同类型题目的系统	A B C D E F G	算术的 算术的 算术的 算术的 算术的 算术的 几何的	概括(形成概括);推理过程的简缩;数学记忆;对题目中的关系与具体事实的知觉	思维的灵活性
		VII	从具体逐渐过渡到抽象的题目系统	A	综合的	概括(形成概括)	知觉;数学记忆
		VIII	按已知类型编题目	A B C D	算术的 代数的 几何的 逻辑的	概括(形成概括);知觉(对题目的概括的知觉)	

（续表）

类型	组	系列		测验		研究的特征	
		编号	名称	编码	类属	基本目的	次要目的
信息加工	概括	IX	证明题	A B C D	代数的 代数的 几何的 逻辑的	推理方法的概括；推理中的逻辑；推理过程的简缩	数学能力的类型
		X	按题目的条件列方程	A	代数的	推理方法的概括；推理中的逻辑；推理过程的简缩；对题目中的关系与具体事实的知觉	思维的灵活性
		XI	不切实际的题目	A	综合的	概括；对题目中的关系与具体事实的知觉；数学记忆	
		XII	人造概念的形成	A B C	特殊的 特殊的 特殊的	对非数学材料的概括	
	思维的灵活性	XIII	具有多种解法的题目	A B C	算术的 代数的 几何的	思维的灵活性；解法的优美程度	思维的批判性；数学记忆
		XIV	具有变换内容的题目	A B C	算术的 代数的 几何的	思维的灵活性	
		XV	要求重建运算的题目	A B C D E F G	算术的 代数的 代数的 几何的 几何的 特殊的	思维的灵活性	数学能力的类型

（续表）

类型	组	系列		测验		研究的特征	
		编号	名称	编码	类属	基本目的	次要目的
		XVI	暗示“自我限制”的题目	A	综合的	思维的灵活性	
	心理过程的可逆性	XVII	正向和逆向题目	A B C D	算术的 代数的 代数的 几何的	心理过程的可逆性	
	理解；推理；逻辑	XVIII	启发性题目	A B C D	算术的 代数的 几何的 几何的	推理中的逻辑；概括的独立性	推理过程的简缩
		XIX	要求理解和逻辑推理的题目	A B	普通数学的 逻辑的	推理中的逻辑；数学记忆；推理过程的简缩	
	理解；推理；逻辑	XX	序列题目	A B	数字的 图形的	推理中的逻辑	对关系的知觉；数学能力的类型
		XXI	数学诡辩	A B C D	算术的 代数的 几何的 逻辑的	推理中的逻辑	思维的灵活性；数学能力的类型
信息保存	数学记忆	XXII	条件难记的题目	A B C	算术的 代数的 几何的	数学记忆；概括；对题目中的关系与具体事实的知觉	

（续表）

类型	组	系列		测验		研究的特征	
		编号	名称	编码	类属	基本目的	次要目的
类型学	数学能力的类型	XXIII	解法具有不同程度直观性的题目	V* A_1 A_2 M_1 M_2 G	算术的 算术的 算术的 算术的 算术的 几何的	数学能力的类型	概括；推理过程的简缩；思维的灵活性；数学记忆
		XXIV	用语言和视觉表述的题目	A B C	代数的 几何的 几何的	数学能力的类型	概括；推理过程的简缩；数学记忆
		XXV	与空间概念有关的题目	A B C D	几何的 几何的 图形的 图形的	数学能力的类型	
		XXVI	揭示非数学智力活动的视觉形象与语言逻辑成分之间的相关关系的题目	A B	再认 描述	数学能力的类型	

* 对本系列测验的编码将在以后加以说明。

能仅在一种方法的基础上构成任何心理特征的研究，因为每一心理特征具有许多方面的表现。每个系列仅能揭示所研究的特征的一个或几个方面与表现，因面必须比较由不同方法所获得的结果。

把一道题目归成算术的或代数的，在某种程度上是有条件的，因为几乎所有算术题目都能用代数方法来解（不过五、六年级学生尚不熟悉这种方法）。我们用本题目系统，对有数学能力的和能力较低的学生都进行了研究。所谓能力较低，是从解各系列最基本题目的总体结果来看的。

本系统虽然包含大量题目，但并不需要花去学生太多的时间和精力。首先，并不要求学生对所有系列的题目都作出完整的解答。有时，仅要求学生拟出一个解题的方案或说明其原理就足够了，有时则只要求说明题目的结构或简要地回答一个特定的问题。其次，有能力的学生能很容易很迅速地解答基本题目，而能力低的则不会去解许多较难的题目。

本系统的大部分题目选自苏联和外国的习题集，习题汇编，通俗数学读物，以及报章杂志。由于题目的来源约有五十个，所以若将参考书目逐一引述，那就太麻烦了。

本实验题目系统是逐步编成的，根据我们的目的，不同的系列用于不同的研究阶段。大多数学生做完了所有的系列。

本系统旨在详细研究六、七年级学生的数学能力。我们认为，首先研究这个年龄学生的数学能力是非常合理的。当一种能力刚处于"萌芽"时期，而且在这方面某些确定的东西已经形成时，就开始对它进行研究，是重要的。一般只是在六、七年级时，随着开始系统地学习代数和几何，学生的数学能力才开始真正出现并得到发展。我们可以说，一至四年级学生的数学能力只是临时的，而到九、十年级，这些能力从某种意义上说则已定型。

本测验系统的使用范围较广，可用于五至八年级。我们可按照学生的年龄（年级）、他们的准备情况、以及研究的具体目的，从本系统中选择所需要的系列。如果要求事先为每一情况准确地给出一组系列，那是不现实的。因为目首正在修订数学课程，无论对哪个年龄的学生都不能规定任何方案。

下面我们将依次说明本实验的系列，它们的目的，提出实验系列的方法，以及分析结果的原则。

系列 I：未提出问题的题目

在本系列中，各题目既未直接，也未间接地提出所要求解答的问题，但问题可以从题目已知的数学关系中逻辑地得出。在实验时，我们想查明受试者能否提出问题，能否察觉题目中给定的关系和相互依存中的逻辑，以及能否理解它们的实质。本系列旨在揭示受试者对一道数学题的心理知觉的一些特征。多布拉耶夫曾在他的心理研究中使用过这种类型的题目，但完全是为了另一个目的，即为了揭示列方程时联想的性质(114)。对我们来说，本系列的目的是要查明一个受试者怎样感知一道数学题目——是将一道题目仅仅看作是一些孤立而无关的事实的集合(这些事实还必须是明显地联系着的)，还是将一道题目自然地作为一些相互联系的量的复合。在前一种情况下，我们估计受试者一般不会看出隐藏在其中的问题，或者至少不会立即意识到它。反之，如果受试者迅速抓住了题目的基本关系，那么他就能领会隐藏在题目中的问题，因为问题总是由这些基本关系有机地导出的。

本系列由三个测验组成——算术测验、代数测验和几何测验，三个测验应依次进行。受试者拿到一张题目卡后，应尽快地阅读题目并提出问题。实验者应弄清受试者推理的全过程，并记录测验所花的时间。

现将本系列的测验列述于后，并将未提出的问题置于括弧内。

A．算术测验

1．用 25 根长度为 5 米和 8 米的管子敷设一段 155 米长的距离。(每种长度的管子各用多少根？)

2．某店两个钱箱内共有 140 卢布，如从第一箱内取出 15 卢

布放入第二箱，则两箱内的卢布数相等。（每个钱箱内原来各有多少钱？）

3．一些少先队员收集到65公斤废金属，其中铜、铝之和比锌多1公斤，而铜比铝多15公斤。（他们收集到的铜、铝、锌各多少公斤？）

4．到商店购物，若用3卢布券付款，则要比用5卢布券付款多付8张。（购物需多少钱？）

5．一男孩有同样多的兄弟和姐妹，他的姐姐的姐妹数只有兄弟数的一半。（这个家庭有多少兄弟和多少姐妹？）

6．一列货车的时速为38公里，一列客车的时速为57公里。前者比后者早7小时离开A站，但后者赶上了前者，并比前者早2小时到达B站。（求A、B两站间的距离。）

7．某天余下的时间是这天已过去的时间的4/5。（现在是什么时候了？）

8．某骑车者以时速20公里从A到B，返回时的时速为10公里。（全程的平均速度是多少？）

B．代数测验

1．两人共有28卢布，其中一人有a卢布。（另一人有多少卢布？）

2．一学生在某店买$2b$本笔记本，在另一家店买的本数是在该店买的3.5倍。（他共买了多少笔记本？）

3．一辆汽车以每小时x公里的平均速度行驶了760公里。（途中共用了多少时间？）

4．一车轮旋转$12a$圈，共转过距离1800米。（车轮的周长是多少？）

5．某人已活了a个月。（他的年龄是几岁？）

C．几何测验

1．过直线上一已知点向同侧引两条射线，量得所形成的一个

角是 $\frac{3}{5}$ d①，另一个角是第一个角的一半。（求第三角。）

2．三角形的一个角比第二个角大 30°，第三个角比第一个角小 20°。（求第一个角。）

3．矩形对角线的交点离开短边的距离比离开长边的距离远 6 厘米，矩形的周长为 44 厘米。（求各边的长。）

4．已知一正方形，如将两组对边分别减少 1.2 米与 1.5 米，则所得矩形的面积比原正方形的面积小 14.4 平方米。（求原正方形的边长。）

系列 II：缺少信息的题目

在本系列的题目中缺少一些信息，因而不可能对题目的问题作出确定的回答。在补充了所缺少的信息后，则可获得确定的答案。我们要确定受试者是否能指明解题（为求得确切的答案）所需要的复合的数量关系，并指出所缺少的数据。正如系列 I 那样，本系列旨在揭示受试者对一数学题的心理知觉的某些特征。许多研究者——特别是梅钦斯卡娅(291)、卡尔米科娃 (154, 155, 156)、以及加里培林和他的同事们——曾为其他目的而使用过类似的题目。值得注意的是，加里培林曾把这类题目应用于学习过程的控制方面(81)。我们应用这类题目，旨在揭示受试者能否（以及怎样）象他们感知题目的条件那样去领会题目的形式结构，并揭示他们能否发现信息不全。

本系列题目的要点是，只有当受试者感知题目的形式结构后，才能确切地指出所缺少的事实。所谓题目的形式结构是指构成题

---

① $d=\frac{\pi}{2}$。d（源于法语 angle droit，“直角”）是苏联数学著作中常用的一个符号。——英译本编者。

目实质的相互关联的量的综合体。一般说来，如果受试者看不到题目的形式结构，就不可能发现这种综合体中所遗漏的元素。

当然，即使从题目不完全的信息中，也能导出某种解答、推论出某个命题(例如，从算术测验的第一题可得出这类答案：该火车至少有15节，其中至少有9节货车车厢等等)。在解一道题目时，受试者应习惯于不拒绝那些不充分的事实，而力争从其中推断出可能得到的每一件事情。

本系列由两个测验组成，即算术测验和几何测验，这两个测验是连续进行的。受试者拿到题目卡后，或者立即表示他不能对题目作出确定的回答，或者经过思考后得出这一结论。不论哪一种情况，实验者都问他："你为什么不能作出确切的回答？你缺少了什么？必须补上什么？证明现在可以确切地解答这道题了。"实验者可以问有能力的学生："仅从这些既有的信息中，你能得出些什么东西？从分析已知信息中，你能推出什么结论？答案可以是不准确和不确定的。"在所有情况下，弄清受试者推理的全过程、解答的题数、以及所用的时间。

我们特别注意，如果受试者不加解释或证明，或没有确定所缺少的信息，就简单地表示不可能正确解答此题，那么他的这种表示本身是毫无价值的，因此，不能认为这是确当的答案。

下面就是本系列的测验题(括弧内是对求得确切的答案来说所缺少的信息)。

A．算术测验

1．一列火车由油罐车、货车和平板车组成。油罐车比平板车少4节，比货车少8节。每种车各有多少节。(总车数是未知的。)

2．用多少公升的沸腾的水和室温下的水，才能混合成10公升58°C的水？(我们不知道室温指的是什么。)

3．某班收到正品和副品笔记本共80本。正品每本价格是8戈比，副品每本价格是2戈比。该班收到每种笔记本各多少？(必

须知道笔记本的总的价值。）

4．某图书馆有俄文、法文、英文书共 6100 册。法文书比英文书多 25%，每种文字的书各有多少册？（没有关于任何一种书的册数的信息。）

5．截去一根绳长的一半又 0.5 米，再截去所余绳长的一半又 0.5 米，然后再截去第二次所余绳长的一半又 0.5 米，最后只剩下一小段绳子。求绳的原长。（必须知道最后剩下的一小段绳的长度。）

6．一只狗追赶离它 30 米的一只狐狸。狗一次能跳 2 米，而狐狸只能跳 1 米。狗要追多少距离才能追上狐狸？（没有说明两者跳跃的频率。例如，当狐狸跳 3 次时，狗跳 2 次。）

7．一瓶蜂蜜重 500 克，用同样的瓶装满煤油则重 350 克。空瓶重多少克？（必须知道煤油与蜂蜜的重量关系。例如，煤油只有蜂蜜一半重。）

8．两城相距 225 公里。两列火车从两城同时出发，客车以时速 50 公里自甲城出发，货车以时速 40 公里自乙城出发，两车何时相遇？（未说明两列火车是同向还是相向行驶的。）

B．几何测验

1．计算面积为 64 平方厘米的正方形的边长。计算面积为 36 平方厘米的矩形的边长。（在第二个计算中，必须知道矩形一边的长或边长间的关系。）

2．等腰三角形的腰比底短，周长为 31 厘米。求此三角形各边的长。（必须知道某一边的长或腰与底长的关系。）

3．已知两圆，一圆半径为 3 厘米，两圆圆心距为 10 厘米。两圆是否相交？（必须知道另一个圆的半径。）

4．过一个角的顶点在角外作一直线，与角的一边形成一个 $\frac{d}{3}$ 的角。求此直线与已知角的另一边所夹的角。（必须知道已知

角的大小。）

5．三角形三边之比为 5：4：3，求各边的长度。（必须知道三角形的周长或至少一边的长度。）

系列 III：信息过多的题目

在本系列的题目中，由于引进了一些多余的、不需要的和无用的提示，从而掩盖了解题所必需的事实。我们希望确定受试者能否识别解题所需的数量之间各种关系的综合体，并淘汰不需要的事实。本系列也旨在揭示学生对一道数学题的心理知觉的某些特征。梅钦斯卡娅(291)、卡尔米科娃 (154, 155, 156) 以及加里培林和他的同事们(81)，在特定的条件下，也曾为了其他目的而使用过类似的题目。系列 III 的题目能使我们发现受试者在运用一些已知量时，怎样分离出那些表现构成题目本质的一组关系的量，分离出那些对于解题来说是必要而充分的量。本系列包括两个测验，即算术测验和几何测验，两个测验相继进行。为了研究数学能力较强的受试者，我们也采用让他们面对更复杂的任务的方法：即将系列 II 与 III 的题目混杂出示，从面避免暗示受试者在一组题目中“总是缺少一些东西”，而在另一组中却“故意增加些东西”。但是，对于数学能力较低的受试者来说，这种方法使思维太复杂了，所以一般是不采用的。受试者拿到题目卡后，就选择解题所必需的最少事实，并解释其他事实为什么是多余的。通过测验，我们确定了受试者的推理过程，所解的题数，以及解题所用的时间。我们还要求受试者在课后、一周后、三个月后重现个别题目，以便研究受试者数学记忆的一些特点，从而弄清他们怎样记忆：(1) 题目类型，(2)特定的事实，(3) 多余的、不需要的信息。

现将本系列的测验题目列在下面(题中多余的事实，文字下面用波纹线标出)。

A. 算术测验

1. 某店共有3公斤袋装的和5公斤袋装的土豆24袋，前者多于后者。全部5公斤袋装的土豆的重量等于全部3公斤袋装的土豆的重量。它们各自的总重量是多少？

2. 某停车场有40辆汽车和机器脚踏车，它们共有100个车轮和40个方向盘。停车场上每种车各有多少辆？

3. 一男孩有几个戈比，再给他14戈比后，他用所有的钱买了4支铅笔，每支价格是他原有的钱的2倍。他原有的钱甚至不够买一支铅笔。在得到14戈比前他原有多少钱？

4. 四个物体的重量之和为40公斤。如果已知每一个的重量是下一个的3倍，且中间两个重量之和是最轻一个的12倍。求最重一个物体的重量。

5. 一列火车以时速48公里从A城驶往B城。两小时后，另一列火车以时速56公里随后出发。如果两城相距1200公里，且第一列火车的车厢数为第二列的2倍，第二列火车离出发点多少公里才追上第一列火车。

6. 某图书馆要装订一批英文、法文和德文书籍。三种书籍的册数之比为3:2:1。三个车间接受这项任务。若由每个车间单独完成，那么第一车间要用20天，第二车间要用30天，第三车间要用60天。为尽早完成这项任务，决定由三个车间同时装订，问需要多少天？

B. 几何测验

1. 已知等腰三角形的一边长2厘米，另一边长10厘米，第三边等于两已知边之一。求第三边。

2. 等腰三角形的两边之比为3:8。如果三角形的周长为38厘米，且一边比另一边长10厘米，求三边的整数值。

3. 已知三个全等的正三角形，边长为6厘米(图2)，试证AB是一条直线。

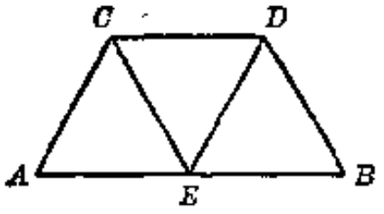


图 2

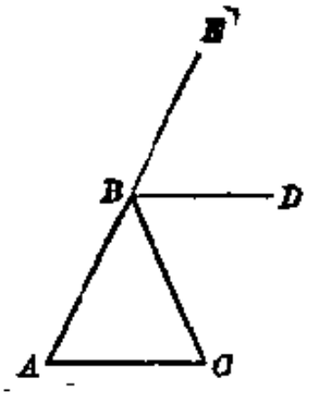


图 3

4．已知：$AB=AC=BC$，$\triangle ABC$ 是正三角形，且 $BD \parallel AC$(图 3)。

求证：BD 是 $\angle EBC$ 的平分线。

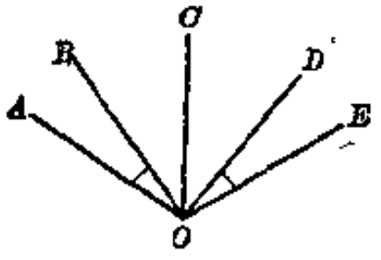


图 4

5．已知：$\angle AOB=\angle DOE$，OC 是 $\angle BOD$ 的平分线，$\angle DOE=20°$(图 4)。

求证：OC 是 $\angle AOE$ 的平分线。

系列 IV：具有互相渗透的元素的题目

我们仅为本系列设计了一套几何测验，其中出现若干具有“互相渗透”的元素的几何图形(“互相渗透”是 I. S. 亚基曼斯卡娅所创造的术语)。

亚基曼斯卡娅曾成功地使用类似的题目系列，以研究学生在做几何证明题时对图形的分析(469, 470, 471)。这一系列是建立在 B.B. 佐拉夫列夫的“数学视觉”概念上的，所谓“数学视觉”是指“不但能看到图形上引人注意的东西，而且也能看到一切并不在图形上的东西”的能力(128，第 73 页)。本系列旨在研究受试者对几何图形分析-综合知觉的一些元素——特别是研究受试者的下列技能：从不同着眼点分辨和评定几何图形的互相渗透的元素，从背景材料上分离出图形和图形的元素，把一个元素包含于不同的图

形中，并予以适当的不同解释。我们确定受试者的答案能完善到什么程度，以及他们的"视觉"和推理起了什么作用。我们用下述例题(见图 5) 预先将测验的性质向受试者解释清楚。

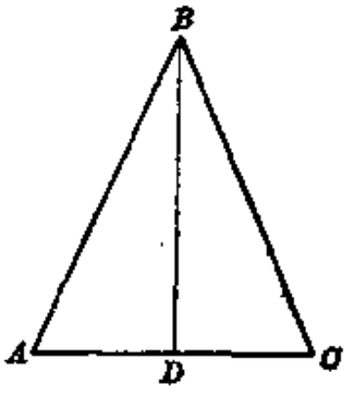


图 5

线段 DB 是：(1)垂直于线段 AC，(2) $\triangle ABC$ 的高，(3) $\triangle ADB$ 的一边，(4) $\triangle BDC$ 的一边。

当然，知觉的多面性，即从一方面的知觉迅速转移到另一方面的能力，并不一定只能用几何材料研究。例如，一个学生应当这样来感知数 4：作为 2×2，$1+3$，8 的 $\frac{1}{2}$，2^2，$\sqrt{16}$ 等等。

现将本系列的测验内容介绍于下。

A．几何测验

1．在图 6 中有多少条线段(是哪几条)？



图 6

2．在图 7 中有几对对顶角？

3．从图 8 中看到几个扇形(是哪几个)？

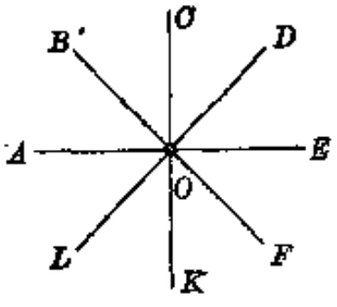


图 7

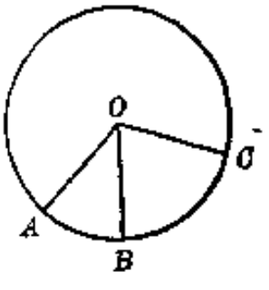


图 8

4．在图 9 中有多少个角(是哪几个)？

5．在图 10 中有多少个三角形(是那几个)？

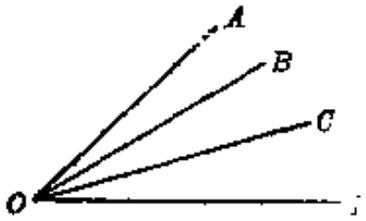


图 9

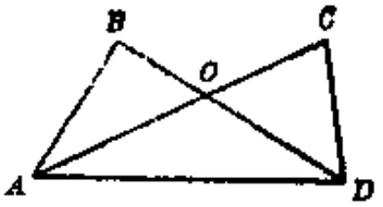


图 10

6. 从图 11 中能分离出哪些图形？其中有几个三角形？

7. 在图 12 中指出三个图形公有的平面部分。哪一部分是圆和三角形所公有的？哪一部分是三角形和矩形所公有的？

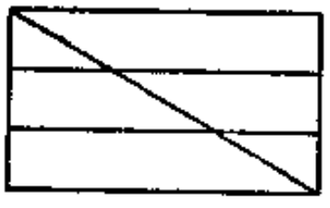


图 11

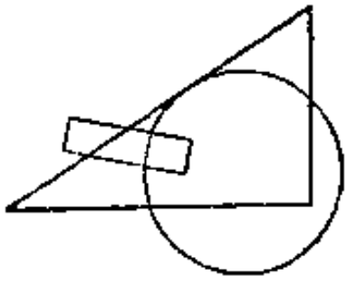


图 12

8. 在图 13 中，线段 AB 是什么？

9. 在图 14 中，线段 AC 表示什么？

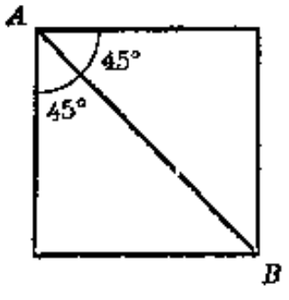


图 13

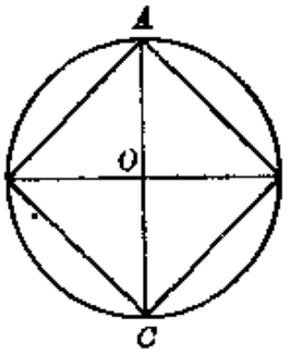


图 14

10. 在图 15 中，线段 KE 是什么？

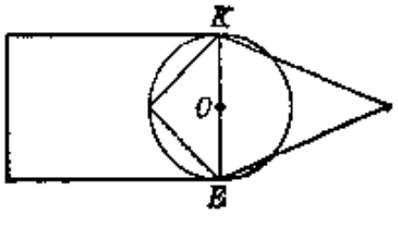


图 15

系列 V：同一类型题目的系统

本系列是专为尚不熟悉简捷乘法公式的学生(一般指前六个年级的学生)设计的一个教学实验。它所研究的概括过程以下列各点为基础：把对象归入新发展的概念中，把新学到的演算方法应用到类似的情况中去的过程，在本质的基础上区别表面上类似的材料的能力。为此，受试者必须从题目类型的角度，去分离出什么是基本的、原则的和本质的东西，并从无关的、次要的和枝节的东西中摆脱出来(也就是说，这里也研究学生对数学材料的知觉的特征)。

我们根据下述几个方面来判新学生的概括能力的程度：能在怎样好的程度上从不同的题目中发现一般类型，怎样从解较简单的题目过渡到解同类型较复杂的题目，以及怎样把一种类型的题目从表面上相似的其他类型的题目中区分出来。我们从这一观点出发，分析受试者在连续解答同一类型的题目中所反映出来的推理过程和相应的运算系统，来判断推理"简缩"的性质。

本系列由两个代数测验组成。第一个测验(测验 A)旨在研究具有平均水平或平均水平以上的数学能力的学生；第二个测验(测验 B)是供研究数学能力较低的学生用的。如果受试者做第一个测验时遇到了不能克服的困难，就换第二个测验(较容易的那个)。每一测验体现了同一类型题目的不同的"题目梯级"，从易到难。受试者不一定要解答全部题目(在若干情况下，按照实验者的意见，受试者只需说明解题计划或解释他打算怎样解题即可。)主要的是查明受试者对于说明一个外表形式虽有不同但仍属同一类型的已知题目具有怎样的能力，以及受试者在考虑了题目的特征以后，怎样按照已知类型的解题模式解题。下面是测验的说明。

A. 代数测验

1. $(a+b)^2=$	1a. $a^2+b^2=$
2. $\left(1+\frac{1}{2}a^3b^2\right)^2=$	2a. $\left(\frac{1}{3}ab^3\right)^2+(2a)^2=$
3. $(-5x+0.6xy^2)^2=$	3a. $(-5x^2-0.6xy^2)\cdot 2=$
4. $(3x-6y)^2=$	4a. $(3x+6y)\cdot 2x=$
5. $(m+x+b)^2=$	5a. $2(m^2+x^2+b^2)=$
6. $(4x+y^2-a)^2=$	6a. $4x^2+y^2-a^2=$
7. $51^2=$	7a. $98^2=$
8. $(C+D+E)(E+C+D)=$	8a. $(c+m+x)(c-m+x)=$

上面左列是有关应用一简捷乘法公式(和的平方)的题目系列，题目的难度逐渐增加，越往下做越难看出应用公式的可能性。右列的题目外表上与左列的相似，但在本质上是截然不同的。我们要求受试者将左列的题目加以概括，并将左右两列的题目加以区别。

实验者按以下顺序出示题目：首先，受试者在实验者的帮助下开始熟悉简捷乘法公式，并借助基本例题掌握它们的数学意义。然后，要求受试者运用公式解左列最后面的第8题。受试者是否能从这个代数式中看出和的平方？如果他感到困难(通常会这样)，实验者就按顺序提出相继的环节(即1、2、3、4题等)。当受试者解答一个环节后，实验者就要求他回到第8题。如此往复，逐步接近第8题。

具体做法如下：先出示第8题。"你不能解这道题吗？那么就数这道题(第1题)。你已解对了。现在再试解第8题。还不行？那么解这道题(第2题)。你解对了。现在再试解第8题。还不能解答吗？那就解这道题(第3题)。"诸如此类，等等。在提出左列每一题的同时，还提出右列的对应题目。为了避免总是先提出一个能应用公式解的题目，接着再提出一个不能应用公式解的题目，我们采取了交替提出左右两列题目的做法，提出题目的顺序为：

8, 1, 1a, 8, 2a, 2, 8, 3, 3a, 8, 4a, 4 等等。

在本测验中，表示概括能力的指数与从第 1 到 8 题必须经过的中间环节数("梯级"数)有关。例如，一名受试者按 1, 2, 3, 4, 5, 8 的顺序解题，则其指数应为(4, 3)。数值 4 意指他必须通过 4 个"梯级"，也就是要解四道题(2, 3, 4, 5 题)才能把这个概括引用到"最远"的题目，即第 8 题；而数值 3 则表示最后一步合并了三个阶段，即 5→6→7→8。S. I. 夏皮罗曾在高年级(九和十年级)作过实验，以评定学生"在解数学题中的概括能力"。在这实验中，他建立了两个概念："概括的最大步子的长度"和"所有步子的长度的总和"，并采用了一套比较复杂的评分系统。在本测验中，没有必要使用如此复杂的系统。

但是，如果受试者连一步也不能独立完成(譬如说，他不能从第二题转到第三题，或从第三题转到第四题)，那怎么办呢？在这种情况下(这种情况并不常见，因为本测验主要是给有能力的学生做的)，实验者手边应有几套完全类似的题目(绰号叫"影子")，供受试者练习，以使受试者经过解答类似题目的训练后，取得帮助他完成下一步的经验。这些附加练习题的题数也是被考虑的。我们还用图来直观地表示每个受试者解答第 1 到第 8 题的活动过程。

B. 代数测验

在进行本测验之前，先让受试者数一个有关概括和详细说明的简短的题目系统："在这些代数式中，哪几个可以归入两数和的平方公式？并说明为什么。$(a+b)^2$, $(a+b)\cdot 2$, $a+b^2$, $a+2b^2$, a^2+b^2, $(a+2b)^2$, $(a+b^2)^2$, $(a+2b^2)^2$, $a+2b$, $(a+b^2)\cdot 2$, $(a+2b)^2\cdot 2$, $(2a+2b)\cdot 2$。"现将基本测验列在下面：

原题

$$(a+b)^2=$$

第一变式

$$(a+x)^2=$$

$$(x+y)^2=$$

$$(m+n)^2=$$

与原题的共同点是：字母既无系数也无指数(更确切地说，系数和指数都是1)。

与原题的不同点是：字母不同。

概括地说，变式与原题有两个共同的要素和一个不同的要素，共同点是未出现系数和指数，不同点是字母不同。

第二变式

$$(2a+b)^2=$$

$$(3a+4b)^2=$$

$$\left(\frac{1}{2}a+2b\right)^2=$$

$$\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{3}b\right)^2=$$

$$\left(\frac{1}{5}a+0.2b\right)^2=$$

与原题的共同点是：字母相同且无指数。

与原题的不同点是：引入了系数(先整数后分数)。

概括地说，变式与原题有两个共同的要素(无指数和字母相同)，一个不同的要素(系数不同)。

第三变式

$$(a^2+b)^2=$$

$$(a^3+b^4)^2=$$

$$(a^n+b^5)^2=$$

$$(a^n+b^{2n})^2=$$

与原题的共同点是：字母相同且无系数。

与原题的不同点是：引入了指数(先具体后抽象)。

这就是说，有两个共同的要素，一个不同的要素。

第四变式

$$(3x+6z)^2=$$

第四变式是第一、第二变式题目的结合。与原题相比，有一个共同的要素（无指数），两个不同的要素（系数不同，字母不同）。

第五变式

$$(6a^3+3b^4)^2=$$

$$\left(\frac{1}{3}a^x+0.4b^y\right)^2=$$

第五变式是第二、第三变式题目的结合。与原题相比，有一个共同的要素（字母相同），两个不同的要素（系数和指数都不同）。

第六变式

$$(c^2+d^3)^2=$$

$$(x^n+y^m)^2=$$

第六变式是第一、第三变式题目的结合。与原题相比，有一个共同的要素（系数相同），两个不同的要素（字母和指数都不同）。

第七变式

$$\left(3c^3+\frac{1}{2}d^4\right)^2=$$

$$\left(\frac{1}{4}x^n+0.2y^{b+1}\right)^2=$$

第七变式是第一、第二、第三变式题目的结合。与原题相比，所有三个要素都不同。

本测验是关于应用一个简捷乘法公式（和的平方）的难度递增的题目系统，在这里，正负号的变化对题目类型是非本质的。在最后的（第七）变式中，很难看出应用公式的可能性，因为与原题相比，所有外在的要素都变了：引进了系数（甚至分数系数）和指数（甚至文字的），并改变了字母。但在所有情况下（甚至对题目类型来说为非本质特征的正负号也可在一定限度内变化），由于保持了题目的本质特征（两数和的平方），所以也保持了题目的类型。

受试者在熟悉这个简捷乘法公式的同时，理解了它的数学意

义。接着我们要求他们用这公式解最后的变式。可以料到，能力较低的受试者会无条件地否认解题的可能性。此时，我们就要求他们用此公式解该题的不同变式，解题的顺序是从最后的变式逐步倒退到原题。在这过程中，一旦发现受试者能解出某一变式时，实验者立即要求他按相反的方向解题，也就是从已解出的变式开始到最后的变式。受试者每次都必须对他们的运算或认为不能解说明理由。

系列 VI：不同类型题目的系统

本系列包括六个算术测验和一个几何测验。算术测验是由内容和形式都不相同的题目组成的(每个测验有 3 至 6 题)。各个测验的难度逐渐增加(测验 A 最容易，测验 E 最难)。同一测验中的题目是按下列原则选取的：一些题目按照给定的条件和关系的性质是属于同一类型的，是以外表上虽各不相同但具有同一数学结构为特征的；而另一些题目，则是外表上极其相似，但本质上却是属于不同类型的。作业的要点是把外表上不相似但本质上属于同一类型的题目归在一起，把它们从外表上极其相似但实质上属于其他类型的题目中区分出来。受试者应证实他们的分类，证明他们所选择的题目是属于一种类型，而其余的并不属于这种类型。我们故意把各测验中同类型题目的题数加以变化，以免受试者产生各测验中同类型题目的题数都相同的想法。

受试者在解题之前，应先把题目分类。如果他分错了，则要求他解出题目后再重行分类。这样做是为了要确定受试者是仅仅在感知题目结构的基础上就能概括题目，还是需要概括了解题的过程，才能看出同一"算术推理的骨架"(这里引用了 I. V. 安诺德的术语)。受试者可用算术方法(五、六年级学生常常采用)或代数方法(七、八年级学生常常采用)解题。

与系列Ⅴ比较，本系列所进行的是另一水平上的另一种概括。实际上，系列Ⅴ中的概括在于把题目归入已知的概念之中。本系列则是对几个现象的独立的概括，从而形成了题目所给出的类型的概念。

系列Ⅵ中的材料使我们能判断"简缩"、即推理过程与相应的运算系统的缩减的性质。我们能通过分析受试者解答同一类型题目时的推理过程来作出判断。我们可以看到：(1)各种思维序列的内容和个数，当该类型的每个题目被解答时，组成推理的个别命题和这过程的动力(在推理中跳过了哪些中间环节，以及在某一类型中从第一题解到最后一题，其推理过程是怎样简缩的)；(2)在实验者的要求下，受试者是怎样使推理过程发展成为一个(对他来说)完整的结构的。

我们采用下述方法研究受试者数学记忆的要素。我们观察他们是怎样记忆(1)题目类型(题目所给出的关系的种类)，(2)题目中的具体事实——特定的数量，以及记忆得怎么样。为了达到这一研究目的，我们要求学生在课后、一周后、三个月后重现这些题目(事先并不告诉他们需要记住题目)。

系列Ⅵ中的几何测验旨在研究概括几何材料的能力。它有五组简单的几何图形。第一组出示若干大小不同、且按不同方位放置的三角形；第二组出示若干按不同方位放置的不同类型与大小的多边形(从三角形开始)；第三组出示若干闭曲线，圆和卵形线；第四组出示若干大小与边长各不相同的角；第五组出示不同类型的凹和凸的多边形。这五组几何图形均于受试者在校学习几何之前给出，对于每组图形，都要向受试者个别提出下述问题：(1)这里所出示的全部图形有什么差异？(2)这里所出示的全部图形或其中的某些部分有什么共同点？(3)这些共同点的本质是什么？(4)是否能在这个基础上将该组所有的图形结合成一个组？(5)怎样命名这一组，使它区别于其他的图形？学生必须证实其答案的

正确性。

本系列的测验如下：

A. 算术测验

1. 一条鱼的鱼尾重 4 公斤，鱼头的重量等于鱼尾的重量加上鱼身重量的一半，而鱼身的重量等于头和尾的重量之和。求鱼的重量。

2. 买一种鱼 2 公斤，另一种鱼 3 公斤，共付 4 卢布 80 戈比①。如第一种鱼降价 10%，另一种鱼降价 15%，则买这些鱼只需付 4 卢布 20 戈比。每种鱼每公斤的售价是多少？

3. 母亲和她的儿子、女儿一起花了一笔钱。母子共花了 22 卢布，子女共花了 15 卢布，母女共花了 20 卢布。每人各花了多少？

4. 接力赛跑道共分成四段，第一、第二段之和是 100 米，第二、第三段共 200 米，第三、第四段共 300 米，第四、第一段共 400 米。求跑道全长。

5. 已知某捕鱼组第一天捕鱼 3.2 箱，第二天捕的是第一天的 1.5 倍，第三天比第二天多捕 10%。三天共捕鱼多少？

B. 算术测验

1. 有若干兔和兔笼。如一个兔笼关一只兔，则有一只兔将没有兔笼。如每个兔笼关两只兔，则空余一个兔笼。问兔和兔笼各有多少？

2. 若干小鸡和兔在室外追逐，它们共有头 35 个，脚 94 只。问小鸡和兔各有多少只？

3. 教室里如 5 个学生坐一条长凳，则 4 人将无座位；如 6 个学生坐一条长凳，则将有两个空位。教室里有多少学生，多少长凳？

4. 一个卢布换成 10 戈比和 15 戈比的硬币共 9 枚。每种硬币各有多少枚？

5. 一女孩把照片贴在照相簿上。如每页贴一张照片，将多出

① 1 卢布=100 戈比。——英译本编者。

4 张照片；如每页贴 2 张，则将空出一页。问有几张照片？照相簿有几页？

C. 算术测验

1. 某家具厂计划每天生产 48 张桌子。实际上每天比原计划多生产 2 张，因而到最后三天只需再生产 100 张。该厂总共应生产多少张桌子？

2. 某家具厂的 4 个仓库里存有同样数量的桌子。若从每个仓库各取出 90 张，则 4 个仓库所余桌子的总和等于原来每个仓库所存的桌子数。原来每个仓库存有多少桌子？

3. 某苗圃应在一定期限内移植一批树苗。若每天移植 240 株，则将比原计划少移 400 株；若每天移植 280 株，则将比原计划多移植 200 株。该苗圃应移植多少株树苗？规定多少天完成任务？

4. 某家具厂两工人完成单位工作量所获得的工资相同，第一个人做了某件工作的 $\frac{3}{5}$，第二个人完成了所余的工作。若第二个人得 8 卢布，那么第一个人应得多少？

D. 算术测验

1. 汽车以时速 20 公里从 A 地驶往 B 地，回程时速为 30 公里。汽车来回的平均时速是多少？

2. A、B 两地相距 135 公里。一辆卡车从 A 地开往 B 地，1 小时又 10 分钟后一辆汽车随后也从 A 地出发。已知汽车的速度是卡车的 2 倍，且比卡车早 20 分钟到达 B 地，问两车的速度各是多少？

3. 轮船以等速往返于阿斯特拉罕与伏尔加格勒。航程是在有水速时还是在无水速时完成得快些？

E. 算术测验

1. 一个古算题：一桶水一男人可饮 14 天，若与其妻同饮则可用 10 天。若其妻独饮，则可用多少天？

2．一个两口之家一天用水 20 公升，星期六用水增加 15%，但星期日却减少 7.5%。424.5 公升水可供这家用多少星期？

3．一打字员打 1000 张目录卡要用 p 小时，第二个打字员要用 q 小时。两人同时打这些卡片，要用多少小时？

4．一个古算题：一头狮子 2 小时能吃掉一只羊，做同样的事情，一只狼要 3 小时，而一条狗要 6 小时。它们一起吃一只羊需要几小时？

5．灌满一池水，单开第一根水管需 1 天(以 24 小时计)，单开第二管需 2 天，单开第三管需 3 天。三管齐开需多少时间才能灌满空的水池？

6．两旅行者分别在 A、B 两地。旅行 AB 全程第一人要用 x 小时，第二人要用 y 小时。若两人同时分别离开 A、B 两地相向而行，他们几小时后相遇？

F．算术测验

1．一些学生汇集了 13 卢布买戏票和电影票共 55 张。如每张戏票是 35 戈比，每张电影票是 10 戈比。两种票各买了多少张？

2．大礼堂用 100 盏电灯照明。一盏大灯一个夜晚花电费 1.5 戈比，而一盏小灯只花 1 戈比。大礼堂全部电灯开一个夜晚共花 1.35 卢布，问大、小电灯各有几盏？

3．一列火车由两轴、三轴和四轴车厢组成，三轴车厢数与四轴车厢数相同。如这列火车共有 36 节车厢，111 根车轴，求每种车厢的数目。

G．几何测验

几何测验已在前面说明。

系列 VII：从具体逐渐过渡到抽象的题目系统

本系列的一个测验(综合测验)是一个由 10 道题目组成的系

统，其中每道题目都是从具体逐渐过渡到抽象的、一般的模式。每道题目都有三至五个变式。第一变式(a)是一道十分清楚、具体的题目，而最后的变式(e)则是已转化到抽象的、一般水平的同一题目。变式 b, c 和 d 代表从 a 逐渐过渡到 e 的、对题目的要素逐步进行概括的中间变式。在测验时，首先要求受试者解答抽象的变式 e。如他不能完成这一任务，则给予具体变式 a，并要求他解答，然后再回到变式 e。如他还是解不出 e，则要求他解变式 b，然后再回过头来解答变式 e。因此，每道题目的变式应按 e, a, e, b, e, c, e, d, e 的顺序给出。

这 10 道题目(第 1 到第 10 题)是按逐步复杂的次序排列的，实验者应依次出示给受试者。并非全部题目都有五个变式，有的只有四个，甚至三个。

我们认为没有必要列出题目的所有变式，这里仅限于给出 10 道题目的变式 e。另外，对其中的两题列出了所有的变式，以显示其要素逐步概括的性质。

1e. 房间长 b 米，宽和高各为 a 米。n 间这样的房间，容积共是多少？

2e. 一块平板被切成 m 块边长为 x 厘米的正方形与 n 块边长为 y 厘米的正方形后，无任何多余的边料。平板的面积是多少？

3e. 每本笔记本的价格是 a 戈比，每支铅笔的价格是 b 戈比。买 x 本笔记本和 y 支铅笔共需多少钱？

4e. 影剧院被走道分成 a 块，每块有 p 排，每排有 n 个座位。这影剧院一次能容纳多少位观众？

5e. 一幢大楼取暖需 m 吨煤。现已从这个数量中用去 n 吨，为了使余下的煤还能用 t 天，今后必须每天用多少吨？

6e. 油漆房屋墙壁，墙长 L 米，高 H 米，墙上有三扇各宽 E 米、高 N 米的窗。墙壁需油漆的面积是多少？

7e. 某校园有 p 棵果树，其中梨树的棵数是梅树的 q 倍，而

苹果树的棵数等于梨树和梅树的棵数的和。每种果树各有几棵？

8e．一本书有m页，每页有n行，每行有p个字。第二版改排，每页为b行，每行为a个字。该书第二版每本有多少页？

9e．某厂预定在一定期限内生产a套工具，因此计划每天生产b套。由于工人们突破定额，每天比原计划多生产m套，结果该厂比原计划提前几天完成任务？

10e．集体农庄的两个仓库共储存p吨谷物。每天从第一仓库运出a吨谷物，从第二仓库运出b吨，t天后，两仓库所余谷物量相等。每个仓库原来各存多少吨谷物？

第1题的变式：

1a．房间长6米，宽3米，高3米，4间这样的房间，容积共是多少？

1b．房间长6米，宽3米，高3米，n间这样的房间，容积共是多少？

1c．房间长6米，宽3米，高a米，n间这样的房间，容积共是多少？

1d．房间长6米，宽和高各为a米，n间这样的房间，容积共是多少？

1e．（见前）

第9题的变式：

9a．某厂预定在一定期限内生产100套工具，因此计划每天生产4套。由于工人们突破定额，每天比原计划多生产1套，结果该厂比原计划提前几天完成任务？

9b．同上题，但工具的总数是a套。

9c．同上题，但工具的总数是a套，每日计划产量是b套。

9d．（见上述的9e）

本系列表明一个学生能怎样迅速而顺利地把题目的解法转换成一般模式，以及他具有多大的能力来把具体的数量运算转换成

适当的符号运算(这能使他用概括的、抽象的形式表示数量间的关系)。我们要确定一个受试者是立即还是必须逐步达到用一般模式解题。在后面一些题目的每一步(每一变式)上，受试者会完全"脱离"具体事实,这时便达到解题的抽象水平。所以,在本系列中,概括是作为从具体水平到抽象水平的一个独立的转变来研究的。这个转变的指数是:(1)在十道题目中,学生用一般模式解的题数;(2)从 a 过渡到 e(包括 e)所必须的变式的平均数。在前面曾说过,有些题目没有五个而只有四个甚至三个变式。因此,为了在变式上使各题平衡,我们作出如下的规定:对于每一题,将所解的变式数与变式的总数相比,再算出以五个变式为基础的指数。例如,一名受试者解对第 4 题的 4a、4b 和 4e，这就是说他解了四个变式中的三个，或 75%。如以五个变式为基础，则他解答了 5 的 75%，即 3.75。从这点出发，我们确定对于第 4 题该受试者解变式数的指数为 3.75。

在测验结束时,要求学生重现已解答和未解答的题目(如果他们敢于一试),以便查明学生对题中的特定事实和数量关系的记忆程度。

系列 VIII：按已知类型编题目

本系列由四个测验组成：一个算术测验、一个代数测验、一个几何测验和一个逻辑测验。每个测验有若干题目，每一题目属于学生所不知道的一个确定的类型。受试者在熟悉题目(但没有解答)后，或在解答题目(如他不解答就不能数本测验)后，必须自己编出(1)同类型与(2)不同类型的题目(应尽可能具有不同的内容和不同的数据)。

本系列测验旨在查明受试者仅在分析某类事物中的一个事物的基础上，是否能对该类事物作出独立的概括。虽然概括通常是

作为比较和对照一系列现象的结果，但这里的问题是，受试者不经过比较和对照，仅在分析一个现象的基础上，是否能得出有关本质特征（从而也是所有一系列现象的一般特征）的结论。只有当受试者发现这一事物的本质和一般的特征后，他才能建立与一个已知事物同类的事物的一个系列（如果受试者自己编出了与已知类型同一类的一个题目，那么这就意味着他已经建立了这个系列）。我们查明，在受试者没有机会比较和对照甚至两个同类型的题目时，他们是怎样分析题目的结构（或一个题目解答的结构），以及怎样从类型的观点出发，进行推理，区分有关和无关的东西的。为了评定受试者的测验成绩，我们采用三分制以对应于三种编题水平：(1)最初级的水平，指受试者编的题目类似于已知题目，但数据有变化；(2)所编的题目具有不同的内容和不同的数据；(3)所编的题目具有不同的内容，并是用一般结构来构思的。现将测验说明如下：

A．算术测验

1．两个工人9小时共生产243个零件。其中一人每小时做13个，另一人每小时做几个？

2．三个渔民在河岸上过夜。他们都抽烟，但仅一个渔民有一包已拆开的香烟。他们平分了香烟。到翌晨，每人已吸掉4支，这时三人共剩的香烟与开始平分给每个人的同样多。每个渔民平均分到几支香烟？

3．骑自行车者计划在某一时间到达目的地。已知如以时速15公里行驶，则早1小时到达；如时速为10公里，则晚1小时到达。如要准时到达，他的车速应是多少？

4．买两种物品共用36卢布。第二种物品虽比第一种多买1.5公斤，但为每种物品所付的钱相同。若每种都买5公斤，则尚余9卢布。求每种物品的价格。

B．代数测验

1．设想一个三项式，这个三项式在加上 $2a^2b$ 这一项后，能分解因式。

2．能说 p 总是小于 $3p$ 吗？ a^2 总是大于 a 吗？“$-x$”总是负数吗？

3．矩形的一边长 $3m+2n$，另一边比它长 $m-n$。求矩形的周长和面积。

4．一个偶数的一般式是怎样的？

C．几何测验

1．等腰三角形的腰长为底长的两倍，其周长等于 45 厘米。求各边长。

2．立方体的棱长是 6 厘米。求它的表面积。

3．在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 等于 $\angle B$ 的 $\frac{2}{3}$，$\angle B$ 等于 $\angle C$ 的 $\frac{3}{5}$。求各角的大小。

D．逻辑测验

某校有 370 名学生，证明其中至少有两名学生在同一天过生日。

系列 IX：证明题

本系列由两个代数测验、一个几何测验和一个逻辑测验组成。每个测验都是同一类型难度递增的证明题系统。受试者在学校根本不解类似的题目（测验 B 和 D），或尚未解过它们（测验 A 和 C 是在学校中开始学习相应的单元之前出示的）。这些测验是进一步研究严格意义上的创造性概括：对推理方法的概括或将已学过的证明原理迁移到解类似但较复杂的智力题目。第一个代数测验（A）是以代数变换的原理为基础的，第二个测验（B）则是与掌握依次研究各种可能性的原理有关。几何测验关系到在看出并证明三

角形全等的基础上，掌握定理的证明。实验者应按下列顺序出示题目：先出示测验的第一个(也是最容易的)题目。当受试者自己或在实验者的帮助下明确了推理的原理后，则要求他证明测验的最后(也是最难的)一题。如他不能解答，则给他第二题(如此下去，逐步趋向于最后一题)。例如，在代数测验 A 中出示题目的顺序应为：1, 7, 2, 7, 3, 7, 4, 7, 5, 7, 6, 7。我们通过对推理过程的分析来判断概括的特性。它的数量方面是用测验中从第一题迁移到最后一题所需的环节数，以及最后一步的大小来表示的。因此，如果一名受试者解题的顺序为：1, 2, 3, 4, 5, 7, 那么，对这个测验他的指数就是(6, 2)。

系列 IX 的测验还企图研究推理过程的简缩(缩短)特性。从这一观点出发我们分析了受试者所解的最复杂题目的解法。这样，我们就确定了解题中实际推理过程的环节数，并把它与解同一题目的详细过程的环节数加以比较(在实验者的建议下，受试者精心推理，直到他认为已得到了它的完整结构)。我们的注意力是放在简缩掉的那些环节上。

本系列的测验如下：

A．代数测验

1．是否能说 $-d$ 总表示一个负数？或 $2a>a$？或 $8n$ 必是一个整数？

2．在什么条件下有 $a=5a$，$a=a^3$，$a<a^2$，$a>a^3$，$-a>0$，$a-2>0$，$a+b<a-b$？

3．当 m 为何值时，等式 $am/bm=a/b$ 不成立？

4．a、b 为何值时，等式 $a/b=3a/b$ 成立？(受试者应探究各种可能性。)

5．试证当 x 取任何值时，x^2+x+1 都不可能是负数。

6．试证多项式 $x^{12}-x^9+x^4-x+1$ 对一切 x 值都是正的。

7．试证对 a 的任何值，$(a-1)(a-3)(a-4)(a-6)+10$ 总为

正数。

B. 代数测验

1. 试证任何三个连续的整数之和能被 3 整除(对任何整数 a)。

2. 设想一任意数,把它乘以比它大 6 的数,再加上 9,试证结果必为某数的平方。

3. 试证若将相邻两整数的积再加上其中的大数,则得此大数的平方。

4. 试证任何三个连续的整数有下述性质:中间一个数的平方比另外两个数的积大 1。

5. 写出一个三位数,使其百位、十位、个位的数字是三个连续的自然数。然后用同样的数字,但以相反的顺序写出另一个三位数。最后用两个三位数中的大数减去小数。试证这样得到的差恒为 198。

6. 两个分数的和等于 1。试证第一个分数的平方加上第二个分数必等于第二个分数的平方加上第一个分数。

7. 已知一个 $abcabc$ 类型的六位数(例如,526526)。证明所有这样的数都能被 13 整除。对于一个解出了第 6 题、并已接触第 7 题的受试者,若此题太难,则可给予一道辅助题:证明所有 aa 型(例如,33, 55 等)的两位数能被 11 整除。

C. 几何测验

1. 证明顶点在一已知三角形三边上的三角形的周长,小于已知三角形的周长。(图 16)

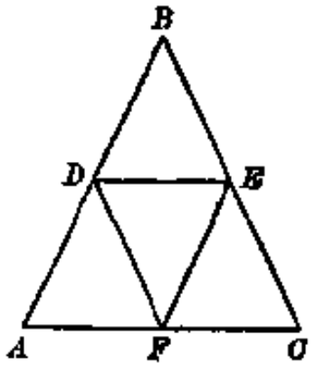


图 16

2. 证明等腰三角形两底角平分线的长度相等。

3. 把等腰三角形 ABC 两腰的中点 D、E 分别与所对的底角的顶点 A、C 连结起来,试证线段 DA 和 EC 相等。

4. 自等腰三角形 ABC 两腰的中点分别引垂线，至与其他的边相交，试证所得的两条线段相等。

5. 一个等腰三角形的顶角是 36°。试证底角的平分线分原等腰三角形为两个等腰三角形。

6. 梯形的两对角线把它分为四个三角形。证明以腰为一边的两三角形等积。

7. 证明等腰三角形底边上任意一点到两腰的距离之和等于一定值。

D. 逻辑测验

1. 在下面的加法中填上所缺的数字：

$$\begin{array}{r} 4\,* \\ +\ *\,*\,2 \\ \hline *\,*\,0\,1 \end{array}$$

2. 在下面的乘法中填上所缺的数字：

$$\begin{array}{r} *\,*\,*\,* \\ \times\quad *\,2 \\ \hline 1\,8\,*\,4\,8 \\ 7\,4\,9\,9\,* \\ \hline *\,*\,*\,6\,6\,* \end{array}$$

3. 在下面的乘法中填上所缺的数字：

$$\begin{array}{r} 6\,* \\ \times\ *\,*\,* \\ \hline *\,* \\ *\,* \\ *\,* \\ \hline *\,*\,*\,6 \end{array}$$

4. 一名学生在黑板上正确地把两数相乘——五位数乘以三位数，——但他接着擦去了大多数数字。请利用所余部分，填上所

擦去的数字。

$$
\begin{array}{r}
\,7\,\,*\,* \\
\times \quad 7\,4\,3 \\
\hline
\,\,*\,*\,*\,5 \\
\,\,*\,*\,*\,* \\
\,\,*\,*\,*\,* \\
\hline
4\,2\,*\,*\,*\,8\,7\,*
\end{array}
$$

5. 在下面的多位数加法中，求出各字母所代表的数字(相同的字母表示同样的数字)。

$$
\begin{array}{r}
C\ M\ E\ X \\
+\ Y\ P\ O\ M \\
\hline
Y\ P\ E\ M\ N
\end{array}
$$

系列 X：按题目的条件列方程

本系列的题目(正如前一系列的题目那样)用于研究一定的推理方法的概括。大多数教学法专家认为，按题目条件列方程并不遵循同一个十分具体的法则。这似乎是正确的。可是，在解若干这类题目时，学生逐步形成列方程的习惯，而探索这类数学题解法的某个一般原理、一般的推理方法则是形成这种习惯的基础。本系列的目的是要查明受试者怎样顺利而自然地形成这种习惯，怎样迅速地概括适当的推理方法，以及迁移的范围有多广。

本系列是在受试者在校学习相应的代数单元之前向他们提出的。它包括十二道难度递增的题目，所有的题目都放在一个测验中。根据第一题的条件列方程是非常容易的，而运用最后一题的条件列方程则相当困难。实验者用第 1 题向受试者解释列方程的最一般的原理，然后要求他解第 12 题(他可以只列一个方程)。如果他不能完成这项任务(这是十分自然的)，实验者就按颠倒的

顺序相继提出第11,第10,第9,第8题等等,直到受试者能解的那一题为止。这个范围(从第1题到受试者能解的那一题止),就从数量上描述了刚形成的特殊推理方法的迁移广度。然后实验者从受试者刚能解的那一题开始,按相反的顺序相继出示各题直到第12题(包括第12题)。受试者从哪道题开始停下来,不能继续解题了?如果实验者略予帮助呢(这属于次发展的范围)?

指数反映三个特征:譬如说,受试者在解出第1题后,能解答第4题,然后独立地达到第6题,并在实验者的帮助下,做到第9题,那么,他就得到一个指数(3;6;9)。这个指数意味着这个受试者由一道题目所形成的解题方法的迁移范围是三道题目(第2、第3和第4题),最大的进步至第6题,次发展的范围至第9题(包括第9题)。从这一观点出发,我们通过比较受试者解一系列题目中的推理(如同前一系列那样),来判断推理过程的简缩情况。此外,本系列还能研究对一道题目的知觉的一些要素,即抓住一道题目的一般结构和它的基本关系的能力。

A. 代数测验

1. 教师告诉一个学生,将一已知数加上12后再除以13。但学生没有专心听,而是将已知数减去13后再除以12。他很幸运,得到了正确的答案。这已知数是多少?

2. 某数加上36等于此数乘以4,求此数。

3. 某数的一半与它的三分之一的和,比它的四分之一大7。求这个数。

4. 一本拍纸簿的价格是一支铅笔价格的4倍,一支铅笔比一本拍纸簿便宜30戈比。铅笔和拍纸簿的价格各是多少?

5. 三个售货摊上的柑桔数相等。当每个货摊各售出600只柑桔后,三个货摊所余柑桔的和等于每个货摊原有的数目,每个货摊原有柑桔多少?

6. 两数之和为20。如将其中一数增加到5倍,另一数增加

到 4 倍，则两数之和将为 92。求此两数。

7．“爷爷，请告诉我，您的儿子几岁？”“我儿子年龄的周数等于我孙子年龄的天数。”“您孙子的年龄是多少？”“他年龄的月数等于我年龄的年数。”“爷爷，您的年龄有多大呢？”“我们三人年龄的和刚好是 100 岁。”问每人的年龄是几岁？

8．学校买一批图书，用 3 卢布券付款比用 5 卢布券多付 8 张。这批图书价值多少？

9．两水缸原来盛有不同量的水，如从第一缸提出一提桶水，倒入第二缸，则两水缸所盛的水量相等。如从第二缸提出 20 提桶水，倒入第一缸，则第一缸所盛的水量为第二缸的 3 倍。问两水缸原来各盛多少提桶水？

10．将数 100 分成四个不等的数，使得第一个数减去 4，第二个数加上 4，第三个数乘以 4，第四个数除以 4 后，所得的四个结果都相同。求分成的四个数。

11．两物体绕一周长为 999 米的圆作同向运动，它们每 37 分钟相遇一次。若已知第一个物体的速度是第二个物体的 4 倍，求两物体的速度。

12．我现在的年龄是我哥哥象我现在这样大时的我的年龄的 3 倍；而当我的年龄与我哥哥现在的年龄一样时，我们将一共是 96 岁。问现在每人是几岁？

系列 XI：不切实际的题目

这个短小的系列由一个测验组成，它的题目的数据使题目变得没有意义。这些题目的类型是完全切合实际的，但所给出的具体变式却不现实。本系列旨在研究对数学材料概括的某些特点，这些特点表现在对数学材料的知觉中以及对它的处理和保存中。在出示这些题目时，实试者要求受试者尽可能快地、一题接着一题

地解题，并在受试者解完所有题目之前，不对他详细讲述或分析题目。当受试者察觉题目条件不切实际时，实验者就把它当作一个偶然的错误来解释，并建议他继续解下一题。实验者关于迅速解题的指导颇为重要，因为这样做可以分散受试者分析和评价题目条件的可能的企图，促使他们显示自己的用"纯"形式感知和解答题目的类型。我们设想，那些倾向于离开具体数据用一般形式感知和解答题目的受试者，可能不会注意到具体数据的不切实际之处。我们还要查明受试者对系列中的题目记忆得怎样(要求他们在测验后、一周后，以及三个月后重现这些题目)。

综合测验

1．直角三角形的周长为3.72米，它的两条边均为1.24米，求第三边。

2．等腰直角三角形的腰长为$5a$厘米，斜边长为$12a$厘米。此三角形的面积是多少？

3．某数被5除余7，试写出它的代数一般式。

4．伊凡比彼得小2岁，彼得比史蒂潘大4岁，安德烈比彼得大3岁，而伊凡与史蒂潘同年。安德烈与伊凡谁的年龄较大？

5．一汽轮以全速从A驰往B(顺水)并返回原地(逆水)。实际上，由于潮流的影响，顺水速度和逆水速度并不相同。从A到B的时速为20公里，返回时时速为30公里。求汽轮行驶全程的平均速度。

系列XII：人造概念的形成

本系列的测验旨在揭示学生概括能力的某些要素，这种概括能力是一种与数学活动或任何其他学校活动的进行无关的一般能力。

这些测验是对维戈茨基-萨哈罗夫所使用的、著名的人造概念

形成法加以修改而成的。这种方法最近曾被用来描述思维的个性特征(例如,见 A.F. 高伏科娃[95]和 G.P. 安东诺娃[30])。这些测验的内容是一些关于形成人造的、实验性的、非学术性概念的题目①。为了命名这些人造概念,我们引进了一些毫无意义的人造术语,诸如"KOK", "GOK" 和"LOK" 等。这些测验具有不同的复杂程度。每个测验包含一套以三个参数(形状,大小和颜色)为特征的图形卡片,卡片上的某些图形被一个以上述三个特征中的两个为基础的人造概念联系在一起,并用某一术语来表示。因此,在每个测验中,有些特征是有关的,而有些则是无关的。从而,有些图形构成实验概念,而有些则与实验概念无关。在属于实验概念的图形卡片中,我们选取一张,把概念标记在它的正面,而其他的,则标记在反面。受试者并不知道这个特征的组合,或哪些特征构成概念。受试者的任务是用尽可能少的次数挑出所有属于这一概念的图形卡片(尽可能少挑"空白"卡片)。实验者把卡片按任意次序放在受试者面前,并要求受试者逐次指出他认为是属于这个实验概念的那些卡片(这个实验概念是用一张卡片给出的)。然后要求他翻转卡片,寻找表示卡片上的图形是属于这个概念的术语。我们要查明:受试者在做上述工作时,是怎样思考的,在获得题目的解时运用了哪些结论,他怎样从无关的东西中摆脱出来,他怎样概括以及怎样形成概念(作为一个有关特征的集合)②。指数是试取的次数,即在挑出所有形成这个概念的卡片,并且说出它的有关特征之前,受试者所抽取的卡片数。

对受试者的指导语的性质可从测验 B 中看到。测验 A 和 O 是类似的。所有的图形见图 17、18 和 19,这些图形都已经缩小。

---

① 从数学观点来说,这些测验可视为按不同特征分类的题目。我们现在使用的这类题目的经典心理学解释最符合我们的研究目的。

② 当然,应事先核实所有受试者都不是色觉异常者。

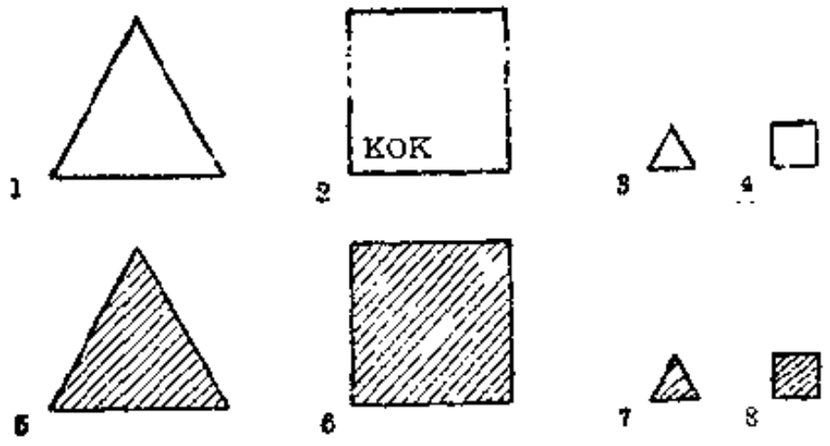


图 17

测验 A。概念"KOK"由图形 2 和 6 构成。有关的特征是形状和大小。无关的特征是颜色。这里白色图形代表原卡片上的红色图形，黑色图形代表原卡片上的蓝色图形。

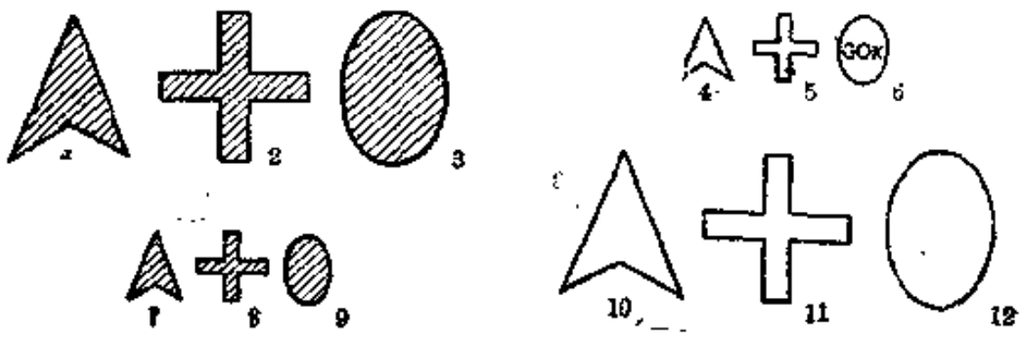


图 18

测验 B。概念"GOK"由图形 4、5 和 6 构成。有关的特征是颜色和大小。无关的特征是形状。这里白色图形代表原卡片上的红色图形，黑色图形代表原卡片上的蓝色图形。

指导语 "在你面前放着十二张画有图形的卡片。它们都不相同，没有两张完全一样。但其中有些图形可按照一定的特征归类，并用术语'GOK'来标记。所有这一类卡片的反面，都标有这个术语。在反面没有这一术语的卡片则不属于这一类。只有一张卡片，你可以在它的正面看到词'GOK'，这是给你的一个参考点。"

"本题目要求用尽可能少的次数，挑出'GOK'卡片。可按任何顺序抽取卡片，然后把卡片翻过来，看看有无标记，并想一想。当然，最多的试取数是 12（如果你相继翻转全部卡片，再取出所有标

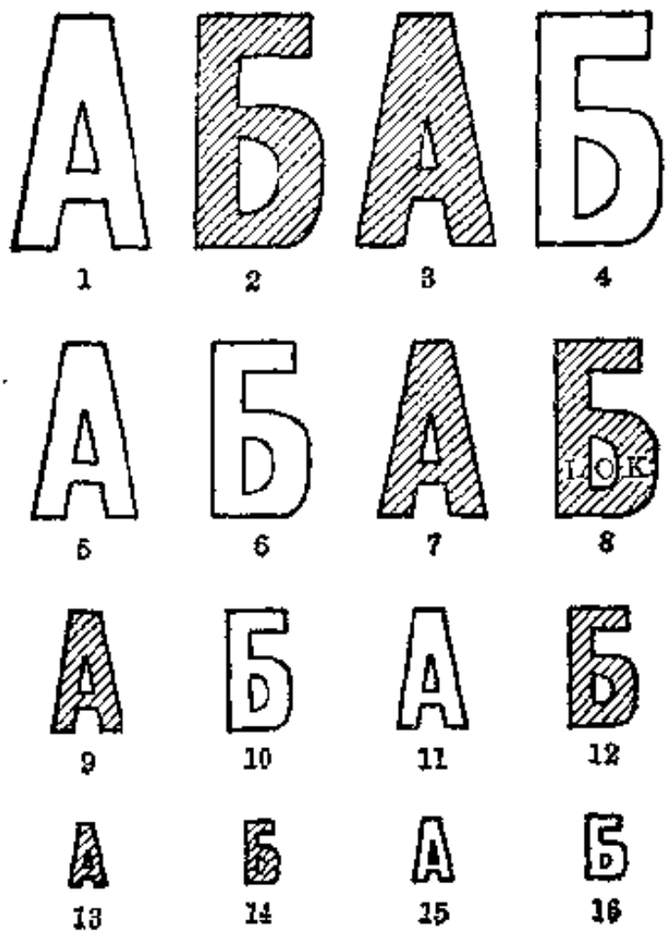


图 19

测验 C。概念"LOK"由图形2、8、12 和 14 构成。有关的特征是形状和颜色。无关的特征是大小。这里白色图形代表原卡片上的红色图形，黑色图形代表原卡片上的蓝色图形。

着'GOK'的卡片)。我重复一遍：用尽可能少的次数完成这一题。如果你挑到了一张反面没有标着'GOK'的卡片，应把它放回原处。当你认为已取出了所有'GOK'图形时，就马上告诉我。"

系列 XIII：具有多种解法的题目

本系列的三个测验所提供的题目都能用不同方法求解(除了一般的由算术解法过渡到代数解法外)。我们把最容易、最省事(或最"优美"，这是数学家常用的说法)的解题方法尽量隐蔽起来。

我们设计这些题目是为了研究从一种心理运算到另一种心理

运算的转换。我们特别要查明，在解一道题目时，一个学生从一种解题方法转换到另一种方法（也就是说，从一种心理运算的方法转换到另一种）的能力如何。

受试者应自己找出尽可能多的解题方法。但是，并不在一开始就将这任务交给他。我们要判定，如果他不满意第一种解法，那么他自己是否感到有任何需要去寻求最简单和最省事的解法。然后才交给他这一任务，即寻找尽可能多的不同解法。如果受试者根本不能找到其他的解法或者找不出每种可能的解法，实验者就将这些解法告诉他。接着要求受试者对所有解法进行比较与评价，并指出他最喜欢的一种（他应对他的选择说明理由）。实验者记下受试者所喜欢的解法及其原因。一周后，实验者查明受试者记住了哪几种解法。我们根据受试者对解题作多种尝试的能力，从一种心理运算转换到另一种运算的顺利和轻快的程度，以及解题途径的多样化，来判断他心理过程的灵活性。

A．算术测验

1．用3卢布券和5卢布券支付78卢布，有几种付法？

2．16只麻雀停在两棵树上。不久，2只麻雀飞离第二棵树，5只麻雀又从第一棵树飞到第二棵树，这时两棵树上的麻雀数相等。每棵树上最初各有几只麻雀？

3．四个年级总共有118名学生，其中一、二年级共有70名，一、三年级共有65名，二、三年级共有59名。四年级有多少学生？

4．求从1到50的所有整数的和。

5．“你加入工会的时间是我的2倍吗？”“是的，恰好2倍。”“但是我记得前些时候你说是3倍。”“2年前吗？那时的确是3倍，但现在只是2倍。”问每个人加入工会各有几年？

6．轮船顺水时速为20公里，逆水时速为15公里，从A地到B地比反向航行少用5小时。A、B两地相距多少公里？

7．把4公升室温（15°C）的水倒入3公升36°C的水中，容器

中的水温是多少?

8．码头 A 与 B 之间的水路是 13.5 公里。一拖轮从 A 开往 B，一汽艇在 1 小时又 10 分后随后出发。已知汽艇的速度为拖轮的 2 倍，并比拖轮早 20 分钟到达 B 码头，求拖轮与汽艇的速度。

B．代数测验

1．当 $a=2$，$b=4$，$n=3$ 时，计算代数式 $a^2(a^2-b)(a^3-b)\cdot(a^n+b^n)$ 的值。

2．当 $a=17$，$b=3$ 时，计算 $2ab+b^2+a^2$ 的值。

3．解方程：$x+\frac{1}{x}=3\frac{1}{3}$。

4．计算 113^2-112^2。

5．两相邻偶数的平方差等于 28，求两数。

C．几何测验

本测验直接提到了运用不同方法证题的可能性。括弧内说明了实验中有能力的学生所用的证明方法的数目，或者在有关的教学法文献中所指出的可供我们作为指导的证明方法的数目。

1．试找出三角形外角定理(三角形的外角等于不相邻的两内角之和)的一些证法(两种方法)。

2．用不同的方法证明自直线外一点只能作该直线的一条垂线(两种方法)。

3．用几种方法证明：过直径的两个端点所引的两条平行弦相等(在库兹明的一篇论文[227]中，列举了三种证明此定理的方法)。

4．试用几种方法证明：在同圆中大弧对大弦的定理(在尼基汀的一篇论文[314]中，指出了六种可能的证法)。

5．试用几种方法证明勾股定理(在尼基汀的一篇论文[314]中，指出了四种可能的证法)。

系列 XIV：具有变换内容的题目

本系列也是研究从一种确定的心理运算到另一种心理运算的转换，而它所包括的题目都是按照下列原则构成的：已知一个原题及其第二变式。在第二变式中，与原题相比较，其中元素之一（这个元素从外表上看似乎并不重要）已经变更，从而导致变式在题目内容和解题运算方面的很大改变。我们研究了学生敏捷应变以及重建运算内容的能力如何，而这个运算内容是以变换了条件的相应类型题目的解法为基础的（因为当一个题目的一个元素变换以后，实际上它已经变成另一个类型的题目）。乍一看来，题目并未发生本质变化，这一点自然会使受试者倾向于遵循早已形成的解题方法，并使他认为既然题目未发生本质变化，则解题方法也不应作任何本质上的改变。

找出原题解法对第二变式解法会产生什么影响是至关重要的。为此，我们必须观察受试者是怎样解答第二变式的：(1)是从第二变式的本身，(2)还是紧接第一变式解出后解答的。为了这到上述目的，我们这样做：在提出系列 XIV 的题目的前一个月，先让受试者解几个与第二变式同类型、但条件稍有变化的题目（除去那类给人"深刻印象"性质的题目以外）。这样就能使我们查明一个题目究竟是从题目本身，还是作为第二变式而解答出来的。

A．算术测验

1．两城相距 225 公里。两列火车同时从两城出发，相向而行。客车时速为 60 公里，货车时速为 40 公里。两车何时相遇？

（第二变式：用"同向而行"代替"相向而行"。如果受试者问哪一列火车在前面，实验者就请他自己确定，在哪种条件下本题才有意义。）

2．一辆“莫斯科人”牌轿车夏天的耗油率为每100公里10公升，冬天为11公升，冬天的耗油率比夏天的多百分之几？

（第二变式：夏天的耗油率比冬天的少百分之几？）

3．一条肥皂的重量是$\frac{3}{4}$公斤，再加此数的$\frac{3}{4}$。它重多少？

（第二变式：用“这条肥皂”代替“此数”。）

4．一匹马在全程的一半时间内以时速12公里奔驰，而其余时间的时速则为4公里。求马的平均时速。

（第二变式：以时速12公里奔驰一半路程，而以时速4公里行其余的路程。）

B．代数测验

1．$(0.1mn^2+0.01m^2n)^2=$

（第二变式：加号改为减号。）

2．$(2a^2b^2c^2-2x^2y^2z^2)^2=$

（第二变式：相同二项式的立方，即仅改变式中给出的9个数中的一个。）

3．一水池装有两根水管。如果单开第一水管需p小时灌满水池，如果单开第二水管则需q小时。如果同时开两管，需要多少小时灌满水池？

（第二变式：第一管灌满水池，但第二管排空水池。）

C．几何测验

1．对顶角的平分线所夹的角等于多少？

（第二变式：改“对顶角”为“邻补角”。）

2．两平行线被一直线所截，求两个同旁内角的平分线所夹的角。

（第二变式：改“同旁内角”为“同旁外角”。）

3．在平面上有一直线和线上一点。在此平面上，过此点能作

多少直线垂直于已知直线。

（第二变式：用“空间一直线”代替“平面上一直线”。）

系列 XV：要求重建运算的题目

如同前一系列那样，本系列的测验旨在研究受试者从一种运算方法转换到另一种运算方法的敏捷性，以及按照已变化的条件，重新建立一种运算系统的敏捷性。与系列 XIV 相对照，在系列 XV 的题目中，原来的运算方法不仅已经成型，而且还经过了特别的强化。在连续求解一系列“一成不变”的单一类型的题目过程中，会形成一种心理运算的相应定型。一个确定的算法，即作为解某一类型的所有题目时应完成的一套固定次序的运算，就建立起来并得到强化。当建立并多少强化了这种定型后，再提出另一题目要求学生解答。从表面上看来，这题目属于同一类型，但实质上它是截然不同的（这个题目比前面的题目容易）。

我们要查明受试者是否易于重建这种已经形成并多少有点成为习惯性和解答算法的推理定型。我们还要查明“惯性”是否起作用。受试者是否能从陈规和老框框中摆脱出来？

实验者把系列 XV 的测验交给学生时，应建议他们尽可能快地解题。他们对一成不变的题目通常不会感到意外，而会把它们当作一种解题训练。实验者应测出并记录每题的尤其是最后一题的解题时间。即使对一个已经发觉题目有所不同并且解最后一题（客观上比前面那些题目容易些）的时间增加了不少的受试者来说，仍可以假定一种已形成的解题定型会在不少过程中起作用。正如前一系列那样，我们要查明受试者是怎样求解测验中与第一题无关的最后一题的。为了达到这一目的，在作这一基本实验前一个月，把所有测验的最后一题在形式上略加变化后，先让受试者解答。

系列 XV 的测验如下：

A．算术测验

1．校园的一半种树，所余土地的 50% 是菜园，剩下的面积 (0.3 公顷) 种花。校园的面积是多少？

2．菜园面积的 75% 种土豆，所余面积的 1/5 种卷心菜，剩下的面积 (4 公顷)种甜菜。菜园的面积是多少？

3．花园面积的十分之六种果树，所余面积的 1/4 种浆果树，剩下的面积(3 公顷)是葡萄园。花园的面积是多少？

4．一些学生把一块空地修成运动场。七年级学生修全面积的 40%，六年级学生修所余面积的 0.5，五年级学生修剩下的 0.15 公顷。运动场的面积是多少？

5．河湾处一小岛面积的五分之二是一个菜园，所余面积的 0.75 是草地，最后剩下 6 公顷沙地。小岛的面积是多少？

6．100 公顷土地的五分之四是耕地，15% 是菜园，剩下的面积是池塘。池塘的面积是多少？

B．代数测验

$+12-(-4)=$	$-19-(+18)=$
$-17-(+18)=$	$-9-(+7)=$
$0-(-6)=$	$14-(-11)=$
$+7-(+11)=$	$27-(-9)=$
$-46-(+3)=$	$19-(+3)=$
$22-(-3)=$	$-2+(-3)=$

C．代数测验

1．已给 a，加上 2，再乘以 2，然后将结果平方。(在第 2～9 题中用其他的数作同样的运算。)

2．已给 $2x$

3．已给 $3m$

4．已给 y^3

5．已给 $3a^3$

6．已给 b^n

7．已给 $n+2$

8．已给 a^3-2　　9．已给 $3a^n-1$

10．已给 $2b^n$，除以 2，再减去 2，然后将结果平方。

D．代数测验

1．$(x+2y)^2=$　　4．$(2mn+2m)^2=$

2．$(2m+1)^2=$　　5．$(3a^2+2b^3)^2=$

3．$(x^2+xy)^2=$　　6．$(2a^3-3b^2)^2=$

E．几何测验

一个正方形的面积等于 0.16 m^2，求下列各正方形的面积，若：

1．它的边长是原边长的一半；

2．它的边长减少 25%；

3．它的边长减去 0.1；

4．它的边长减少 75%；

5．它的边长是原边长的五分之一；

6．它的边长是原边长的 4 倍。

F．几何测验

要求学生证明两条他所知道并已牢记的定理（由他自己选择定理）。然后实验者将学生所画的图形加以明显的改变，将字母也更换，并要求他运用他所不习惯的图形证明相同的定理。

G．特殊测验

本测验是一种校对表，旨在研究学生从一种强化的操作方法（非数学的）转换到另一种操作方法的敏捷性。实验者将表变给受试者后，要求他尽快地划掉所有出现 A 的字母组。然后，实验者再给学生一张复制表，但任务恰巧相反，即要求学生划掉所有不含 A 的字母组。实验者应记录每一测验的时间和错误数。两种任务在困难程度上是完全一样的，因为在这张表上，含 A 和不含 A 的字母组恰巧各是 50 个。

TOP	ABV	KVA	KUT	EKR	AKT	RKU	LBS	NAK	BVE
TAR	KOS	KIR	STO	ART	RTA	OBV	ATS	TOR	BVA
ARK	GLE	NAK	KET	OLG	TSA	RIK	BNO	AMN	KSA
ATS	AKN	KOR	BSO	AKL	VKO	LAN	REK	AKT	RNU
KAN	RTA	TUK	AKT	TUS	TAK	AKN	TEK	ONV	STA
KOR	KRA	SOT	RLU	AST	BVI	TOK	KAR	ART	TSU
TAK	NAT	KUT	VTO	NAK	TAN	UKV	SAK	RTA	IET
ANR	ODN	AKN	TON	AKT	TIP	EDK	TSA	UPR	LRA
AMN	TKA	BOS	ABV	REK	INT	NAK	KVA	NOK	SIP
SAN	BAR	ROK	IPR	STA	PIT	RTA	KON	TUK	BAK

系列 XVI：暗示“自我限制”的题目

本系列所选择的推理题目具有下列不同特点：题目的条件通常被理解为具有某种实际上并不存在的限制，或者是在解题过程中，解题者不自觉地将自己限制在某些可能性内，而不合理地排斥了其他可能性。在任何一种情况下，这种不自觉的限制会导致一种认为题目不可解的想法。但是，实验者应坚持题目编写正确，并且有解。受试者是否能摆脱解题时所渗入的强加成见，并得出题目必有其他求解途径，或者题目条件必然另有解释的结论？他能“消除这种自我限制”并摆脱一成不变的老框框吗？他在这里是怎样推理的？如果他自己不能得出“‘自我限制’正在出现”的结论，实验者可以用非常一般的形式，给他以适当的暗示。（例如：你是不是正在引进一些实际上并不存在的条件？你是不是因此把自己约束在狭窄的范围内了？）

综合测验

1．用一条直线截一个四边形，以便得到四个三角形（受试者

会仅考虑凸四边形，并设想所有三角形都应位于四边形"内"，从而构成了自我限制）。

2．一个家庭由丈夫、妻子、女儿和儿子组成，他们的年龄和是73岁。丈夫比妻子大3岁，女儿比儿子大2岁。四年前他们的年龄和是58岁。家庭每个成员现在几岁？（受试者常常认为这个题目出错了，因为四年前年龄和应少16岁，而不是15岁。他们并未考虑到，这表明四年前最年轻的成员尚未诞生。）

3．三只苍蝇停在桌面上。一只以2米/秒的速度垂直向上飞去。两秒钟后，留下的两只苍蝇以2.5米/秒的速度成30°角向上飞去。三只苍蝇何时出现在同一平面内？（受试者认为，这是一个水平平面的问题。因为过三点能且仅能作一平面，所以这三只苍蝇总是在同一个平面内。）

4．一个棋盘能被形如  的图形覆盖吗？（受试者常常想不到有两种棋盘，即8×8格的俄罗斯棋盘和10×10格的国际象棋盘，因面认为只有一种可能性。实验前几天，实验者应呈现适当的资料。）

5．直角三角形的一边长7 cm。如果其他两边用整数表示，求这两边。（受试者常常表示这题目不可解。因为用一条边作不出一个确定的三角形，他忘记了题目的最后一个条件。）

6．225人出席一个会议，相识者握了手。试证其中至少有一个出席者与偶数个相识者握了手。（虽然受试者知道偶数的确切意义，但他们常常把0排除在偶数集之外，握0次手意味着不同任何人握手；否则这个问题很容易被否定：考虑到225人中仅有2人相识的情形，他俩握手，因面每人都与奇数个相识者握手。）

系列XVII：正向和逆向题目

本系列的题目旨在研究学生逆转一个心理过程的能力。我们

指的是重建一种心理过程的方向、把正向思维序列改为逆向思维序列的能力。这方面的特例(下面将解释)是形成双向(可逆)联想的能力。从数学立场来说,我们认识到对称(互逆)关系,正运算和逆运算,正定理和逆定理,以及从左到右和从右到左理解一个公式的简单技能等,都是属于完全不同类型的范畴。但是我们认为每种情况的内在心理基础是一种心理过程方向的重建,是从正向思维序列转到逆向思维序列的变化,也是双向(可逆)联想的建立。我们的任务是研究下述纯心理学的(因而是非常重要的)问题,即某个学生从正向思维序列迅速地转变为逆向思维序列的难易程度,以及这种从根本上重建心理过程方向的能力如何。在每种情况下,这种逆向思维活动是否正确或允许——并非所有关系都具有对称性,也并非每个定理之逆都成立——那是一个属于数学而不是心理学的完全不同的问题(这是一个同样重要的问题)。当然,学生不仅应能完成这种转变,而且还要能评价它的正确性——确立一种处理是允许的或不允许的范围。但后者与数学知识、技能和习惯有较多的联系;故应属于专门研究的课题。

系列 XVII 的测验包括成对题目,即一个正向题和一个逆向题。按照前面的叙述,所谓逆向题指的是那种题目:保留原题(正向题)的主题内容,但变原来的未知部分为条件的一部分,而原来条件的一个或几个元素却变成未知部分。我们要查明受试者在下列两种情况下怎样解答一个逆向题:(1)是在刚解完正向题后,还是(2)独立于正向题。为了弄清学生怎样求解逆向题(恰当地说,它们已不再是逆向的,因为只有当它与正向题成对时才是逆向题),约在实验前一个月,先让受试者解一些形式上稍有变化的逆向题。在作基本实验时,应紧接正向题之后,立即给予逆向题,而我们应观察正向题的解法对解逆向题产生什么影响,并记录解题的时间。我们必须记住,在谈及正向转换到逆向思维序列过程的本质时,一个思维在其逆向过程中并不一定恰好重复原来的途径

(例如,正、逆定理就是这样)。从 A 到 D 的途径可不同于从 D 到 A 的途径,人们可以通过不同途径从一个到另一个。在有些情况存在着正和逆联想 $A\leftrightarrow D$; 而在其他一些情况则只有思维活动的一般方向: $A\leftrightarrows D$。但重要的是,在两种情况下以前的思维都是从 A 走向 D,而现在则是按反方向移动。在本实验中,有些题目涉及建立正和逆联想,也有一些题目仅与一般思维方向的改变有关。

下面是本系列的测验题目。

A. 算术测验

1. *正向题* 将 16 公升水倒入水箱,能注满它的容积的 2/5。水箱的容积是多少?

逆向题 水箱的容积为 80 公升,要注满它的容积的 2/5,需倒入多少公升的水?

2. *正向题* 锯木厂一台锯子每分钟锯下一段 1 米长圆木,锯 16 米圆木需要多少分钟?

逆向题 将一根圆木锯成半米长的小块需 3 分钟,已知锯下每小块要 1 分钟,求圆木的长。

3. *正向题* 某厂原计划生产 1280 台机床,现超产原计划的 12.5%。该厂共生产多少台机床?

逆向题 某厂超产定额的 2.5%,比原计划多生产 54 台机床。原计划生产多少台机床?

4. *正向题* 用 740 张纸制成 140 本厚的和 100 本薄的笔记本。如果每本厚的比每本薄的多用 1 张纸,则厚的与薄的笔记本各用多少张纸?

逆向题 用 620 张纸制成 200 本笔记本。两种笔记本每本分别用 $5\frac{1}{2}$ 张纸和 $1\frac{1}{2}$ 张纸制成。每种笔记本各制成多少本?

5. *正向题* 现在母亲的年龄是女儿年龄的 3 倍,10 年后,将只是 2 倍。母亲的年龄是多少?

逆向题　父亲35岁时，儿子5岁。多少年后，父亲的年龄是儿子年龄的3倍？

B．代数测验

1．正向题　如果某工人每天收入 c 卢布，他应工作多少天才能得到 b 卢布？

逆向题　如果某工人每天收入 a 卢布，d 天收入多少？

2．正向题　A、B 两城相距 x 公里，两列火车同时从两地出发，相向而行。一列时速为 a 公里，另一列时速为 b 公里。两车经多少时间相遇？

逆向题　两地相距 y 公里。两列火车同时从两地出发，相向而行，两车 t 小时后相遇。一列火车的时速为40公里，第二列火车的时速是多少？

3．正向题　某厂原计划 n 天生产 m 个部件。结果超过定额，提前 t 天完成任务，并超产 k 个部件。该厂每天比原计划多生产几个部件？

逆向题　某厂原计划在一定期限内生产 a 套工具，因而原定每天生产 b 套。但工人超过定额，每天多生产 n 套。该厂提前几天完成计划？

C．代数测验

1．$(a-b)^2=$	1a．$a^2-2ab+b^2=$
2．$(2a^3-n^4)^2=$	2a．$9a^4-6a^2m^2+m^4=$
3．$\left(3x-\frac{1}{3}y^3\right)^2=$	3a．$16x^2-4xy^2+\frac{1}{4}y^4=$
4．$(x^4-y^n)^2=$	4a．$-2xy+x^2+y^2=$
5．$(a-x+y)^2=$	5a．$b^2+(x-a)^2-2b(x-a)=$
6．$(x+y)(x-y)=$	6a．$a^2-b^2=$
7．$(2a^3-3b)(2a^3+3b)=$	7a．$9x^4-4y^2=$
8．$\left(\frac{1}{4}p^3+\frac{1}{2}q^2\right)\left(\frac{1}{4}p^3-\frac{1}{2}q^2\right)=$	8a．$\frac{1}{25}m^4-4n^3m^6=$

9. $\left(0.6\,m^n-\frac{1}{4}\,n^m\right)$ 9a. $-0.25\,y^2+\frac{1}{9}\,x^2=$

$\times\left(0.6\,m^n+\frac{1}{4}\,n^m\right)=$

10. $(a+b-c)(a-b+c)=$ 10a. $(x-y)^2-25\,y^2=$

11. 口算除法：$a^{64}-b^{64}$ 除以

$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})$。

注意 按下列顺序出示以上各题：1, 1a, 2a, 2, 3, 3a, 4a, 4, 5, 5a 等等。

D. 几何测验

1. 正向题 一个平角的 1/24 是多少度？

逆向题 一段 22°30′ 的弧是圆周的几分之几？

2. 正向题 计算一凸七边形各内角之和。

逆向题 一凸多边形内角和为 1800°。这多边形有多少个角？

3. 定理 如果从一点向一条直线所引的两条斜线长度相等，则其射影也相等。

逆定理 如果从一点向一条直线所引的两条斜线的射影相等，则这两条斜线相等。

4. 定理 从一点向一条直线引两条斜线，则射影长的其斜线也长。

逆定理 从一点向一条直线引两条斜线，则斜线长的其射影也长。

5. 定理 过半径端点且垂直于半径的直线是此圆的切线。

逆定理 圆的切线垂直于该圆过切点的半径。

6. 定理 垂直于弦的直径平分此弦及此弦所对的两条弧。

逆定理 过弦(不经过圆心)的中点的直径垂直于此弦。

系列 XVIII：启发性题目

如上所述，判断学生的能力不应根据他知道些什么和能做什么，而应根据他获得适当的知识和技能时的顺利程度、敏捷程度如何，以及通过什么方法获得。

本系列旨在研究学生怎样学会新内容，怎样探索性地发现他所不熟悉的原理，怎样独立地建立一般联系和函数相依关系，以及怎样得出独立概括。我们要分析学生的推理过程。在每个测验中，将作出更为详细的解释。

A. 算术测验 ①

本测验要求学生自己得出末位是 5 的两位数平方的简捷计算法则。我们为学生提供了下列例题：

$15^2=$ ； $25^2=$ ； $35^2=$ ；

$45^2=$ ； $55^2=$ ； $65^2=$ ；

$75^2=$ ； $85^2=$ ； $95^2=$ 。

在做相应的计算时，为了能既顺利又迅速地把这些数平方，学生将试图建立一个基本算法。如果把这些数都用一个一般式

$$(10a+5)^2=100a^2+100a+25$$

来表示，这就不难得到它。实验者应观察学生在哪一个例题中发现这一指导原则，以及他是用什么方法得到它的。

B. 代数测验

本测验旨在要求尚不熟悉简捷乘法公式的学生自己依次推导下列公式：$(a+b)(a-b)=$ ；$(a+b)^2=$ ；$(a+b)^3=$ 。

为了达到上述目的，开始时不要暗示任何使用简捷乘法的可能性，而仅交给受试者一些适当的题目，并要求逐题求解：

---

① 本测验的想法来自 S.I.夏皮罗(435)。

1. $(a+b)(a-b)=$　　4. $(3a^3+b^3)(3a^2-b^3)=$

2. $(x+y)(x-y)=$　　5. $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)=$

3. $(2m+n)(2m-n)=$　　6. $(b^n-c^n)(b^n+c^n)=$

1a. $(a+b)^2=$　　4a. $(3a^3+b^3)^2=$

2a. $(x+y)^2=$　　5a. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)^2=$

3a. $(2m+n)^2=$　　6a. $(b^n+c^n)^2=$

1b. $(a+b)^3=$　　4b. $(3a^3+b^3)^3=$

2b. $(x+y)^3=$　　5b. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)^3=$

3b. $(2m+n)^3=$　　6b. $(b^n+c^n)^3=$

在解答所有六个题目后，如果受试者自己尚未发现使用简捷乘法公式的可能性(既不能形成一个法则，也不能推导出一个公式)，实验者就给以适当的指示，并要求他们重新检查每一解答。实验者应观察学生从哪一题开始转向应用他自己所归纳的公式来作简捷乘法(在第二次检查解答时，如受试者察觉到某例题可用简捷乘法，则应认为他是在第二次求解时才应用简捷乘法的。例如，如果某生经实验者指示后，仅在第二次解第3例题时才"发现"这公式，那末我们认为该生需解6+3个题，即9个题后，才能"发现"这一公式)。

C. 几何测验

本测验旨在要求尚未熟悉三角形各边边长之间关系的学生，自己去确定三角形任意两边之和大于第三边的关系①。

实验者交给学生60根长1到20厘米的细棒，每种长度有3根。问题是：任取三根细棒都能构成一个三角形吗？通过实践，学生独自或在实验者的帮助下，认识到用任意三根棒并不一定总能构成一个三角形，有时能，而有时则不能。学生们将弄清三角形各

① S.I. 夏皮罗也曾采用过此法，但用了稍微不同的形式，难度也更高。

边长之间必须具有的关系，并用一般形式表述出正确的法则。应记录学生在哪一次试验，以及用多少时间才发现三角形边长间关系的原则。实验者把下列由三个数组成的数组作为控制作业交给学生，并要求他们判定哪些数组可表示一个三角形的各边边长。(1) 3, 4, 5; (2) 7, 11, 3; (3) 8, 7, 7; (4) 3, 6, 3; (5) 19, 7, 11; (6)8, 4, 5。

D. 几何测验

学生刚熟悉三角形内角之间的关系(即三角形内角之和等于2d①)之后，就要求他自己推出任意凸多边形内角之和为$2d\times(n-2)$的公式。如果受试者不能写出这公式，实验者就予以启发："请用基本图形——四边形或五边形——试一下，并从一个顶点作各对角线，将图形分成若干个三角形。"

系列 XIX：要求理解和逻辑推理的题目

解答本系列两个测验并不需要特别的知识，但需要逻辑推理技巧和一定的机智。其中有些题目是数学的，其他则是逻辑的。如果我们从数学的现代解释出发，这种把题目区分为所谓逻辑的与数学的做法一定是非常勉强的。但是，如果我们想到中小学数学的话，经验证明学生会把逻辑测验的题目理解为逻辑的而不是数学的。从某种程度说，这是我们作此划分的依据。

我们认为本系列的题目能很好地显示学生是否具备数学能力，因为解答这些题目只需要基本的数学知识和技能。V.I. 查布罗夫斯基曾强调说，各个年龄的学生的最大困难来自逻辑性题目和只需机智的题目。但是，他又指出，在数学课程中，这类题目是很少出现的(134, 74 页)。

这类题目作为揭示受试者的"思维实验室"是很有效的。它们

① 见前面系列 I 的脚注。——英译本编者。

能表明受试者具有多少推理能力，以及怎样从另一事物演绎到某一事物。对这种解题推理过程的分析，有助于理解与出现"灵感"或直觉有关的某些特征。

系列 XIX 的题目也研究推理的简缩问题。在这里，要把学生的实际推理过程与他的(在实验者的要求下做的)最详细的推理过程相比较。应比较两种情况下环节的种类和个数：即在一个完全详尽的结构上，比较环节的种类和个数。这样，就可揭示哪些环节被简缩，它们承受什么"词义负担"，以及有关这方面的推理是怎样重建的。最后，本系列使我们能确定对于数学和逻辑素材的记忆、保持以及再现的特征。为了达到这一目的，我们要求受试者在一个月和三个月后再现该题目及其推理过程。我们记录了他是怎样记忆题目的实际内容及其逻辑结构的，也记录了他的推理过程。

下面是本系列的题目。

A．普通数学测验

1．为什么一个多位数的平方的末位与该数个位数平方的末位有相同的数字？

2．试证任何大于 7 卢布的整数款，能用 3 卢布券与 5 卢布券支付。

3．编一本百科全书的页码用了 6869 个数字，该书共多少页？

4．某校的数学奥林匹克竞赛题共有 10 道题。每个参加者答对一题得 5 分，答错一题扣 3 分。获得总分 34 分的学生们做对几题？得总分 10 分的呢？

5．两个学生每人想买一把尺。当他们知道尺的单价后，发现第一人缺 24 戈比，第二人缺 2 戈比，因此，他们决定用两人的钱合买一把尺，但钱还是不够。问尺的单价是多少？每人各有多少钱？

6．一集体农庄妇女将她的鸡蛋之半数加上半只鸡蛋卖给第一位顾客，将所余鸡蛋之半数加上半只鸡蛋卖给第二位顾客，再将所余鸡蛋之半数加上半只鸡蛋卖给第三位顾客。此时鸡蛋全部售

完。问她原有多少只鸡蛋(可向能力较差的学生说明,所售鸡蛋数当然只能是整数)。

7．从1开始把所有整数连续写出,求第1955个数字。

8．兄弟四人合买一台电视机。老大付其他人所付总和之半,老二付其余人所付总和之$\frac{1}{3}$,老三付其余人所付总和之$\frac{1}{4}$,老四付45.5卢布。电视机价多少?

9．如果已经写出从1到99999的全部数,其中数字1出现过多少次?

10．求被3除余1,被4除余2,被5除余3,被6除余4的最小的数。

11．按照下列条件求一个四位数。其两端的数字的积等于40;中间两数字的积是28;个位数与千位数的差正巧和十位数与百位数的差一样;如果在这个未知数上加3267,则原数各数字颠倒。

12．有两个容器,第一容器有1公升水,第二容器是空的。将第一容器内水的一半倒入第二容器,然后将第二容器内水的$\frac{1}{3}$倒入第一容器;再将第一容器内水的$\frac{1}{4}$倒入第二容器,如此下去。在倒了1965次后,第一个容器内有多少水?

B．逻辑测验

1．一个古算题:一个20戈比钱币的重量是一个10戈比钱币的2倍,它的含银量也是2倍,价值也是2倍。1公斤10戈比钱币与$\frac{1}{2}$公斤20戈比钱币相比,哪种更值钱些?

2．一个大池塘被正生长着的植物逐渐覆盖。每天覆盖的面积加倍,在第8天大池塘已被覆盖一半。问大池塘将在哪一天被全部覆盖?

3．盒中有黑、白和红的珠子共16粒。白珠比红珠多7倍。盒

中有黑珠多少粒？(证明这是唯一的可能。)

4．将苹果装在500只柳条箱内。已知每箱最多只能装240个。证明至少有三个柳条箱所装的苹果数相等。

5．从某池塘一网捕到40条鱼，把每条鱼作了记号后放回池塘。另一天从池塘捕到60条鱼，其中4条带有记号。怎样近似地估计池塘里鱼的总数？

6．有容积为7公升和11公升的两个容器。怎样用它们量出13公升溶液？

7．三个朋友每人隔不同的天数到图书馆去一次；第一位3天一次，第二位4天一次，第三位5天一次。上次他们于星期二在图书馆相遇，多少天后他们再在图书馆相遇，那天是星期几？

8．若在一种密码中，把 aziat(Asian)写成 bikbu(btjbo)。则在此密码中 evropeets(European)①应写成什么？

9．9个外表完全一样的轴承中，一个是次品，它比其余的轻一些。在一台普通的没有砝码的天平上，最多称2次找出这个轴承来。

10．20辆相同的摩托车沿一条环形公路停放着。它们的存油总量只够一辆车环行公路一圈。证明至少有一辆可沿途从其他19辆车取得汽油而行完全程。

11．一个古算题：十二个人带一打面包旅行。每个男人带2只，每个女人带 $\frac{1}{2}$ 只，每个小孩带 $\frac{1}{4}$ 只。参加旅行的男、女、小孩各几人？

12．五名国际象棋手参加一次锦标赛。如已知每人与其他每人各赛一盘，而且每人得分不同，其中：

(a) 得第一名者没有平局；

(b) 得第二名者没有负局；

---

① 按西里尔字母次序翻译的字。——英译本编者。

(c) 得第四名者没有胜局。

求所有比赛的结果。

注：在国际象棋比赛中，胜一局得1分，负一局得0分，平局每人得 $\frac{1}{2}$ 分。

系列XX：序列题目

本系列由两个测验组成：第一个测验包含若干数列，其中每个都是依一定法则排列的。受试者的任务是：找出构成每一数列的法则，适当地延续该数列，写出数列的后一项。第二个测验可暂称为"图形的"，它是一个由图形组成的序列，也以一定法则作为构成基础。但它的法则与元素的空间排列有关。

如同前一系列的测验那样，这里研究了逻辑推理的本质，揭示了对数字材料的分析-综合理解的一些特性（只有当把数列中的那些数看成一个整体，但又不忽视其中任一个数时，才能把握数列的法则）。最后，本测验还旨在揭示一些数学思维的类型特征，这些特征与语言逻辑成分和视觉形象成分之间不同程度的相关有关。（比较一下，受试者在量的数字特征变化中是怎样发现法则的，在元素的空间排列变化中又是怎样发现法则的。）

从严格的数学观点看，下列测验题目可有多种解法，它所依据的法则可以是初等的，但并不是唯一的（例如，一种周期性重复的类型2，4，6，2，4，6等等也是允许的）。经验表明，即使是5～7年级最有能力的学生的数学发展水平，也没有使他们能有准备去觉察一个已知数列可以有不同的构成法则。但是，当我们做实验时，必须估计到这种可能性。如果一名5～8年级的学生能独立地得到这样的见解：有不同的法则可以作为构成已知数列的基础，并指出了几个可能的变式，我们就把这种能力作为数学思维极高

水平的一个标志。

A. 数字测验

2; 4; 6; 8; 10; (12)……

19; 16; 13; 10; 7; (4)……

3; 9; 27; 81; 243; (729)……

1; 4; 9; 16; 25; (36)……

1; 2; 4; 7; 11; (16)……

10; 8; 11; 9; 12; (10)……

2; 3; 4; 9; 16; (81)……

1; 2; 6; 24; 120; (720)……

2; 4; 10; 28; 82; (244)……

1; 5; 14; 33; 72; (151)*……

B. 图形测验

1. 划掉不属于这个序列的图形。

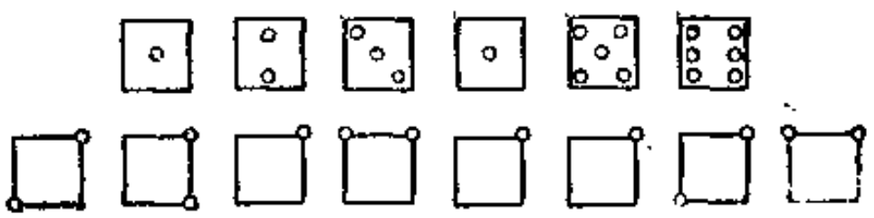


图 20

2. 在图 21 中，左侧是由 4 或 5 个图形所构成的序列。右侧每行有 5 个图形，求出其中应属于左侧序列的第 5 (或第 6) 个的那一图形。

---

* 在测验中并未出现上列括弧中的数，这个数是要受试者自己找出，并以此接续写出数列后面的项。几个最难的序列要找出的法则是：第八个序列，每一后继数是由它前一数分别依次乘以 2; 3; 4; 5 等而构成的。第九个序列，每一后继数都是它前一数乘以 3，再减去 2 而构成的；第十个序列，每一后继数则是它前一数的 2 部，再分别依次加上 3; 4; 5; 6 等等而构成的。

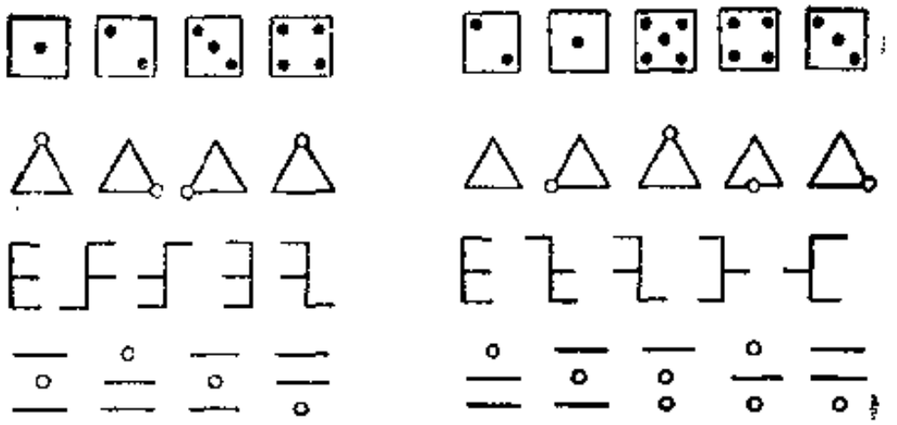


图 21

3．在图 22 中，从右侧找出一个图形，使它与左侧第三图形的关系如同左侧第二图形与第一图形的关系一样。

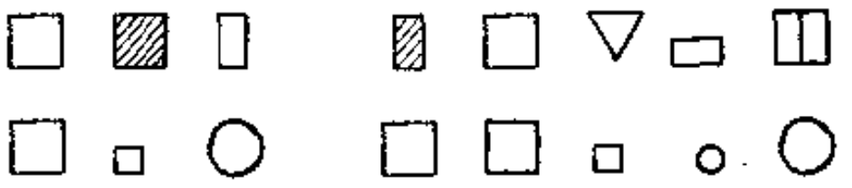


图 22

系列 XXI：数 学 诡 辩

对一位数学家来说，一种很重要的能力是，按照他学到的逻辑原则和数学去批判地评价推理的每个环节，以找出乍一看来似乎无懈可击的推理中的错误。本系列由七道题目组成四个小测验，都是诡辩（主要是数学的）。虽然推理过程中的错误被巧妙地掩盖着，但推理结果的错误则是颇为明显的。本测验要求学生查出错误，并证明它的确是个错误。

本测验先以一个逻辑测验开始，并用它作为例题向学生说明任务的性质。

除了进一步研究数学思维的批判性外，本系列的题目也指向它的灵活性的研究。我们可以按下述观点来对待诡辩：某种确定

的推理模式确立了，也就是说，建立了某种实际上可作为模式的确定的思维过程。它的作用具有多大的"强制性"？这一过程初看起来是严格地合乎逻辑的。受试者能不能"摆脱"这种过程的"束缚"？能不能打断推理链条中那个错误的、且使后面全部推理造成错误的环节？

A. 算术测验

1. 1 卢布＝100 戈比；

a 卢布＝$100a$ 戈比。

任何两等式两端可各自相乘：

$a\cdot 1$ 卢布＝$100a\cdot 100$ 戈比；

a 卢布＝$10000a$ 戈比；

1 卢布＝10000 戈比＝100 卢布。

2. 某集体农庄庄员有 2 篓不同品种的梨。每篓各有 150 个。第一种梨价是每卢布 10 个，第二种梨每卢布 15 个。这样，他卖掉第一种梨可得 $150\div 10=15$ 卢布，卖掉第二种梨可得 $150\div 15=10$ 卢布。总计 25 卢布。这个庄员推论，10 个第一种梨和 15 个第二种梨可共卖 2 卢布。因此，他将两种梨混在一起，以 2 卢布 25 个的价钱卖掉所有 300 个梨。但是他只得到 24 卢布，即少卖了 1 卢布。这 1 卢布到哪里去了？

B. 代数测验

1. 已知方程 $\dfrac{x+5}{x-7}-5=\dfrac{40x-40}{13-x}$

将它变形：

$$\frac{x+5-5(x-7)}{x-7}=\frac{40x-40}{13-x};\quad \frac{-4x-40}{x-7}=\frac{40x-40}{13-x};$$

$$\frac{-4x-40}{x-7}=\frac{4x-40}{13-x};\quad \frac{4x-40}{7-x}=\frac{4x-40}{13-x};$$

$$7-x=13-x;$$

$$7=13。$$

2．任意两个非零的相等数之和为零，我们将证明如下。

取一任意非零数 a，写出方程：

$$a=x。$$

方程两边各乘以 $(-4a)$，并加以变形：

$$-4a^2=-4ax;$$

$$0=-4ax+4a^2。$$

方程两边各加上 x^2：

$$x^2=x^2-4ax+4a^2;$$

$$x^2=(x-2a)^2;$$

$$x=x-2a。$$

但 $x=a$（根据条件），因此：

$$a=a-2a;$$

$$a=-a;\ 2a=0。$$

C．几何测验

1．按 1:10000 的比例在平面上画出一个矩形的缩小图，缩小图的两边为 2 厘米和 3 厘米。为了估计矩形的实际面积，某学生用这种方法推理：

$$\text{矩形面积}=3\times2=6\,\text{cm}^2,$$

$$6\times10000=60000\,\text{cm}^2=6\,\text{m}^2。$$

他的推理正确吗？

2．过直线上一已知点可以作两条直线垂直于已知直线。

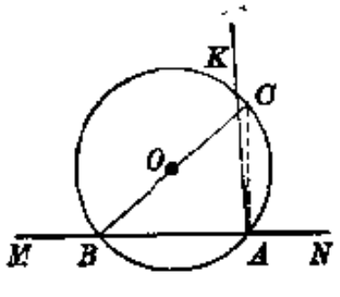


图 23

已知直线 MN 和直线上一点 A（图 23），作垂线 AK。以任意半径作一圆经过点 A，圆与直线的第二个交点记为 B。作圆的直径 BC，连接 CA。$\angle BAC$ 为直径上的圆周角，因而等于 90°。从而 $AC\perp MN$。这样过点 A 作出了两条垂直于 MN 的直线：AK 和 AC。错在哪里？

D．逻辑测验

有两个家庭：伊凡诺夫和彼德洛夫。每家有3人：父、母和儿子 。父亲伊凡诺夫不认识父亲彼德洛夫。母亲伊凡诺娃不认识母亲彼德洛娃。伊凡诺夫的独子不认识彼德洛夫的独子。结论：伊凡诺夫家没有任何人认识彼德洛夫家的任何人。结论正确吗？

系列XXII：条件难记的题目

本系列题目的复杂性或是由于数据较多，或是来源于题目中直接给出的关系，或是由于条件纠缠不清。这种复杂性是故意引入的，为的是使受试者在读过一遍题目后，不可能记住整个题目。学生既然不能记住题目的全部内容，那么他究竟记住了些什么呢？是它的结构？还是它的各种关系？还是它的特定数据？我们事先并未告诉学生将要求他事后再现题目，而只是要求他认真、仔细地阅读题目，并在他读毕一遍后收回题目卡。我们要查明受试者在刚读过一遍后，是怎样立即再现题目的，以及他首先注意到的是什么。当然，在这些实验条件下，我们揭示的不仅是记忆功能的特征，同时还有知觉和概括的某些特征。

A．算术测验

1．第一天运出仓库里土豆的2/11，第二天的运出量是第一天的2倍，第三天运出所余的1/5，最后还留下48吨土豆。仓库里原有多少土豆？

2．一等票和二等票共卖出40张票。一张一等票票价为8卢布，一张二等票票价为5卢布。如果售出的一等票之总系价超过二等票总价190卢布，那么卖出了多少张一等票？

3．这个与那个之和，加上这个与那个之和的一半，结果是这个与那个之和的3/4的百分之几？

4．将数80分成大小两数，大数之半较小数大10。求此

两数。

5．某水池装有四根水管。当同时开放水管 1、2 与 3 时，12 分钟灌满水池；当同时开放水管 2、3 和 4 时，则需 15 分钟；当仅开放水管 1 和 4 时，则需 20 分钟。如果同时开放四根水管，需多少时间灌满水池？

6．某厂承接了在一定期限内生产一批中耕机的定货。如果每天生产 240 台中耕机，则到期时比定货数少生产 400 台；如果每天生产 280 台，则到期时比定货数多生产 200 台。问定货是多少台？限期是多少天？

B．代数测验

1．心算：$64\cdot27+27\cdot27+9\cdot27=$

2．$\left(\frac{1}{3}x^3y^n+4xyz^3\right)^2=$

3．当 n 是大于 1 的任何自然数时，$\frac{n(n-1)}{2}$ 将是一个什么数——一个整数，一个分数，还是零？

4．我现在的年龄是你过去某一时刻年龄的 2 倍，那时我正好是你现在这样大。当你到了我现在的年龄时，我们的年龄和将是 63 岁。现在每人几岁？

C．几何测验

1．三角形的一个角为 28/45 d，另两角之差为 18°，求三个角。

2．直角三角形两个锐角之一被一条直线分成两个角，其中一个角是另一个角的 5 倍。较大的角是 45°。问与另一锐角相邻的外角是多少度？

3．四边形 $ABCD$ 的两边平行。两个内对角之差为 15°，而它们之比为 7:8。求四个角。

4．已知两个矩形。第一个矩形的底长 5cm，第二个矩形的底长 4cm，它们的面积之和为 42cm²。如果两个矩形的高都不变，而第一个矩形的底增到原来的两倍，第二个矩形的底增加 1cm，

那末它们的面积之和增加 33 cm^2。求每一矩形的高。

系列 XXIII. 解法具有不同程度直观性的题目

本系统的题目是按照直观性的不同程度，以及解题时思维的视觉-形象和语言-逻辑成分所起的作用而分成各组(测验)的。

V组("视觉的")①中的题目对于运用视觉的手段是"最优的"，如果我们可以这样说的话。倘若题目已知元素的相互关系是直观地表示出来的，这些题目通过视觉形象手段来解答就能较容易。这些题目"提示"了该用图解。可即使不依赖任何视觉形象和图式，它们也可采用推理和语言逻辑的手段来解答，但这个过程就要困难得多。

A_1 和 A_2 组("平均的")中的题目，相对地说，运用第一和第二信号系统求解的机会大致相等。

M_1 和 M_2 组("思维的")中的题目不必依赖视觉概念，而可通过纯思维手段求解。当然，它们也可借助第一信号手段求解，但其过程较为复杂，因为这些题目比较难于转换成视觉形象用语。

每组有六道题目，按复杂度排列，第一题最容易，而第六题最复杂。因此，题目的题号也表示它的难度与直观性程度②。

所有五个测验的题目排列在一张特殊的表格内。如表 2 所示。题目从左到右是按解答的直观程度排列，而从上到下是按难度排列。

前四套题目一般可供能力较差的学生实验用(其余题目较困难)，而后四套则供能力较强的学生实验用(前两套题目对他们来说是非常容易的)。

---

① 这个词及其类似的词都是相对的，它们只有纯粹的辅助性意义。

② 对题目直观性的估计有时可能并不一致。这里我们既考虑到教师的意见，也同样考虑不参加基础实验的学生在试解中的经验。

表 2　系列 XXIII 中诸题目按直观性和难度的分类

难　度	变　式				
	V	A_1	A_2	M_1	M_2
1	V-1	A_1-1	A_2-1	M_1-1	M_2-1
2	V-2	A_1-2	A_2-2	M_1-2	M_2-2
3	V-3	A_1-3	A_2-3	M_1-3	M_2-3
4	V-4	A_1-4	A_2-4	M_1-4	M_2-4
5	V-5	A_1-5	A_2-5	M_1-5	M_2-5
6	V-6	A_1-6	A_2-6	M_1-6	M_2-6

本部分的题目应按如下顺序出示：先出示第一套题目，然后第二套，依次下去。实验者先将每一套两端的题目（V 和 M_2）交给学生，让他考虑一会儿后，要求他求解他喜欢的一题。然后将该组的其他题目交给学生解答（从原先的一题起，按表 2 向左或向右移，即 M_2, M_1, A_2, A_1, V，或者 V, A_1, A_2, M_1, M_2）。实验者应记录：学生选择哪一种解题过程；他是否需要依赖视觉形象，以及依赖哪些形象；还是并未使用视觉形象解题（倘若这样，他运用什么方法来代替它们的）；在哪一道题目上，他并未采用他所喜欢的解题方法。

在这一点上，解答 A_1 和 A_2 组中的题目是饶有兴趣的。我们认为，视觉形象思维占优势的学生与语言逻辑思维占优势的学生在解答 A_1 和 A_2 组中的题目上应该是有差异的。当我们查明对受试者来说使用哪种解题过程较为自然后，就要求他使用另一种方法解题：用视觉图式的方法表示题中的条件和关系（或者，在合适时，要求受试者不依赖视觉形象而从纯思维的水平解答该题）。本系列的测验结果是以对每个受试者采用"个人方格表"的形式来表示（"个人方格表"的格式与上述表 2 类似。在表中填写：+，表示解出；−，表示未解出；V，表示用直观手段解出；M，表示用非直观手段解出；VM 为并用两种方法解出）。

在分析系列 XXIII 题目的解答时，人们必须牢记“直观求解”一词的相对性质。一个图解作为直接关系的一种表达形式，是数学相依关系的一种抽象的、概括的表达形式。但同时，它又是一种确定的视觉化的类型，在一定程度上把题目的解转化到一个具体的、直观的水平了。M. E. 波茨玛诺娃在讨论图象解法中的视觉形象的图式化时也曾指出，图解是视觉化的一种特殊抽象形式(54, 55)。

系列 XXIII 的几何测验(G)由六道题目组成。第 1 到 6 题并不是按难度而是按解题时对于直观支持的必需程度(第一题需要这种支持最大，而第六题最小)而排列的。当然，与算术题目相比，几何题目往往是借助于视觉图式求解的，但某些经过挑选的题目并不需要(真的或想象的)图就可以解答。受试者可以自由地解题。然后，不论学生是否解出，实验者应要求他使用另一种方法(“现在试把它直观地表示在一个图上，以便能‘看出’它的解。”“试试看，不借助于图形，而用推理求解本题。”)

V. 算术测验

V_1. 某乘客当车走完一半旅程时睡着了。当他醒来时，他还需乘行他睡着时行程的一半。他睡觉时的行程占全程的几分之几？

V_2. 一块砖的重量为 1 公斤再加半块砖重，它重多少？

V_3. 10 个李子的重量与 3 个苹是加一个梨的重量相等，6 个李子加一个苹果等于一个梨重。问多少个李子等于一个梨重？

V_4. 一些少先队员去剧场和电影院。其中有人或去剧场或去电影院，也有人两地都去。已知去剧场者占少先队员总数的 89%，去电影院者占 78%。问两地都去者占百分之几？

V_5. 从中午到现在的时间占现在到午夜时间的三分之一，问现在是什么时刻？

V_6. 在一次数学奥林匹克(竞赛)开始前，一名学生在 12:00

和 13:00 之间的某一时刻看了一下他的手表。当他在 17:00 和 18:00 之间的某一时刻答完试卷后，他注意到手表的两针交换了位置。求他开始答卷与答完卷的时刻。

A_1. 算术测验

A_1-1. 两个儿童在下棋。棋盘上空格数是棋子已占格数的 3 倍，而一个儿童比他的对手多 2 个棋子。每人在棋盘上各有多少棋子？

A_1-2. 锯木队 3 天锯木 184 m^3。第一天超额日计划 14 m^3，第二天比日计划少 2 m^3，第三天超额 16 m^3。锯木队日计划锯木多少？

A_1-3. 合住一套公寓的三位妇女打算平均负担储存的炊炉木柴。第一位提供 2.5 m^3 木柴，第二位提供 3.5 m^3，第三位拿出 6 卢布作为代替份额。这 6 卢布应怎样分配给前两位妇女？

A_1-4. 两辆卡车同时从 A 地出发，驶往 B 地，然后返回 A 地（未曾停留）。第一辆总以匀速行驶，第二辆去时的速度是第一辆的一半，而返回时却是第一辆车速的两倍。哪辆车先返抵 A 地？

A_1-5. 一位旅行者乘火车的旅程比乘船的旅程长 150 公里，比步行的旅程长 750 公里。如果已知他步行的旅程是乘船的旅程的 1/3。求旅程全长。

A_1-6. 16 棵小树以 5m 一棵的间距栽成一行。最后一棵树旁有一口井。已知一桶水能浇两棵树。用一只桶浇遍全部树要走多少路？

$A_2$①. 算术测验

A_2-1. 一罐火油重 8 公斤。倒出一半后，连罐共重 4.5 公斤。求罐重。

A_2-3. 哥哥对弟弟说："你给我 8 个胡桃后，我的胡桃数就是你的 2 倍。"但弟弟对哥哥说："你给我 8 个胡桃后，我俩的胡桃数

① 俄文原版中遗漏 A_2-2 题。——英译者注。

就相等了。”求每人有多少胡桃?

A_2-4. 一列火车用 $\frac{1}{4}$ 分钟经过一电线杆,用 $\frac{3}{4}$ 分钟穿过一540米长的隧道。火车的速度与长度各是多少?

A_2-5. 安排一些工人在一定天数内从事修理工作。如少安排3人,则需延期6天完成任务。如多安排2人,则可提前2天完成。原来安排多少工人?

A_2-6. 步行者走完1公里和所余路程的一半后,还剩全程的 $\frac{1}{3}$ 又1公里。全程多少?

M_1. 算术测验

M_1-1. 一列火车离莫斯科开往远东,时速为40公里。一天后,另一列火车离莫斯科与上一列火车同向行驶,时速为45公里。如两车以匀速行驶且中途不停车。问第二列火车需要几天才能追上第一列火车?

M_1-2. 一桶内的牛奶是另一桶内牛奶的两倍。从每桶各倒出20公升牛奶后,则第一桶内的牛奶是第二桶的3倍。求每桶原来各有多少牛奶?

M_1-3. 女儿8岁时,母亲38岁。几年后母亲的年龄是女儿的3倍?

M_1-4. 一个古算题:某人以年薪12卢布加一件长袍被雇。在工作7个月后他就离去,并公平地得到一件长袍和5卢布的工资。长袍价值多少?

M_1-5. 一个旅游者准备在25天的旅途中花费一笔确定数目的钱。他实际上多旅行了5天,并且每天多花了40戈比,因而比预计超支了30卢布。他原来准备花多少钱?

M_1-6. 某地基的地坑内积水720 m^3,另一地坑积水840 m^3。自6:00开始,以每小时48 m^3 的速度从第一地坑抽水。自8:00开始以每小时72 m^3 的速度从第二地坑抽水。何时两地坑内的积

水量相等?

M_2. 算术测验

M_2-1. 一条狗追猎30米外的一只狐狸。狗跳跃一次为2米，而狐狸仅1米。当狐狸跳3次时，狗只跳2次。狗要追多少米才能赶上狐狸?

M_2-2. 从家里走到学校，我要用30分钟，而弟弟要用40分钟。如果弟弟比我早5分钟离家，我能在几分钟后赶上他?

M_2-3. 两个男孩沿公路同向而行。一个男孩要赶上2公里外的另一男孩。前面的男孩每小时行4公里，后面的每小时行5公里。从他俩出发时刻起，一条狗以每小时8公里的均匀速度不停地来回奔跑于两男孩之间。到两男孩相遇时，这条狗跑了多长距离?

M_2-4. 某店有100公斤浆果。经过分析，浆果的含水量为99%，以后再分析时发现，这些浆果的含水量降低了1%，而变成98%。求此时浆果的总重量①。

M_2-5. 某人上山的时速为2公里，下山的时速为6公里。求他的平均速度。

M_2-6. 一架飞机飞行于莫斯科与列宁格勒之间，在哪种天气下飞机往返一次较快，是在无风的天气? 还是在风向总是不变(譬如，从列宁格勒向莫斯科刮)而风力也不变的天气?

G. 几何测验

1. 等腰三角形的一条中线把周长分为12厘米和9厘米两部分。求三角形边长。

2. 已给一个锐角及其角平分线，过该角的顶点作角平分线的垂线，与已给锐角的两边形成一个钝角和一个锐角。若钝角是锐角的2倍，求已给锐角的大小。

3. 如果正方形的每边增加3 cm，则其面积增加39 cm^2。求

① 很难相信正确的答案是50公斤。

所得正方形的边长。

4．将 20cm 长的线段分成两段，在所得的两段上各作一个正方形，那么这两个正方形面积之差为 40cm^2。求所得两线段之长。

5．三角形的周长为 35cm。已知第一边是第二边的 4 倍，且第一边比第三边长 1cm。求各边长。

6．如果正方形的周长与面积的数值相等，那么正方形的边长应是多少？

系列 XXIV：用语言和视觉表述的题目

本系列的题目旨在提供材料，以判断受试者怎样发觉和联系一个题目的具体视觉水平和语言抽象水平。本系列由三个测验组成，每个测验分别附有说明。

A．代数测验

1．什么叫系数？指出下列代数式中的系数：$3a^3$；m；$b\cdot 4$；$3b\cdot 2$；$\frac{3}{7}\cdot x^3$；$4ab^n(3+2)$；$\frac{4}{5}ab\cdot\frac{5}{4}\cdot 2y^n$。

2．在下列代数式中，各字母的指数是什么？然后给指数下一个适当的定义。

$$2a^3;\quad b^2;\quad -3x^3y^3;\quad 7xy^6;\quad \frac{1}{2}mn;\quad z;\quad \frac{c}{4}。$$

3．把下列已知代数式写成系数为 1 的式子。

$$3abc;\quad 4m^2n^3;\quad 7xy^3z。$$

并对你的写法作必要的说明。

4．将下列代数式写成指数为 1 的式子。

$$2m^2n^2;\quad xy^4;\quad a^3bc;\quad 7c^4d^3。$$

并对你的做法作必要的说明。

5．把 $2a$ 平方，并把结果扩大两倍。把 $2x^3$ 扩大三倍，再立方所得结果。最后，把所得的两个式子相加。

说明：我们运用简单的代数材料，研究受试者对具体视觉水平和语言抽象水平之间的相互转换的能力。我们要查明：一个学生从一种语言表达过渡到相应的具体运算顺利程度如何；反之，我们还要查明下述二者哪一个对学生更为容易些，是从一个法则找出相应的语言表达，还是从法则找出相应的运算；以及他在其中哪方面表现得更为自信些。本测验并不困难，主要供能力较差的学生用。

B．几何测验

本系列的题目的实质在于包含着语言表达和相应图形明显的不一致。图形暗示了语言表达中所没有的一种违规的限制。测验题目是以语言表达形式与图形同时交给学生的。我们要判断他是更倾向于语言表达，还是更倾向于视觉形象（图形）。错误的出现往往证明学生更倾向于图形，即视觉形象。E.Sh．巴锡罗娃曾成功地运用这类题目，以研究两种信号系统类型相关与数学进步的关系(36, 37)。

实验者在受试者未解答所有题目之前，不应对他作任何说明（这样受试者在解第一题时，就不会去推测其他各题会有什么要求。）在这以后，如果学生做错了，实验者就出示图形的其他变式或给予语言解释。这样，就可查明究竟是视觉形象还是语言解释更能帮助学生认识其错误的性质。实验者应从语言解释开始。如果学生不能理解他的错误的实质，这就再次表明他倾向于图形（原来的那个）胜于语言陈述。这时，实验者再出示另一图形，以阐明这一事实。

本测验的题目不是按难度顺序排列的，因为在这种情况下，这样做是毫无意义的。

现将题目列在下面。题目的语言解释和图形的第二变式用题号1a, 2a, 3a等标出。

1．已知两图形，它们的底相等，高也相等（图24），它们的面

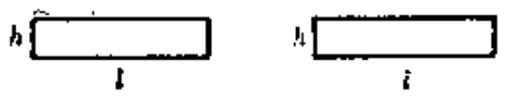


图 24

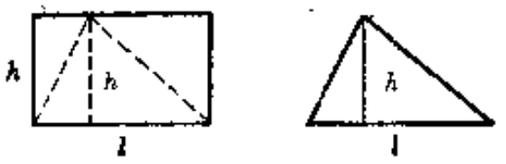


图 25

积相等吗?

1a. 但是,图形可以不同(见图 25)。

2. 已知两个相等的锐角(图 26),它们是对顶角吗?

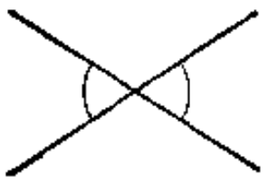


图 26

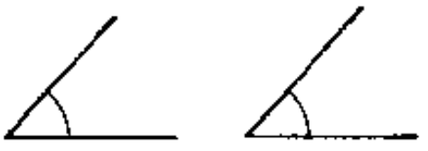


图 27

2a. 真的只有对顶角才相等吗(见图 27)?

3. 判定下列命题的真实性:一条直线的垂线长度比任何斜线长度都短(见图 28)。



图 28

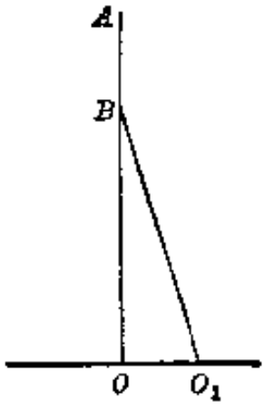


图 29

3a. 但是,某直线的一条垂线和一条斜线不一定是从同一点作出的(见图 29)。

4. 判定等角对等边的命题的真实性(图 30)。

4a. 如果两等角属于不同的三角形呢(见图 31)?



图 30



图 31

5. 在某些情况下，一个圆的同一部分可以既是一个扇形，又是一个弓形吗(图 32)？

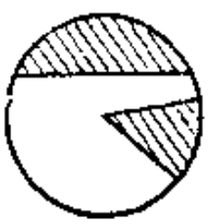


图 32

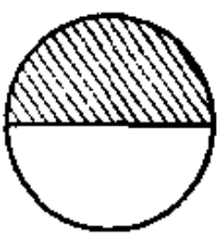


图 33

5a. 那么，怎样看待一个半圆呢(见图 33)？

6. 已知两角。每一角都等于 90° (图 34)。它们必相邻吗？

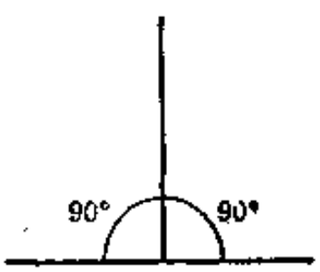


图 34

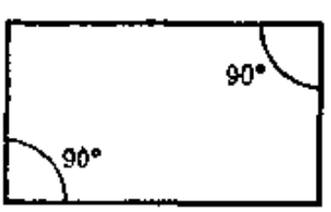


图 35

6a. 直角真的总是相邻吗(见图 35)？

7. 判定下列命题的真实性：任何弦总是比同圆的直径都短(图 36)。

7a. 如果弦通过圆心呢(见图 37)？

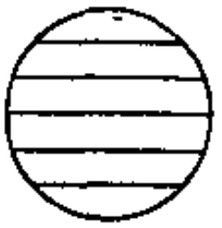


图 36

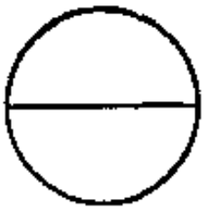


图 37

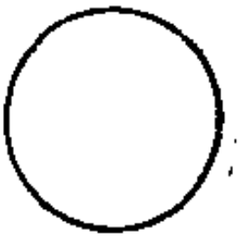


图 38

8. 已知一封闭曲线，上面所有的点都与一个叫做中心的定点等距(图 38)。这封闭曲线必是一圆吗？

8a. 在球表面上的任一封闭曲线上的所有点都与一定点(球心)等距。(教师用地球仪或任何其他球形物体说明。)

C. 几何测验

根据本研究目的，我们将 I.S. 亚基曼斯卡娅所提供的方法加以修改，编成本测验。

本测验由六个难度大致相同的几何题目组成。题目是以(a)语言的，(b)视觉的(用图形)两种变式给出的。每个题目可出示变式(a)或(b)。变式应按下列交错的顺序出示：1a, 2b, 3a, 4b, 5a, 6b。测验题目并不很复杂，因为极其复杂的题目不借助于图形是很难理解的。

实验者应查明学生宁愿使用哪种变式，以及哪种运算对他更为容易：是那些与语言表示的概念有关的分析呢，还是那些有关图形的分析。受试者能把一个以视觉变式给出的题目，转换为一般的、抽象的语言形式吗？他是怎样做的？当他在解一个以语言变式给出的题目时，要作一个图吗？他能把已给的语言关系改用视觉表示吗？在解完题目后，如受试者已作出视觉变式，实验者应要求他作出一个语言表示和一个语言解答。反之，加他已作出语言变式，则要求他用一图形作出解答。

本系列能使我们揭示记忆的某些特征：受试者是以具体的还是视觉的形式去记住一个题目。为此，在第二天要求受试者回忆

前一天所做的几何题目。

测验题目：

1a. 证明：等腰三角形顶角平分线垂直于过顶点且平行于底边的直线。

1b. 已知：在图 39 中，$AB=BC$，BD 平分 $\angle ABC$，$MN \parallel AC$。

求证：$MN \perp BD$。

2a. 自等腰三角形两腰上各取一点与顶点等距，将两点分别与底边中点连成线段。证明这两条线段相等。

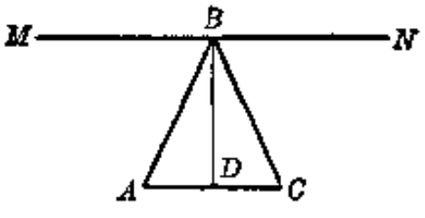


图 39

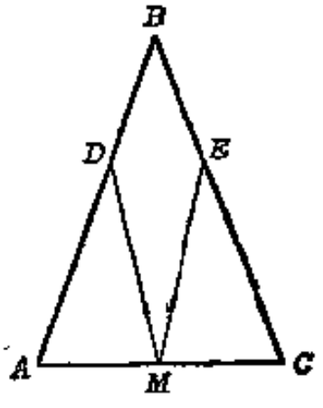


图 40

2b. 已知：在图 40 中，M 为 AC 中点，$AB=BC$，$BD=BE$。

求证：$MD=ME$。

3a. 两邻补角的角平分线形成什么角？

3b. 已知：在图 41 中，$\angle BOD=\angle DOC$，$\angle AOE=\angle EOB$。

求：$\angle EOD$。

4a. 过等腰三角形顶点作底边的平行线，证明它是顶角外角的平分线。

4b. 已知：如图 42，$AB=BC$，$BD \parallel AC$。

求证：$\angle EBD=\angle DBC$。

5a. 两条平行线被一条直线所截，两个同旁内角的角平分线

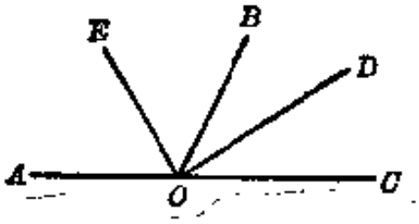


图 41

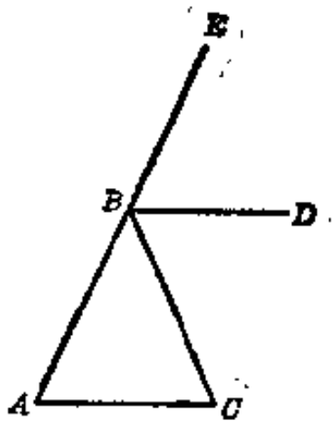


图 42

形成什么角？

5b. 已知：如图 43，$AB \parallel CD$，$\angle BEO = \angle OEF$，$\angle EFO = \angle OFD$。

求：$\angle DOF$。

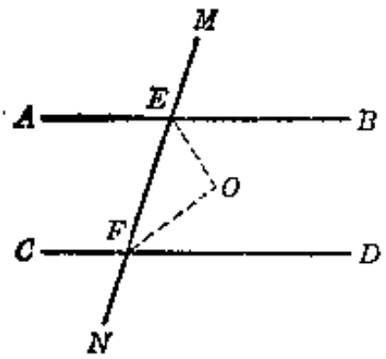


图 43

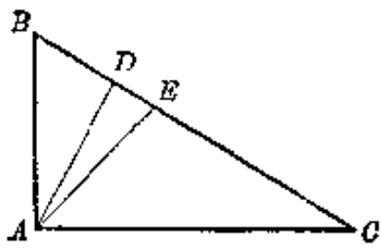


图 44

6a. 直角三角形的一个锐角为 $\frac{1}{3}$d。自直角顶点作高和角平分线。求高与角平分线间的夹角。

6b. 已知：如图 44，$AB \perp AC$，$\angle C = \frac{1}{3}$d，$AD \perp BO$，$\angle BAE = \angle EAC$。

求：$\angle DAE$。

系列 XXV：与空间概念有关的题目

本系列的测验由不同类型的题目组成，而受试者在解答题目

时，不准用笔纸，也不准借助于相应的图形或物体，而只能在头脑里解题。解答这些题目要求具有空间概念。我们这里指的空间概念，同时包括两维的(平面的)和三维的(空间的)。大部分题目并不十分困难，但所有的难点在于必须能在思维中"看到"图形、立体、空间关系等等。我们要查明，受试者是否在头脑里解答这些题目；如果是的话，是怎样解答的。如果他不能在头脑里解题，而是借助于作图，实体或图形才能较顺利地解题，那就证明他的空间概念是薄弱的。如果他在头脑里解题，则在绝大多数情况下是依赖于空间概念的。受试者也可能通过推理来解答题目，但这种情况是极少的(可以从分析受试者的解题过程来判定他是否通过推理解题)。

A. 几何测验(平面几何)

1. 圆的直径为17cm。如果一条直线离圆心的距离为：(a) 6cm，(b)8.5cm，(c)10cm，该直线与圆有没有公共点？

2. 两圆的半径分别为2cm和3cm。它们的圆心距为4cm。两圆相交吗？

3. 钟表的时针在2小时内走过一个什么角？在20分钟内走过一个什么角？分针在10分钟内走过一个什么角？在20分钟内走过一个什么角？

4. 一条直线与一个半径为4cm的圆心相距8cm。求圆周上的点到直线的最大和最小距离。(注意：提醒学生点到直线的距离决定于点到直线的垂线长。)

5. 已知一个圆和圆外一点。从这点作圆的一条切线和一条割线。从该点到切点的切线长，与割线靠近该点的圆外部分线段长，哪条长些？

6. 已知一个正方形。连接每相邻两边的中点，得到一个什么图形？这个图形的面积占已知正方形面积的多少？

7. 一块长方形土地用周长为128m的篱笆围住。地长为地

宽的3倍，其长宽各为多少？

8．运动场的长是宽的5倍，其各边全部围以等宽的跑道。跑道的外周比内周长24 m，跑道的总面积为468 m^2。求运动场的面积。

B．几何测验（空间几何）

本测验的题目，先按类型划分，每一类型再按难度排列。

1．一个立方体有多少顶点、棱和面？从每一顶点可引出几条棱？在立方体的表面上有几条对角线？

2．过平面外一点，能作多少条直线平行于这个平面？

3．一枝铅笔的一端被面定，另一端可在空间的任何位置。另一端描绘出一个什么面？

4．一个正方形绕着它的一边旋转，所得旋转体是什么？

5．一个直角三角形绕它的一条直角边旋转，形成什么面？绕它的斜边旋转呢？

6．将直角三角形绕平行于一条直角边的轴旋转，得到什么立体？

7．正六边形绕其一边旋转，所得旋转体是什么？如果绕平行对边的中点之连线旋转，所得旋转体是什么？

8．用平行于立方体一个侧面的平面去截立方体，所得截面是什么形状？立方体的对角截面是什么形状？

9．用平行于轴的平面截一圆柱，所得截面是什么形状？

10．设想一个环形立体（救生圈或汽车轮胎）。这个立体被四个平行平面所截，这四个平面分别：(a)过环形的轴，(b)过环形内圆半径的中点，(c)过环形内圆半径的端点，(d)过环形内、外半径两端点的中点。画出（即使近似地）每一截面的形状。

注：在中学里不学这种旋转体（环体）。如果学生难于想象这种情况，可提供一个图形（见图45）。

11．想象一个球内切于一个立方体（切点是立方体各侧面的

中点)。而另一球外接于这个立方体(立方体的各顶点在外接球上)。用平行于立方体两个侧面且过内切球心的平面去截此物体。画出截面的形状。



图 45

12. 空间一条线段在一个平面上的射影如果：(a)是一个点，(b)等于线段本身，(c)比线段本身短，那么空间线段与投影平面处于怎样的位置?

13. 如果空间两条线段在一个平面上的射影是：(a)一个点，(b)一条线段，(c)两个点，(d)一条线段及线外一点。那么这两条空间线段与投影平面处于怎样的位置?

14. 如果空间一个直角三角形在一个平面上的投影是：(a)一条直线段，(b)一个直角三角形，(c)一个钝角三角形，那么这个空间直角三角形与投影平面处于怎样的位置?

15. 把一个棱长 10 cm、各面都着色的木制立方体切成棱长 1 cm 的小立方体，则一面着色、二面着色、三面着色、没有一面着色的小立方体各有几个?

16. 一只气球先上升 200 m，接着向西北移动 1000 m，再下降 100 m。然后向东北移动 500 m，接着向东南移动 1000 m，再下降 100 m。这时气球离出发点多远?

C. 图形测验

下列图形各有多少个小立方体(见图 46)。

D. 图形测验

1. 不要转动你的头和纸，请在图形 2, 3 和 4 中标出"+"应在的位置(图 47)。

2. 在右边的那些图形中，哪个与最左边的那个一样(图 48)?

3. 一个立方体的各个面上标着数字 1, 2, 3, 4, 5 与 6

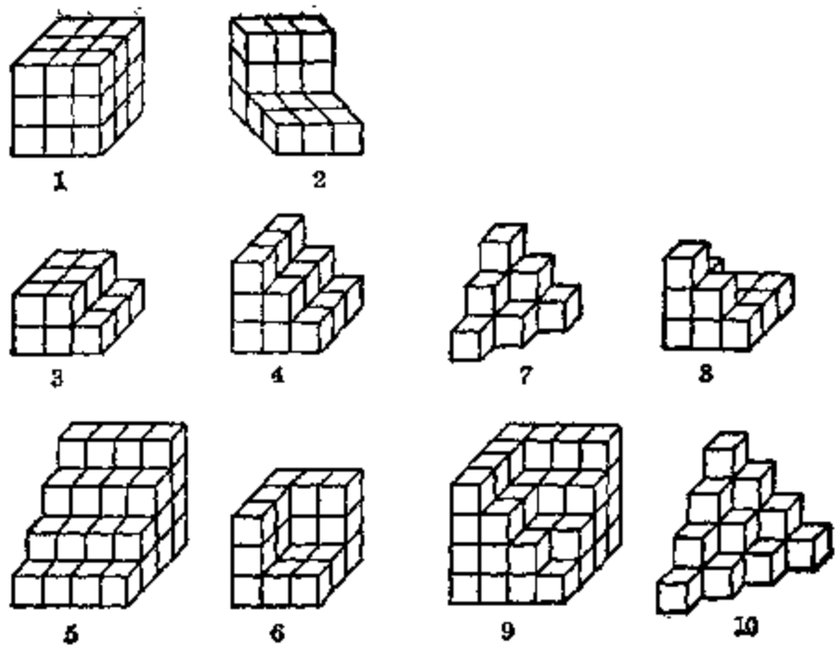


图 46

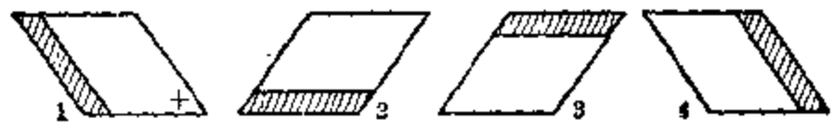


图 47

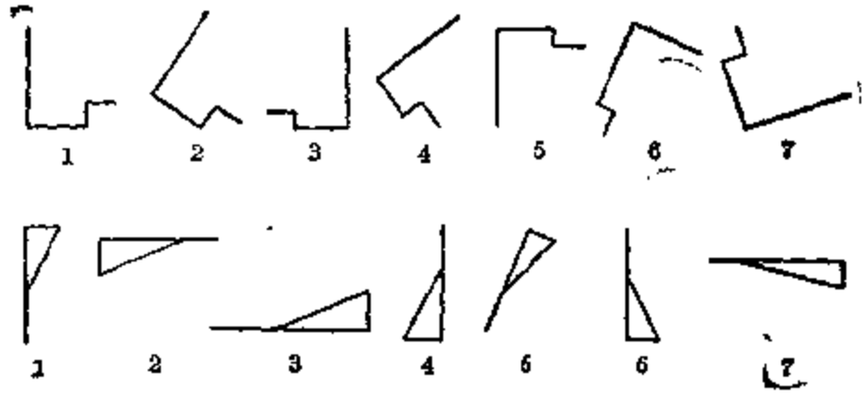


图 48

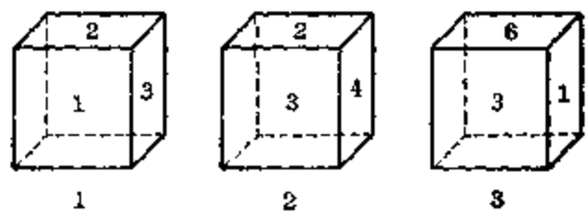


图 49

(图 49)。在所有三个图中，分别给看不见的各侧面标上数字。

系列 XXVI：揭示非数学智力活动的视觉形象与语言逻辑成分相关关系的题目

M.N. 波里索娃曾设计一种方法，用以显示在视觉记忆中视觉形象和语言逻辑成分之间的相关关系(53)。在本研究中，我们采用了这种由两个测验组成的方法，第一个测验是按视觉形象成分占优势的活动编制的(再认一个视觉形象)；面第二个是按语言逻辑成分占优势的活动编制的(描述一个视觉看到的形象)。在实验时，受试者将与两套树叶轮廓图打交道。实验的第一部分是先短暂地(三秒钟)向受试者出示一张模式树叶轮廓图，然后交给他一些类似的轮廓图，并要求他从中找出那张模式轮廓图。这种题目共有五个。在我们的实验条件下，如以语言思维活动为基础来求解这些题目，几乎是不可能的；但如以视觉形象的印象为基础，就很容易解答这些题目。实验的第二部分是，将一张模式树叶轮廓图与其他树叶轮廓图同时出示 10 秒钟后，要求受试者精确地描述模式轮廓图，以致于能以这个描述为基础，在 10 张类似图形中挑出的那张模式图。这是一个典型的语言逻辑活动。在实验时，由于一共出示五套图片，实验每部分的解题成绩，可按受试者在五个可能中解出的题目个数作为得分。评定的成绩可从 0(一题也未解对)到 5 (所有 5 题都解对)，两部分实验中所得分数的一个相关，实验性地刻划了受试者在这给定智力活动中的视觉形象和语言逻辑成分之间的相关性。

在结束本章时，我们列出实验题目各系列目的的一般总结(见表 3)。对我们所描述的实验方法作些修改，可适用于学龄较低(I.V. 杜勃洛维娜)与较高(S.I. 夏皮罗)的学生。

表 3　实验题目所研究的能力结构成分

编　　号	成　　分	含基本素材的系列	含辅助素材的系列
1	题目的理解	I, II, III, IV, VI, VIII, X, XI	V, VII, XX, XXII, XXIV
2	概括性	V, VI, VII, VIII, IX,X,XI,XII,XVIII	XXII, XXIII, XXIV
3	推理中的逻辑	IX, X, XVII, XIX, XX, XXI	其他所有系列
4	推理过程的简缩	VI, IX, X, XIX	XVIII, XXIII, XXIV
5	思维的灵活性	XIII, XIV, XV, XVI	VI, X, XXI, XXIII 以及其他一些系列
6	寻求优美的解法	XIII	V, XIX, XXIII
7	心理过程的可逆性	XVII	
8	数学记忆	VI, XI, XIX, XXII	VII, XIII, XXIII, XXIV
9	数学能力的类型	XXIII, XXIV, XXV, XXVI	IV, IX, XV, XX, XXI
10	数学能力成分的特性	XII, XV, XIX, XX	VIII, IX, XVI, XXVI

9 实验研究的组织

能力问题是一种个别差异问题，因此只有在适当的活动中考察个别差异，才能对能力加以研究。显然，研究能力的最自然的办法，就是把顺利地或创造性地完成某项活动的人（那些被称为有能力的人）跟不能顺利完成某项活动的人（因而被认为是没有能力或能力低的人）加以比较。

要阐明数学能力是什么，重要的是不仅要了解所有数学上有能力的学生具备什么，他们特有的个体心理品质是什么，而且还要知道数学能力低的学生缺少些什么，哪些个体心理品质在他们身上没有很好发展，因而造成他们在数学上相对地无能。

如果所有有能力的学生都具备能力低的学生所缺少的某些心理品质，那么这些品质必定在数学能力结构中起着重要的作用。按照这一设想，我们对数学能力发展水平不同的学生（暂时分为在数学上有能力的、中等的和能力低的三类）进行了实验研究，并对他们的个体心理品质作了比较。

怎样对学生的能力作出初步估计呢？关于这些学生能力状况的结论，是由实验教师比较广泛地观察了中小学生数学发展过程后得出的。然后，对挑选出来的那些学生进行预备性的教学实验。

有经验的教师会区别“有能力的”和“成绩好的”这两种学生。他们认为，这两种概念一般是一致的（有能力的学生学得很出色），但从全部事例来看，两者是有差异的。在一些情况下，能力低下和没

有能力的学生(按教师的评定)数学成绩会得3分甚至4分，而在个别情况下有些有能力的学生却只得4分甚至3分①。当我们要求教师挑选有能力的和能力低的学生时，许多教师有这样的评论："我认为这个学生尽管得5分但不能算是有能力的.他的学习没有特色"；"这个学生很有能力，但太懒，所以常得4分甚至3分"。教师们指出："得5分的并不总是数学上有能力的学生，其中有的学生解一般性的题目轻而易举，但解需要独立思考的题目就陷入了绝境。"O. 比托夫在"从探索到发现"一文中，引证了数学家对新西伯利亚数学学校(Novosibirsk Mathematical School)入学申请者中的一些学生的看法："他们的成绩都是5分，也能迅速、轻易地解他们所熟悉的型式的题目。他们的可教性可以得5^+，但他们的能力却是0或接近于0"(41)。

总之，正如经验丰富的教学法专家 A.A. 巴达尼伊所指出的："在研究学生的基础上，几乎在每一个班级中，总可以挑出学习能力的发展水平不同的三类学生：能力发展高的、中等的和较低的"(63)。

因此，我们的研究就从数学上把学生分为有能力的、能力中等的和能力较低的三组。应该指出，我们没有把我们设想研究的具体心理品质作为选取受试者的标准。我们是按数学方面有无成就(在广义上被解释成独立地和创造性地掌握数学的成就)来挑选受试者的，目的就是要研究决定这一成就的原因。

归入有能力这一类的，是在做数学作业时能迅速而容易地掌握数学材料和获得技能的学生，是在学习新材料时能独立地和多少有点创造性地思考的学生，是对非标准题目能提出有独创性的解法的学生。

归入中等能力这一类的，是在完成数学作业时与有能力的学生相比需要花费较多的时间和精力的学生。正如经验丰富的数学

① 记分是从1到5;5分最高。——英译本编者注。

教师S.I.夏皮罗所指出的那样，这些学生转而解新类型的题目时会感到很大的困难。但他们一旦掌握了解这类题的方法，就会出色地应付类似的题目。“他们的知识是模仿性的而不是创造性的”(435)。

至于没有能力的学生，我们再一次强调，这只是学生在数学上相对的无能而已。对学习数学绝对无能，这种“数学盲”，是不存在的①。在恰当的教学下，每个正常的、心理健康的学生是能够或多或少地顺利掌握中小学数学课程的，是能够获得中学课程范围内的知识和技能的。对数学相对地无能表现为，有些学生不管怎么勤勉和热心，学习数学总是困难重重，他们在数学活动中，既不能指望有较快的进步，也不能指望取得较高水平的成就。当然，进步缓慢并不总是能力低的证据。我们知道，一种虚假的无能是常常发生的，这种无能可以用极为重要的学习上的问题来说明（如懒散、病假等）。我们在这一方面要求教师尽可能地选出相对无能的学生，就是那些努力的，学习勤奋的，但在数学上却没有取得特别进步的学生，虽然他们可以在别的学科上学得很好。

归入相对无能这一类的，是理解教师讲解有困难（常常需要补课）的学生，和题目超出他们所掌握的标准形式的范围就不会解的学生。他们的数学习惯难以形成，需要经过大量的练习，即使形成了也不稳定，不加练习就容易丧失。

我们挑选这几类的典型代表作为我们研究的对象。对研究特别有益的，是数学上很有作为，但在别的学科上虽竭尽努力也不能得到这样的成绩的学生，以及无论怎么努力，在掌握数学上进步困难，但对别的学科却没有什么困难的学生。

我们决定对每一类最显著的代表进行比较深入的研究（教学-实验研究）。相对无能的这一组学生是这样组织的：从莫斯科若

① 关于这一问题，参看I.Kh.约翰逊的“数学盲？”一文（苏联《文献杂志》，24，1960年9月）和N.贝斯金的“关于是否有数学盲”一文（苏联《文献杂志》，22，1960年10月）。

干学校的六、七年级学生中挑选数学学习方面相对无能的学生19名(9名男生、10名女生)。进一步的研究表明,其中能力真正低的只有一半。我们告诉学生,这个数学活动组是为掌握数学上感到困难而又愿补课的同学组织的。因此,我们就以数学活动组的形式,从代数和几何的最基本概念着手,组织了实验数学教学。前后共上了六十课。另外,对活动组成员还作了个别实验。

特别有益的是,我们对一组学前期就开始在数学上显示出有能力的学生作了补充性的心理学调查和实验研究。天赋高的学生可以使我们更好地对能力的结构进行分析,天才学生的幼年期可使我们在他们能力的形成和发展中研究能力的结构,同时去揭示这种发展的某些条件。这一组儿童包括各种年龄(6岁和6岁以上),他们住在莫斯科和另一些城市(后一种情况决定了对每个儿童进行研究中的一个变量)。

这样,我们研究的学生就有四组,每组都给予一个临时的简称,见下表。不过有一点必须首先加以说明。我们以后将用"没有能力的"代替"相对没有能力的"(请注意,上面提及的关于我们这个研究的全部说明)。从逻辑上说,只要有有能力的,也就有没有能力的。至于从相对意义来说,有能力也只是相对地有能力。

四组学生的简称如下:VC——数学能力很高的,C——有能力的,A——中等的,I——没有能力的(见表4)。

实验研究是从1956年开始陆续进行的,以莫斯科若干学校(第649、282、665、328、358、80、434、440、91和第12寄宿学校)和库尔斯克市第6学校(由夏皮罗主持该校实验)的学生为对象。在许多其他学校里也对个别学生作了研究。实验研究的总人数是192名。

每个实验组里男女受试者的人数接近相等。但能力很高的那组例外,那里男生明显地占有优势(下面将详细讨论)。

现把实验的具体组织简要归纳一下:实验在自然条件下进

表 4　实验组别

实　验　者	年　份	年　级（或年龄）	人数	组　别			
				VC*	C	A	I
V.A. 克鲁捷茨基（第一阶段）	1956—1958	六、七、八	19	0	9	6	4
V.A. 克鲁捷茨基（第二阶段）	1958—1965	6～14 岁	16	16	0	0	0
V.A. 克鲁捷茨基（第三阶段）	1960—1961	六、七	19	0	0	9	10
V.A. 克鲁捷茨基（第四阶段）	1960—1964	五、六、七、八、九、十	66	0	36	22	8
S.I. 夏皮罗	1962—1964	九、十	30	11	8	11	0
I.V. 杜勃洛维娜	1963—1965	二、三、四	42	7	14	9	12
合　计	1956—1965	二至十年级	192	34	67	57	34

* 这里能力很高的儿童只计参加实验的。

行，学生并不觉得自己象“豚鼠”①。至少不把实验目的告诉学生（只是说研究解题过程是为编写新的习题书收集材料）。实验是在课余、让学生在休息后个别（只要条件许可，很少对两人同时进行实验）进行的（仅夏皮罗利用上课时间进行）。每次持续时间不超过 2 小时。我们留心地守候着，使得现场环境并不影响受试者解题。受试者如不舒服、感到疲劳、精神不振、或是没有兴趣解实验题，就马上终止或暂停实验。

① 意指实验对象。——中译者注。



中小学生数学能力结构的分析

引　言

已经指出，要研究复杂的现象和复杂的心理产物，任何真正的科学方法都首先要分析它的结构并分离出它的成分。我们面临的任务，就是要在数学能力（或前面采用的术语—数学才能）这样一种完整的智力特性结构中，分析出占有重要地位的那些成分的独特性，并加以研究。这里我们将讨论有数学能力的学生解（广义的）数学题时心理活动组织的独特性。

即使我们把这种过程看作是一种完整的心理活动的特殊形式，但为了科学分析起见，我们还是把这种活动分解为若干基本环节（步骤、阶段）来描述解数学题时每一阶段心理活动的特征。

显然，在任何题目的解答中（从基本的到极复杂的），总可以找出三个环节或阶段。似乎开始是取得初步的事实（关于题目的初步知识），正确反映、努力弄懂并掌握题意。接着来的是解答本身，就是对获得答案所需的事实进行加工或转换的阶段。最后，解题过程和结果总是在记忆中留下某些痕迹，多少增加了一个人的经验。

这带来了一个术语问题：怎样命名这些阶段或环节？根据G.S·科斯秋克的建议，它们可以分别称为心理活动的知觉的、思维的和记忆的环节。但这可能会强调并加强各个阶段的功能上的局限性和彼此之间的独立性。事实上，在解题过程中这些知觉的、思维的、记忆的成分不仅是互相联系着的，而且它们是“互相渗透”的，故强调它们的各别性似乎是有点人为的。

别的作者又是用什么术语来说明这些情况的呢？最近，信息概

念被越来越频繁地用来分析教学活动。如，L. B. 伊捷利松就乐意应用这一术语(146)。他在论文中用信息这一术语来说明教学过程。("学生从教师那里得到信息"、"教师把信息传给学生"、"学校课程的信息量"等等。)他说："讲解教材可以看作是从教师到学生的信息的传递过程"(146, 第 320 页)。

E. I. 马希别茨也应用这一术语："题目的条件里包含着信息。……解答的实质就是包含在条件中的信息的转换"(285, 286)。A. N. 扎哈罗夫(130, 第 47 页)和 F. N. 舍米亚金(449)也把解题同信息的接受与加工(转换)联系在一起。某些外国学者也是如此，如布鲁纳(480, 第 46 页)和吉尔福特(593)。我们强调指出，在所有这些著作中，都不过是用信息这一术语来解释教学过程。在我们看来，这是很有道理的，因为这里用的"信息"这一术语的含义是完全可以允许的，就象 N. 维纳应用这一术语时一样，把信息作为一个人从外部世界获得的所有事实的统称①。

Z. 罗文斯基，A. 乌耶莫夫和 E. 乌耶莫娃也正是从这一意义上使用这一术语的，比如他们在《机器和思维》一书中说："信息就是关于外部世界的全部资料，这些资料是我们直接和间接地感受周围的物体和现象而获得的"(347, 第 63 页)。V. 乌斯贡斯基把这一思想阐述得更为简洁：信息是"以一定形式叙述的知识"(422, 第 53 页)。

我们不想标新立异，以后也将严格按上述意义使用"信息"这一术语，来描述解数学题中心理活动的各个环节。这样，我们拟把解数学题过程中的心理活动区分为三个基本阶段：

1．接受题目的信息(对题目条件的最初的倾向性，试图理解题目)。

2．为了解题而加工(转换)已获得的信息，并得出所要的结果。

3．保持题目的信息。

① N. 维纳："控制论与社会"。莫斯科：《外国文献》，1958，第34 页。

10 关于中小学生数学能力成分的非实验性资料的分析

我们将分析从事研究工作的数学家和中学数学教师关于数学能力的本质及其结构的一些陈述。前者在科学研究上的学识和经验以及后者在教学和观察无数学生的数学方面发展中的经验，使他们能对我们感兴趣的问题提出有价值的看法。

首先，让我们考察在1958～1960年对第一批62名教师所作的口头调查的结果。

在教师们看来，数学能力是什么？他们是按什么标准去判定这些能力的有或者无呢？当然，要求教师们总是能够揭示他们所提到的那些类型和特征的心理学本质是不现实的（即使是促使他们尽可能地"阐明"他们的观点）。不过，所得到的材料却在心理学上有着非常重要的意义。我们以系统摘要的方式把这些材料介绍于后。另外，我们还征集了教师们和数学教学法专家关于这一问题的书面意见。

数学教师所陈述的能力的标准和特征

1．*较快掌握数学知识、技能和习惯，迅速理解教师的讲解*（95%）①，这里有些教师认为这是个人的学习速度。绝大多数则

① 括号内表示提出这一标准的教师的百分数（以整数表示）。

认为速度本身不起特殊作用，它可能是一个质的增进的速度问题。“当然，一个本质上的区别就是掌握的速度。有些人你对他重复讲五次还嫌不够，但对另一些人你一次还没有讲完他就已经‘把握了本质’”(P.G., 8 年教龄)。“学习的速度是没有意义的。我有一个有能力的但速度极慢的学生，别人解 5 道题，他才解 2 道题，但他不用教师多讲就能学会新材料和新的解题类型”(A. S., 16 年教龄)。

2. 思维的逻辑性和独立性(82%)。“独立证明的技能，推理的技能，不重复别人的想法”(O. U., 4 年教龄)。“有能力的学生的明显特点是自律和思维的一致性。在观察他的思维如何有效地‘展开’时，你会感到相当满意”(Ya. K.)。“理解事情的前因后果，找出它的来龙去脉的技能。迟钝的学生不懂得证明，只会‘人云亦云’，相信权威”(D. Zh.)。“迟钝的学生不懂怎样去独立思考，只会死记证明和论据”(V. K., 7 年教龄)。

3. 数学学习中的机智和智慧的敏锐性(67%)。“有能力的学生大多具有充分发展的数学想象力。他们能不受陈旧的和固定的解法的羁绊，机智地寻找多种解法。能力较低的学生就不会从老框框中主动摆脱出来”(E. S., 15 年教龄)。“好学生能作出智力综合和智力定向”(F. G., 22 年教龄)。A. S. 捷休列维奇(430)提到了寻找最优解法的能力。Ya. A. 绍尔(455)指出这种数学的重要品质就是一种概括能力和机智。探究解题的不同方法能够促进学生的思维在这方面得到发展。

4. 对数学材料的迅速和稳固的记忆(50%)。“有能力的学生总是很快就‘掌握’了数学材料，并牢牢保持在记忆中。这不是机械的记忆，而是对语义结构的记忆和对证明的方案及基本思路的记忆”(A. V., 19 年教龄)。“一般说，有数学能力的学生把推理或证明的模式记得很牢。他并不总是去强记一些事实和具体数据”(V.R.)。“数学上差生的一个特点是记忆方面经常出‘漏子’。

以我的学生 Sh 为例，他会把用心学习的任何一个公式或定理在两小时后忘掉或者对此糊涂起来。这种情况只是在数学学习中出现，在其他学科的学习中(我特别注意到)，情况要好得多。"(Ya. Z.)。

5. 高度发展的概括、分析和综合数学材料的能力(50%)。"他从不纠缠于细枝末节。他总能分出什么是主要的或基本的"(V. R.)。"他能清晰地想象出题目的各个要素之间的关系"(K. K.)。"他能从材料中迅速发现自己的目标方向。他能够区分内容和形式：有些题目是形式相似而内容不同，而有些则相反"(S. Ya., 9 年教龄)。"他能够'到处探索'联系新旧知识的线索，使它们互相关联，并把他的知识应用于新的场合"(R. B.)。"有能力的学生很快就掌握了分析数学材料的技巧，这使他们有可能从细节中摆脱出来，在不同中看到共同的要素，分出组别和类型"(N. L., 21 年教龄)。M. D. 勃莱推孟(58)和 P. M. 叶尔德尼耶夫(465)指出，数学思维的发展是同抽象和概括的能力有关的。

6. 数学课上疲劳的消除(3%)。"有数学能力的学生有一个显著的特点，就是即使在上了长时间的数学课后也不感到疲惫。我经常注意到这一点。对其中有的人来说，数学课是轻松的。这可能是由于对没有能力的学生来说得竭尽全力去学的东西，一个有能力的学生只花极小的精力就行了"(Ya. D., 18 年教龄)。

7. 正向与逆向思维序列迅速转换的能力(1.5%)。"有能力的学生的思维能够按需要自由离开一种简单的思路；一个有能力的学生能自如地从正向思维序列转向逆向思维序列，而能力中等的学生对此就有困难。从直接证法到反证法，从原定理到逆定理，有能力的学生对这些转换没有困难"(E. O., 14 年教龄)。P. M. 叶尔德尼耶夫(462, 463) 指出，那些"逆"命题和"逆"问题对学生是有一定难度的，但对发展学生积极的、独立的和创造性的思维极有价值，因为它们能发展从正向思维到逆向思维的能力。

1965年，我们用一份专门的问卷对第二批56位数学教师作了书面调查。这次调查与前次稍有不同。在填写问卷前，为教师们举办了几天的关于中小学生数学能力的心理学讲习会。作为考试，要求教师们评定能力的各种成分。这样，教师的回答就更有的放矢而且考虑周到。现把他们的意见(包括否定的)整理分类，按"票数"多寡列述如下：

1．概括能力(98%)。"有能力的学生容易感知数学材料中的普遍要素。""在特殊中发现一般，在一般概念下归入特殊的事例，是数学教学成功的主要条件。""有能力的学生不仅能迅速概括数学材料，而且能迅速概括推理和证明的方法。"

2．推理的逻辑性(98%)。"一个有能力的数学家首先在逻辑上是个行家。""对数学对象进行推理的能力是卓越的数学家最重要的品质。""我把逻辑推理的能力放在首位。""数学是最适宜于发展严格的推理能力的学科，而严格的推理能力则是数学上发展得很好的主要标志之一。"

3．智慧的敏锐性和机智(88%)。"只有智慧的敏锐性、猜测力，再加上良好的记忆力和坚持不懈，才能使一个人在数学上有能力。""智慧的敏锐性是一个有数学能力的学生，其思维的基本特性。""在数学上，重视知识也许没有重视机智那样必要。如果一个学生只会理解，那么他可成为一个出色的学生，但却不能认为是有能力的。""有必要突出理解的敏捷性和机智吗？有能力的学生是懂得很多，而又能运用他的知识的人。"

4．数学记忆力(82%)。"对数和公式有良好的记忆力是很重要的。""必须对论证中的关键地方有良好的记忆。""在我看来，良好的记忆力是一切事情的基础。显示出逻辑性和机智，意即把某些东西从'大脑记忆机制'中提取出来。""记忆力是次要问题：我曾听说，即使有些大学数学教授，对数和公式的记忆也很差。"

5．抽象能力(82%)。"数学是最抽象的科学。所以，抽象能

力最重要。”“从一些数量中抽象出数本身的能力，以及能从一个代数式中看出数而不是看出一些字母的结合的能力，这是有能力的学生和只是在形式上进行学习的学生的显著区别。”“我认为从具体的材料中，即从数、已知图形、已知关系中进行抽象的能力极为重要，这跟我已提到的概括能力有联系。”

6．思维的灵活性(73%)。“有能力的学生能迅速地从讨论的一个方面转到另一个方面，从一种研究方法转到另一种研究方法，从一种解法转到另一种解法。”“我的那位有能力的学生 G. Kh.，思维具有惊人的灵活性。他总是努力用这样那样的方法去解题。”

7．借助形象化的方法(63%)。“有数学能力的学生对数学关系的形象化解释是很有创造力的。”“我的那位有能力的学生 S. 常借助圆柱体直接思考。”相反的看法也很有意思，例如：“我并不认为，使一切事物都形象化的能力在数学(代数)上是重要的。相反，我可以说，一个人应该能够不借助于形象化的模式来进行思维。数学就是对任何形象化方法的抽象，就是进入到非形象化的抽象范畴的世界中去的一个通道。”

8．具有空间概念(57%)。“学习几何没有空间概念就会寸步难行。”“数学是一门数量关系和空间形式的科学。学习前者没有想象力(我就有几何想象力)还可以，学习后者就不行了。”这里相反的见解也很有意思：“一个有数学能力的学生没有空间想象力也能进步。敏锐的逻辑推理能力可以取而代之。”“我知道有这样一位学生，他的空间概念很强，但在几何学习上进步缓慢，原因是他的推理能力没有得到很好的发展。所以，单单能够‘看见’是不够的。”

9．从正向思维序列到逆向思维序列的转换能力(52%)。“有能力的数学家能够作出剧烈的大转变，他的思维能向相反方向进行，但这多半是思维灵活性的一种特殊情况。”“可互换的运算或是

从正定理到逆定理的转变，需要一种清晰的叙述能力来'提出相反的思路'。"

10．力求节约精力(48%)。"用最简短、最直接、最经济的方法来达到目的的能力是重要的。""数学头脑是经济的头脑。这个头脑能找出最简易的方法去达到目标，并因此而体验到一种美感。""数学上有优美的解和笨拙的解之分，这同节约还是徒耗精力有关。有能力的人力求花最少的精力去得到最佳的结果。"

11．推理过程的简缩(38%)。"有能力的学生的推理过程是简缩的，从不展开它的全部逻辑结构。这是非常经济的，它的价值就在于此。""我常常观察一个有能力的学生是怎样思维的：对教师和全班学生来说，思维是包括序列中每个环节的详细过程，但对有能力的学生来说，思维却是片断的、粗线条的、非常简略的，是一种思想的速记。"但这样的陈述也是有意义的："我不知道如何去评价这一点。在学校教学中，我们坚持教给学生完整的逻辑论证。""我认为有能力的数学头脑是一个清晰的、缜密的、逻辑的头脑，任何加速或简略都是与它格格不入的。逻辑性就是逻辑性，你永远也离不开它，漏掉其中一个环节就不成其为逻辑性了。"

12．数学课上疲劳的消除(30%)。"能力的首要标志就是非常紧张地工作，但神经能量、体力和心力消耗不多。""任何有能力的人，都能在自己的领域里勤奋工作而几乎不觉得劳累。""这一点我经常注意到了，但不懂这意味着什么，可能是，有能力的学生不感到疲劳是由于功课对他们来说是太容易了。""数学能力就是全神贯注地去干而不感到疲劳的能力。在上了六节课和完成家庭作业之后，有能力的学生晚上还要参加数学小组的活动(三小时)。在那里，我们艰辛地工作，但他们还象雏菊一样精神抖擞。"

当问到在学生中挑出数学才能不同类型代表的可能性时，教师们作了如下的回答：56人中有47人指出存在两种类型，即"代数学家型"和"几何学家型"。在他们看来，这些类型同主要是欢喜

在数量关系方面还是在空间关系方面进行思维和推理有关。第一种类型以空间概念弱为特征，第二种类型以空间概念的鲜明和生动为特征。但他们竟相指出，他们很难把大多数学生归到其中的某一类型中去。

56人中有22人还提出，可以把有数学能力的学生按他们的思维速度去分类："有些学生掌握材料很快，并立即发现他们该采用的方法；而另一些则缓慢地、逐步地思索，但最终获得同样的成功。"另有三位教师则认为，他们没有看到数学天赋能力有明显的类型上的不同。

我们可以看到，教师们的陈述是很有意义的。但其中有些，说真的，讲得太一般化，不够具体也不够明确。令人遗憾的是，客观条件不允许我们通过个别的口头讨论来补充这些书面材料。

从事研究工作的数学家的权威性观点是极有价值的。前面提到，有21位数学家寄回了对我们的问题的回答。下面我们来研究这方面的材料。

从事研究工作的数学家的论据

首先应该指出，在试图揭示数学能力的实质并指出作为成功条件的个性心理品质时，数学家挑选出两组特性：个性的一般特性和"数学头脑的特性"——如果我们可以这样表达的话。

在这些作为数学能力显露条件的个性特性中，数学家们提到了目的明晰性，即一种清楚的"目标的映象"(3)①，全神贯注(4)，勤奋(2)以及坚韧的意志品质(3)。被提到的还有"对数学的浓厚兴趣"、对数学的一股热情、刻苦学习数学知识、感到有钻到数学中去的需要，"对数的酷爱"(6)等。

另外，数学头脑本身的品质列举如下：首先是一种对概括的能

① 括号内数字为提到这一特性的人数。

力，甚至是对概括的独特的“热情”，这是一种“发现在普遍的现象中存在着差异”的能力，“在异类现象间建立联系”的能力，“分离出问题的核心和实质的技能”以及一种“从特殊到一般的能力”(12)。这一品质同抽象能力有关，同倾向以及专注于抽象的论证有关，同一种“从非本质的细节中使自己摆脱出来”的能力有关(11)。

他们指出的还有思维的逻辑性，从已知前提中得出逻辑性结论的能力，思维的正确性，简洁性和清晰性(6)，甚至还提到了独特的“‘非逻辑’推理的能力”(根据所有外部现象来判断，这就是物理学家们在说“现在我们需要某种冲破传统观念束缚的完全是狂妄的想法”的时候，所指的意思)。他们认为数学家固有的特性是“感到有寻找最优美的解法的必要”(3)，数学想象力或幻想(3)，组合能力(3)，以及“迅速地从思维的一个层次转到另一个层次的能力”(3)。再有就是，“由推理的中间步骤迅速抓住事物本质、深入问题内部的能力”，“思维时省略推理过程中的许多环节的能力”(3)。最后，他们提到了“运用记忆数和公式的各种形式去记忆基本概念、模式、联系以及基本思维序列的能力”(1)，“创造推理的一般数学模式的技能”(1)，以及“在学龄期按一定规则进行形式运算的典型倾向”(1)。

关于数学能力的特殊性问题，数学家们的回答如下：21人中有16人认为数学能力有其特殊性，有3人根本否认有任何特殊性，并把一切都归结为一般智力问题，另2人没有明确表示意见。截然相反的有这样一些看法：“只要一个人具有逻辑思维能力并设法培养他的数学兴趣，那么他就能顺利地进行数学研究”；“认为任何人只要智力得到充分发展，在正常条件下，就都能成为优秀的数学家，这种看法纯属无稽之谈。”有一位我们询问的数学家说：“当很强的，特殊的数学才能同一般的智力天赋，好奇心，及力求掌握全人类共同的文化知识相结合时，就会取得真正惊人的成就。”

关于才能的不同类型问题，有各种不同的回答。绝大多数数

学家(19)赞同有不同类型的才能存在。有些人(2)则认为讨论数学能力的任何类型都缺乏根据，值得讨论的应该是数学方面的不同兴趣、爱好和不同的课题定向。

数学家们发表的大量的不同意见，是同试图富有意义地确定数学能力的类型上的差异有关的。有5人根据思维敏捷性表示了赞成存在两种类型的观点。让我们引述一些这方面最有影响的看法："两种数学头脑类型的区别在于：有些人能迅速领会和掌握不同领域的知识(成为学识渊博的人)，而另一种则思维比较迟缓但更有独创性……。在有创造性天赋的数学家中，除非常全面的学者外，不乏思维迟钝的人：他们甚至不能迅速解出较为简单的题目，但另一方面他们在长时间内能持久而深刻地思考极其困难的问题。在要求短时间内解出一些难题的数学奥林匹克中，数学班上大多数有发展前途的学生都名落孙山。但同时，当他们不受任何严格的时间限制时，却能解出艰深得多的题目。""有些数学家把握问题实质的速度快得惊人，而且能深入问题的内部。但我们遇到的极有能力的数学家中的另一些人，给人的印象却是迟钝的。他们慢慢地进行推理，一步一步地、思维没有一点跳跃。但仔细观察他们的著作，你会对他们环环紧扣的、协调一致的、令人十分信服的、周密的数学体系惊诧不已。"

有些科学家(5)指出，"存在着两种基本类型："分析学家"型和"几何学家"型。这五位中三位提到，这些类型同数学思维中是否具有直觉有关("有鲜明的几何直觉，而逻辑性相对地较差，这是几何型；而分析型则相反")。另两人强调直觉不只表现在几何学方面；一种类型是以几何直觉占优势为特征的，而另一种类型则是对数和函数关系的直觉占优势。

另外一些类型划分的根据也简述如下：逻辑型和计算型(2)；综合型和分析型("前者能立刻领悟难题的解法，后者能发现正确解题的依据；前者有更多的幻想因素，后者有更多的逻辑因素"；以

及具体型和抽象型("前者知道怎样去解题而且喜欢解题，后者更热衷于一般推理")。另外，还提到这样两种类型：一种是本能地倾向于在一般概念基础上进行创造性活动；另一种是倾向于在形式的数学结构的基础上进行创造性活动。

最后，还有一种观点认为，存在着"一种广阔的数学头脑类型，它能够囊括大量数学材料，把它们组成系统和顺序，和另一种狭窄的数学头脑类型，它容易被一些孤立的问题懵住，但有时在解题中也会显示出与众不同的创造性。"

上面就数学家在书面问卷上提供的材料作了述评，我们想指出这些思想的深刻性和丰富性。

11 儿童中具有数学天赋的个案分析

前面已经提到，我们在相当长的一段时间内研究了一组具有数学天赋的儿童，他们的数学能力通常在幼年时期就开始表现出来了。我们在1958年至1966年对这些儿童的成长进行了观察，同时对他们作出实验性研究。这个研究的一个特殊任务，就是要研究这些儿童主要在数学课中显示出的个别心理特性。

现将这些有天赋的儿童的某些个别特性分述如下。

索尼娅L.

(1950年生于莫斯科。1958～1959年对她作了记述。)

索尼娅L.，8岁，莫斯科第164学校二年级学生。家庭中另一个孩子是个男孩，七年级学生。哥哥并没有表现出数学方面的能力，但发展很全面，并爱好音乐。父亲或母亲没有表现出特殊的数学能力，但父亲是一位工业技术专家。近亲中也没有发现任何人具有数学方面的能力。唯一值得注意的是，索尼娅的外祖母，她曾以热爱数学著称，求学期间在这方面花了很多时间，但关于她的数学能力则没有什么资料可供参考。

索尼娅个子很小(看起来她好象不超过6岁)，是一个有着一双乌黑眼睛、梳着辫子、面目清秀、身材纤细的小姑娘。当她在桌上做功课时，别人要在她的座椅上垫一只枕头或两本厚书。她身体发育正常，但动作十分缓慢，讲话时从容不迫(甚至拉长语调说

话)，且不善于表达自己的情感。她在各门功课中学习正常，没有表现出突出的成就(算术当然例外，她在这方面获得很好的成绩)。她字写得相当差，看书并不很快(索尼娅后来十分欢喜看书)，并不怎样特别喜欢做功课。她对音乐没有特别的爱好，在这方面也无特殊的能力。学习音乐对她来说是十分困难的事。另一方面，她爱好绘画，所绘出的图画(特别是临摹)，就她的年龄而言可算相当好的了。

应用 V. P. 亚贡科娃的方法(468)对索尼娅所作的实验，表明她在笔谈和会话中都有某些令人感兴趣的特性：叙述精确明晰，但拘泥于形式，想象力贫乏，在她的谈话中缺乏隐喻、形容词句或任何动人的色彩。

索尼娅非常勤奋，不欢喜闲着无事可做，特别喜爱做复杂的算术题。就她的年纪而论，无论从哪一方面来看她都是一个极普通的孩子：她可以玩洋娃娃玩上几个小时，喜爱滑雪，热心参加学校的节目表演。在去年学校举行的新年联欢会上，她在"穿长统靴的小姑娘"中获得化装奖。索尼娅也积极参加自己班级的社会工作。她有一个特性是我们应该加以注意的。当她干着某一件对她来讲是过于容易的事情时，她就会心不在焉，这一点是很突出的。这就是她为什么有时在做 10 以内的加法时会算错、或可能"忘记"写上符号或括弧的原因。错误一旦指出后，她会"突然记起来了"，感到怪难为情的，并且马上把它纠正。

此外，她能够做到注意力高度集中。当她全神贯注的时候，她并不是安静地坐下来，而是到处走动着，表现得坐立不安(虽然这些举动仍然是典型的慢节奏)有时甚至采取不自然的姿态。有一次，她要解决一道难题(我们是在她家中对她进行研究的)，使我们惊奇的是，她突然站起来，到床上躺了一下，以认真的态度翻了一个斤斗，然后回到自己的椅子上。

当索尼娅约四岁的时候，她的父母就首次注意到她具有数学

方面的能力。当然，在这以前没有人教过她算术；她不过有一次机会听到她的哥哥（他那时读二年级）朗声做算术作业。不知怎么地，在没有人注意的情形下她学会了数数，开始数到10，随后数到100。有一次，她的父母发现四岁的索尼娅竟然对她的哥哥解释怎样解（27－14）这样一道减法题，他们感到十分惊讶。她说："首先你必须减去10，得到17，然后再减去4，得出13"。当他4岁半或5岁时，她虽然不懂得任何理论，却能完全独立地得出一个（简单）分数的概念。当她5岁或6岁时，她得出了有关负数的一种直觉的见解。她的哥哥曾经抄错了一个例题；当他看到他要从一个较小的数减去一个较大的数时，他吃了一惊。但这并没有难倒索尼娅：她宣称："从28减去36——结果是比0少掉8。"在差不多同一个时期里，她独立地学会了分数的运算（是依靠心算的）。完全出乎她父母亲的意料之外的是，她在5岁半时已表现出一种解（当然也是依靠心算的）相当复杂的题目的能力，这些题目都是准备给四年级学生做的。有一道题目使当时读四年级的哥哥感到困难，但她做出了。她计算了几面墙壁的面积，减去了窗和门的面积，就算出了要用多少糊墙纸。

应该注意的是，没有人曾对索尼娅特别指导过数学，相反地，她的父亲原则上避免传授任何知识给她，认为这样做的唯一后果，是导致她在那个年龄就陷入形式地掌握知识。的确，她的父母亲对她很关心，尽量满足她解题的爱好；他们让她"仔细地考虑问题"。到这时为止，她差不多没有掌握系统的知识——她计算分数时，连分子和分母是什么，通分母的法则是怎样的都不知道。每一件事情都以推理为唯一基础（除此以外，她总是在头脑中进行这些运算，因为索尼娅刚刚学会写字，还不知如何进行笔算）。因此她的计算方法往往一点也不简便，有时是幼稚而朴素的（虽然基本上是正确的）。例如，当她被问到"你是怎样作出1°角的？"她回答说："你必须把一个圆分成360份，然后擦去359份，把剩下的一份

与圆心连结起来。”她的分数除法是这样做的：

$$\frac{5}{8}\div\frac{1}{2}=\frac{5}{8}\div\frac{4}{8}=1\text{ 加上 }\frac{8}{8}\text{ 的 }\frac{1}{4}=1\frac{2}{8}。$$

整数除法是这样做的：$600\div240=$　；$600\div120=5$。但 120 是 240 的一半，所以我们可以得出 5 个一半，就是 $2\frac{1}{2}$。

当然，这类计算题，特别是在进行心算时，是很费功夫思索的。所以索尼娅并不欢喜冗长而复杂的计算题。她欢喜推理，喜欢探索解题的方法。

对年龄只有 8 岁的索尼娅而言，她对于如何解题到底知道些什么？让我们对她的数学发展的水平谈一些看法。要说她有哪一年级学生的水平（就算是假定性的）是困难的（因为结果可以证明，与许多学生比较起来，她懂得的显然较少，而推理能力则显得较好）。在很带假定性的意义下，可以认为她与数学方面发展很好的六年级学生相当，尽管她解某些题的水平甚至更高些。例如，她做出了个别原来打算给七年级和八年级学生做的题目（条件是这些题目都是“推理方面”的，而且并不要求具有什么特殊知识）。例如：“如果一列火车驶过一个哨站需时 $\frac{1}{4}$ 分钟，通过一个 540 来长的隧道需时 45 秒，问火车的长度和速度各为多少？”她很容易地解出难度如下的题目：“鸡和兔在户外到处奔跑。它们共有 35 只头，94 只脚，问它们各有多少？”“740 张纸制成 140 本厚的笔记簿和 100 本薄的笔记簿。制成一本厚的笔记簿比制成一本薄的笔记簿多用纸一张。问制成一本厚的笔记簿和制成一本薄的笔记簿各需纸几张？”

索尼娅有方根的概念，对百分数十分熟悉，能够用简单分数进行运算（她把十进小数看成简单分数），有负值及负值运算的概念，在几何方面具有十分广泛的（但远非系统的）知识。她毫无困难地自己得出了简单的几何定理的证明（例如，有关三角形的内角和以

及外角大小的定理)，并解一些几何题(例如"在一个直角三角形中，一个锐角被一条直线段分成两个角，其中一角是另一角的5倍，较大的一角为45°。问另一锐角的外角等于多少度?")

在我们对索尼娅进行研究的最初阶段(1959年)里，发现她在解数学题时在智力方面具有下列一些特征。

推理和心理定向的敏捷性。这是索尼娅最独特的特征之一。凡是她可以理解的问题，她通常以惊人的速度得出解题的方法(实际上，她解这种题所需的时间仅决定于她花在计算上面所需的时间)。例如，有关一个三角形外角大小的这个定理是她所不熟悉的，但她只需要几秒钟就能得出证明定理的方法。又如上面提到的鸡兔问题，她极其迅速地得出一个解题的方案。当问道："一个三角形可以有两个直角吗?"她很快回答说，"不会的，因为这样一来就没第三个角了。"她的推理有时是如此简缩，以致人们可以这样说，对待数学材料的突出的分析-综合"想象力"是她的一个特征。在以上各例中，她都能立刻得出解题的方法，或看出证明中的逻辑思路。

合乎逻辑的思维，有系统和顺序的思想。这也是索尼娅最独特的特性之一。她能很好地理解一个定理的意义及其证明的涵义，她的思维能很容易地从前提过渡到结论。她"看出"B是由A推断出来的，但不简单地相信它。她的论点在逻辑上是非常简洁的，并具有说服力。她非常喜欢"因此"这个单词，而且总是用得恰到好处。她所有的数学概念(如零和负数)都不是正式的概念。她对数学题的解法都可以毫无例外地在逻辑上找到非常准确的依据。

下面是一个例子。有人向索尼娅提出这样的问题："一个牧羊人对另一个牧羊人说：'给我8只羊，那么我们就有相等的头数了'。另外一个牧羊人回答说，'不，你给我8只羊，那么我的头数就等于你的头数的两倍'。"她的解法如下："如果一个牧羊人给另外一个牧羊人8只羊，则它们就有相等的头数，这就是说，他们相

差的头数是 16 只。另一方面，如果另外一个牧羊人交出 8 只羊，则相差的头数变成 32 只(因为一个人失去了 8 只羊，而另外一个人则得到 8 只羊)。这时我们可以推出，一人的羊数为另外一人的羊数的两倍，或多出 32 只羊来。这就是说，羊数为 32 和 64，而在交换前羊数为 40 和 56。”解这道题所需要的时间为 40 秒。

*数学抽象能力和迅速而广泛地对数学材料进行概括的能力。*索尼娅对数学上类似的材料迅速地进行概括。她通常是在一个抽象的水平上解释她所解的题，把题目看成是某种类型的题目来解。她毫不费力地从不同的题目(它们属于同一个类型)中发现它们的共同特征。当她已经发现一种解题方法并将这种方法移用到别的同类型题目上时，她往往不会发生任何困难。索尼娅在解题时很少感到必须依靠直观形象，我们的印象是，这种直观形象甚至对她有所妨碍：当她思索某一定理的证明时，她往往凝视着空中而不是题目的图形。当她还是一个五岁小孩时，她已经不象通常这个年龄的孩子那样，而是可以做到不依赖具体形象(如半个苹果，半枝铅笔)而获得“一半”的抽象概念。但是我们上面所说的一切并不意味着索尼娅不能够想象出一道题目中的已知关系。如果要求她这样做，那她是一定能做到的，而且做得很好。然而，出于她的主动，她几乎从来不求助于可见形象，因为她不感到有这个必要。我们逐渐地弄清了上述情况是怎么回事：索尼娅通常在一般的水平上想出她自己的解题方案，而具体的直观形象和图象反而束缚了她，迫使她在具体的水平上重新考虑问题。如果应用波里索娃的方法(参阅系列 XXVI 的说明)，则索尼娅的指数是(3, 5)。

我们要举出几个例子来说明她的概括能力。试考虑这道题：“有两个互补的邻角，其中一个角等于 45°。两角的平分线都已作出。问两条平分线间的角等于多少度？”索尼娅很快地得出正确的答案(90°)，而且不加思索地概括如下：“对于所有的补邻角而言，平分线应构成一个 90° 的角，理由是补邻角之和等于 180°，而这

个和的一半恒等于 90°。”

在证出了一个三角形的内角和等于 2d(注：即两直角)后，索尼娅根据实验者的要求，很容易地证明出一个四边形的内角和等于 4d，一个五边形的内角和等于 6d。她作出下面(图 50)所示的图形，经过一番思索后随即说道：“从任何形(多边形——原作者注)都可以发现下列事实：三角形的个数总比边数小 2(理由是有两个外侧的三角形各占两条边，而其他所有的三角形各占一条边)。为了求出内角和，我们必须从边数减去 2，然后乘以 2d。”这样索尼娅用概括的方法独立地得出公式 $2d(n-2)$(即任何一个多边形的内角和)。随后她只用 2 秒钟就算出了一个 608 边形的内角和。

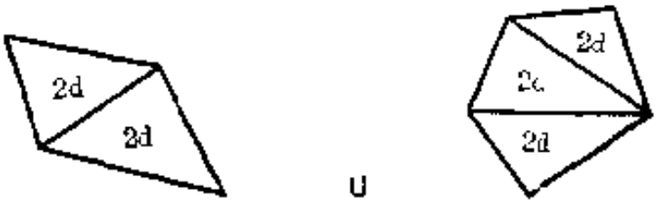


图 50

思维的灵活性。索尼娅基本上摆脱了那种由于旧的解题方法的影响通常会产生的思维束缚性。她很容易地从一种心理运算转换到另一种心理运算，从一种解题方法转换到另一种解题方法。她的一个特点是解题方法上的多样化(一种心理组合)。她通常主动地找出两种或三种解题的方法。下面是她解上述鸡兔问题的过程(这个例子也可以用来说明索尼娅的逻辑)：“如果总数为 35，则鸡和兔子共有 35 只。如果全部都是鸡，则脚共有 70 只，这就是说还有另外的 24 只脚，这是因为有一些兔子代替了一部分鸡。每一只兔子比鸡多 2 只脚，这就是说共有 12 只兔子和 23 只鸡。这个例子也可以按照下面方法计算：脚共有 94 只。如果全部是鸡的话，则它们应有 47 个头。但总共有 35 个头——少 12 个头。于是这 12 只中每只应有 4 只脚而不是 2 只脚。这样共有兔子 12 只和鸡 23

只。”

自如地并且容易地从正向思路转变为逆向思路。五年级至七年级的普通学生在这种转变中会感到某些困难，但对索尼娅来说，这并不是一件难事。例如，当已经知道对顶角相等时，她没有什么困难就得到以下的结论：“某些相等的角是对顶角。”索尼娅也很容易地从解一道正向题过渡到解一道逆向题。

问题解决中推理过程的迅速缩短、“简缩”的倾向。索尼娅多半是倾向于应用简略的演绎法和“简缩了的”结构去思维。而且这种倾向在解同一类型题时发挥得特别好。例如：“在两个钱包中共有140个卢布。如果从一个钱包中取出15个卢布放进另一个钱包中去，则每一个钱包的币值相等。问每一个钱包各有卢布多少？”解法是（中间毫无踌躇的地方）：“140减30可得110，它的一半是——55。答案是55个卢布和85个卢布。这道题也可以这样做出来：币值相等——就是说每一个钱包中是70，那么在这之前各有55个卢布和85个卢布。”索尼娅根据实验者的要求，将第二个方法发展成下列的结构：“我们设想钱已经被转移，使得两个钱包中的币值相等。如果币值相等，那么每一个钱包都有70个卢布。但在这之前一个钱包中比这少15个卢布（理由是加上了15就成为70），这就是说，它有70−15=55个卢布。在这之前另一个钱包中比这多15个卢布（理由是减去了15就成为70），这就是说，它有70+15=85个卢布。

一种独特的“思维的节约”倾向。索尼娅有一个值得注意的地方，就是努力寻找最节约的解题方法以及努力求得解法的简明和清晰。虽然她并不是总能找出一道题的最合理解法，但是她通常选择能达到目的的最迅速和最便当的方法。因此她的解法中有许多是“优美的”。前面所述并不适用于计算方面（如上面所述，索尼娅并不熟悉计算技巧）。试考虑少数几个例子。题目：“如果一条鱼的尾巴重4公斤，头部的重量等于尾巴的重量加躯干重量的

一半，而躯干的重量等于头部的重量加尾巴的重量，问该鱼重多少公斤？”解法：“鱼的躯干的重量等于头部的重量加尾巴的重量。但它的头部的重量等于尾巴的重量加躯干重量的一半，而尾巴重4公斤。于是躯干的重量等于两条尾巴的重量加躯干重量的一半——即等于8公斤加躯干重量的一半。于是躯干的另外一半重8公斤，而整个躯干重16公斤。”（我们略去了后面的解答过程。实际上，题目已经解出了。）下面表明索尼娅是怎样运用已提供的图形（图51）简明而独立地证明三角形的外角定理。“三角形的内角和是2d。当角 BAC 与外角（作为补邻角）相加时，或当角 BAC 与角 B 和角 C（作为内角）相加时，结果都得出2d。因此外角等于角 B 与角 C 之和”。

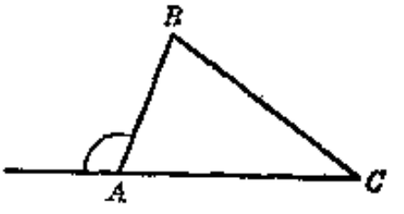


图 51

*快速而正确地记忆数学材料。*前面已经提到，索尼娅解每一道题都是依靠心算的。她对问题的条件，一切中间运算以及它们的结果等方面都有非常好的记忆力。可是，她在具体数据和数方面的记忆力却是很独特的：她仅在解题时才记忆这种资料。对比之下，她对证明的基本过程，问题的类型以及解题的原则却记忆得很牢固。

*数学课上减少疲劳感。*索尼娅的这一特征也值得注意。她不仅勤奋学习，而且爱好“用推理方法”去解题：她在上数学课时难得感到疲劳（那些要用心算进行的冗长的而复杂的计算除外）。她从来不主动地停止家庭作业或实验者布置给她的作业。甚至（对她的年纪而言）长时间的功课也不会引起显著的疲劳现象。为了实验的目的，我们为她安排了几次需要一个半小时完成的功课，中间没有间歇（等于一节45分钟的两倍）。只有在这段时期结束时这个八岁的小姑娘才有疲劳的迹象（如发生错误和记忆力减退等）。如果她忙着做其他类型的功课时（如音乐、阅读、写字等），那么索尼娅就会正常地感到疲劳。

最后，我们可以对索尼娅的数学性格作出某些一般的初步评论。在某种程度上，她的特征是明显地爱好从许多生活现象中发现一个逻辑上和数学上的含义，并在逻辑和数学范畴的结构下来理解它们。换句话说，她有一种透过逻辑和数学相互关系的棱镜去理解许多现象的倾向，这种倾向在她的幼年时期(7岁或8岁)已经表现出来了。例如，她记忆诗句相当不行，但显然她试图了解一首诗的逻辑含义和词句的安排。她能够记忆一首诗的含义和主题，但当她背诵这首诗词时，她往往改变词句的顺序，逻辑地把这首诗重新组织起来(但是她的哥哥却能迅速而准确地记忆一首首诗)。在音乐学习方面也找到同样情况(索尼娅的音乐能力并不显著)，音乐教学使她感到困难。甚至在这种场合里从她身上也可以观察到这样一种倾向：她从数学的角度来解释并背诵每一首乐曲中的各组乐句、和音以及演奏时指法的顺序。在绘画方面(她画得很好，或精确地说，描摹得很好)，她力求从数学的角度来解释尺寸、关系和比例。

必须注意，上面所述有关索尼娅在数学活动方面的特性，是仅在她的数学活动中显示出来的，而在她的其他种活动中则是观察不到的。

在后来的几年中我们继续观察索尼娅的成长。我们对她系统地研究了约一年半，用启发式的方法去教她数学。在上课期间她表现出有很快的进步：在60节实验课中(加上有相当强度的家庭作业)，她学完五、六、七年级课程表中的全部数学课程，把各年级的算术、代数和几何书中的题目差不多都做完。可以毫不夸张地说，索尼娅自己独立地"发现了"全部几何，独立地研究了图形的某些性质。到了四年级的时候，她已经与八年级学生一起顺利地学数学。1965年她毕业，年纪15岁，获得了一枚金质奖章，中间三次"跳级"(她从四年级直接跳到六年级，从六年级跳到八年级，并从九年级跳到十一年级)。同一年，15岁的索尼娅考进了国立莫斯科

大学，成为数学力学系的学生。

伏洛佳 L.

（1949 年生于莫斯科。基本特征的记述作于 1959～1960 年。）

伏洛佳的父母亲都是学者。他的母亲在高等教育学院任教，他的父亲则是工业技术方面的一位著名专家。

十岁的伏洛佳身体发育完全正常。他是一个急性子、缺乏组织性、富于好奇心的（因此甚至有点令人讨厌的）男孩。他会随便而出乎自然地与任何人交谈，即使对方是一个陌生人也不在乎；与人结识一开始，他就表现出一种特有的“实用主义”的态度。为了满足自己的好奇心，他试图从新交中尽量吸取有用的东西。当我们首次会晤时，伏洛佳表现出的特征是“截断”了我们开场的话，一开始就积极地向我们提出问题：问我们在哪儿工作，我们干些什么工作，我们知道些什么，我们对哪些东西感兴趣？要想将话题转到另一个方面上去是十分费力的，甚至这时伏洛佳更倾向于占据提问者的地位，而不是处于被问者的地位。伏洛佳的一个特征是转变得很迅速：他的好奇心一经得到满足，他立刻对社交上的接触完全失掉兴趣，就拿起一本书来看。

当伏洛佳忙着做某件事情时，他的注意力有时非常集中，以致他好象视而不见，听而不闻——你可以呼喊他，触摸他，而他一点也听不进去，或者一点也不注意到。由于他经常忙着做某种事情，因此他的外表部分地给人以某种冷漠的感觉。我们这样说并不是指他在仔细考虑一个复杂问题时也缺乏机动性。正好相反，特别当他要解致学题时，他就坐立不安，连一分钟也不能安静下来，有时作出一些不自然的、甚至令人可笑的姿势。

伏洛佳学习非常勤奋，他的头脑仿佛不断地需要养料。他对数学和化学发生了非常深刻而且认真的兴趣（他后来对物理也感兴趣）；他曾偶尔对地理学和动物学发生过兴趣。他的研究有时似乎用处不大（例如，当他对莫斯科的地理发生兴趣时，他就对莫

斯科的所有的电车、无轨电车和公共汽车的路线加以研究)。可以很容易地看出，任何一门科学的"书本知识"比它的实用方面更能引起他的兴趣。他的父母亲指出，一般说来他对生活方面知道得很少，在现实的日常生活方面他不如其他同年纪的人，在许多事例中他显示出一种真正的天真。伏洛佳不十分爱好严谨的文学，他对它理解得也不十分好；甚至当他年龄较大时，他比较愿意阅读《西波里诺历险记》，而不大愿意阅读沃尔特·司各脱爵士或狄更斯的作品(这些作品他要经别人敦促后才去阅读)。伏洛佳的特征是具有相当纤弱的神经质的和知识分子的性格，与他的同班同学相比，他更觉得青春期的奇异现象不易忍受：他很快就感觉疲倦，表现烦躁，经常头痛。但是从他身上察觉不到特殊的情感和兴趣的表现。

我们必须注意伏洛佳成长中两个基本特征。首先，他的能力极早就以一种显著的形式显示出来；第二，他能立刻在几方面表现能力，先积极地投入一个方面，然后一下子就转到另一个方面去。据他的父母亲说，他3岁时学会阅读。那时他就开始对数和数字、它们的称谓和意义着了迷。他的祖父是一位酷爱音乐的人，本人也是出色的音乐家。为了使这个男孩能从这种"不健康"的活动中摆脱出来，他的祖父在他3岁半时就让他听音(他以前注意到这男孩对音乐有一种很好的听觉)。在他祖父的帮助下，伏洛佳4岁时掌握了乐谱的基础，并使用有关音乐理论的浅近书籍来达到这个目的。在4岁零3个月时，他已能主动地按照音符尝试演奏。在4岁半或5岁时，伏洛佳能够把曾经听到过的一种曲调变换为另一种调子。在7岁时，他考进了莫斯科音乐学院的中心音乐学校。他在这个年纪开始创作简单的乐曲。音乐的理论以及它的独特的逻辑性经常使他更感兴趣。他并不感到音乐的情感侧面有什么魅力。

伏洛佳相当早就对化学感兴趣。他从7岁起就学习化学，会

用百科全书，无休止地在化学反应公式中兜圈子，还自己构造出门捷列夫周期表。

伏洛佳在数学方面的发展，自然引起我们最大的兴趣。他的能力肯定是异乎寻常的。他在2岁半时就学会数到100。当他数到99时，他问道："下面一个数是多少？"当他3岁时，他容易地掌握了数到1000的方法。当他4岁时，他学会了100以内的十进位数的加减法运算。这个男孩对这方面感到极大的兴趣——别人经常可以看见他用一根小棒在沙堆中划数字。在5岁或6岁的时候，他的计算能力开始迅速地发展起来。他在这个年纪已经会做两位数的乘法（当然是依靠心算的），而且独立地编造出一张数的平方表。

必须说明，他的父母亲并没有促进这种早期的发展，相反地，他们害怕这样做，并且认为如果伏洛佳能更象与他年龄相同的普通孩子那样，他们就感到高兴了。但是这个男孩学习数学的积极性一直是很高的。当他6岁的时候，他对分数能运算自如，并能求出任何数的平方根。他在这个年纪已经熟悉（凭自己的努力）三角函数，并且立刻被三角学这门数学迷住了。他独立地得出有关等比中项的概念。当他8岁的时候，伏洛佳掌握了二进位制，以后，又掌握了其他记数法。

在那几年里，凡是使伏洛佳发生兴趣的每一件事物，对他说来都有了数学的一面。这个6岁男孩对地理学发生了强烈的爱好，表现在他计算了全世界所有国家的人口密度（应用了参考书）方面；在7至8岁时，他对天文学迷上了，反映在他造出了一些天文表，计算十年后月亮的相，并得出一些可以用来确定一年中的任何一天是星期几的原则（可算到过去和未来几十年）等方面；对历史学发生强烈的爱好，反映在他很想学习东方的楔形文字；（在6岁时）他对语言发生强烈的爱好，反映在他对各种字典以及它们的编纂原则发生了兴趣。当他6岁的时候，他自己去学习阅读德文（方

法是比较两本字典——俄德字典和德俄字典)。实际上,他对德国语言所发生的兴趣只到此为止。

令人感兴趣的是,虽然伏洛佳的弟弟(比他小七岁)是在绝对相同的条件下受教育的,但他却按着与伏洛佳恰好相反的方向成长。他在各方面都表现出是一个正常而"平均的"孩子。他的父亲有一次谈到安德鲁沙说:"安德鲁沙所做的一切都与伏洛佳相反。"儿童的一些弱点都可以在安德鲁沙身上找到——他生性懒惰,组织性差。他是一个大梦想家,爱读冒险小说,比他的哥哥更能适应实际的生活,结交了许多朋友,但并没有表现出什么特殊的能力。

我们对十岁的伏洛佳进行实验,结果使我们得以揭露出他在数学天赋方面的一些特征。他和索尼娅 L. 从某种角度讲是属于不同的天赋类型。

首先,值得注意的是他的极好的记忆力。除了(象索尼娅那样)记忆已经概括出来的论据、结论和证明的型式之外,他还对数有出色的记忆力,而且能长时间地记住非常错综复杂的问题的条件。甚至在他的早期童年时代,这种"密码式"的记忆法在他身上就已经很典型。例如,他在 6 岁或 7 岁时就能迅速而持久地记住随便遇到的车辆号码,同时他也能记住并再现 400 本家庭藏书中任何一本的页数。

此外,与索尼娅比较起来,伏洛佳是一个范围更广的"计算器"。如他的父亲所说,他"用计算来检验他的每一次思维"。他解许多题目的方法不是凭借推理,而是不寻常地先在许多数的组合中进行检索,并加以验算。这并不是说他不知道怎样进行逻辑推理,或不喜欢这样做。它的含义是,他对快速心算的技术掌握得如此熟练,以致对他来讲,检索出答数的方法是最容易的解题方式。

下面谈谈他是如何解决有关鸡兔的问题的(与索尼娅所解的题目相同):"小鸡的只数约为兔子只数的两倍,理由是:如果全部都是鸡的话,那么就有 70 只脚;如果全部都是兔子的话,那么就有

140 只脚。94 与 70 之比约两倍于 94 与 140 之比。让我们试一试：20 和 10；21 和 11；22 和 12；23 和 12……结果是鸡 23 只，兔子 12 只。”当伏洛佳用“数据检索法”解这道题以后，他还根据我们的要求，说明他应该怎样向一个比他年轻的朋友解释这个问题：“如果全部是鸡的话，那么就有 70 只脚。但实际上有 94 只脚。加进一只兔子就增加“+2”只脚。于是这种加法要做 12 次，即得兔子 12 只。”

又一道题：“糕点共有 4 箱，从每箱取出 9 公斤，结果剩下来的糕点的总重量等于开始时每箱糕点的重量。问每箱剩下来的糕点重多少公斤？”伏洛佳是用下面方法解出这道题的：“我们必须选出两个数，使它们之间有这样的关系式：其中一个数是另一数的四分之一，并且前者比后者少 9（公斤）。它们可以是 1 与 10；2 与 11；3 与 12；因此每箱剩下的糕点重 3 公斤。”这里也包含了从一个解的各种不同变式中检索出答案的过程。在解题时伏洛佳和索尼娅所花的时间大致相等，而且他们在同一年龄所解问题的复杂程度和难度大致相同。但是如果说，索尼娅从容不迫地思考问题，往往马上就“踏上”正确的道路，那么可以说，伏洛佳难得一次立刻得出正确的答案，不过他有足够的时间来进行许多次不同的试验，并且能从一个尝试转变到另一个尝试。

伏洛佳解数学题时的思维过程是极其简缩的，这显然是他所习惯的一种思维方式，因为要求他将一种解法发展成完整的结构，或是要求他解释一种解法时，他往往感到非常困难。不管他怎样努力去尝试，他总不能解释他的某些正确的解法，而当他看到别人听不懂时，他就失望地闷声不响了。有时人们仅能猜测他在解题时到底是怎样思考的。

例如，他正在解下列题目：“两兄弟住在一起，并且在同一家工厂里干活。伊凡上班路上要花 30 分钟，但彼得上班路上要花 40 分钟。彼得比伊凡早 5 分钟上班。问伊凡在路途中哪一段赶上彼

得？”下面是解法的原始记录：“经过5分钟他走了全路程的$\frac{1}{8}$，然后$\frac{1}{4}$，而另外一人仅走了$\frac{1}{6}$，再过5分钟$\frac{3}{8}$，而另外一人$\frac{1}{3}$。再过5分钟$\frac{4}{8}$和$\frac{3}{6}$……，经过15分钟在路程当中。”伏洛佳解题需时32秒。他花了很长时间也不能解释他的解法，也不能用某种方式把它弄清楚一些。仅经过长时间的努力，他才能解释出他的解题方案是这样的：“如果彼得一个人走路，经过5分钟他走了全路程的$\frac{1}{8}$。第二个5分钟过去时，他总共走了$\frac{2}{8}$，而在这5分钟里伊凡走了路程的$\frac{1}{6}$。再经过5分钟，彼得已经走了全程的$\frac{3}{8}$，而伊凡则走了$\frac{2}{6}$。再经过5分钟，彼得已经走了路程的$\frac{4}{8}$，而伊凡走了$\frac{3}{6}$，即每人都走了路程的一半。这就是说，在伊凡开始出发后，他们需要3个5分钟的时间，在中途才能相遇。”

试考虑另一个例子。题目如下：“某人购书若干册。如果他用票面3卢布的钞票付书款，则所付钞票的张数比他用票面5卢布的钞票付书款多8张。问他共付书款多少？”解法是(共用了38秒)：“书款可被15除尽……两者之差为2。以2去除8并乘以15，结果可得60个卢布。”伏洛佳对这个解法不能作出解释。他看到自己的尝试不起作用，就用下面一种简单方法来打破僵局：“好吧，我要用另一种方法得出较好的解法。全部书款应既能被3除尽，又能被5除尽，即它能被15除尽。书款可能是15, 30, 45, 60, 75个卢布。让我们来挑选其中符合条件的数……60是符合条件的……它是用下面方法计算出来的：多8张票面3卢布的钞票等于多24个卢布。但每张钞票短缺2个卢布，这意味着有5卢布的钞票12张。”后一个解法不是完全清楚的，但他心中是这样想的：如果我们用票面3卢布的钞票来代换票面5卢布的钞票，则每交换一张就损失2个卢布。多出的8张票面3卢布的钞票可以补偿这个损失。$24\div2=12$——这就是票面5卢布钞票的张数。

在解题方面伏洛佳的一个典型特性是：与索尼娅相比，他宁愿依赖直观形象和图象，并充分利用各种图形。他在解任何题目时，差不多每次都感到有必要将所知道的情况用形象表达出来。图 52 表示他在解有关两弟兄的题目时所作的图样。图 53 则表示他对下列题目所作的图解："一个男孩对他的姐姐说：'如果你给我 8 颗胡桃，则我们所有的胡桃数相等'。但姐姐回答说：'如果你给我 8 颗胡桃，则我所有的胡桃是你的两倍'。问每人有胡桃多少个？"

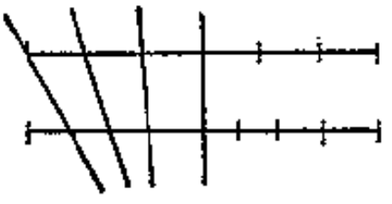


图 52

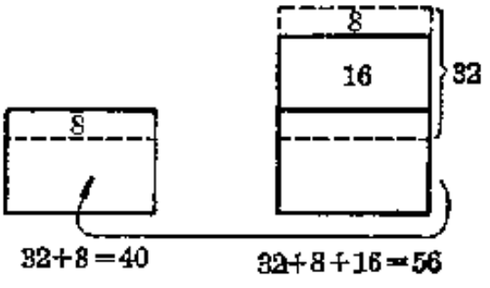


图 53

如果应用波里索娃的方法(参阅系列 XXVI)，则伏洛佳的指数是(4, 4)。

前面已经谈到，伏洛佳在幼年时期就开始独立地发展创造性的思维。在读中年级和高年级时，他在这方面开始显得特别引人注目。他进入音乐学校继续求学，但我们已经弄清楚，他的基本能力并不是音乐。数学、化学和物理使他着了迷，程度与年俱增。由于他在这方面大大地胜过了他的同班同学，所以他获得批准，可以在几门功课中不必出席听讲，可以根据自己的时间表学习，可以不听课而参加考试。作为七年级学生，他已做好参加八年级一切课程考试的准备，结果考试及洛，这里他的父母亲对他极少督促。他读完中学(由七年级到十一年级)的全部化学课程。虽然他从来没有听过学校的一次化学课，但他还是在这门功课上考试及格，在毕业证书上注明成绩优异。在读高年级时，他开始自学全部大学数学课程；特别是他已经熟悉了数学分析的基础。他定期地在国立莫斯科大学力学数学系的一个数学小组学习。他的教师和数学小

组的主持人已经注意到他深思熟虑的能力以及他在分析、寻找相互关系和概括等方面的素质。我们已经注意到，与其说他正在成长为一个"几何学家"，不如说他更可能成长为一个"分析学家"。

这就是说，随着年龄的增长，伏洛佳已经开始改造他自己在数学方面的素质。在他的数学思维中，语言和逻辑的成分越来越比直观和图象的成分具有重大的意义。

在中学读高年级时，伏洛佳对文学评论也发生兴趣，别林斯基和杜勃罗留波夫的作品使他着了迷。他的文学写作越来越富有思想内容，这一点从他自己丰富的想象和论证就可以辨认出来。在社会科学的一门课程里他对辩证唯物主义的理论发生了浓厚的兴趣。

伏洛佳16岁时就中学毕业了，获得了一枚金质奖章。由于他加速了学习过程，所以他比同班同学提前两年毕业。

基里亚 Kh.

(1953年生于高尔基州。对他的特征的记述作于1965年。)

基里亚与他的母亲(在一家工厂里当工程师)和祖母住在高尔基州的一个小镇里。他的父亲和他的某些亲戚曾表现出数学方面的才能，不过他们都没有成为数学家。

从幼年时代起，基里亚就由于具有极好的记忆力而受到注意：他在1岁零2个月时已经认识了许多韵律，对某些日子有良好的回忆。基里亚在5岁时学会看书，很快就看得相当不错。他的家人在这方面并不鼓励他，特别是因为基里亚并不显得强健。他七岁入学，在一年级时只读了一个星期就跳到二年级。在读低年级时他经常生病。他学习非常勤奋，甚至当他生病时，他也不顾父母亲的反对和制止，总想读一些书。特别是他阅读了百科全书，孜孜不倦地想弄懂不清楚的地方。基里亚在幼年时代就很敏感，神经紧张，容易疲劳。当他进行紧张的心理活动时，他总是在动，烦躁不安，左顾右盼；他常严重地违反制度，他感情容易冲动，容易生

气，往往持有明显的怀疑态度(特别在对他要求十分严厉的时候)。他最后还是变得比较冷静和克制。基里亚没有朋友，虽然他有一次也曾结交过一位比他自己差不多大4岁的朋友。

基里亚爱好音乐，而且考进了音乐学校，他对音乐的理论比对旋律和情感这两方面更感兴趣。他很快学会一看就能把乐谱念出来。

他毫无困难地读完三年级，开始读四年级，在下半学期又跳到五年级。当他读六年级时，他生了一场病(严重的扁桃腺炎)，没有到校上课，而是在家中独立地学完了六年级的课程。11岁时他读七年级，比同班同学提早了两年。现在(1966年)，13岁的基里亚正在读中学九年级，同时参加国立莫斯科大学的函授数学学校的学习。

基里亚的数学天赋很早就开始显露出来了。当他还不满2岁时，他学会了初步的计数。这位年仅两岁的小朋友很欢喜数楼梯的级数和自己的手指头，还计算东西的件数。当他3岁的时候，他对计算十分有把握，总想把数字写下来，还做简单的加法运算。在他上一年级的第一天，他主动地口算出该年级算术习题集里所有的例题和问题。在学校里他喜欢的课目始终是算术，后来就是代数与几何。一切有关数学的东西都使基里亚着迷，但他特别欢喜那些智力测验的问题。他可以在早上6时起床，立刻捧起科普书籍和动脑筋题汇编等来看(后来是阅读代数教科书或习题集)。他的同班同学替他起了个绰号"阿基米德"——这个奇特的男孩的确与他们不一样。

基里亚学习数学毫不费力，很大一部分是完全独立地学会的。当他8岁或9岁时，他很便当地弄懂了数学的符号体系(当然是初级的形式)，对独立地掌握数学并不感到困难。例如，他很容易地弄懂了教材中关于"二元一次方程组"这一单元。

在1963～1964那个学年里，基里亚解出了函授学校布置给他

的整个系列的实验性问题。他于1965年初来到莫斯科，在那里接受对他进行的实验。

十一岁的基里亚这时是一个瘦削的孩子，有着一双非常聪明、庄重而且全神贯注的眼睛。这也许是他的长相要比同班同学老成一些的原因。他给人的印象是沉着，有良好的教养，并且很懂礼貌。当他要解题时，一切都变了样。他变得全神贯注，专心致志，当他致力于解题时，他是会忘记一切的。

他爱好代数学胜过几何学(可是他对几何学也是爱好的)。他解出了所有布置给他的实验性问题，没有遇到任何特别的困难。他有一个非常值得注意的特性，就是他力求在抽象而一般的水平上解题。例如，给他下列一道不切实际的题目："试给出除以5余7的那些数的一般形式。"基里亚按下列方法解出："一般地，在这类情况下(在这类情况下！——原著者注)，我们必须取x作为已知数的乘数，加上余数，使它能被y除尽，而且余数为z……所有这类数将为：$xy+z$。在已知情况下，它就是$x\cdot 5+7$。"他并没有注意到他的错误，因为他是从一般形式来解这道题的，并且照他所说，将数字"机械地"代替进去。

基里亚能够出色地按照一个问题的条件把方程列出(并解出)，而且他对图解也有较深入的理解。

他表现出对数学有一种明显的倾向性：化学使他着迷，但它的"实践"方面并不使他感兴趣，使他感兴趣的却是另一部分，即有关公式和化学反应记录的化学！在物理中也有相同的情况：使他着迷的只是物理的数学侧面。他对物理和化学的实验都不感兴趣。工业技术也不能使他感兴趣。他所感兴趣的是各式各样的表格以及图解和图表，特别是当这些能反映出函数相关性的时候。

基里亚被断定为"抽象"型。即使一个问题已经暗示可以应用直观形象和图形，但他还是不用它们来处理题目。他从来不用直观的图解来解任何实验性的题目。在这一点上，他在解题时往往

碰到一些本来可以避免的困难。例如，试考虑下面一道非常容易的题目："一位旅客在车行了一半旅程时睡着了。当他醒来时，他剩下未行完的旅程，等于他入睡时所行完的旅程的一半。问他睡着时他行了全部旅程的几分之几？"他是用下列方法解题的："他剩下来未走完的路程等于$\frac{1}{3}$(经过8秒钟的停顿)，全部路程一半的$\frac{1}{3}$，或等于(经过4秒钟的停顿)全程的$\frac{1}{6}$(经过5秒钟的停顿)，但是他睡着时已经完成了这一半路程的$\frac{5}{6}$(经过4秒钟的停顿)，不，是$\frac{2}{3}$(经过12秒钟的停顿)，即全部路程的三分之一。"

我们让他解下列题目："短针经过两个小时转动了多少度角？长针经过20分钟转动了多少度角？"我们故意地，但装成偶然地，把一只手表放在他旁边。基里亚甚至对表面连看也没有看上一眼，就这样推理："短针经过3个小时转动了一个直角，而它经过2个小时转动了那个角的$\frac{2}{3}$，即60°。长针经过1个小时转动了一个周角，而它经过20分钟转动了那个角的$\frac{1}{3}$，即120°。这个问题也可以用另一种方法来解：长针转动的速度比短针快12倍。长短针经过20分钟所转动的角度都等于它们经过2个小时所转动的角度的六分之一。所以长针经过20分钟所转动的角度等于短针经过2个小时所转动的角度的两倍。我们可以得出与前述解法相同的结果，120°①。但这个方法较难，第一个方法比较容易，而且较好。"

基里亚的空间概念发展得很不充分。甚至对很容易应用空间概念化来解的基本题目，他也总是要用推理方法来解。("一个立方体到底有多少条棱？现在我正在思考着。一个立方体的底部有一个正方形——它有四条棱。上底也有一个正方形——也有4条棱。另外再需要4条棱把上底和下底连结起来……结果共有12

① 原文误为120分钟。——中译者注。

条棱。")

如果运用波里索娃的方法(参阅系列 XXVI)，则基里亚的指数是(2, 4)。

逻辑推理的能力是基里亚思维中强有力的一面。他在解题时明显地"简缩"了推理的过程。如果他感到问题越是容易，则推理的中间环节缩短得越为明显。如果有人提出要求的话，他是能够把推理过程的完整(用他的观点看)结构显示出来的。

让我们举出一个例子来。基里亚要解下列一道题："父亲 35 岁，他的儿子 2 岁。问经过多少年后父亲的年龄将是他的儿子的四倍？"他是这样解题的："他的年龄大 33 岁，这就是说，一部分将为 11。儿子仍然需要再等 9 年。因此要经过 9 年。"下面是他根据实验者的要求，把解法讲得详细一些。"如果父亲 35 岁，儿子 2 岁，则父亲比儿子大 33 岁。经过若干年后父亲的年龄将为儿子的四倍，但仍和以前一样，他的年龄大 33 岁。这时将父亲的年龄分成四部分，儿子的年龄是其中一部分，它们之差是 3 部分。这 3 部分等于 33 岁。那么一部分就等于 $33\div3=11$。这一部分是儿子的年龄。他现在是 2 岁，经过 9 年后，父亲 44 岁，儿子 11 岁。"

顺便提一下，伏洛佳用图解法解了同一道题(见图 54)，但没有应用推理方法(当时他正和我谈论有关化学反应的问题)。

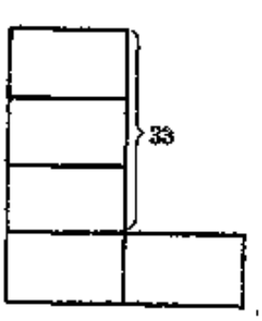


图 54

基里亚解了下列一道题："一列火车通过一条长 450 m 的隧道，需时 $\frac{3}{4}$ 分钟，而经过一个扳道员则需时 15 秒。试求火车的长度和它的速度。"基里亚没有求助于直观形象(伏洛佳在这道题上则移动一列"火车"——一枝铅笔——通过一张纸——一座"桥梁")，他懂得这道题最困难的部分："所谓通过一条隧道，是指要通过它的长度加上火车的长度"，而且"距离等于它用 15 秒

钟所经过的长度”。下面是他对这道题的(简缩了的)解法：“所谓通过一条隧道，是指要通过它的长度加上火车的长度。它经过自己的长度需时 15 秒：

$$450 \div 30 = 15\,\text{m/秒} = \text{每小时 } 54 \text{ 公里}$$

$$15 \times 15 = 225\,\text{m}_{\circ}$$”

艾拉 S.

(1952 年生于库尔斯克。)①

1965 年艾拉读完了五年级。她的父亲或母亲都没有受过数学方面的训练。她父亲的职业是哲学家，一位助理教授。她的外祖母在读大学预科的年代里是一个在数学方面很有能力的学生。艾拉的叔父是一个著名的工程师，他对数学很感兴趣，并且在这方面表现出有一定的能力。

艾拉把学校各门功课都学得同样地好。她的家庭作业做得十分迅速，只是她要在什么时候才做功课总是不固定的。她考进音乐学校，又考进体育学校。她对音乐并不特别热爱，但她却非常爱好体育。在校期间她是一个社会活动分子，担任学生代表会的主席。她喜欢绘画，曾试着写过诗，看书毫不费力。

在艾拉 5 岁时，就表现出对计数感兴趣，她定量地估算在她周围所发生的现象(例如，经过的电车有多少辆，它们的号码是多少，房子里有多少扇窗等等)。在校读一年级时，教师就注意到艾拉解题的速度很快，远远超过其他学生。因此她在算术课上要单独做作业——主要是做数量较多的、难度较大的题目。

艾拉患头痛症，教师开始担心繁重的功课会影响这个小女孩的健康。但即使这时艾拉主观上也不感到解题会产生疲劳，而且非常乐意为它倾注全副心思。头痛症后来消失了。艾拉对数学所发生的兴趣一年比一年增加，不过她家庭中没有任何人特别关心她在数学方面的训练。她爱好数学，“因为一个人必须思考。这和

① 在我们要求下，夏皮罗于 1964～1965 年对艾拉进行了实验和观察。

俄语不一样，在俄语中做什么都要遵循规则。”实验者反驳说数学中也有规则，对此她回答说：“在数学中，规则可以帮助人们思考。”

艾拉很愿意参加我们这次实验。使人感兴趣的是，经过紧张地上完两小时的习题课以后，她还是和开始时一样地心情愉快，精神饱满，而且不需要休息又着手做家庭作业了。

艾拉在数学材料方面的记忆力非常之好。第一次实验课上过了一个星期以后，她差不多能把该课上所解的12道题全部回忆起来。她记得住的往往不仅有概括化的内容，而且还有数据，但对个别“主题的细节”则忘记得很快。此外，解题时越是碰到困难，这些题目她就记得越牢。

艾拉对待实验题目应付得相当自如。例如，在第一次课上给她解的12道题中，她立刻解出其中10道，只对其中两道要费些心思。可是，她在较复杂的题目上并不是这么一帆风顺的，这里有时需要实验者给予一些提示或一般性的指导。例加，艾拉要解如下的一道题：“如果每张长凳可坐学生5名，则4名学生没有座位。如果每张长凳可坐学生6名，则2个座位将要空着。问共有长凳多少张，学生有多少人？”开始时她没有把握住基本关系。实验者就说：“多少学生没有地方可坐？”这下艾拉高兴地领会了，喊道：“我明白了！每张长凳上多坐1个人，则多出2个座位，每个座位可坐1人。共有6张长凳。”

艾拉具有一个显著的特性如下：如果她已经解出了一道题，则她可以毫无困难地解那个类型的每一道题。她把第一道题看成一种典型去解答，独立地找出解题的算法，并随意地转移到同类型的其他题目上去。艾拉区分题目，出奇地轻而易举。不论主题在外表上是怎样地相似，或一个已知题目是怎样地与前面一个题目接近，她总不会失去判断力。在所有的例子中，引导着她的只是题目中逻辑的数学关系。

艾拉在解某些题目时表现出一种推理的能力，与她年龄相仿

的学生往往用凑数的方法来解那些题。下面是这种类型的一道典型题目："有9公升和4公升的容器。问我们怎样用它们来量出6公升的水？"艾拉是这样解的："如果我们能够从9公升中倒出3公升，则结果得出6公升。为了做到这一点，较小的容器中必须已有1公升。现在问题清楚了：我们必须从较大的容器中两次倒出4公升，然后把剩下来的1公升倒入较小的容器中。"

艾拉对系列XXIII和系列XXIV中的题目的解法表明她在解数学题时，语言-逻辑上的成分在她的思维过程中居于支配的地位。她解这些题目时并没有依靠直观的模式和形象，甚至当题目中的条件已经暗示可以运用直观的方法时，她也是如此。例如，给她一道很容易解出的题目（见图55），我们只须作出半径就行了。艾拉花了很长时间用解析方法来解这道题，对线段AB的各种不同的位置作了尝试（其中点C有时落在圆的内部，有时落在圆的外部），企图摸索出通向某一确定原理的出路来。最后，当实验者提醒她作出半径OC时，她才解出了这道题。

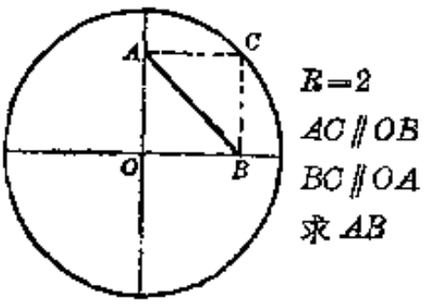


图 55

在实验者的要求下，她已能够用直观面且形象化的方法来解一些个别的例题（但这些例题仅属于较容易的题目，而且她对此表现得信心不足）。在解题感到困难时，她也不时求助于直观形象。但直观形象通常帮不了什么忙。而且如果她不能从一个"心理的平面"去解出一道题的话，那么一个"看得见的平面"就对她也没有助益。换句话说，如果在没有特殊困难的情形下出现了分析的解法的话，那么结果可以导致形成一个恰当的直观解释，但是如果没有得出分析的解法的话，那么用直观的手段也不能对它有所补偿。我们将举一个例题。我们要求艾拉用直观的和图解的方法来解下面一道题："4箱茶叶的重量完全相等。如果从每箱中取出茶叶9公

斤，则各箱剩下的总重量与原来每箱的重量相等。问各箱有茶叶多少？”尽管艾拉作出多次尝试，但她总不能按照所规定的方法解出问题。后来我们要求她不必借助于形象的模式，在解题时把问题彻底考虑一下即可。她立刻解出来了。这时我们再要求她用视觉-形象的手段来解释问题。这次她顺利地得出了答案。

迪马 L.

(1956 年生于莫斯科。)①

1965～1966 年，迪马读三年级。他的父亲在高等教育学院教书，是经济科学方面的候选人。他的母亲是无线电工程师。

从最小的幼儿时起，迪马就是一个敏感的男孩，考虑问题之周到超过了他的年龄。有一次，在他 3 岁时，他一声不响地坐在沙发上，一动不动地注视着一点。他的妈妈对他提出了一个问题，而迪马却突然放声哭了起来，含着眼泪说：“妈妈，你为什么要打乱我的思想？”(他说这句话时口齿不清，因为他这时话还说得很差)。当他 3 岁半时，他已经认识了所有的字母，还开始看一点书，而到了 4 岁他能自言自语地念书。家中没有人教他阅读；他自己学习字母，不断地问他的父母亲：“这是什么字母？这是什么单词？你是怎么念的？”

从很小的年纪开始，思考自己的所见所闻就成了迪马的习惯。学龄前儿童一般常要问“为什么？”并且通常对成年人的任何答复容易感到满足。但是迪马在他真正弄懂某一个现象之前是不会停止发问的。

从 4 岁开始迪马就认识 100 以内的数，而且从来没有人教过他。在 5 岁左右时他对数数着了迷。不论在家中，在街上，在探望别人时，他到处都数。有一次，那时他约 5 岁，他的父母亲在莫斯科郊区租下了一间夏天避暑的小屋。一天，他和女房东谈话，问她是哪一年出生的。在她作出答复以后，迪马就说：“那么你比我妈

① 数据是与杜勃洛维娜合作取得的。

妈大13岁半。”他十分爱好编拟问题，并把它们解答出来。问题的内容是非常多样化的。例如：“我的曾祖母是在哪一年读二年级的？”迪马只知道他的曾祖母的年龄；他算出她出生的年份，并解决了问题。他的计算能力是高度发展的。

迪马6岁进幼儿园。各组的教师们都来看望这个使人惊奇的男孩，好奇地问他：“迪马，279+567等于多少？438−279等于多少？”等等。他们的问题马上获得正确的答案。

儿子的快速成长使他的父母亲感到十分吃惊。（母亲有一次曾经表示过：“如果他是比较幼稚的话，我倒感到高兴。”）他们设法延缓他的成长。大约有两个月之久，对他提出的有关任何学科或现象的知识的问题，他们一概不作答复，并设法不让他看“不合适的”书本，但是他们还是不能停止他的发展。他开始看更多的书，不顾长辈们对他设下的种种障碍，设法从书本上找出他的问题的答案。

迪马七岁时读一年级。熟悉他的人提出最好直接把他放到二年级去，但是他的父母亲并没有这样做，原因有二：首先，迪马不知道怎样写字，因为没有人教过他，其次，他们希望儿子能和同年龄的儿童们一起学习。

9月1日，迪马收到一份礼物——他们给他买了一架“电子建造模型”。这种玩具是为熟悉物理学和电子学的基本原理的七年级学生设计的。说明书指出，里面的零件可以搭出100种不相同的模型，每一种都有简单的说明。在一个月之内，迪马完全独立地搭出全部100种模型，还另外搭出20种任何其他地方都没有提到过的模型。到了后来，“建造模型”不再使他感兴趣，他就把它搁在一边了。

迪马对上学不感兴趣。他懂得他必须到学校去，而且他是去了，很认真地做功课，但他对任何一门功课都不感兴趣。当他生病而要呆在家中时，他感到十分高兴，可以一整天消磨在他喜欢做

的事情上。迪马对各种题材的迷恋也是不寻常的。在地理学中群山的比较高度以及河流的比较长度使他感兴趣。他7岁时已对天文学入门发生兴趣，同时仔细地比较地球到其他行星的距离。

迪马的兴趣范围是很广泛的。他热心地研究植物和动物的生活，对化学和物理很感兴趣，对数学十分爱好。他在7岁时开始独立地熟悉了数学上度数的概念。他定期阅读《科学与生活》杂志，并懂得其中很多的东西。在各种报纸当中，他比较喜欢他父亲订阅的《经济通讯》。迪马看了很多的书。在他特别喜爱的书籍中，有许多是数学方面的科普读物。在小说方面他爱好的是幻想小说。他的父母亲总想引导他对果戈里、普希金和契诃夫的作品发生兴趣，但是迪马对这些作品一直很冷淡。要想规劝他说某一本书是有趣的面某一本书是淡面无味的，那是完全办不到的。他要亲自看了这本书，然后才作出自己的判断。他家中有不少书，现在迪马自己挑选要看的书了。

他的父母亲想培养他爱好音乐；他们带他去参加音乐学校的儿童音乐演奏会，但结果对他不起作用，他说他不懂音乐，要他去参加各种音乐演奏会，他宁愿看一本有关数学或力学的教科书。他完全没有音乐方面的能力，他不能凭听觉重新唱出一支曲调来。

亲戚们注意到迪马是一个难相处的人，为人骄傲，固执，而且容易为一点小事就生气。他没有朋友，与其他儿童没有共同的兴趣。他对同学们漠不关心。沉默寡言，经常专注于自我。他非常心不在焉，可以记不起自己是否吃过饭。当他要外出上街时，一定要别人提醒他戴帽子，披围巾，或穿其他什么衣服。但与此同时，他的头脑中记忆着大量的各种信息、公式和证明，永远不会把它们忘记或弄错，而且他还拿它们来相互比较。迪马甚至在想休息的时候也在绘复杂的电路图或解数学题。

迪马的全部推理，不论它牵涉到那一方面，总是合乎逻辑的，这点实在令人惊奇。下面是一个例子：他在前一年参加过“灵巧的

双手”小组，实验者问他欢喜不欢喜参加，他回答说：“不，我不欢喜那个小组，它是令人厌烦的。我们用粘土和纸板捏出一些小塑像，另外一些儿童则为它们着色。因此几次活动对我们来讲是没有意义的；我们看不出最后会得出怎样的结果来。”

迪马有时也会从沉思中摆脱出来，变成一个普通男孩。例如，他与弟弟游戏，最为积极（他的弟弟是一个普通的孩子——生气勃勃，性情开朗，和蔼可亲，并没有什么特殊的突出之处。简单地说，根据他的父母亲的意见，他是与迪马相反的类型）。

对实验者提出的所有题目迪马都很快地解出了。他接到下面一道题：“猜猜看，下列等式所构成的法则是什么。应用你已经发现的法则，自己再排出这样一个等式来：$12\times42=21\times24$；$13\times62=31\times26$。”迪马很快地作出回答：“这个法则是以数字倒序这一事实为根据的：等式一边的两个数本身及两个数之和是被倒序了。”他立即迅速地对他已经得出的原理的正确性加以核对，并写出 $14\times82=41\times28$。

根据杜勃洛维娜的方法，专门为三、四年级学生而提出的关于概括数学材料的作业，他全部能在几秒钟之内严洛地完成，并且做得完全正确无误。他是“立即”能概括数学材料的。然而，他对于非数学材料的概括任务却要花多得多的时间，而且往往不是在一个高水平上去完成它们的。

列尼亚 K.

（1957 年生于莫斯科。）①

列尼亚的父亲是物理数学科学方面的一位候选人。他的母亲是一位俄罗斯语言和文学的教师。

列尼亚在 5 岁时就学会独立地看书。没有人教他这样做。他问大人们一些个别的字母是怎样发音的，而且出乎他周围人们的意料之外，他突然开始阅读了。列尼亚同时认识一些数字，并开始

① 数据是与杜勃洛维娜合作取得的。

稍微数一点数。在他6岁的时候，人们已经观察到他对数数着了迷。他一直要求他的家人出题目让他解，使他们实在疲于应付。于是他开始自己编出一些题目来。他到处一面编题，一面解题：不论出游或吃饭都如此（“今日，在幼儿园里当我们去散步时，有15个人很快地穿好衣服。有多少人穿衣服不够快？小组中共有23人”）。

当他来参加我们的一次实验时（这时他6岁零2个月），他编出下面一道题：“一根长13公尺的木材被锯成小段。如果将它锯成每段长3公尺，或2公尺，或6公尺，成1公尺，问可以锯成多少段？”他自己根据各种不同情况在此解出了问题。

列尼亚在7岁时就知道怎样写字，怎样计数，怎样看书。7岁的列尼亚是一个非常活泼的男孩。他不能安静地坐上哪怕5分钟——他会站起来，在室内到处跑，动个不停，还跳跳蹦蹦。他一面解题，一面坐立不安，不停地做小动作。给人的印象是，这样对他会有帮助。他的母亲有一次戏谑地说：“我认为，如果对他有所束缚，那么他有可能反而解不出题来！”列尼亚是一个喜怒无常的人。有一次，他已经7岁了，来参加我们的实验，公开地说：“今天我感觉我会计算得十分高明！”

一年以后，列尼亚成长了好多，变得比较温顺，比较讲礼貌，比较冷静。他直接跳到二年级，因为根据他父母亲的意见，他在一年级里无事可做。他最初对遵守学校规章制度感到很伤脑筋，但到了学年中间时他已经完全适应新的情景，结交了朋友，开始怀着喜悦的心情上学。到了读三年级时他已经完全“安定下来”，变得比较严肃，更加细心，但是他身上还残留着一定程度的烦躁和容易分心，使他的学习有时受到妨碍。

除了学校的功课以外，列尼亚每星期还学习三次音乐。他非常爱好音乐，很喜欢学习音乐。

他看了不少书，主要是推荐给他的儿童文学书籍。他爱好算术胜过其他学科，把解题视为乐事。他暂时满足于解决低年级算

术课程范围内的各种题目(目的是为了消遣和"动脑筋")。在解这些题目时,他明显地表现出有才能。他很快地"领会"题目的实质以及它们的已知数量之间的基本关系。事实不足或事实过多的题目都不会难倒他。他可以觉察出哪些事实缺少了,哪些事实是多余的。

九岁的列尼亚已经能很好地应付三、四年级课程范围内数学材料的概括工作。在一次我们的实验中,他在解了一道题目后,还要从向他提出的若干题目中选择一些与第一道题目相类似的题目。他说:"选择相类似的题目,就是指那些可用同样方式解的题目。"他很快而且正确地完成了任务,并解释他做了些什么以及他为什么这样做。

我们要求他从下面一些例题着手,推导出一个法则来:"猜猜看,构成下列等式的法则是什么。应用你已经发现的法则,自己再排出这样一个等式来:$12\times42=21\times24$;$13\times62=31\times26$。"列尼亚回答道:"这里的数字已经易位。等式左边的两数之和等于54,而右边的两数之和等于45,这也是一种易位。这是很明显的。我可以想出如下的另一个等式:$14\times82=41\times28$。数字都已易位了。等式左边的两数之和等于96,右边的两数之和与它易位,是69。"

试再考虑一个要求概括的任务。我们给列尼亚一些长度不同的线段(用纸板制成的狭条),上面都清楚地注明长度(单位为厘米)。要求他推导出一条法则,说明用哪几条线段才能作出一个三角形来。列尼亚开始尝试了几次,就得出如下结论:"这时其他两边加起来必须大于另一边,否则作不出什么三角形来。"

列尼亚对解题的模式和它们的典型信号记得很牢,但他很快就忘记了具体的数据。例如,他在8岁时解了下面一道题:"一块砖的重量等于1公斤加上半块砖的重量。问那块砖的重量等于多少?"这道题并非他独立地解出来的——他要求实验者给他帮助。四个月以后,我们给他解下面一道题:"一本书的定价等于1个卢布加上半本书的定价。问那本书定价多少?"下面是他的回答:"另

外半本书……那么半本书的定价等于1个卢布，整本书的定价就等于2个卢布了。这类问题我已经解决过了……内容也是一半，要求我算出全部来——但是我已经忘记题目是怎样讲的。”

列尼亚掌握并保持一道题最本质的东西的能力，还表现在他对一些条件难以记忆的题目的理解上。他通常看过一遍就能记得住题目中一切基本关系。列尼亚喜欢找出同一题目的不同解法，他这样做完全出于自发。

虽然列尼亚很善于概括数学材料，但对非数学材料却完全不知如何着手去概括。我们给他看动物(野兽和家畜)、鸟类(野禽和家禽)以及鱼类的照片，要求他对它们进行分类——将它们分成几组。他是按照下列方法进行的：

1.所有的鸟——它们差不多有相同的嘴和羽毛。2.熊、猫、狗和狼——这些都是动物；它们有相同的毛；它们是非常相似的。3.一匹马和小驹——这当然是母马和马仔。4.母牛和山羊——它们都是有角的。5.鱼。6.刺猬——它是多刺的；除此外别无多刺的东西了。

显然，列尼亚在这里是根据外部的和偶然的特征来进行概括的(虽然他掌握了适当的知识)。实验者把他的错误对他作出了解释。但是在下一次性质相同的任务中，他又在低水平上去完成。

萨沙 L.

(1955年生于莫斯科。1965年对他作了记述。)

萨沙的家庭中没有人表现出有数学方面的才能。他的父亲和母亲都是新闻工作者。至于他的姐姐(年龄比他大18岁)，在他的父母亲看来，她的“最大弱点是在数学方面”。姐姐是一位语言学家。萨沙的外祖母是一个优秀的数学家。他的父亲在青年时代也对数学很感兴趣。萨沙在很小时就明显地热衷于数目。当他2岁时他学会数到50(他的父亲有一套共50卷的百科全书)。他在2岁半或3岁时已经数到100，还会倒数过来。在这几年中，他已

经很会玩"洛托"游戏①。他也爱好其他有关数字的桌上游戏。

当他6岁时我们开始对他进行观察。他是一个很活泼的男孩，有着一双明亮的眼睛。他善于交际，十分好奇。(他立刻对我们提出大量的问题："这是什么？这是为什么？"等等)他在解题时外表上一点不流露出全神贯注的样子；他坐立不安，做出许多乱哄哄的动作。

萨沙在6岁时阅读得很好，学会写字，没完没了地忙于做多位数的加法和减法的练习(他的口算和笔算同样做得很成功)。他在这个年纪已经开始独立地主动学习乘法表("5连加7次等于多少？结果是5乘以5——得出25——加上另外两个5——共35")。接着他开始独立地做出了算术方面的第一次概括工作("也许除法是乘法的一种逆运算")，并对负数的概念进行研究。萨沙在6岁时就能自如地而且毫无困难地解如下的题目："我们国家的北方气温是零下12°，而最南方的气温比它高出41°。问最南方的气温是多少？"

这时萨沙还没学会分数，但在最初的几次实验课上他毫不费劲地掌握了分数的概念，实在令人感到惊奇，而且他忽然独立地发现了下面这个事实："如果分母越大，则分数越小……这是因为我们要分成较多的份数，所以我们所得的每份较小。"在一年之内萨沙忽然自己发现了简单分数的加法：他求出了公分母，用已知的分母除它……结果他在他的"发现"中弄糊涂了。

用他的父母亲的自己的话来讲，他们"总是相当担心萨沙的成长过于早熟，要设法使他成长得慢一些"。

萨沙在6岁或6岁半时就非常爱下象棋。根据各方面的信息，他主要感兴趣的是下棋的过程，至于结局如何——是胜还是负——是不怎么重要的。他试着编一些简单的有关象棋的题目。

当他7岁左右时，萨沙身上出现相当明显的初等形式的数学

① "lotto"是一种游戏，参加者从袋中抽出有号码的牌，放在有相应号码的盘子上，以先能排成一列的人为胜。——中译者注。

倾向。他将课余的时间用来做例题和习题。他后来对地理学也有点兴趣，里面的数字(如河流的比较长度和城市的人口等)对他有吸引力；他对比例尺非常感兴趣(他没完没了地测量长度，进行计算，绘制地图)；他独立地编排出一个今后五年的日历。萨沙有一次生病，大家不让他看习题集。他感到无事可数，就记忆从基辅火车站开出的慢车的时刻表。他对这种消遣很少感到疲劳。

萨沙并不爱看书，没有表现出音乐方面的才能。他对技术和集邮感到兴趣。象所有男孩一样，他对足球和曲棍球着了迷，过了不久又对政治发生兴趣。他6岁半进校读一年级，在学年快要结束时才到班级上去。(他的父母决定把他直接送进二年级，但是他在一年级里"坐一坐"也好，这样能够使他习惯于学校的生活。)

萨沙进了学校后就参加小组，结交了许多朋友。在算术课上他乐意帮助进步很慢的同学，对班上一个算术很差的同学"拉了一把"。

在读三年级的8岁萨沙很容易地解出了我们给出的实验题目，表现出他有一个发展得很好的推理能力，并努力对同一个题目找出几种解题方法。我们给他做这样一道题："一瓶煤油重8公斤。瓶中的煤油倒出一半以后，剩下的煤油连同瓶子共重$4\frac{1}{2}$公斤。问瓶子的重量等于多少？"他是用下面的方法解的："煤油的一半倒了出来，它等于……(他写下：$8-4\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$)三公斤半。这样一来，煤油共重7公斤。好了，那么瓶子重1公斤。"(这道题，连同它的记录在内，做出来只需时30秒。实验者提出下面的问题："但是你不想核对一下到底做对没有？"萨沙对此茫然不知所措地回答道："如果我已经知道我做得很正确，为什么我还要核对呢？")

试考虑下面的题目："鸡和兔在户外到处奔跑。它们共有35个头，94只脚。问它们各有多少？"萨沙是这样解题的："我们有正在到处奔跑的四脚动物和两脚动物……如果只有两脚动物在到处奔

跑，那么共有 70 只脚……多出了 24 只脚——如果每一只加上两只脚，那么就可得四脚动物 12 只。所以共有兔子 12 只，鸡 23 只。但这道题也可以这样解。如果全部都是兔子的话，那么 35 只共有 140 只脚，但脚没有这么多……要减去 46 只脚。与一只兔子比较，一只鸡少掉 2 只脚。所以我们又得出 23 只鸡。”（两种不同的解法需时约一分钟。）顺便提一句，在这些不同的解法中，萨沙显然有精简他的解题过程和恰当的运算系统的倾向。

显而易见，在萨沙的思维中，语言逻辑的成份比直观形象化的成份更居于支配的地位。在给他解的所有题目中，他并没有借助于直观形象化方法来解其中任何一道题，甚至当题目的条件暗示可以这样时他也不这样做。例如“交换指针”这一类的所有题目，尽管已经对他暗示在必要时可以画出一个钟面，他还是用推理方法很快地而且有把握地解出了它们（例如，题目：“时钟指着 3:40。如果长、短针交换位置，问时针指着什么时间？”答案：“这是指短针指在 3 字与 4 字之间的某处，而长针指在 8 字上。如果长针指在 3 字与 4 字之间的某处，而短针指在 8 字上，这会是什么时间？是 8 点 18 分。”题目：“如果时针指着 7:35 左右呢？”答案：“这是指长针指在 7 字上，而短针……也指在这个字的附近。如果它们交换位置的话，时间是相同的或稍为早一点。”）。

1964 年的夏天，9 岁的萨沙在读完了二年级后，开始在长辈的帮助下学习一点代数。他很容易地理解了代数的基本概念。

伏洛佳 Kh.

（1956 年生于克利米亚州。）①

伏洛佳曾在 1966 年州数学奥林匹克中获得八年级组第一名——这时他是一个念六年级的 10 岁男孩。伏洛佳只有 4 岁时就开始显示出非凡的才华。这时他不过念了四年书（念过一年级，三

① 关于伏洛佳的材料是由一位教师兼管理教学部门的校长 A. P. 梯尼雅可夫提供的。

年级，五年级和六年级)。他在念一年级时就成为"由一年级到四年级学生的总辅导教师"(梯尼雅可夫语)。在念完五年级后，伏洛佳参加了在克里米亚举行的夏令营，参加者都是在数学方面表现出有才能的学生。他在八年级学生组中作出很好的成绩。

伏洛佳不仅在数学方面有天才，而且英语学习得非常成功，俄语方面也有很大的进步。他在各门学科的进步都是十分显著的。他欢喜看书，看了很多的书。他积极参加体育运动，表现得十分活跃。他抱着一种谦虚的态度来评价自己的才能。他不想在同班同学中表现突出——他甚至有点腼腆。伏洛佳在数学方面的记忆力特别好。他能将推理的梗概记忆得非常清楚；如果有时忘了一个公式，他往往也能很快地再把它推导出来。

梯尼雅可夫对伏洛佳进行长期的观察和实验，结果表明伏洛佳在数学方面的概括能力已经得到很好的发展。他往往在一系列相类似的现象中分析了第一个现象之后，便立刻进行了概括。他通常从一般形式来观察问题和解决问题。"就这一点而论，他对个别的变化情况并不发生很大的兴趣"(梯尼雅可夫语)。

从类型学的观点来看，伏洛佳比较接近的类型是"代数学家"，而不是"几何学家"。具体的情景往往使他受到束缚。他几乎没有尝试过用形象的模式去解释一道题目(理由是，这样做显然会把他局限于特殊而具体的情况之中，并使他背离一般)。他试着用代数的方法来解许多几何题目。

伏洛佳的思维不受到常见的或用过的方法的约束和影响。如果情况需要的话，他总是准备绕过某一种公认的或指定的运算方法。他还有一个独特的地方，就是渴望在解题时能找到最简单、最清楚而且最有说服力的解法。

梯尼雅可夫提请大家注意伏洛佳的下面一个特性：他没有敏捷地思维的习惯。他考虑问题很彻底，但不十分迅速。如果他碰到某一个"不太容易"的题目，按照他的性格，他也不会一直固执

地作解题的尝试。在这种情况下，他宁愿把题目搁在一边，暂时不回到它上面去；随后他再试一下（试图用另一种方法来解题）；如果经过一番努力他仍解不出题目，那么他会把它再次搁在一边。

伏洛佳努力不懈地学习数学（连续四、五小时）而不感到疲劳，他在这方面的能力是值得注意的。最后，他很留意在他周围的世界中许多现象的"数学方面"，并用"数学的眼光"去观察它们，他这种独特的倾向也应该受到人们的注意。

伏洛佳的老师们，尤其是梯尼雅可夫，曾经设想伏洛佳可在13岁时从中学毕业，并完全具备考进一家高等教育学院的条件。

波里亚 G.

（1954年生于马基也夫卡城。1965年对他作了记述。）

当波里亚念二年级时，他的父母亲和老师们已经注意到他对算术方面的兴趣，以及他在这个领域里的能力。波里亚能够用心算很快地解出任何原来布置给二、三年级学生的题目，连布置给四年级学生的许多题目他也做得出来。当教师把两种家庭作业的题目抄好在黑板上时，他已经得出了所有题目的正确答案。应该注意到，虽然他能正确地解决一些甚至更难的题目，但是波里亚有时不能令人满意地解释他做这些题目时是怎样进行推理的。

后来他对解题着了迷。他甚至在假期中每天都花上两、三个小时来解答习题和例题。他在许多笔记本中密密麻麻地写满了题目的答案。有时他写下解题的方案和解答本身，有时他只写下解答，而有时他只指出解题的一般过程。他在念三年级时已经学会百分数和简单分数的运算。

波里亚的父母在同教师商量之后，决定他可以准备并参加四年级的考试，这样使他能够从三年级直接跳到五年级。在父母亲的帮助下，波里亚在不到一个月的时间内准备好俄语、阅读和算术，并在这几门功课中考试及格，成绩都是5分（优等）。

波里亚在五年级学习得很好——和以前一样，他对算术，特别

是对那些复杂的题目着了迷，他经常想用最简短而最清楚的方法去解出这些题目。为了这个目的，他有时想找出尽可能多的解题方法，并对它们进行比较。波里亚在解出难题时会感到异常兴奋：他的的确确会高兴得跳了起来，高声唱歌，欢乐地笑着。如果他碰到困难的话，他绝不同意别人助他一臂之力。

他力求用直观而且形象化的方法来解题，来观察题目中已知的关系，这一点令人感到很大的兴趣。特别是当他要去解一道他不熟悉的题目时，这种倾向更容易看出。例如，给他解这道题："一个拖拉机手第一天耕完一小块土地的总面积的 $\frac{8}{21}$，第二天耕完剩下来的面积的 $\frac{7}{13}$，最后余下的面积是 $26\frac{2}{3}$ 公顷。如果他每小时平均耕 $2\frac{2}{5}$ 公顷，问他需要多少小时去完成全部任务？"他的解题方法是这样的：他将笔记本中一小块地方分成 21 个正方形，拿开 8 只正方形(代表第一天所耕的部分土地)，把剩下的 13 只正方形看成一个新的数字。然后他又拿开 7 只正方形，表示新数字的 $\frac{7}{13}$。余下的 6 个正方形$\left(\text{或新数字的 }\frac{6}{13}\right)$等于 $26\frac{2}{3}$ 公顷。随后他比较 21 个正方形和 6 个正方形的大小，以 6 去除 21，得出 $3\frac{1}{2}$。他下一步以 $3\frac{1}{2}$ 去乘 $26\frac{2}{3}$，就得出所求的整块土地面积的大小，等等。

波里亚在念五年级时就开始学习代数课程(念六年级时也是如此)，这时他不大耐烦地等待着与几何学"接触"。

他对英语也着了迷，并且已经开始学习音乐。他并没有表现出音乐方面的才能，但他很有热情地学习了音乐，并能坚持不懈。

1965～1966 年，波里亚念七年级。与从前一样，对他来讲解题就等于真正的假日。不管他一天学习得多么累，到了晚上十一点他还能攻数学。他把一些困难的和非常困难的题目的解答抄在特

别厚的笔记本上，其整洁的程度实在令人赞赏。他往往写出每一道题的几种不同的解法。他已经解出了《数学宝库》一书以及数学竞赛和数学奥林匹克题选中的许多题目。当时让波里亚转学到专攻数学的寄宿学校的问题，已提到议事日程上来了。

我们总共对 26 名有天赋的儿童进行了观察，但是关于其他几个天才儿童的材料记录不在此一一列举了，理由是我们在较近的一段时间内才开始对他们进行观察，而且对他们还没有进行过实验。

文献中的个案

从文献中也可以发现一些关于有天赋的儿童的资料。1834 年的《莫斯科大学学报》刊载了一篇题为"伊凡·彼得罗夫这个男孩"的很有趣的报道。这个男孩是科斯特罗马省的一个农民的儿子，他既不会看书又不会写字，但是他能够在头脑中解相当复杂的算术题(74)。当然，不会有人教过他的，在 130 年前偏僻的科斯特罗马农村里他也不可能受到教育。根据关心有天赋才能农民的专家们的记载，他用心算正确地解出了类型和难度如下的十二道题目：(1)40004－30005，(2)12 个人在一定的时间内花掉他们的生活费中的 136 个卢布。问 69 个人在相同的时间内要花掉多少？(3)如果要付款 78 个卢布而手中只有票面为 3 卢布和 5 卢布的钞票，问付款的方法可能有多少种？(那个男孩求出了全部的六种方法。)令人遗憾的是，这个有天才的男孩后来的命运究竟如何就不得而知了。

1917 年，S. Ya. 拉比诺维奇和 A. M. 舒伯特发表了题为"儿童中具有数学天才的两个个案"的文章(343)，内容叙述七岁的伏洛佳 Z. 和十岁的萨沙 V.。伏洛佳在数学方面的天才是无意中发现的：他的哥哥正在解题，而 5 岁的伏洛佳则指出他弄错的地方。用他的话来说，他已经长期地观察着数字，因为他爱好它们。不久以后，伏洛佳作为一个"神童"在马戏团中表演用心算进行三位数

与五位数的乘法。但是，伏洛佳除了具有计算方面的才能以外，显然还可能在正确的培养下发展数学方面的思维：他立刻掌握了平方根的概念，懂得它的含义，并开始求三位数的平方根①。

萨沙甚至是一个更令人感兴趣的杰出人材。他名副其实地发展了创造性的能力（当然，这能力还是比较初级形式的）。特别地，他已经显示出一种素质：给他一系列数字，他总设法从它们当中找出一些原则来。根据专家们的意见，他凭经验发现的那些原则中，有些只能用更高深的数学才能作出解释。萨沙的记忆方法是合乎逻辑的：例如，他在记忆长长的一系列数字时，他要从它们当中找出一个有指导意义的原则来。

N. S. 列依捷斯是这样描述一个名叫埃里克 B. 的男孩的：他在 6 岁时已会做多位数的算术运算，而在 7 岁时就掌握了代数的基本原理，并会解方程(252, 254)。以上一切都是在他没受过特殊的系统训练的情况下发生的，这甚至于违背了他的亲戚们的意愿，因为他们对此感到害怕。埃里克在入学时直接念二年级。当埃里克念四年级时，他作为一个十岁的男孩，已经会用方程来表达非常复杂的关系，学会了对数和方根，并且对无穷的运算和编表（地理学和天文学方面的用表）都着了迷。他在进行这些工作时一点不感觉疲劳。

1964 年，德意志民主共和国的心理学家们描述了数学早期天才的一例(654)。当 S. 赖纳 5 岁时，他的父母亲第一次注意到他是有才能的。他突然对数的运算十分感兴趣。当他知道父母亲的年龄时，他就告诉他们："你们的年龄加起来是 72 岁。"

在这里也发生同样的情况，他的父母亲不仅不去促进这个男孩在数学方面的发展，而且还想尽一切办法加以阻挠，原因是他们担心可能会产生消极的后果——他们甚至强迫他离开姐姐正在预

① 有关伏洛佳 Z. 的才能的补充资料曾刊载于《星期》(1966 年第 50 期)，里面还提到他后来的命运。他当了一名水兵，参加过第二次世界大战。现在他是退休的海军上校。

习算术的房间。实验者对赖纳在数学方面的概括能力和倾向(当然，在他可能理解的材料的范围之内)，写下了特别的记录——当他找到一种解题的方法时，他会很容易地把它移用到同一类型的其他题目上。

六岁的赖纳直接进入二年级。他在学习语言和拼写方面感到极大的困难，但在算术课上他什么都做得很好。

苏联的期刊上也援引过儿童中早期表现出数学天才的令人感兴趣的个案。赞雅·格特里科夫、阿历沙·托尔皮戈和赞雅·利维奇甚至在学龄前就表现出显著的能力。他们14岁就毕业了，考进了高等教育学院的物理数学系。一个名叫萨沙·德沃拉克的很有能力的数学家在9岁时就进入了七年级①。

对数学方面具有天才的儿童们进行观察和实验所得到的材料，可以帮助我们作出下列一些结论。首先，数学方面的能力可以在年纪很小时就已形成，而且大部分表现为计算方面的能力——即用数来运算的能力。当然，严格地说计算方面的能力还不是数学的能力，但是真正的数学的能力——即推理的能力，独立地掌握数学材料的能力，论证的能力——往往在这个基础上随之而形成。

数学能力的早期形成，往往与环境的有利条件以及培养毫无关系。在我们进行观察的大多数情况中，做父母亲的并不为他们的子女创造这样的条件。正好相反，一旦子女们的早期成长使做父母亲的感到担心和恐惧时，他们就在子女们的道路上设置障碍，阻碍他们，分散他们的注意力，在某些个案中甚至惩罚他们。具有数学天赋的学生们，他们的兄弟姐妹中的绝大多数虽然是在相同条件下受到教育的，但并不表现出数学方面的能力，注意到这一点是很重要的。

能力的早期形成与下面两点有不可分割的联系：一是对算术

① 见1960年9月17日的苏联《文学杂志》；1962年1月9日，1963年2月23日和1965年12月2日的苏联《教师报》。

发生兴趣；二是具有学习算术的素质。这些经常表现为这样的状态：一碰到题目就控制不住地想去计算它们，解出它们，还编出题目来。这一切和能够经过长时间的紧张工作而不出现明显的疲劳迹象是有关联的。

教师们所作的观察和实验表明，有数学天赋的儿童在年纪较小时就已经发展了心理活动的下列一些特征：概括数学材料的能力(在外部不同或孤立的东西中发现普遍性的能力)；心理过程的灵活性(迅速地由一种运算转换到另一种运算，由一种思维序列转换到另一种思维序列的能力)；力求用最容易最清楚而且更经济的方法来解题；主要对概括了的关系、推理模式以及解各种类型题目方法的记忆能力；推理过程的简缩、个别环节的缩短；最后，形成对周围环境的特别"数学"知觉的初级形式——好象许多事实和现象都是通过一架数学关系的棱镜而折射出来的。

观察和实验还表明，早期就表现出数学能力的儿童们，在解数学题目时直观-形象成分与语言-逻辑成分的联系水平已经存在着可以观察出的类型差别。他们中的某些儿童并不需要依赖直观形象，对他们来讲"逻辑性"代替了"形象性"。其他的儿童显然需要从直观上解释数学关系，喜欢应用直观-形象的方法来解题。

在我们所研究过的儿童中，有些人的数学能力是以一般天赋为背景并在与它有一定关系的条件下发展起来的。而其他具有数学天赋的孩子们并没有表现出一般的天赋——因为从其他所有方面来看，他们都是极普通的儿童，与他们的同辈没有一点不同的地方。

12 有数学能力的学生信息收集（对题目的最初定向）的特点

正如前面所述，基本材料是由开头三个系列组成：未明确说明问题的题目，缺少数据（信息不完全）的题目和有多余数据（剩余的信息）的题目。基本的受试组是由18个有数学能力的七年级学生组成的。他们在七年级开始时做了这些系列的全部测验，并与由14个中等学生组成的组和由8个没有能力的学生组成的组进行比较，后两组学生也在更长的时间内做了这些系列的测验（尽管这样，这些组的有些受试者也没有做完这些系列的所有题目）。此外，这三个系列的各个测验也给能力很强的这一组学生做（这在前一章中已经叙述了）。

问题产生了：所有三个系列中实验性题目的解法，能用一个普遍因素的作用来说明吗？我们的假设是，系列I、II和III的测验分数是测量同一个现象的，也就是说，这些测验分数是心理活动的同一种普遍性质的指标（这，我们将在后面试图加以说明），因此，在这里是一个普遍因素的表现。

为了弄清我们的假设是否正确，必须对获得的数据进行因素分析。我们选出18个有能力的学生的测验分数来作因素分析。每个系列解题的总时间就是学生的测验得分。因素化是根据斯比尔门的单因素模型做的（象哈曼所介绍的那样）（410，604）。

正如捷普洛夫所指出的那样(410)，应用斯比尔门的因素模型是可取的，但无论如何要有一个前提，即所有实验性测验的得分是同一个因素、参数或特性作用的结果，同时必须弄清这个共同的因素是否实际存在。

对于每两个系列来说，18个受试者的分数秩的相关性，是按下述公式计算的：

$$\rho = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)},$$

其中，ρ是相关系数，d是每对分数的秩的差，n是变量值的数目(受试者的人数)。正如大家所知道的，上述公式应用于如下的情况：

1．当变量的各个值的数目不超过25～30时；

2．当用数字表示的分数形成一个秩的序列时(见344，第79～81页)。

表5　系列I～III的相关矩阵($N=18$)

	I	II	III
I	—	0.64	0.72
II	0.64	—	0.67
III	0.72	0.67	—

我们得到表5所示的相关矩阵。于是，这些系列中的解题的成绩具有正相关。

18个受试者的相关系数的显著性，在0.01水平是0.564，在0.05水平是0.399(参见344，第106～107页)。因而，我们所得到的相关系数的统计显著性达0.01水平。

当符合下列条件时，根据斯比尔门的单因素模型因素化是可能的(410)：

1．有一个不小于三阶的矩阵；

2．所有相关系数是正的；

3．所有相关系数具有统计显著性。

这里，这些条件都是满足的。按照经捷普洛夫在数学的严密性下精心修改过的斯比尔门公式，加以因素化(410; 604，第 120～122 页)：

$$a_{kg}^2=\frac{(r)_k^2-(r^2)_k}{(r)_t-2(r)_k},$$

其中，a_{kg} 是普遍的因素 g 对于变量 k 的因素负荷，$(r)_k$ 是在 k 列中所有相关系数的和，略去了未知的对角线的值，$(r)_k^2$ 是那个和的平方，$(r^2)_k$ 是在 k 列中所有相关系数的平方和，略去了未知的对角线的值，$(r)_t$ 是矩阵内所有相关系数的和，略去了未知的对角线的值。

捷普洛夫介绍的这个公式(410)，相对地说是容易的；它不需要一个复杂而不适宜的转轴步骤。

表 6　系列 I～III 的因素矩阵

系　　列	g 的因素负荷
I	0.83
II	0.77
III	0.87

结果，我们得到表 6 的因素矩阵。大家可以看到，对于所有三个系列，所得到的这个普遍因素(g)的负荷都是很高的。

我们还需估价所得到的因素负荷的准确性和完整性（信度）。为此，我们根据下面的公式(410)计算再生相关系数：

$$r'_{jk}=a_{jg}\cdot a_{kg},$$

其中，r'_{jk} 是分数 j 和 k 之间的再生相关系数，a_{jg} 是对于分数 j 的普遍因素的因素负荷，a_{kg} 是对于分数 k 的普遍因素的因素负荷。

然后，我们按照下列公式计算剩余相关系数：

$$\bar{r}_{jk}=r_{jk}-r'_{jk},$$

其中，$\bar{r}_{jk}$ 是剩余相关系数，r_{jk} 是实验获得的相关系数，r'_{jk} 是再生

相关系数。

在我们的事实中，再生的相关矩阵与最初的相关矩阵相符。剩余的相关系数等于零。

上述再生的相关矩阵和最初的相关矩阵两者相符这一事实，说明了所得结果的信度。因此，根据斯比尔门单因素模型，对最初的相关矩阵因素化，是完全合理的。所有三个系列在这普遍因素上都有很高的负荷，这就意味着在系列 I、II 和 III 中，解题的成绩乃是一种普遍因素在起作用的结果。这个假设被证明是正确的。一种普遍的(共同的)因素存在于所有这些系列之中，事实上这是相当明显的。

但是，这个因素是什么？在心理学上怎样解释它？我们转而对解这些实验题的过程作质的分析，这种分析将有助于对我们所揭示的这个因素作出心理学的描述。

众所周知，在有些情况下，掌握一种智力技能或习惯的主要困难在于感知最初的事实方面，而不在于感知后的操作方面。前面的研究使我们可以来说明有数学能力的学生对数学材料的知觉①的本质特征。对这些学生的实验题目解答的分析表明，对数学材料作出分析-综合处理是这些学生的本性。在解题前，他们对题目中的材料进行分析-综合的解释。自然，一个人在解一道题目之前，必须理解它，解释它，对它定向，并找出它的成分，所有的学生都是这样做的。不过，对有数学能力的学生来说，这种对一道题目的初步的定向有其独特性。

在感知一道数学题和掌握它的结构时，有数学能力的学生把题目中给定的一些数学的量系统化。在题目的结构中，他们明确地区分或分离出三种性质不同的元素。

---

① 我们在这里和今后，对"知觉"这个词，不是从它的机能意义上(作为知觉的心理过程)，而是从大家都"熟悉"的意义上来使用的，即是指对题目的一般定向。在这里用"领会"这个术语也许更适合些。

1．对一道题目给定的类型来说是本质的一些标志的复合体，这些标志有函数性的依赖关系，并超脱了具体的意义（一些处于一定数学关系中的典型元素的复合体），用 S. I. 夏皮罗的话说，有能力的学生首先找出“那些题目中具有基本数学意义的关系”；

2．对于题目给定的类型并不是本质的但对给定的具体变式却是本质的一些量；

3．对解特定题目不是必需的那些多余的、非本质的量。

第一组量，相对其他类型的题目来说是这一类型题目的特征（这在以后制约着解题的一般方法）。第二组量，是给定的具体题目的特征，它们区别于同一类型的其他的具体题目（这在以后制约着具体的解题）。把第三组量分离出来具有比一般所想象的更为重要的价值。要解一道题目，人们必须能评价和舍弃不必要的数据，或更精确地说，要能从众多的数量中分离出那些解题所必需的数量来。

换句话说，有能力的学生感知题目中的数学材料是从两方面结合进行的：即从分析的角度（他们在题目的结构中分离出不同的元素，给它们以不同的评价，把它们系统化，决定它们的“层次”）和综合的角度（他们把这些元素组合成一个复合体，找出数学的关系和函数性的依赖关系）。正如 S. L. 鲁宾斯坦指出的那样，“每个关联、比较，每个联结的建立都是综合”（358，35 页）。要概括数学的关系，首先必须分解它们。在这个意义上可以说，有数学能力的学生不仅感知个别元素，而且也感知那些特殊的“有数学意义的结构”，相互联系着的一些数学量的复合体，以及函数性依赖关系的类型。有能力的学生是把每个这样的复合体都当作一个合成的整体来感知的。首先，他感知这个复合体的个别元素，把每个元素看作是整体的部分。其次，他是从互相联系、并形成一个完整的结构上来感知这些元素以及每个元素在这个结构中的作用的。这样，有能力的学生就形成了清晰的完整地分解了的题目的表象。显

然，这也构成了能力的基础，它使有能力的学生把题目作为一个整体来"掌握"，而不致忽视其中的所有数据。

具有中等的、一般的数学能力的学生，在感知一道新的类型的题目时，通常是感知它的各别的数学元素，"落在"知觉范围之外的元素往往就"丢失"了。能力中等的学生必须面临着把题目中的数学元素联结起来的特殊任务，并且在分析和综合过程中去找出这种联结。至于没有能力的学生，要建立题目中各元素之间的这种联结和相互关系，即使得到外界的帮助，也会碰到很大的困难。

许多研究者，尤其是 Z. I. 卡尔米科娃(154,155,157)、O. G. 波契科夫斯卡娅(56)和 V. I. 朱可娃(132,133)，她们早已注意到，有些学生领会题目的元素之间的联系很吃力，他们难于掌握构成题目本质的各种依赖关系的集合，并且不能从非本质的特征中区分出本质特征来。但是这些研究者没有把这种情况同数学教学中学生的不同能力的问题联系起来。N. A. 梅钦斯卡娅注意到，能力低的学生要从题目的具体内容中摆脱(抽象)出来是困难的。在题目的主题以外，他们看不到题目的真正的数学意义(289,291)。

以上对开头三个系列的学生的解题过程作了充分的说明。让我们仔细考察一下那些"没有问题的题目"和"缺少数据的题目"。这两种情况都是在有函数性依赖关系的数量的复合体中缺少一个元素(这些题目是有意那样编的)。有能力的学生能正确地指出所缺少的问题或数据，这就意味着他们感知了数据的完整的复合体和题目的结构，并意识到题目中缺少了某个元素。如果没有看到这个复合体，那就不能看到问题，或不能指出缺少的数据。而且，有能力的学生也不会受阻于多余的、累赘的数据。他们有信心地挑选出相互联系着的构成题目"支柱"的数量的复合体，简直不去注意那个复合体以外的不必要的数据。

能力中等的、特别是没有能力的学生，就完全是另一回事了。

实验表明，能力中等的学生对一道新类型的题目（而且普遍地，没有能力的学生对所有的题目）开始时仅仅感知分散的事实，“吸引”他们的是开头的那些具体数据。在这一点上，大多数能力中等的学生（而且几乎所有的没有能力的学生）并不感知或意识到题目中隐蔽着的问题。因此，解答用解题所不需要的数据“伪装”起来的题目，对他们来说是一个很大的困难（“怎样使用题目中给予的每个数据总是使我绞尽脑汁！”）。最后，这正好说明为什么他们中的大多数人在指出题目条件中“遗漏”的事实和对它的解答缺少什么时感到困难。

至于多余的数据，有时我们惊奇地观察到，这些数据即使出现在最容易的题目中，也会使没有能力的学生感到迷惑不解。他们同等地感知一切具体的数量（不管对这个类型是不是本质的，对这个特殊的变式是本质的，还是非本质的），这些学生在解题时不能有区别地评价它们，也不能建立它们的“层次”，因此他们在解题中不能区分不必要的数量和必要的数量。

没有数学能力的学生在思维上的这些缺点，特别影响着那些题目的解法，这些题目需要一种把它作为一个整体来“掌握”的能力。例如，“分解 $27x^3+27x^2+9x+1$ 的因式”，他们不能把这个式子作为两数和的立方展开式来感知，因为他们孤立地看待每一项，似乎与别的项没有一点联系。假如他们中的有些人正确地解出了这道题，那也是“违反常规”地只根据首项和末项来解的（这是很容易发现的，在解完上一题之后，再给出 $8y^3+8y^2+8y+1$，他们全都用同样的公式去解）。

在下面引用这些系列的总结性资料之前，这里让我们先用实验题目解答记录中的例子来说明上面所说的内容。

给出这道题：“两个仓库中共有 $420\,m^3$ 木材，其中一个仓库是 $x m^3$。”一个有能力的学生 G. Rh. 迅速而没有停顿地接着说：“另一个仓库是 $(420-x)m^3$。”实验者：“等一等，你已做过什么有关的作

业了吗?"学生:"我没有做过什么;有三个量:420,x 和 $420-x$。有了两个,第三个,不知怎的,就自动地出现了。"

一个有能力的学生 S. L. 解这道题:"两城相距 225 公里,两列火车同时从两城开出,客车每小时行 50 公里,货车每小时行 40 公里。问几小时相遇?"她听后立刻问道:"那么,它们是相向而行,还是快的一列追赶慢的一列?"实验者:"你为什么要知道这个?"学生:"嗯,因为这是一道关于距离、速度和时间的题目。这里有距离,求时间,但没有速度!"实验者:"那是什么?这里每小时行 50 公里和 40 公里,恰恰是两种速率。"学生:"没有相对速度。如果是相向而行,我们要加;如果是一列追赶另一列,我们要减。"

考虑另一个例子。有能力的学生 V. L. 正在做这道题:"现在是什么时间?假设在 24 小时这段时间结束之前,还剩下这 24 小时开始以来已经过去的 4/5 的时间,比已经过去的这段时间的一半要多。"学生:"嗯,这是一道容易的题目,不过,我不知道这道题为什么这样结尾,这完全是多余的。"实验者:"为什么这是多余的?"学生:"因为没有它,我也能够求出答案。"实验者:"你讲。"学生:"这里主要的是整体和它的部分,它们处于一定的关系之中。现在这种关系是 1:4/5,而且整体是 24 小时。我能够求出部分来。但是为什么这样结尾呢?它是多余的。"

在有能力的学生解所有这些系列的题目时,我们常常看到他们感知一道题目时对数据的这种评价和系统化。

有能力的学生对运用简捷乘法公式$(a+b)^2$的题目的解答也有类似的结果。他们很容易挑出给定类型的本质特征(两个代数式的和的平方),同样也能挑出对于给定的类型是非本质的,而对于给定的题目却是本质的那些特征(构成数 a 和 b 的代数式的特定的量和性质。)换句话说,当题目被感知时,当这样一道题 $\left(6a^x+\frac{1}{2}b^y\right)^2$ 是用"$(□+□)^2=$ "这个形式来"掌握"时,一个独

特的题目结构就产生了。没有能力的学生在狭窄的范围内想象这个公式中的"第一个"和"第二个"数，对他们来说，要知道 a 和 b 代表任何量和任何代数式是困难的。因此，他们不能独立地看出题目结构的"骨架"。

一个数学能力较差的六年级学生 V. K. 花了很长时间试图解下面这道题但没有成功："一罐蜂蜜重 500 克，用同样的罐头装满煤油，重 350 克。问空罐重多少？"他也是不能指出题目中少掉的环节，当实验者试图把他"引导"到关于题目已知量之间的关系这个问题时，他执拗地"逃脱"这种引导。甚至在把这个缺少的环节给他"引进"后（蜜的重量是煤油的两倍），他还长时间地不能理解这一点。一个有能力的三年级学生 V. L. 用下面的方式解出了这道题。他听着这道题的条件，好奇地看着实验者问："后面呢？"实验者："这就是整个题目。"学生："不，这不完整，我还必须知道蜜比煤油重多少。"实验者："为什么？"学生："没有那个，将会有许多解。这里有两个不等的量，它们之间有联系，就是它们的某一部分是相等的。这些相等的部分可以有许多。为了限制它们的值，我们必须再引进一个量来表示'剩余部分'的性质。"

有能力的儿童对数学题的感知还有一个特点。L. S. 维戈茨基指出，由于推理过程中的个别环节简略了，所以推理过程得到了简缩。D.N. 波果亚夫连斯基和 N. A. 梅钦斯卡娅都曾写到过关于在一定条件下，在感知题目的同时，立即简缩"掌握"它结构的过程的可能性（44，第 90～91 页）。我们在实验中经常看到，有能力的学生在对题目的最初定向中（如果题目不是很复杂的话），怎样把过程简缩到这种程度，以致它经常几乎同知觉的最初瞬间"交织在一起"，因为这里没有任何明显的推理因素存在。有数学能力的部分学生在感知数学题目时，这种分析-综合的定向活动经常被这样简缩，以致在有些情况下，可以在感知一道题目结构的分析-综合过程（在能力中等或很少有数学能力的学生中）和一种对结构的

分析-综合的"眼力"①(在有能力学生中)之间作试验性的对照。当然，这种差异主要是心理定向的速度不同。能力中等的学生在感知题目条件时的分析-综合的定向活动恰恰就是一种分析-综合过程，在时间上多少有点拖长。有能力的学生在感知那些实验性题目时，他们的分析-综合定向活动在时间上则最大限度地被"简缩"了，以致有时产生这种印象②，就是它在实际上似乎不是循序进行的，而是一种对数学材料的单个动作、单个特性的分析-综合的"眼力"，一种对材料中所给的各种关系的直接判断。有能力的学生，在感知一道题目时，摒弃了一切具体意义，而且仿佛看透了那些特有的数据，立即看到了它的"骨架"。

类似的比较，即把一瞬间"掌握"一道题目的基本关系与比较缓慢而连贯地"展开"的分析-综合过程之间的比较，可以在外国和苏联心理学家的一些著作中找到。Z. I. 卡尔米科娃写到这个问题，但没有涉及对能力问题的争论(154, 155)。在她最近的著作中，开始把分析和综合一道题目条件的敏捷性和轻易性同心理发展的水平联系起来(152,153)。V. N. 库利科夫(230,231), D. I. 加特科维奇(83), R. O. 塞里波瑞亚科娃(370), G. P. 安东诺娃(30,30a)也指出了同样的事实。教学法专家 M. F. 杜布雷宁娜(121)分析出列方程时三种心理运算的类型，她以在阅读题目后对题目的基本关系出现一种直接的观念为第一种类型的特点(而第三种类型的特点是逐步寻找它们之间的依赖关系)。

在我们的实验中，有能力的学生刚刚熟悉了测验中所用的简捷乘法的公式或是熟悉了一种题目的类型，他们就立即把给他们的那些数学式子感知成"和的平方"，他们在这些式子中"看到"一个和的平方，他们立刻感知题目的类型——他们感知这道题目是

① "眼力"这个词，象"交织在一起"这个词一样，只有纯粹辅助的意义，决不能作为一个解释性概念来使用。

② 只是一种印象，因为分析-综合活动并没有消失，不管怎样最大限度地"简缩了"这个过程，但不是没有分析-综合，而且它始终是有序地进行着。

典型的。在这里要想追踪分析-综合的过程往往是不可能的。能力中等的学生感知"一个代数式"或"一道题目",只是在适当的分析-综合的定向活动之后(假如他们以往对这类例题或题目曾进行过多次练习,则他们能独立进行;假如他们对解这类例题或题目还没有养成习惯,则需要实验者的帮助),他们才得出结论:所给的代数式是一个和的平方,或所给的题目属于某个类型。

这里有几个例子。索尼娅 L. 九岁时刚刚学过两数平方之差这个公式,要她解下面这道题:113^2-112^2。她只是看了一下(题目出示后一、二秒钟),就高兴地叫起来:"这是两个平方的减法!(就是说,两个平方之差。——原作者注)这能用公式解出来。"

一位能力中等的六年级学生(同样地刚刚熟悉平方差公式),在实验者的帮助下大约需要五分钟才开始对同一道题目的各项进行分析-综合。

最后,还有一种看法。维戈茨基以及波果亚夫连斯基和梅钦斯卡娅(44,第 90～99 页),注意到这种简缩的特点,即掌握题目结构的"瞬时性"、"突然性",他们指出这种现象作为练习的结果,产生在教学的一定阶段。问题产生了:我们所观察到的那种对题目形式结构的分析-综合的"眼力",是否总是练习的结果呢?要完全确切地回答这个问题是有困难的。在这一方面要评价一个人以前的经验是很难的,甚至八岁的天才索尼娅 L.,尽管没有人特地教过她,但在我们遇见她时,她已有了这方面的一些经验。但是,有一件事情是清楚的:同样的练习,同样的实践,同样的经验(就人们能判断这种"同样性"而论)在不同能力的学生中产生不同的结果。对某个学生(我们称他为有能力的)说,这些练习能很好地形成分析-综合的"眼力",面对另一个学生就不行。

所有一系列事实和对有能力的学生感知新的未知类型题目的特点的分析,使我们相信,有能力的儿童对数学题目的分析-综合知觉的产生,如上所述,并非是或多或少延长了练习的结果,而是

"当场"或几乎是用了最少量的练习就产生了。

正象本章开始所指出的那样，40 名学生(18 个有能力的，14 个中等的，8 个没有能力的)始终参加了系列 I、II 和 III 的全部测验。在区分了"对题目条件的知觉水平"以后，我们把结果分别总结在表 7、8 和 9 中(解答的数目在各表中都用占该系列题目总数的百分比来表示)。

综上所述，我们可以说，在相同的感知数学材料的条件下，数学能力不同的学生获得(或者更确切地说，主动地设法取得)不同的信息。这里，我们用信息表示题目中学生据以确定解法的所有(主动地设法取得)的事实。有能力的学生设法取得的信息量，总是比能力中等的学生要多，比没有能力的学生更多。换句话，我们应该说成是一种主动地从题目给定的条件中最大限度地抽取出对解题有用的信息的能力。

对上面考察过的全部材料加以概括，就能给借助因素分析法分离出来的普遍因素以一种心理学的解释。这个普遍因素就是对

表 7　数学能力不同的学生对未陈述问题的题目(系列 1)结构的知觉

水平	说　　明	在每一水平上题目被感知的百分比		
		有能力的学　生	能力中等的学生	没有能力的学生
1	即使有实验者的帮助，也不会用公式表达问题。因为没有掌握关系，所以只是感知到零碎的数据	0	0	40.5
2	只有在实验者的大量帮助下，才能用公式表达问题，认出题目中给定的关系	0	23.5	30.1
3	独立、但不能立即地用公式表达问题，有错误，逐步掌握题目中给定的关系	13.4	66.8	29.4
4	立即用公式表达问题，"当场"掌握题目中给定的关系	86.6	9.7	0

表8　数学能力不同的学生对信息不全的题目（系列II）结构的知觉

水平	说　　明	在每一水平上题目被感知的百分比		
		有能力的学生	能力中等的学生	没有能力的学生
1	即使有实验者的帮助，也未觉察出缺少的数据。因为未掌握关系，所以只是感知到零碎的数据	0	0	52.9
2	只有在实验者的大量帮助下，才能觉察到缺少的数据并认出关系	0	53.8	24.0
3	独立，但不能立即地觉察缺少的数据，有错误，逐步掌握关系	23.9	42.9	23.1
4	立即注意到缺少的数据，"当场"掌握构成题目本质的关系	76.1	3.3	0

数学材料的形式化的知觉。在感知数学材料的过程中，数学能力表现为力求使它的结构有特色地形式化。所谓形式化①，我们指的是在一个特定的题目或数学式子中迅速"掌握住"这形式结构，好象全部内容（数据，具体的材料）都消失了，只剩下一些标志之间的纯粹的相互关系，这些标志是确定这道题目或数学式子是否是属子某一类型的。

形式化的知觉是一种机能上联结的概括化的知觉，它从对象和数的形式中分离出来，它的一般的形式结构是在具体的细节中感知到的。K. 邓克尔当时已曾指出，在解题中需要一种使自己从那些感性特点中摆脱（抽象）出来的能力，也就是从具体事实中鉴别出一般的能力（487）。L. 斯泽凯利（706）指出，创造性思维的一个本质特点，就是一种主体用一般形式"掌握"结构关系的能力。V. N. 莫罗德希依（299）写到作为"具有可变内容的形式"的纯粹关系

① 形式化是一个在数学上广泛使用的术语，不要同教学中的形式主义这个概念相混淆，两者是完全不同的概念。

表9 数学能力不同的学生对有多余信息的题目(系列III)结构的知觉

水平	说明	在每一水平上题目被感知的百分比		
		有能力的学生	能力中等的学生	没有能力的学生
1	即使有实验者的帮助，也未找出不需要的数据，未区分出多余的信息，因为没有掌握题目中的关系，所以只是感知到零碎的数据	0	0	56.8
2	只有在实验者的大量帮助下，才能找出不需要的数据，区分出什么是多余的，并意识到关系	9.1	54.5	25.0
3	独立、但不能立即地找出不需要的数据和区分出什么是多余的，有错误，逐步掌握关系	27.8	41.6	18.2
4	立即指出不需要的、多余的数据，“当场”掌握题目的结构及其关系	63.1	3.9	0

的分离时指出，这种分离是数学思维的特点。

最后，请再注意一点。在我们的实验里，我们观察到有能力的学生对题目条件的分析-综合知觉的另一个特点。他们的定向性的分析-综合(我们过去曾提起过)，是“工具性的”，就是说它显示了以后在解题中积极活动的可能性(不只是消极地陈述题目性质的可能性，而且是辨别或区分题目给定的类型与其他类型的可能性)。没有能力的学生(和部分能力中等的学生)，对题目的最初分析-综合定向，朝向分离出使他们能把给定的题目从其他题目中识别和区分出来的特点。可是，对有能力的学生来说，这种定向朝向分离出作为考虑解题运算基础的特点。让我们举一个简单的例子，考虑$(a-b)^2$和a^2-b^2类型的两个式子。这里，从心理学上讲，可能有两种不同的分析功能：(1)分析$(a-b)^2$这个式子，目的是为

了学会识别这个式子，并把它和所有其他的式子、特别是类似的式子 a^2-b^3 区分开来；(2)分析同样的式子 $(a-b)^2$，目的却是为了确定解题的算法。换句话说，这两种情况的分析是不同的。

在第一种情况下，学生回答的问题是如何把一个式子从其他式子中区分出来(一般地，把这些式子区别开来的是什么)；第二种情况则是，在一种条件下怎样运算，以区别于其他的条件(就解题的运算而言，这些式子是怎样区别开来的)。有时候，一个没有能力的学生，能够把一个式子和其他式子区别开来(纯粹从外部特征中找到它的线索)，但是，他不能确定解答它们的运算有何区别。下面是一段同一位能力中等的七年级学生 V. A. 谈话记录的摘要，内容是讨论 $(a-b)^3$ 和 a^3-b^3 类型的题目系列。学生："这里是不同的例题。这些，幂——3——有括号，另一些却没有括号。(她完全正确地作出区分。)实验者："好，与另一组的解答相对照，你怎样解你所选择的这一组例题？试比较两组例题解题的过程。"她沉默了。实验者："你正确地把一些例题与另一些例题区分开来了，你看出了它们的不同。好，不同在什么地方呢？一些例题的解题过程和另一些例题的解题过程有什么不同？"学生："我能区分它们两者，但是，关于解法，我弄糊涂了——不知怎么的，它们的解法是差不多的。"

显然，在这一现象的基点存在着两种分析水平，这是由 I.P. 巴甫洛夫的学生，波兰生理学家 J. 科诺尔斯基提出的。(1963 年科诺尔斯基在华盛顿举行的第 17 届国际心理学家会议上作了关于所谓工具性分析的机制的讲演〔参见 674，第 35 页〕。)第一种分析水平提供一种辨认和区分各种刺激的机会，但不能决定行为(就是说，不是行为的"工具")。第二种分析水平"在行为上起作用"，即提供激发行动的机会。于是，按照科诺尔斯基的看法，分析可以是足以区分两种现象，但却不能揭示出与这些现象一致的运算的可能性。

这个问题需要专门研究。显而易见，这里必须重视 P. A. 舍瓦列夫所发展的联想学说的一些原则，特别是舍瓦列夫(为 N. F. 塔莉金娜所继承)提出了当学生学习几何时，他们形成两类联想：(1)某些联想在活跃时，可使图形特征清晰起来；(2)某些联想活跃时，可触发解题所必需的运算(444, 401)。

最后一点评述：我们已经阐明，在感知一道题目的过程中包含着对一道题目数据的分析-综合处理。因此，仅停留在"对题目的感知"这个概念范围内，是否正确呢？难道这一切并不表示向解题阶段的过渡吗？对我们说来，这似乎还是知觉("理智的知觉")，因为结果并没有建立新的从属物，也就是说，没有揭示新的数据，而只是产生对数据的一种解释，也就是对题目内容的一种定向。

13 有数学能力的学生在解题过程中信息加工的特点

概括各种数学对象、关系和运算的能力

在数字和字母符号范围内，任何一种有效的概括，至少可以从两方面加以考虑：一方面必须能够发现一种相似的情境（去用在什么地方），再一方面必须掌握解法的概括化类型，和证明或论证的概括化模式（去用什么）。不管哪种情况，必须把自己从具体内容中摆脱出来，并且在各种对象、关系或运算的结构中，抽取出相似的、一般的和本质的东西。

我们将从另一种观点考察概括数学材料的能力，也分两种水平，即把这种能力看成是：(1)从特殊的和具体的事物中，发现某些一般的、他已经知道的东西的能力（把一个特例纳入一个已知的一般概念），(2)从孤立的和特殊的事物中看出某些一般的、尚未为他所知道的东西的能力（从一些特例推演出一般，并形成一个概念）。对一个学生来说，看出把一个已知公式应用到一个给定的特例上的可能性是一回事，而根据一些特例推演出一个未知的公式则是另一回事。

主要有六个系列的题目（V，VI，VII，VIII，IX，X）是用来研究概括能力的。研究分几个阶段进行，总共包括120名学生（其中61名有能力的，37名能力中等的和22名没有能力的）。研究的最后阶段，受试者的基本组由24名有能力的学生组成，他们在

六年级下学期和七年级上学期通过了这些题目系列的所有测验。能力中等组(22名)和没有能力的学生(8名)与基本组相比，他们也做完了这些系列的题目，不过时间较长一些。

这些评分数字反映出概括的速度和广度。在这里当可想起，所谓速度，我们不是指个人工作的速度，而是指概括的迅速程度(为了做出一个概括所需要的具体事例或因素的数目)。一般说来，心理定向的迅速(从花费的时间上说)当然有价值，正象 Yu. A. 萨马林在研究中小学儿童心理活动的动态(即选择适当联想时的速度以及熟练地使用它们的迅速程度)中所证实的那样(363, 365, 366)。但是，在另一方面，大家知道，在一种活动特别是在学生的心理活动中，时间通常不是取得高度成就的一个本质的因素(孔杜，630)。一个学习上进展迅速、形成概括联结很快的学生，也许工作很慢。而另一方面，有些学生也许形成这些联结很慢但工作的速度却是相当快的(参见波果亚夫连斯基和梅钦斯卡娅，44，第183页)。

在我们应用的六个系列的题目中，评分数字分别表示：最大概括的"步子"数和最后一个"步子"的量值(系列 V 和 IX)、正确做完的测验数(系列 VI)、正确解答的题目数和从一个具体水平转变到抽象水平的"步子"数(系列 VII)、作业完成的水平的总数(系列 VIII)以及能描述某一特定推理方法变换的广度的一个总指标(系列 X)①。

这儿，正如前一章一样，发生了一个问题：所有六个系列的实验题的解法，能用一个普遍因素的作用来解释吗？我们假定：所有这六个系列中的得分确是在测量同一种现象，就是说，这些测验是心理活动的同一种共同特性的指示器，所以，在这里也意味着有一个因素是这些系列所共有的。

要阐明这个假定是否有效，获得的数据要经受因素分析。在

① 第8章中作了更详细的解释。

这种情况下，因素化也是在斯比尔门的单因素模型的基础上完成的。关于这一点，前面一章已经讲过，因此我们省略了所有的公式。

我们得出相关矩阵，见表 10。显然，解六个系列中的每个系列的题目的成功率，与解其他系列题目的成功率具有正相关。

24 名受试者的相关系数 ρ 值为 0.485 时，就在 0.01 水平上显著；ρ 值为 0.343 时就在 0.05 水平上显著。所以，获得的 24 名受试者的相关系数具有统计意义(60% 显著性达 0.01 水平，40% 显著性达 0.05 水平)。因素化的结果，我们得出因素矩阵，见表 11。正象我们可以看出的，所有系列在普遍因素上具有很高的负荷(系列 VII 具有显著性负荷)。

我们计算出再生相关矩阵，列在表 12 中。因此，剩余相关系数的矩阵，可以在表 13 中看到。让我们求出在该表中表示的剩余相关系数出现的概率(根据捷普洛夫，410，和哈曼，604，第 440～441 页)：

$$\rho=\frac{15.62}{6.5}=0.52;\quad \sigma_r=0.244;$$

$$\frac{X}{\sigma_r}=\frac{0.2}{0.244}=0.82;$$

$$\alpha=58.78\%;\quad P=41.22\%,$$

其中，ρ 是表示相关系数的平均值，σ_r 是剩余相关系数的和(依照哈曼的表计算)，X 是最大的剩余相关系数，α 是剩余相关系数未达最大时出现的概率(根据哈曼的表计算)，P 是最大剩余相关系数出现的概率①。

所以，最大剩余相关系数出现的概率(假定剩余系数平均等于零)等于 41%。剩下的剩余相关系数显著较小，因而它们出现的概率明显增大。考虑到在矩阵中只有 7% 的剩余相关系数(30 个

① 根据此表(捷普洛夫，410；哈曼，604，第 440～441 页)，近似地求出 σ_r 值，因为取 ρ 和 N 的最靠近的表中值是必需的。

表 10　系列 V～X 的相关矩阵

($N=24$)

	V	VI	VII	VIII	IX	X
V	—	0.52	0.66	0.61	0.39	0.48
VI	0.52	—	0.42	0.62	0.48	0.56
VII	0.66	0.42	—	0.49	0.38	0.37
VIII	0.61	0.62	0.49	—	0.64	0.51
IX	0.39	0.48	0.38	0.64	—	0.68
X	0.48	0.56	0.37	0.51	0.68	—

表 11　系列 V～X 的因素矩阵

系　　列	g 因素的负荷
V	0.74
VI	0.72
VII	0.62
VIII	0.82
IX	0.70
X	0.72

表 12　系列 V～X 的再生相关矩阵

	V	VI	VII	VIII	IX	X
V	—	0.53	0.46	0.61	0.52	0.53
VI	0.53	—	0.45	0.59	0.50	0.52
VII	0.46	0.45	—	0.51	0.43	0.45
VIII	0.61	0.59	0.51	—	0.57	0.59
IX	0.52	0.50	0.43	0.57	—	0.50
X	0.53	0.52	0.45	0.59	0.50	—

中的 2 个)达到 0.2 数量级，剩下的都明显地小得多，因此我们完全有根据，把在单因素模式基础上建立的最初矩阵的因素化看作是完全被证实了(参见捷普洛夫,410)。

正如已经表明的那样，六个系列的全部题目在普遍因素上都有很高的负荷。这就意味着成功地解答这些系列的题目，只是一

表 13　系列 V～X 的剩余相关矩阵

	V	VI	VII	VIII	IX	X
V	—	−0.01	0.20	0.00	−0.13	−0.05
VI	−0.01	—	−0.03	0.03	−0.02	0.04
VII	0.20	−0.03	…	−0.02	−0.05	−0.07
VIII	0.00	0.03	−0.02	—	0.07	−0.08
IX	−0.13	−0.02	−0.05	0.07	—	0.18
X	−0.05	0.04	−0.07	−0.08	0.18	—

种普遍因素作用的结果。这个普遍(共同)因素在所有这些系列中出现，而且事实上是相当显著的。这个因素的心理学解释是十分显然的——它是一种概括数学材料的能力。在对解实验题目的过程作定性分析之后，我们将给它一个更加实质性的解释。

在我们关于概括能力的研究中，我们将根据前述的四个阶段(见第九章)来对材料进行分析。

第一阶段

这个研究的第一阶段，包括 19 名具有不同数学能力的学生。研究表明，学习数学的能力发展不同的学生，是以对数学材料的概括能力程度不同为特征的。比较有能力的学生，在所有其他条件相等的情况下，他们概括数学材料更迅速更宽广。能力最强的学生，在解一些题目时，具有立即("当场")作出最大概括的特点。他们首次见过对于一道典型题目要用某个公式或解法模式的解法原则之后，不经辅助练习或特殊训练，立即能对这一类型的例题或题目中那些最不相同的变式(包括所有各种无关特征的可能结合)，用上前述公式或解法模式。有数学能力的学生容易发现隐藏在各种特殊细节后面的普遍性，看到隐藏在外部构思后面的现象深处的内在本质，从外表不同的和特殊的现象中"抓住"那些主要的、基本的和一般的东西，在新的东西中发现熟悉的成分。我们重复一遍，这种能力经常是"当场"表现出来，而没有能力的学生，在他们理解比较初级的概括化以前，他们必须经过长期的训练，必须在特

别选择的材料上进行练习，这些材料包括所有可能的情况以及各种无关特征的结合。

让我们从这个观点来考察有能力的，能力中等的和没有能力的学生对系列 V 的解题方法。

有能力的学生能正确地非常自如地做出指定给他们的例题。在他们刚熟悉了"和的平方"公式或运用这个公式解简单例题之后，即便开始做最"间接"的题目，也很容易觉察出题目的一般类型而不感到有特殊困难。

学生 O. V. 运用公式解了一个例题之后，要他解这道例题：$(C+D+E)(E+C+D)$。学生："怎么？这儿不是按照公式——我们只要乘多项式……但是那将是 9 项。就是这些。可是我们可以运用公式——这是一个平方〔很快地写：$(C+D+E)^2$〕。对。现在可以把任何两项结合起来〔写：$[C+(D+E)]^2$〕。"实验者："你会做吗？公式只适用于二项式的平方，而你不是没有一个三项式的公式吗？"学生："我只消把 D 和 E 结合成一项，我就得出一个二项式——瞧〔指着式子〕。一个'项'可以是任何式子。"〔解式子，大声重复公式。写：$C^2+2C(D+E)+(D+E)^2=C^2+2CD+2CE+D^2+2DE+E^2$。〕在这儿学生已经构成一个解这一类型中所有题目的算法了。

能力中等的学生解这些系列的题目就不同了。他们不能"当场"概括，也不能扩大到一切可能的变式和结合上去。但是，他们经过不断增加"间接"环节的概括化，即通过特殊编排的解例题的练习（在这些练习中，象通常学校中做的那样，无关特性是各不相同的），他们是能够逐渐接近这种概括化的。

学生 A. U.，即使得到实验者的提示，仔细考虑了很长时间，也不能觉察出例题 1 与例题 8 之间任何类似之处（测验 V-A）。他很容易从第一个例题过渡到第二个例题，从第二个例题过渡到第三个例题。他下一步的思路是："但这是另一回事〔研究例题 $(3x-$

$6y)^2$〕。它是平方但不是和……这是个不同的例题；它不能用公式来解……”实验者：“仔细看前面的例子：$(-5x+0.6xy^2)^2$。它不能使你想起什么吗？”学生：“这是另一回事——那儿中间有加号，而这儿有一个减号……”实验者：“看第一项，想想看。”学生：“现在如果调换位置……我们能做吗？”实验者：“这要你自己考虑——你能做吗？”学生：“我不知道……如果有一个和，你就可调换位置，但是这儿是一个减号……〔写：$3-4=+3-4=-4+3$〕。是的！正是这个方法〔写：$(-6y+3x)^2$〕。好，对了，我们得出了一个和，和的平方〔正确地解出这道题〕。现在我知道怎样做这些题了。〔实验者要他做这道题$(m+x+b)^2$。〕“我不知道怎样做这些题——这里有两个加号，两个和。这是两个和的平方。”实验者：“想一想，也许你能运用两数之和的平方公式解这个例题。括弧内的式子可以表示为两数之和吗？”学生：“可以〔写：$[(m+x)+b]^2$〕。现在我知道怎样做了。〔正确地解出这道题，只是开始时他写：m^2+x^2，而不是$[m+x]^2$，不过他思考一下后，自己改正了。〕现在让我们看第一个例题〔$(C+D+E)(E+C+D)$〕——我来做这道题〔写：$[(C+D)+E]\cdot[(E+C)+D]$〕。我已经有了与括弧里不同的东西……首先我必须重新排列各项〔写：$[(C+D)+E]\cdot[(C+D)+E]=[(C+D)+E]^2$〕。”然后他正确地解出了这道题。

A. U. 在用公式去解例题51^2时，有很长时间感到困惑，但是当给他暗示说：把指定的数作为一个和来表示那就聪明了，他就说：“51，就是50和1，即50+1。”于是很快就解出了例题。

即使在实验者的直接帮助下，没有能力的学生概括数学材料也感到很大困难。他们困难地从一个概括水平“过渡到”另一个概括水平，每一个水平都必须借助大量的练习来巩固。没有能力的学生在第一系列中自己不能从任何一题过渡到下一题，而且实验者的引导性提问、指示或者说理都证明无效。他们不能独自发觉运用简捷乘法公式去解系列Ⅴ中的例题的可能性，甚至连其中最容

易的题目 2 也不例外。

一个数学上迟钝的学生 G. K.，在学习公式$(a+b)^2$和应用这条公式的原理之后，着手解例题$\left(1+\frac{1}{2}a^3b^2\right)^2$。我们引用记录中的一段摘录。实验者："这个例题能用简捷乘法公式来解吗？"学生："这儿有些不同——右面 a 和 b 没有被加号分开……$\left(\text{写：}\frac{1}{4}a^6+2\,\frac{1}{2}\,a^3b^2+b^4\right)$。"实验者："这个 1 怎么办呢？"学生不响。实验者："好，做这个例题：$(2x+y)^2$。"学生写，大声地重述公式："$4x^2+2\cdot 2x\cdot y+y^2=4x^2+4xy+y^2$。"实验者："对。现在用同样的方法解以前的题目。"学生："可是，这儿有些不同……第一个的平方是$\frac{1}{2}a^3\cdot\frac{1}{2}a^3$。"实验者："让我们一起思考。要运用公式，我们必须肯定，我们是正在算两数和的平方，这是一个和的平方，你清楚吗？"学生："这儿（用手指着）数字 2 表示括弧里的东西被它自身相乘。"实验者："对。但括弧里是二项式吗？请指出第一项在什么地方，第一个'数'在什么地方。"学生："$\frac{1}{2}a^3$……也许不会吧，我在说什么啊？……在那儿，项与项之间该是一个加号，这儿没有第一项，只有第二项。"实验者："但是这个 1 呢？每个项，每个'数'可以是任一个式，你是知道的。"学生："啊唷，是的……那末第一项是1。"实验者："好。在括弧里什么符号把这些项分开？"学生："一个加号——就是说它是一个和。"实验者："现在，你看到这个例题和你解过的$(2x+y)^2$这个题目有什么相似吗？"学生："不，它们是不同的。那儿第一项和第二项里都有字母，但这儿只有第二项内有字母。"实验者："当然，那是对的。括弧里的二项式是不同的。但那儿和这儿都有一个平方，那儿和这儿我们都有一个和，那儿和这儿我们都有两数之和，你看到没有？那就是说，在这个意义上，它们有共同之处吗？"学生："有。那儿和这儿都有一个二项的和，平方了的。"实验者："因此，早就给你说了，要运用公式，只有这一点是重要的，就是

代数式应是两数之和的平方，这是主要的。清楚了吗？解吧。”学生：“清楚了。”（在实验者的帮助下，学生正确地解题。）

这个学生在解以后每一道题目时经历着同样困难。要区别右面一栏的题目也有困难。

对有能力的、中等的和没有能力的学生来说，解系列 VI 里的题目时也具有上述这样不同的特点。

甚至在解题之前，在初步的分析阶段，有能力的学生就迅速地看出这一题目与那一题目之间类型上的相似之处。在解出第一个题目后，他们容易地把一个题目的解法移用到其他题目的解法上去。他们同样轻易地看出那些外表相似面数学上相异的题目之间在类型上的差别。

有能力的学生在解题之前，就在“抓住”题目结构一般性质的基础上对这些题目做了概括。为此，他们不需要去概括解这些题目的方法。甚至早在他们确认解法模式是相似的以前，他们就已看出这些题目是同一个类型的。但是，如果他们已经找出解这些题目的方法，他们概括起来当然信心就更足了。

一个有能力的学生 E. E.，解题目 VI-C-1：“我们设 x 为工厂要制造的桌子数。这是一个关于三个有关系的量的问题：(1)桌子的总数；(2)每天生产的桌子数；和(3)天数。我们根据前两个量求第三个量：$x/48$——工厂原需生产这么多天。但是实际上少生产了 3 天。结果少生产了 100 张桌子，而且每天是生产 50 张。$(x-100)/50$——工厂实际生产这么多天，这个数比 $x/48$ 少 3 天。于是：$x/48=(x-100)/50+3$。（很快地得出正确的答案。）”E. E. 再解题目 VI-C-3：“这是同一种类型。这里也有一种三个相关的量之间的关系。解题原则应该是一样的。不过，这儿是在第一和第二种情况下的天数不变。设 x 为天数。那末 $240x$ 和 $280x$ 是在第一和第二种情况下种树的棵数，第二种情况多种 600 棵。那末：$240x+600-280x$；$40x=600$；$x=15$ 天。因此 $15\times240+400=4000$

棵树。”

能力中等的学生，他们自己通常不能把一些题目归入一个一般类型；他们自己通常不能从外表上不同的题目中看出共同的类型，但是他们在实验者的帮助下，一般能顺利地完成作业。一般说来，为了对一些题目进行概括或把一些题目纳入一个类型，光分析题目的结构对能力中等的学生来说是不够的。他们需要先解一些题目，然后才能比较和概括解法过程。

至于没有能力的学生，即使在实验者的仔细帮助下，他们感知题目中共同类型的因素仍有很多困难。即使在实验者的帮助下解出了这些题目，即使有机会把现成的解法原理与某个题目相对照时，他们也不能独立地把一些题目纳入一个共同类型中去。假如把这种类型的第三个题目给这样的学生，他会把这个题目归入一定的解法模式中去，但是他仍把这作为一个非常特殊的题目来解。

在几次不成功地试解题目 VI-C-1 之后，一个没有能力的学生 S. A. 断言：这道题是不可解的，因为缺少一种数据——天数。实验者：“但是，要真是那样这就不是一个问题了！想想看：如果天数是已知的，我们知道计划是一天生产 48 张桌子，那么就没有东西要求的了——两个数相乘，目的就达到了。但是你注意到我们需要求天数，这是对的。能求吗？你设 x 为桌子的总数，日产量是已知的。”学生：“我们必需用 48 去除总数，那将是 $x/48$，工厂就生产这么多天。”实验者：“是应该生产这么些天数。实际上工厂生产得好一些还是差一些？”学生：“好一些。工厂日产量是 50 张桌子。”实验者：“对。在离限期前 3 天时，工厂总共生产了多少？题目说明了这一点。”学生：“还差 100 张桌子。那么工厂已经生产了 $x-100$。”实验者：“对。工厂生产了多少天？”学生：“少三天：$x/48-3$。”实验者：“这个数还能怎样来表示？生产了 $x-100$，每天生产 50，生产了多少天？记住你怎么样得出 $x/48$ 这个数。”学生：“$(x-100)/$

50 天。”实验者：“现在你已经用一种方法表示了实际生产的天数，现在应该做什么？”学生：“天数是同样的，我们能列一个方程：$(x-100)/50=(x/48)-3$。”（在实验者帮助下解方程。）实验者：“现在仔细地看看并且记住怎样解这类题目。在这类题目中，总是有三个因素：总数，时间和每个单位时间的数。这些数量是怎样联系起来的？”学生：“单位时间的数除总数，得出时间。”实验者：“假如给你时间和单位时间的数，你能求出总数吗？”学生：“我们必须把第一个数与第二个数相乘。”实验者：“记住这类题目的解法过程是怎样的。现在做题目 VI-C-2。”学生：“这是同样的题目，但是一些数字不同。这儿也有个家具厂和桌子。”实验者：“好，找出所有这三个因素。”学生：“桌子的总数是 $4\times90=360$。可是时间是多少？这里，这些桌子在多长时间里生产出来是不清楚的。”实验者：“你为什么要知道这一点？把题目仔细想一想。”学生：“这个题目同那个一样。可是我们需要时间，我们搞出两个未知数了。”实验者：“试试看，做题目 VI-C-3。”学生：“我还没有做过这类题目，我们设 x 为树的棵数，可是几天呢？”（在实验者又一次作了详细解释后，她对这道题得出了正确的解法。）实验者：“现在让我们比较第一和第三道题。它们之间真的没有相似之处吗？比较一下解这两道题的计划。”学生：“那儿我们是除，而这里是乘。它们是不同的题目。”实验者：“当然这些题目是不同的，但是它们的本质相似吗？两者都要算一个总数吗？”学生：“是的，桌子的总数和树的总数。”实验者：“每个单位时间数呢？时间呢？”学生：“它们都在这儿。对了，这些题目是相同的。只是，为什么第一道我们做除法而第二道做乘法？”实验者：“你想一想。我们在第一道题目和第二道题目中求的是什么？”学生：“现在我懂了。在那里我做除法，因为我们是在求时间；而在这里我们做乘法，因为我们是在求总数。这些题目真的是相同的。因为那儿是桌子，而这儿是树，所以我搞糊涂了。”

有数学能力的、中等的和没有能力的学生，概括数学材料的这

些特点，也在他们解系列 IX 的题目(证明题)时表现出来。例如，有能力的学生能毫无困难地做题目 IX-B-1,在测验时能很容易地把证题方法移用到测验中的其他题目上去，能看出所有题目中证明的一般类型。一般地说,在刚刚解了第一道题目之后,他们就能"当场"辨认出证明的类型和类似证明的典型模式。

这里是一位有能力的学生 P. A. 怎样解题目 IX-B-1 的:"证明:任何三个连续数之和能够被 3 除尽。我想,连续数就是每个后面的数比前面一个数大 1。现在我怎样来证明呢？确实,2、3 和 4,其和能够被 3 除尽;12、13 和 14,其和是 39。可以这样证明:三个相同的数之和,当然能被 3 除尽。然后三个 1 被加起来(第二个数比第一个数大一个 1，第三个数比第一个数大两个 1)，也能被 3 除尽。这也能用代数的方法证明: $x+(x+1)+(x+2)=3x+3=3(x+1)$。最后的代数式总能被 3 除尽，不管开头的 x 是什么数。好了，我明白了证明的原理。"实验者:"好，现在试试看，解题目 IX-B-6。"学生:"唉,这是便当的。原理是相同的——用代数的方法。两个分数之和等于 1。那么,这两个分数是:

$$\frac{x}{y} \text{ 和 } 1-\frac{x}{y};$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(1-\frac{x}{y}\right)=\left(1-\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y};$$

$$\frac{x^2}{y^2}+1-\frac{x}{y}=1-\frac{2x}{y}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{x}{y};$$

$$\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}+1=\frac{x^2}{y^2}-\frac{x}{y}+1。$$

左边等于右边。"(他同样从容地不加深思地证明了其余的代数定理。)

能力中等的学生，通常不能完全独立地从最简单的证明过渡到最复杂的证明，但是他们依靠中介的步子能够达到目的而不会有特殊的困难。

对没有能力的学生来说，证明方法的概括，已知类型的代数证明原则的确立，以及把这种原则移用到其他证明上去，这是一种超出他们的能力范围的工作。即使是最容易的过渡也需要实验者的帮助。这里是一个没有能力的学生 L. Yu.，在实验者的帮助下已经掌握了证明方法之后是怎样演算题目 IX-B-1 这一作业的。

学生：（解题目IX-B-2。）"平方是指什么？什么数的平方？"实验者："有些数不是任何一个数的平方——例如 13 或 20。而有些数是把一个数平方的结果——例如9(3^2)，25(5^2)，64(8^2)。"学生："这我清楚。而这里，我怎么证明呢？"实验者："想一想。象前面的题目一样，应用代数方法证明。代数方法要求：'设想一个任意的数。'在代数中'一个任意数'是怎样表示的？"学生："呀！现在我知道了：$x\cdot(x+6)+9=x^2+6x+9$。这儿 x^2 是我所要的一个数的平方。"实验者："这你只是取出了结果的一部分。现在你必须证明你的整个结果是某数的平方。你的结果是什么式子的平方？回想我们最近复习的用于简捷乘法的公式。"学生："我知道。我们得到 $(x+3)^2$"（没有立即回答。）实验者："但是，结果总是得出一个平方吗？"学生："我不知道。"只是在实验者漫长的解释之后，他回答："照我看来，结果总是得到平方，因为我们取了一个任意的数。"

问题发生了：究竟是什么给有能力的学生提供了"当场"作出相当广泛的概括的机会？即究竟是什么使他们有可能不经过在实践基础上初级的逐步的概括，而在某种题目类型范围内立即移用一种运算？

让我们考虑一个心理学上难以理解的事实。我们要求许多学生和成人，如果可能的话，在心中尽可能快地解题目 XI-A-3："写一个被 5 除余 7 的一般代数式。"（为了熟悉解法，我们要他们事先表述能被 3 除尽的一般代数式。）

这道题目的特色在于：尽管可以（并且没有特殊困难）用 $(5x+7)$ 把所有这样的数代数地表示出来，但是题目没有意义，因

为没有也不可能有被5除而得出余数7这样的数。这种题目的类型完全是现实的，可是它的特定的具体变式是不真实的。有这样似是而非的情况：有数学能力的学生(甚至是成人)很经常地(在我们的实验中，比能力差的人更经常!)写出$(5x+7)$的错误回答，只是后来才"明白过来"。能力差的学生却很少弄错，恰当地指出这个题目是没有意义的。甚至每个人都毫无疑问地懂得这一点(不知道7比5多些，这是奇怪的)。S. I. 夏皮罗用同样的题目对年纪大些的学生测得类似结果。这是怎么回事？

分析这个难以理解的事实，揭示出一种有趣的情况。结果是：绝大多数有能力的人，把这道题目作为一般题目去解，把它们从具体事实中抽取出来。他们把这道题目当作这样一种一般题目去解释："求一个数，这个数被给定的数除得出余数。"接着就是这种一般形式的解法："为此，我们必须用x乘给定的数再加上余数。"最后，他们作出从抽象到已知的具体结构的转化(把一些给定的数机械地代入)："等于$5x+7$。"按照受试者的陈述，把这个题目转化为一般形式并且从一些具体的数中抽象出来，大大地简化了解题过程(应用一般模式$ax+y$解题的那些人声称："数字阻碍我理解题目的本质")。这就解释了有能力的学生常犯的错误。能力差的一些人，无论怎样都不试图用一般形式解题。他们用最原始的方法解题：他们试图用代入法找出所有具有这种性质的特殊数。可是，在他们试图去找第一个具有这种特性的具体数时(12)，他们就相信题目没有什么意义。在系列XI中对另一些题目的解法也同样地表明了这一点。

对实验题目的解法的分析业已表明：揭示出来的这个特性显然具有普遍意义，我们所研究的有能力的学生，当遇到一类新的题目时(在多数情况下，他们以前没有解过这些题目)，经常(当然并不总是)把这种类型的第一个具体题目，当作一般题目用一般形式去阐述和解答，找出它的"本质"，挑选出主要的线索，并把它们

从那些外部的、特殊的、具体的数据和数字中抽取出来。很显然，在某种意义上，这就代替了他们对作为运算基础的一般规则的研究。这样，在解出一种给定类型的第一个具体题目时——如果人们可以这样说的话——他们就解出了那种类型中的所有题目。

他们中有些人是在具体水平上解题之后，再在一般水平上解释题目。另一些人是在解题之前，直接把题目转变到一般的水平上，用一般的形式解题，代入具体的数据和数字，并且再把题目"转变"回到具体的水平上。奇怪的是，有能力的学生并不用一般的方式去做很简单的题目——他们"立即看出了答案"。因此，概括是在解题之后作出的。题目越复杂，这些学生就越是常用概括化的解法。他们提出了我们已经熟悉的解释："数字妨碍我理解题目"。由于在一般水平上解释题目，并把具体数据作了抽象，一些困难就被克服了。

正是由于在最初一道题目中理解了解某种特定类型题目的一般原则，有能力的学生很容易地把解题原则移用到同一类型的其他题目上，因为在这一类型的每一个后继题目中，他看出了一个变式，这个变式是属于他所熟悉的题目一般类型的（正如他们中有一个人所说的那样：这种题目是一个"复制品"）。这个题目是关于兔子的，那个题目是关于卢布或公里的，等等，这些并不会干扰他。这种概括化解法使他以后在智力上得到巨大的节省。因此，用 S. I. 夏皮罗的话说："给定类型的另一些题目，甚至在提问之前，他们实际上已经解出来了。"

我们举一例来说明这点。一个有能力的学生 K. R.，在解一个例题时，自发地独立推导出用于简捷乘法的公式（两数和的平方），他是这样推理的："$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ba+b^2$。中间两项总是相同的，因为对任何数来说，这都意味着，我们两次用第一个数乘第二个数。象下面这样做就更容易：只需把第一个数乘第二个数的结果加倍，而不必做两次乘法再做一次加法。于

是，当有一个两数之和的平方时，不管它们怎样，总是都可以用这种方法去做：把它们中每一个数的平方相加，再加上它们的积的两倍，也就是，$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$。”

另一个例子是，一个有能力的学生 V.G.（能在一般的水平上解题）对题目 VI-C-1 和 VI-C-3 的解法。他在慢慢地通读了两遍题目之后开始解题：“在这个题目中，什么都是由三个事实构成的：总数，生产率和时间。它们都是处在这种关系中：$N=R\cdot T$（这就是他表示三个量的方式）。其中一个量是已知的，另一个量必须用 x 来表示，第三个量能够用前面两个量来表示，这样也许能把一些什么列成等式。那么，在本题中看上去怎样呢？这里有两种情况（画一个表，很快地把它填在里边[见图 56]）。那么什么才能被列成等式？这儿是说，‘在限期前有三天时间’，就是说，第二种情况下的时间比第一种情况下的时间少 3 天。（无困难地解题。）噢，怎样解这些题目，清楚了。（一个相当典型的陈述：解了一道题目，这个学生就懂得怎样解所有这些题目——原著者注。）

	1	2
N	x	$x-100$
R	48	50
T	$\frac{x}{48}$	$\frac{x-100}{50}$

图 56

	1	2
N	$x-400$	$x+200$
R	240	280
T	$\frac{x-400}{240}$	$\frac{x+200}{280}$

图 57

这个学生转而解 VI-C-3 题，他慢慢地读了一遍题目后，说：“可以用同样的方法解这道题。”他很快地画出一张表，没有困难地填了这张表（见图 57）。

他再扫视了一遍题目，说，“时间是相同的。”并且很快地列出方程：$x-400/240=x+200/280$，随后解题没有出现困难。实验者要求他讲清楚如何做出这道题的，他回答说：“我就象那道题一样做的。这儿没有什么要思考的，题目本身已经作了解答。它是同

一类型。”实验者要求他无论如何把这说说清楚，他从容地没有困难地解释道：“那儿和这儿都出现了三个量的组合：总数，时间和每个时间单位数(每一瞬间)。当然，有一点不同——这道题讲的是桌子，而那道题是树，我们必须发现一些不同的地方。”

第二阶段

如前所述，在第二阶段中，我们研究了一组非常有天赋的孩子。这些材料完全证实了在研究的第一阶段中对概括化数学思维所做出的描述。具体材料可从11章中关于这些儿童的记述中得到。

尽管这些儿童的年龄是8～10岁，但在他们身上对数学对象、关系和运算“立即”进行广泛概括的能力已经表现得非常清楚。在分析一个没有任何比较和对照的原始例题或题目时，他们在这种年龄时就能极为迅速地“抓住”基本关系，并且自信地把运算移用到非常间接的对象上。

我们举一些最显著的例子。

九岁的索尼娅L.，刚刚熟悉从括弧里提取公因数的多项式因式分解方法。她是从一个简单的例题：$5a+5b=5(a+b)$中学会了它。随后立即给她一个尽量复杂的例题：$4m^2(2p-q)-2m(q-2p)-2m(q-2p)$。这儿，与原始的例题相比较，出现在括弧外边的是一个非常复杂的因式，而且人们必须事先觉察到其中一个括弧里的符号可以正负互变。这儿是解法纪录：“啊，是个什么例题啊！但它只是看上去难做。在所有三个部分中……甚至两个，不，三个部分中都有一个公因式，这立即就看得出的——在其中两个括弧里，我们只需要改变符号(立即写)：$2m(2p-q)(2m+2)$。”实验者：“你说，你怎样得到在第二个括弧里的式子。”索尼娅L.：“嗯，我们从第一项得到$2m$，变号后，从第二项和第三项中得到两个1，我把它们加起来。”实验者：“你为什么判定这个例题和前面一个例题是相似的？”索尼娅L.(惊奇地)：“嗯，为什么不是？不管你有多少项，也不管你有什么样的项，如果有公因式，就能够把它们

从括弧里提取出来。”

众所周知，概括能力是与判别能力密切相关的。有天赋的儿童能非常精细地区分极为相似的材料。给他们中的一些人两道题目(取自夏皮罗的研究)：(1)一个人上山每小时行2公里，下山每小时行6公里，求他的平均速度。(2)一旅客以每小时6公里的速度步行。走了一段路程后，他疲劳了，速度减慢为每小时2公里。当他达到目的地时，他以每小时6公里步行的时间与以每小时2公里步行的时间，恰好一样多，求他的平均速度。

我把这些题目给中等数学能力的七年级学生做，他们中没有人发现任何差别；都作出同样的回答：每小时4公里(尽管我坚持要求他们思考)。在非常有能力的组(7)里，所有的孩子对两个题目都作出了正确回答，一个是每小时3公里，一个是每小时4公里。这里是个典型的推理(基里亚 Kh.)：“当然，这些题目是相似的，可是，有一点不同。好象什么都相似——词和数字。但是，这儿有一个很大的差别：在第一个题目中，在两种速度下所走的距离是相等的，而在另一个题目中，以两种速度步行所花的时间是相等的。在第一个题目中，以两种速度行路的时间不同，以较慢速度行走当然要比以较快速度行走的时间长一些，因此，平均速度不在2与6的中间，而是更为接近2。在第二个题目中，以两种速度行走的时间相同，因此，平均速度将在2与6的中间，即每小时4公里。在第一个题目中，可能是这样的：上山时，1/2小时走一公里，下山时，1/6小时走一公里，平均走一公里要$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\div 2=\frac{1}{3}$小时，即平均速度每小时3公里。”

在非常有能力的儿童中，努力以概括化形式解题(或者对一个题目很快概括出具体解法)呈现出独特的必然性(在S. I. 夏皮罗的观察中，这种倾向在有能力的年龄较大的儿童中得到充分的发展)。他们无须面临有概括数学对象、关系或运算的任务，他们乐意

地主动地去做这种概括。这些有能力的学生把新遇到的一类题目中的第一个具体问题，往往是当作一般的典型题目去解的。如果是一个普通的学生，解了题目 A，就只是 A。而有能力的学生，是把题目 A 当作 A，也当作 A_1，A_2，A_3……A_n，即当作给定类型的所有题目来解的。

在11章里我们举了一个引人注目的例子，这个例子是索尼娅L.对三角形内角之和定理的证明的概括，这种概括使她自己推出了凸多边形内角和的公式。我们将举另一个能说明特点的例子，这个例子的特点是：在解题前就把一个题目转换到一般的水平上。九岁的索尼娅L.在解这样一道题："假如每根树枝上停一只鸟，那么有一只鸟没有地方停留；如果每根树枝上停两只鸟，就有一根树枝多出来，问有多少鸟和树枝？"解："一种简单的题目，但比别的难度大……这儿可以有不同的分布……总之，有两个未知数……假如第一个数除以第二个数，我们得一余数，假如被另一个数除……不，不是那样……假如第一个数除以第二个数，我们不是得到某个数和一个余数，就是得到比这个数大1的数，可是有一个缺额(索尼娅的表达方式——原作者注)。怎样解这样的题？……(不是这个，而是这样！这种话是有能力学生的典型话语。——原作者注)啊，我想到了……这就是余数加缺额等于第二个数！(实验者要她讲清楚。)好，就是这样：在第二次除以后，我们多一个1，那是因为余数加缺额恰恰构成第二个数。现在我知道怎样解这类题目了！"实验者："等一等，你没有解这一道题！多少树枝？多少只鸟？"索尼娅："喔，我忘了……首先是多出一只鸟，然后是缺少2只，所以是3根树枝和4只鸟。"这儿有趣的是：索尼娅在一般的水平上已经解出了题目，却忘记了关于原来题目的一切。

她解下面这个题："女儿8岁，母亲38岁。问几年后，母亲的年龄是女儿的三倍？""那就是说，母亲的年龄在增加，女儿也在增加，她们的年龄在变化着……可是她们两个相差的岁数没有变化，

母亲总是大这么多岁数……嗨，清楚了：在母亲的岁数中有几个女儿的岁数(索尼娅是这样的提法——原作者注)，那么，在相差的岁数中应该是少一个女儿……这里是多少——3倍？那么在母亲的岁数中有3个女儿的岁数，相差2个女儿的岁数。母亲和女儿相差30岁，女儿是15岁，那么在7年后。”索尼娅掌握了题目的类型和解题的模式(并且“当场”做了)，她开始迅速而正确地解同样类型的题目。

对概括的需要，是非常有能力的学生的典型特征。上面提到的这种需要，常常使他们断然反对实验者企图把他们引向给定题目的具体解法。萨沙 L. 在解如下一道题：“一本书的价钱是一本练习簿的4倍。一本练习簿比一本书便宜30戈比。一本书和一本练习簿各值多少钱？”萨沙：“要求出比一个给定数大几倍，而且大大超过它的一个数，我们怎样来解这种题目呢？它们也许可以这样解……”实验者：“听好，萨沙，不需要这种一般的推论，这道题很简单，请你直接回答！”萨沙：“不，我想知道怎样用一般的方式解这些题目。等一下”(继续在一般的水平上解题)。

基里亚 Kh. 演算这道题：“一列火车掠过一根电线杆需15秒钟，经过一座450米长的桥需45秒钟，求这列火车的长度和它的速度？”他选用了一般的解题方法，象解“一列火车掠过一根电线杆需 t 秒，经过 s 米长的一座桥需 t_1 秒”这样的题来解上面那道题。基里亚不管实验者的种种“使他离开歧途”的劝告，不管解题的时间限制，继续他的解题，导出了公式：

$$x(\text{火车长度}) = s \cdot \frac{t}{t_1 - t},$$

解出了这道题，满意地说：“现在，作为报答，我能够不加思索地解象这样的任何题目了！”

第三阶段

在第三阶段研究了一组能力差的学生。对能力差的学生详细

研究(历时一年)，又一次令人信服地表明，这些学生在独立工作时，只能达到对数学材料的初级水平的概括。只是在实验者的直接帮助下，经过非常努力的工作，才能逐渐产生较高水平的概括(任何很好掌握数学的必备要素)。有时这种概括的出现，只是实验者特别编排的练习的结果。而在困难情况下一点概括也没有。

例如，在我们的实验里，绝大多数受试者从一个概括水平过渡到另一个概括水平时有困难，每一个水平都需要用大量练习加以强化。要他们看出怎样解例题 $x^n \cdot x^m$ 以便把 $x^{n+2} \cdot x^{3-n}$ 这类例题归入这一模式，他们必须做 8 至 12 道 $x^2 \cdot x^3 = x^5$ 这种单一类型的练习。

在被测查的学生中，没有一个人知道怎样正确地指出和证明：哪一组(在测验 V-B 中)给定的代数式能被归入"两数之和的平方"公式中，哪一组就不能被归入这一公式。一些学生只是把第一个式子归入这个公式，另一些学生把所有的几个式子都归入这个公式(例如，受试者 G. S. 和 V. B.)。在后一种情况下，概括是明显地轻率的，不完全的，而且是根据单纯的外部特点作出的("每个地方都有 as, bs 和 $2s$")。

我们的受试者对测验 V-B 里的一些题目的解法是非常有意义的。当然，他们没有一个人一开始就(按照他们的观点)看出第一个变式和最后一个变式之间有什么共同的本质。甚至实验者的帮助在这里也无济于事。他们指出："这几字母是不同的，有一个幂和分数，但是第一个不象这样。"两个受试者(I. G. 和 V. U.)指出："只是括弧和括弧后面的 2 是两者相同的"，但他们对实验者的问题("那个真是不重要的吗？")回答道，"不，这些例题也还是很不相同的——它们不能用这个公式去解。"这些受试学生不能独自觉察到简捷乘法公式适用于 V-B 的，甚至是第二组变式和第三组变式中的例题。大多数学生(19 个中的 11 个)只能把解原来题目的方法独立地移用到第一组变式的题目中去。另一些(19 个中的 8

个)只有在实验者的帮助下才能这样做。我们的学生不能对每个连续变式的题目自己进行迁移，而且，实验者的所有诱导性提问、劝告和论据在这儿都不起作用。从原来题目迁移到第四组、第五组、第六组变式的题目引起了特殊的困难。

人们会以为，学生已经理解了和概括了一道代数题目的解法。但是当解下一道题目时，他会经历同样的困难，而且会需要实验者的帮助，按几乎是同一思路进行讨论。几乎每个人都是这样。

所以，只是在多次练习和特殊训练之后才产生概括，在我们的经验里，这种概括从来是不够广泛的。

在系列 VI 里的一些题目上看到了同样的情况。没有实验者的帮助，这些学生中就没有一个人能从这些题目中觉察出一般类型。另外他们中的大多数(19 个中的 14 个)从不同类型的一些题目中看到某种一般的东西。其余的人(19 个中的 5 个)确信所有的题目都属于不同的类型。

这些学生的绝大多数，甚至当他们在实验者的帮助下解这些题时，还是不知道怎样概括这些题目，也不知道怎样把这些题目组合成一般类型，他们一有机会就对照解某一题目的现成原则。假如给他们一个同一类型的第三个题目，他们并不把它归入一般模式，而把它作为一个十分特殊的题目来解。同类型的题目必须是非常相似的，他们才能把这些题目结合成一个类型。只有 4 个学生能够正确区分出一些题目，把另一些题目结合在一起，而且只有当他们对照解这些题目的模式时才能这样做。

当所有供概括的条件都摆在面前时仍不能概括数学材料，也不能觉察出在外表不同或性质各异情况中的一般原则，这不仅是数学上没有能力的儿童解实验题目的特点，而且也是对他们进行实验性教学的全部过程的特点。

要使自己从一些具体的数字表示式中脱身出来，对我们的学生来说，总是非常困难的。他们学习代数的基本困难，是和需要用

一般字母表示的数进行思考有关的。代数的实质是一种对数的抽象进行的运算，我们的学生正是在理解代数的实质上有困难(有的困难多些，有的困难少些，但他们都有困难!)。代数中的字母是一些失去了具体数字的数，他们很难理解这一点(也参见：V. A. 亚历山大罗夫，18)。许多人过了很长时间才确信，代数是一种用字母来进行的运算，这些字母能够相加，相乘或者依一定的规则进行乘方。在学习几何时也发现类似的困难。对这些学生来说，要构造出一个一般形式的证明，总是困难的。几何证明的实质是，如果我们对一个特殊事例、一个特殊图形证明了一条定理，那么我们就对所有可能的类似例子一般地作出了证明，就是说，我们是在使证明一般化，对这些学生来说，正是在理解几何证明的这种实质上有困难。他们并不理解下述要点：这样做开辟了超越感性经验局限的可能性，因为要证明所有的变式是不可能的。

正如我们早先所指出的那样，在实验性教学期间，我们多次向我们的许多学生提示，他们在接连地对图形的不同变式证明同一条定理。他们几乎从不领会这一点，即一旦证明了一条定理之后，他们也就对所有可能的变式都证明了这条定理(尽管我们用这样的话向他们提示了这种思想："这样我们已经证明了，在这个三角形中内角之和是180°。那末在象这样的一种三角形中内角之和将会怎样呢?")学生会再一次作图证明，得到同样的结论，然而……(象V. D. 所发生的)他们会假定这是偶然的巧合。他会认真地考虑在另一个例子中得到另一种结论，同时如果，比如说，(由于错误)结果有些三角形的内角之和等于270°，他也不会感到惊奇。当然，一个图形的任何非惯例的或者不常见的画法就把他们弄得晕头转向，于是这些学生不能证明他们所知道的定理，因为，他们甚至并没有试图去概括证明所用的图形。

第四阶段

在第四阶段，正象已经指出的那样，用与概括化有关的系列研

究了54名学生(24名有能力的,22名能力中等的和8名没有能力的)。我们只简要地叙述一下解实验题的质的方面,因为这方面的材料完全证实了以前确立的论点。我们将集中注意于材料的量的处理上。

根据我们对概括数学材料能力的研究结果,对数学能力不同的学生识别出下列几种概括水平:

1. 甚至在实验者的帮助下,做了一些中介的、同一类型的练习题之后,也不能按照本质特征概括数学材料。

2. 在实验者的帮助下,做了一些同一类型练习题之后,能按照本质特征概括数学材料,但在个别的地方欠精确和有错误。

3. 能独立地按照本质特征概括数学材料,但需先做一些同一类型练习题,并且还有一些小错误。在实验者稍微给了一些提示和诱导性提问之后,可以作出正确无误的概括。

4. 没有遇到困难,不需要实验者的帮助,在解某一类型题目时无需特别练习,就能正确地、直接地和"当场地"概括数学材料。

我们挑选了一些关于概括的系列作统计处理,参加实验的全部受试者,都经过了这些系列。这些系列是V, VI, VII和IX,经过这些系列的,在所有四个阶段中包括了96人(其中上面已经提到的有54名,在第一和第三阶段中两个组各有19名和最有天赋的组4名)。这96名中,4名是非常有能力的,33名是有能力的,37名能力中等和22名是没有能力的。这些受试者根据他们对每个指定的系列中的题目的解法,被安置在某个概括水平里。表14表示总结性数据。

让我们用对于测验V-A的解法(参看第8章的说明),表示各组学生典型的概括过程。图表(图58～61)是以我们所研究的四个阶段结果为基础的。在这些图表中表明了各组最好的和最差的结果(用不同的线表示)。在所有实验里只允许实验者给以细微的帮助,为的是要弄清受试者在这种情况下进展有多顺利。只是为了

表 14　受试者按数学材料概括水平的分布

（组内人数的百分比）

组	系列	概括水平			
		1	2	3	4
VC	V	0	0	27.0	75.0
	VI	0	0	0	100.0
	VII	0	0	0	100.0
	IX	0	0	25.0	75.0
C	V	0	0	30.3	69.7
	VI	0	0	27.3	72.7
	VII	0	0	21.2	78.8
	IX	0	0	24.2	75.8
A	V	0	73.0	27.0	0
	VI	0	59.5	40.5	0
	VII	0	45.9	54.1	0
	IX	0	64.9	35.1	0
I	V	100.0	0	0	0
	VI	86.4	13.6	0	0
	VII	77.3	22.7	0	0
	IX	95.4	4.6	0	0

注：VC 和 C 两组结果没有多大差别，我们应考虑到前者在 9～11 岁时研究的，而后者在 13～14 岁时研究的（用的是同一个系列）。

要作比较才让能力差的组做测验 V–A 的；之后，就让他们转做容易的测验，即测验 V–B。

从图表中可以明显看出，差异是十分显著的。有能力的学生

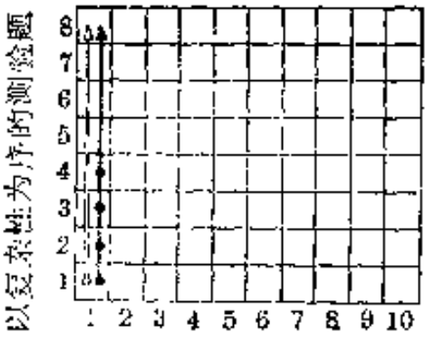


图 58　有数学能力的一组受试者概括练习的最佳结果（用白线表示）和最差结果（用黑线表示）

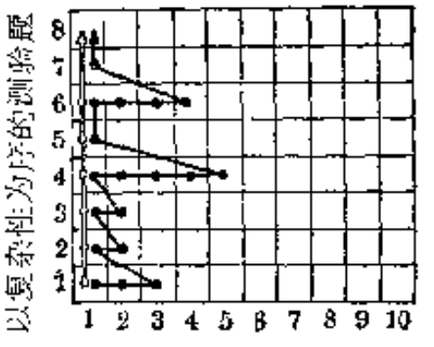


图 59　数学能力中等的一组受试者概括练习的最佳结果（用白线表示）和最差结果（用黑线表示）

(图 58)解题数不超过三道题，就把第 1 题的解法迁移到第 8 题。能力中等的学生(图 59)需解 5～17 道题(13 种式样)；而没有能力的学生，在实验条件下，通常不可能作出这样的迁移。他们的最好结果(图 60)，达到系列中的第六级，需做 30 次练习；最坏结果(图 61)，达到系列中的第三级，需做 20 次练习(接下去的 15 次练习对于以后的概括也没有什么帮助)。

下面我们简单讲一下受试者对仅在第四阶段用的那些题目的解答的结果。

系列 VIII 中的题目，旨在揭示受试者是否能够只分析一类现象中的一种现象，而不把一种现象与另一种现象进行比较或对照，就能够形成概括了。

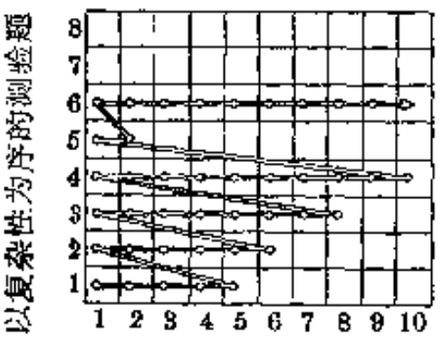


图 60　没有数学能力的一组受试者概括练习的最佳结果

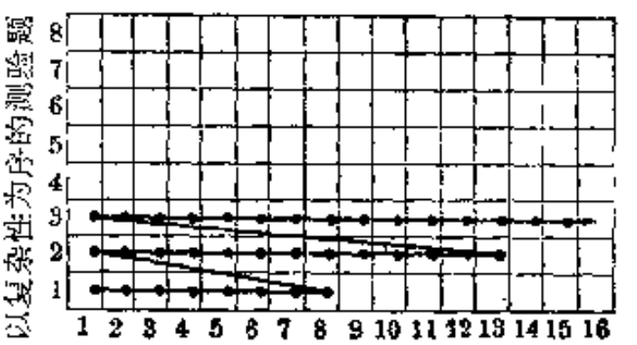


图 61　没有数学能力的一组受试者概括练习的最差结果

绝大多数有能力的学生顺利地做了这一系列中的许多测验。他们只要分析了一个例题、一道题目，就能够对那一类型全部例题或题目应该具备的有关共性，形成一个确定的概念。对他们来说，对这一个别现象(例题、题目)的本质的深刻理解代替了对同一类型的许多现象的比较与鉴别。

有能力的学生是怎样分析了这一个现象，便概括了他们实际上还没有碰到过的一些现象的呢？从我们的研究记录中选取出来的下述摘录将给这一过程提供一个概念。七年级学生 S. S. 这样解 VIII-A-2 题 (编一个与给定题目类似的题目)："编一个象这

道题目那样的题目，就是说编一道同一类型的题目。……这一题目的实质是什么呢？渔民、香烟——那是不重要的。有三个相同的未知数。这些未知数分别减去一个已知数，所有剩下的数等于原来的每个未知数。如果所有剩下的数合在一起等于一个完整的未知数，那么每个剩下的数就是未知数的三分之一。未知数减去了它的三分之二。那么已知数即为未知数的三分之二。每个渔民有六支香烟。……因此，原来三个数也是不重要的。它们可以是四个或五个。于是：有一些相等的未知数，减去相等的数量，剩下的数的和就等于每个原来的数。好，我可以编上百道这样的题目。例如，四个朋友有同样多的钱，每个人花去了 60 戈比后，他们剩下的钱的总数等于每个人原有的钱。那是一道题。这儿是另一道题：五个猎人有相等数目的子弹。每人打了 12 发子弹后，他们剩下的全部子弹等于每人原有的子弹数。问有多少颗子弹？”

一位六年级学生 Yu. K. 这样解答 VIII-A-1 题：“怎么啦，这是道简单题。很容易编一道与它相似的题。我只要先理解这道题。对要编的一些题目来说，这里什么是重要的，什么是不必要的呢？嗯，这些给定数——只对这一道题是重要的。‘工人’、‘零件’也同样。我们已把这一切都扔开，剩下的是什么呢？一个总数和一个加数，那么就可以确定另一个数，并且把它求出来。因此可以这样，例如：两只汽船从河边相距 486 公里的两个村庄同时出发，相向航行，一只汽船的速度为每小时 26 公里。如果它们在航行 9 小时以后相遇，那末另一只船的速度为多少？”实验者：“为什么你认为这些是同一类型的题目？”学生：“它们当然是同一类型的题目，因为它们是用一种方法去解的。”

她还解了 VIII-B-4 这道题：“一个偶数的一般式？任何一个偶数？一个偶数总可以被 2 除尽。那么，如果我们把任何一个数乘以 2，我们总可得一个偶数。那就是 $2a$。我们这里的题目是：写出一个奇数的一般公式。那就是 $2a+1$。”

这些例子表明，在这种情况下的分析具有方向性；这种分析正确地指向着区分本质特性与非本质特性。而在运用通常的概括方法时，能力中等的学生是通过比较才知道这些特性的普遍性的。但在这儿，学生是从这些特性的本质推知特性普遍性的。当然，在分析一种现象时，一个人不可能知道这一特性是普遍的。但是，他能知道它是本质的，而作为本质就意味着是必要的，因而对于这一类型的一系列现象这个特性也应该是共同的。那就是说，这一特性会不可避免地反复出现。为了找到什么是本质的和普遍的，有能力的学生一点也不需要去比较哪些特性是反复出现的，哪些是变化着的(而能力中等的学生是这样做的)。这种思维特点是跟把对数学对象、关系的知觉加以形式化的能力有关的——当"你看出这个骨架"时，给它填补上具体的内容是不会有多大困难的。这就给有能力的学生一个机会，从单个事例中去理解类型以及类型中全部的大量变式。在这一点上，他们就大大优于能力中等的学生。本质的和普遍的东西不简单是反复出现的孤立的事情(相反，这甚至会把人引入歧途)。正象 S. L. 鲁宾斯坦所说的："一个事物是本质的，不是因为它为一些现象所共有；相反，一个事物为一些现象所共有，是因为它对这些现象来说是本质的"(353，第 40 页)。"某一特性对相应的现象来说是本质的，从这一事实出发必然导致这些现象的普遍性"(353，第 42 页)。

系列 X 中的题目，旨在研究对于解题方法的概括的特点，即把解题方法的有不同特点的精巧复制，看作是一种解法的强化与概括化过程(萨马林，363，第 246 页)。卡班诺娃-梅勒把这些事例看作是智力活动模式的形成，意思是指对于一种概括化运算方法的掌握(148，第 67 页)。

实验表明，有数学能力的学生不只是概括一个题目，他们还得出了种种概括化的方法，得出了解答同一类型中各小类题目的算法，得出了一般的推理方法，而且他们仅只根据某一类型中的一个

例题或题目，就“当场”这样得出来。

这里是对于不同数学能力的学生解答测验 X-A 中题目的评分数字(详见第 8 章)。

有能力的学生。最佳结果：把解法原则从第 1 题立即迁移到第 12 题。最差结果：1-8-10-12(解法原则直接从第 1 题迁移到第 8 题，然后分别解第 9 及第 10 题，而第 11 及第 12 题则处于次发展区)。

能力中等的学生。最佳结果：1-5-7-8(解法原则立刻从第 1 题迁移到第 5 题，然后分别解出第 6 及第 7 题，而第 8 题则处于次发展区)。最差结果：1-4-5-6。

能力差的学生。最佳结果：1-2-2-4(解法原则从第 1 题迁移到第 2 题，之后独自就没有什么进展；第 3 及第 4 题则处于次发展区)。最差结果：1-1-1-2(不能把解法原则迁移到其他题目，在次发展区，也只能解答一道题，即第 2 题)。

系列 XVIII 中的题目，旨在研究推导出一种完全新的和不熟悉的法则的能力、推导出一种指导原则的能力和在特殊事例的基础上用一般的形式把函数依存性表示出来的能力——这就是产生一种属于小“发现”类型的独立概括能力。在这一系列测验中，差别显得特别明显。没有一个没有能力的学生能做这些测验，而所有有能力的学生都顺利地完成了任务。

绝大多数有能力的学生 (24 人中有 20 人) 甚至不需要一个个地平方各数或分析、比较其结果，就立即用一般的形式解出了系列 XVIII。我们引证记录中的一个片段 (Ya. L., 六年级)：“为什么要比较各个结果呢？我正在用另一种方法更好地解这道题。所有这些数是这样组成的：25, 35, 45；那也就是 $10x+5$。

$$(10x+5)^2=100x^2+100x+25。$$

假如 25 在括号外面，那末……，可是不，那就得不出什么……。但这里没有什么别的事情可做了，可能是这种方法：把第一位数平

方，再加两个零，然后单是第一位数加上两个零，然后是25。把所有数加起来，容易地而且迅速地，$95^2=8100+900+25=9025$。”

尽管有实验者的帮助，没有能力的受试者中谁也不能得出这样的概括，或是找出末尾为5的两位数平方的基本算法。他们能感知（看出，而不能解释）的只是这种数平方末尾总是25。

这一系列中的其它测验显示了完全同样的结果。例如，在测验XVIII-C中（归纳三角形各边长的相互关系），有能力的六年级学生通常在最初几个例题中就掌握了关系：“任何两边之和总是大于第三边”或“最长一边总是小于另两边之和”。“如果两边之和等于第三边，它们与第三边就恰好重合，这就不存在一个三角形——将是一条线。如果两边之和小于第三边，它们就不能相互‘接上’，这时也不存在一个三角形”（F. S.，一个有能力的六年级学生）。这样的论证并不是根据对不同事例作比较而得出的，而是只要对一个事例进行一次分析就足以得出原则来（在此之前，如果一个有能力的学生试着做一、二种变式，那也不是为了比较，因为在一个事例中，这种分析就已很明显了）。

没有能力的学生要得出这样的概括，则是多次尝试的结果，而且通常都是靠了实验者的帮助。他们在很长一段时间（20分钟之久）内混乱地尝试着，他们检验了大量的组合，发现有的可组成三角形，有的组不成三角形，但是离开了实验者的帮助，他们就不能推导出原则来。

总起来说：对于用因素分析分离出来的普遍因素所作的解释是完全无可怀疑的。这里的普遍因素是指概括数学对象及其关系和运算的能力。当然，这种能力在某一程度上是全部学生所固有的；不然他们就根本不可能学好数学。但是，有数学能力的学生对数学材料的概括在质上是截然不同的。

苏联心理学中有这样的论点：任何概括，包括数学的概括，依赖于对特殊事例的比较以及逐渐地分离出一般性质，并且这些特

例中无关特性要有广泛的变化，而有关特性则保持不变。波果亚夫连斯基在苏联心理学会第二届代表大会上作的题为"发展教学的心理学前提"的报告(1963)中，指出了组织学生认知活动的主要条件为：(1)在分析足够数量的典型的具体事实基础上，推导出一般规律。(2)变化具体材料，这样做使得比较容易分离出本质特征(43，第85页)。

梅钦斯卡娅与莫罗在提到算术中的概括这个同样的问题时说："学生形成各种适当的概括的一个必要条件，就是变化非本质的特性，……保留那些恒定的不变的本质东西"(292，第24页)。另外，梅钦斯卡娅、波果亚夫连斯基、卡班诺娃-梅勒、卡尔米科娃和朱可娃指出，这里问题不在于变化的数量，而是在于变化的合理性。变化并不需要非常广泛，因为要穷尽构成掌握概念基础的感性经验的全部多样性往往是不可能的。这一任务在于为学生提供一个超出感性经验局限的机会。

卡班诺娃-梅勒的研究已经表明，一个人不能约束在无关特性的一定的变化范围中。不论是本质或是无关特性的基本变化，都应该用语言加以说明，只有这样，学生才会认识到无关的特性会向什么方向变化(波果亚夫连斯基和梅钦斯卡娅，44，第292～293页；卡班诺娃-梅勒，147，148，149)。

所有这些观点都是完全正确的。在我们对能力中等的学生和没有能力的学生的实验中，这些主张已得到了证实，但明显地，这些主张不能适用于所有学生，也不能看作是数学概括的必要条件。

根据我们研究所得的材料，下列各点可以被认为是已经证实了的：

1．逐步概括法不是掌握数学知识的唯一方法，另外还有一种在原则上与逐步概括法不同但却导致同样结果的方法。除了根据多种多样特例的变式进行对数学材料的逐步概括方法(大多数学生运用这种方法)之外，还有另一种方法，用这种方法，有能力的学

生没有去比较"类似"的现象，也无需特殊的练习或教师的暗示，就能在仅仅分析一种现象的基础上，"当场"把各种数学的对象、关系和运算独立概括到一些相似的现象上。他们立即把每个特殊的题目认作为一类同类型题目的代表①，并按一般形式解出这个特殊题目，这就是说，他们找到了解一些特定类型题目的一般方法(一种算法)。

2．有能力的学生概括数学材料，不仅速度快，而且范围广。他们非常容易地在特殊中找出本质和一般，即在看起来似乎不同的数学表达式和题目中找出隐藏着的普遍性。

3．最后一点，有数学能力的学生还概括各种解法，概括各种导向问题解决的路子的原理，因此这种概括能力影响着解非典型、非标准的数学题目时的效果。

我们将试图用联想学说这一观点解释我们的结论。巴甫洛夫反复强调"思想就是联想"，又说"一切教学都是各种联想的形成，这就是思想、思维"(322，第2卷，第580页)。数学能力造成智力活动方面的个别差异，也就是说，最终导致各种联想的形成方面上有个别差异，说得更精确些，是概括化联想方面的个别差异。

关于有能力的学生、能力中等的学生和没有能力的学生之间的差异，我们的研究使我们作出如下结论：有能力的学生能"当场"形成这些联想，从这一意义上说，这些联想是天生的(假如能够这样表达的话)，只做很少练习就已经概括了。对于能力中等的学生来说，这些联想是逐步地建立和强化起来的，是一系列练习的结果。他们"当场"形成只与某一题目有关的、具体的一些联想。通过同一类型的练习，这些联想逐步转化为概括化的联想。对于没有能力的学生来说，甚至形成那些孤立的、具体的联想也有困难，他们的概括就更困难，有时候这种概括根本不会发生。

最后我们提一下，我们所讨论的无论如何不是一般的概括能

① 当然有非典型的题目，这一表述不适用于这类题目。

力，而是在数字符号和字母符号范围内的概括能力，是概括各种数学对象、各种数的和空间的关系和运算的能力。这是一种特殊的对各种概括再作概括的能力（因为数学符号和数字的抽象是概括的产物）。因此，从我们的研究中推想出“概括化的思想是数学家的特权”（正象我们一位可尊敬的评论家所下的结论一样），那将是错误的。但是，如果我们可以这样表述的话，在数字符号和字母符号，数的和空间的关系以及数学对象和运算等范围内的概括化思维当然是“数学家的特权”。

必须说明，我们的结果已为其他研究资料所证实。其中大部分研究是在同时或稍晚些时间内进行的。在对中小学教学内容（包括数学）的概括上，不同的作者也观察到很大的个别差异。

早在1946年，梅钦斯卡娅指出，有时候受试者（成年人）已经给出一种“用概念作的解答”之后，又对问题给出了数值解答（289）。在一些研究中，卡尔米科娃注意到了在把一个题目纳入一般类型的能力上有个别差异（156）。她指出，尽管学习中小学物理教材的条件基本相同，学生为了达到最高的概括水平，需要的练习次数完全不同——对一些学生来说，这种概括几乎“当场”发生，而对另一些学生来说，就非常缓慢，而且要在广泛变化教学内容的基础上才发生（157，160）。卡尔米科娃指出，为了形成关于某一类型物理题目的解法概念，不同学生需要的练习题数可能在2至88之间（158，159）。根据E. I. 马希别茨的数据，在形成解典型题目的算法之前，不同学生需要解的题目在1至22道之间。

根据梅钦斯卡娅和莫罗的数据（292），对形成解某一类型算术题的概括化方法，需要具体解答的题数约在2至19之间。

L. N. 兰达在注意到七、八年级学生解几何题目时心理运算有不完全的概括（241）时，确证了经过实验者的解释，学生形成解那些题目的新方法需要0至15或更多次的练习（238，第52页）。

A. A. 包达列夫在他的一些研究中（46，47，48，49）表明，可

教性是由在相应学科领域中概括教学内容的能力决定的。关于这一点他指出，那些在学习特定学科上相对无能的学生，花了很多努力才能进行概括，有的就根本不能形成概括。

最后，我们要提一下法国心理学家 L. 约翰诺特(620)的研究。约翰诺特在分析 13 至 18 岁的学生解数学题目的推理过程中，根据对个别差异的研究，他建立了抽象和概括的三种水平，开始是完全没有能力把解法用抽象形式写出来，最后是在解题中用一般的(代数的)形式进行有自信的抽象推理。R. S. 艾伯特(563)在研究了(不过用的是一种非常狭窄的和分得很细的测验方法)900 个 14 岁学龄儿童的数学概括能力之后指出，在这一能力的表现形式上存在着很大的个别差异，并且"有非常不同的进展"。

简缩数学推理过推和相应的运算系统的能力

在解熟悉类型的题目时，心理过程逐步简缩，这一事实早已为人们所熟知。特别是苏联教学法专家S.I. 索霍尔-特洛茨基(456)及 F. A. 埃恩(466)在他们的关于算术教学法论的著作中指出，学生反复解同一类型的题目时，他们简缩了而且不再意识到心理过程中的一些个别阶段，但是在必要时学生能重新进行充分而细致的推理。在苏联心理学家中，L. S. 维戈茨基实质上是第一个注意到这种思维简缩的推理过程中个别环节逐步"消失"的现象①的人。

在四十年代初，P. A. 舍瓦列夫(441, 445, 446)，随后是梅钦斯卡娅(289)，分别从代数和算术材料中证实，当学生没有意识到他在实际运算中所用的规则和一般命题时，伴随着学生智力活动时的细致推论，简缩的推论也在问题解决过程中占有一定的地位。因

① 在我们看来，"消失"不是个非常恰当的术语，因为它给这一现象带来一种消极的涵义，暗示着一种缺乏(与"记忆的消失"相同)。事实上简缩是个非常合理的现象。但这一术语在心理学中已非常固定，我们认为不一定能换得掉这个术语。

此，他在解题时并不执行构成解法的完整而细致的那些推理和演绎的全部环节。梅钦斯卡娅证实，即使学生在做算术例题和基础习题时，也会出现推理过程中中间环节的逐步简缩(在反复练习的基础上)，直至完全撇开这些环节(尽管这些环节继续构成正在执行着的算术运算的基础)。最终，题目的条件及答案之间的直接连接关系就会形成。

舍瓦列夫与梅钦斯卡娅提出的观点，在一些学科的材料中得到了 A. N. 紫科洛夫(388)，N. F. 塔莉金娜(401)，L. P. 多布拉耶夫(114)，N. K. 英迪克(145)以及 V. L. 亚罗休克(475)等人的证实并变得具体化了。D. 梅安高兹也作过类似的观察(270，第143页)。他们强调指出，简缩推理有赖于题目的结构及其难度，同时也依赖于解那一类题目的训练范围。但是没有人从能力问题的观点出发，对此作过特殊的分析，也没有人揭示过不同数学能力的学生在简缩推理的表现上有什么特性。

我们关于简缩数学推理的研究分四个阶段进行(见第9章)。在最初几个阶段，主要研究了这一过程的质的方面，在最后一个阶段，对这一过程作量的描述是我们注意的中心。

在对具体资料进行检验之前，我们指出一种情况。所有的研究者都认为，简缩是渐进的，并且是在相当数量同一类型的练习基础上展现出来的。舍瓦列夫强调指出："在掌握(指掌握一种题目的形式——原作者注)的最初阶段，题目是以详细的过程去做的，而在最后阶段，就用简略的过程去解"(445，第169页)。梅钦斯卡娅写道，推理的简缩"只是由于练习才获得的"(44，第91页)。波果亚夫连斯基用类似的语气写道："思想过程在开始时以完整面详尽的方式进行的，在实践中这样做了一定阶段以后，就逐渐采用一种缩短的、简缩的方式"(45，第75页)。卡尔米科娃以及其他许多研究者也提到了同样的事实。

这种见解对于大部分数学能力普通的或中等的学生来说，是

完全正确的(同时也被我们的资料充分证实了的)。但是对有能力的学生来说，这种情况显然并不是必然的。有能力的学生的特色是具有一种十分明显的倾向，即倾向于迅速而彻底地简缩推理以及相应的数学运算系统，从某种意义上来说，这些也是"当场"完成的，因为甚至在做对他们来说是新的某一类型的第一道题目时，这种简缩推理就开始出现。

让我们举一些例子(把推理拆成独立的，编号的连续环节)。我们从系列 V 及一位有能力的学生 S. T. 在解 $(C+D+E)^2$ 这一例题(学生在学了简捷乘法的相应公式后解答的第二个例题)时的推理开始：

1. "这里有三个数，但是公式是两个数的。……那怎么可能呢？公式中的一个数是二项中的一项，而一个项可以是任何式子。……那末我们可以用这三个数写成式子(写下：$[(C+D)+E]^2$)。"

2. "这样我们得出一个和的平方。于是它等于平方中的第一个数(写下：$(C+D)^2$)。"

3. "而且第一个数又是一个平方，但这是很容易用公式做的(写下：C^2+D^2+2CD)。"

4. "现在有了第一个数的平方，我必须加上第二个数的平方(添写上：$+E^2$)。"

5. "然后再加这些数乘积的两倍(添写上：$2E(C+D)=$)。"

6. "然后我们去括号并化简(写下：

$$C^2+D^2+2CD+E^2+2EC+2ED)。"$$

他考虑后说："好，现不必再算了，完了。"

推理的简缩正是在这一阶段发生，这是显而易见的。一般说来，一个人决不可能完全用详尽的结构去思考。即使在上面引述的例子里，推理过程也没有那种一直详述到末尾的完整情况。(逻辑分析表明，要解这样一个例题需要几十步推理。)但是用这个例题去追查做下一个同类型题目时的简缩过程是有意义的。那个学

生这样解例题 $(m+x+b)^2$：

1．“我们把两项联成一项(写下：$[(m+x)+b]^2$)。”

2．“然后是第一项的平方(写下：m^2+x^2+2mx)。”

3．“加上第二项的平方(添写上：$+b^2$)。”

4．“加上两项乘积的两倍(添写上：$+2mb+2xb$)。”

那个学生解这一例题花去的时间，大约只是解上述第一个例题的十五分之一。

这个学生解按顺序排列的第五道题目(第一次熟识公式之后所做题目中的第五题！)$(-5x+0.6xy^2)^2$，做得那样充满信心，轻易而迅速，以致没有机会注意他的推理的进程。他只看了一眼例题，就奋笔疾书，立刻写下了答案：$25x^2+0.36x^2y^4-6x^2y^2$。在这一过程中，只来得及说了这几个字：“一个平方……另一个……负正得负。”对于实验者的问题“你是怎样解这道题的”，他回答道：“这里没有什么可考虑的，只看着例题就写下了。”这就清楚了：他在解题时并没有回忆法则也没有回忆定义(既没有回想一般法则，即二项式定理，也没有回想特殊法则，即单项式平方的法则或单项式乘积的法则)。这个学生立即肯定了这个式子为两数之和的平方之后，他就在没有意识到法则和定义的情况下，马上转到适当运算的操作中去。在这个例题的解法中，完整的多级结构推理，被包含着运算序列的简缩迹象的运算成分的简略联结所取代。这完全符合苏联心理学(P.A. 舍瓦列夫，A.N. 索科洛夫，N.K. 英迪克，L.P. 多布拉耶夫等人)确立的观点，大意是，从详细的演绎转而为简缩的演绎，有关法则的运算部分的意识在解题过程的构成中保持得最长久。

至于能力中等的学生，在掌握数学技能的最初几个阶段，并不具备简缩推理的明显的迹象。即使只有一个基本成分从推理的一般结构中消失，也非得这消失的成分在这一结构中重新出现后，整个推理过程才不受到阻碍。对能力中等的学生来说，简缩推理出

现在掌握某种技能的稍后几个阶段，并且是反复练习的结果(这一观点也为苏联心理学所确认了)。

下面是一个能力中等学生 B. V. 在解$(-5x+0.6xy^2)^2$这一例题，即按顺序排列中的第四题时的推理过程(这一结构在测验 V-A 的所有题目的解法中基本上是保持不变的)：

1．“这也是一个关于两数之和的平方的例题，因为在括号里有两项字母表示数，它们被加号联在一起。而且这些数都是自乘的。”

2．“但是为什么前面有个减号呢？这是一个和吗？(实验者：你还记得负数吗？”)啊，我知道了，这是 $-5x$。第一个数是负的，带有一个减号。但是我可以用这种方法解吗？(实验者：“想一想。”)噢，对啦，这些数可以是任何数。”

3．“要得出一个和的平方，我们必须把第一个数平方——用它来自乘。”

4．“$-5x$ 乘 $-5x$ 等于……负数乘负数得正数……于是(写下：$25x^2$)。”

5．“现在我们必须把左边部分与右边部分相乘再乘以 2。”

6．“负数乘正数得负数，5 乘以 0.6 等于……3，x 是二次幂。那就是 $3x^2y^2$。(实验者：“把你所写的检查一下。”)我忘了乘以 2(写下：$+(-6x^2y^2)$)。”

7．“现在把第二个数平方(写下：3.6，把它划掉，写下 0.36)。”

8．“还有指数得补上(写下：$xy^2 \cdot xy^2 = x^2y^4$)。”

9．“现在把它们按顺序排列(写出：$25x^2-6x^2y^2+0.36x^2y^4$)。”

在没有能力的学生中，即使在多次练习以后，也没有观察到明显的简缩。在学习技能的最初几个阶段，他们常常被缠在一种烦琐的演绎链之中，这种演绎链在实验者的帮助下，才艰难地被巩固下来，不断地朝着一种有关的结构系统转变。但是在这些阶段上还谈不上什么简缩，因为推理过程本身还处于形成之中。然而即

便过些时候，这些学生也还是需要完整的推理结构。如果他们省略了个别的环节，那么这些省略也是完全没有理由的和没有目的的。没有能力的学生的推理一直是以表面的理解，详尽的但又是不必要的活动为特征的(因此给人以一种繁琐的印象，并作出"笨重"的推理结构)。同时，他们的推理也缺乏精确性、一致性以及分解成正确的逻辑部分的能力。以上(前一节)所引证的例题是对这一点的生动说明。

系列 VI 中的题目的解答情况类似。这里是一位有能力的学生 G. A. 在解 VI-D-1 这题时的推理过程："这是清楚的，他以每小时 30 公里的速度行进比以每小时 20 公里的速度行进所花的时间要少(距离相同)。如果是这样的话，那么平均速度不会是每小时 25 公里。怎样解呢？(我们把她以后的推理过程分成各个个别的环节。)我将用推理来解它。

1. "速度是距离除以时间的结果。那末我们必须知道总距离以及走完全程所花的总时间，然后用总时间去除总距离。

2. "怎样解这道题现在是清楚了①。我必须求出全程的距离。假如设 x 为到一端的距离，全程即为 $2x$。

3. "现在我必须求出时间。时间是不同的。要求出时间，我们必须用速度除距离。

4. "去的路上花了 $\frac{x}{20}$ 小时。

5. "而回来的路上花了 $\frac{x}{30}$ 小时。

6. "那么全程花去 $\frac{x}{20}+\frac{x}{30}$ 小时，或 $\frac{x}{20}+\frac{x}{30}=\frac{5x}{60}$ 小时。

7. "然后我们用总的小时数除全程距离：

$$2x\div\frac{5x}{60}=\frac{120x}{5x}=24 \text{ 公里/小时。"}$$

① 我们注意到，在这里她已用一般形式解释了这道题。

之后，G. A. 继续解答 VI-D-3 题。这就是她的推理过程："这道题与第一道题相象。这里也有一个奥妙之处：你可能以为汽船花去了同样多的时间，因为水流是相同的，而且不管怎样，我们在这一方向有所失，我们在另一方向就有所得。"我们把她的推理分解为下列各个环节：

1. "逆水速度减少了一定数量。

2. "顺水速度增加了相同的数量。

3. "第一个速度比第二个速度花费的时间要多。

4. "因此，失去的时间比得到的时间要多，就是说，有水流减慢了整个航行中所花费的时间。"很明显，这里的推理是多么"简缩"（特别是从第三环节转到第四环节时）。这种"简缩"推理取代了一个相当复杂的、多级的演绎系统。当实验者要这个学生用最详尽的形式重述她的整个推理过程时，她再现了以下的构思：

"我们假设汽船的速度为 x，水流的速度为 y，从阿斯特拉罕到伏尔加格勒的距离为 s。这样：

1. "从阿斯特拉罕到伏尔加格勒汽船的实际速度等于船速与流速之差：$x-y$（水流是一种阻力）。

2. "另一个方向，实际速度等于船速与流速之和：$x+y$（水流是一种助力）。

3. "汽船用多少小时航完从阿斯特拉罕到伏尔加格勒的全程呢？我们用速度除距离，即为 $\frac{s}{x-y}$ 小时。

4. "另一个方向，用 $\frac{s}{x+y}$ 个小时可航完同样的距离。

5. "航程来回总共花费的时间为：$\frac{s}{x-y}+\frac{s}{x+y}$，变换得：

$$\frac{s(x+y)+s(x-y)}{x^2-y^2}=\frac{sx+sy+sx-sy}{x^2-y^2}=\frac{2sx}{x^2-y^2},$$

那就是在有水流的条件下，全程所需的小时数。

6. "如果没有水流，汽船的速度就不变。

7．“那末全程距离等于两个城市间距离的两倍。

8．“没有水流，航程花费的时间就是 $\frac{2s}{x}$ 小时。

9．“要回答这个问题，必须比较第一种情形 $\frac{2sx}{x^2-y^2}$ 和第二种情形 $\frac{2s}{x}$ 的小时数。

10．“第一个数显然是大些。为了使这点十分明显，让我们暂时去掉第一个分数的分母中的 y^2。分母增大了，因此整个分数减小了。但 $\frac{2sx}{x^2}=\frac{2s}{x}$，那就是说，如果我们减小第一个分数，那末，两个分数就相等。很清楚，第一个分数是大些。”（我们没有把这一部分的推理扩展成一些环节，因为问题已经得到解决了，而且引用的代数式与解法无直接关系。）

这些题目证明超出我们所研究的中等能力的，特别是没有能力的学生的力量范围。假如能力中等的学生能够再现（在实验者的帮助下！）他们的整个推理过程，他们也不能理解，为什么我们在逆水时失去的时间比顺水时得到的时间要来得多。我们观察到能力中等的学生在解系列 VI 中的任一道题时，演绎中没有明显的简缩。至于没有能力的学生更谈不上什么简缩了，如果实验者不给一点儿帮助，他们就无法处理这一系列中的题目。

解证明题（系列 IX）的实验显示出同样的情形。一位有能力的学生 S. E.，他用这一方法解 IX--B-1 这题（分解成下述几个环节）：

1．“连续数——它们是什么？它们总是递增 1，如 6, 7, 8, 9 等。

2．“这实际上是任意三个这样的数的问题。假设中间那个数为 x，那末左边那个数就少 1，而右边那个数就多 1，就是说，这三个数是 $(x-1)$、x、和 $(x+1)$。

3．“然后，我们把它们相加，得：$x-1+x+x+1=3x$。

4. “很明显，$3x$ 总是可以被 3 除尽，x 为任意数。因此，任意三个这样的数之和可以被 3 除尽。”

对于给他的这一测验中的第二道题，即 IX-B-2 题，他甚至没有解就立即“看出了”答案：“这里没有什么要加以证明的，显然，我们得出了$(x+3)^2$。”很明显，证明过程在这里被最大限度地简缩了——我们知道，这里作出了一种从对题目的知觉到作出解答之间的直接过渡。在这种例子中，虽然证明过程并不复杂，但还是包含着一些环节的。在实验者的要求下，这位有能力的学生就对解这道题的推理过程作出如下的构思：

1. “我们必须取一个任意数(因为我们是对一个任意数作证明)。让我们取这个数为 x。

2. “我们必须取一个比它大 6 的数。那就是 $x+6$。

3. “我们用第二个数乘第一个数：$x(x+6)=x^2+6x$。

4. “我们再在这个和上加 9，那就是 x^2+6x+9。

5. “而这是一个和的平方：$(x+3)^2$。

6. “然后，不管取什么数，仍能得出平方来。”

正如我们的材料所表明的那样，学生在概括了他所发现的解法后，简缩立即就开始了。正如我们看到的，对有能力的学生来说，我们知道这种概括常常是“当场”出现的，因而推理的简缩也同样“当场”就可观察到。能力中等的学生在反复练习后进行概括，因而他们推理过程中的简缩，要在解了一定数量的同一类型题目后才被观察到。没有能力的学生在长时间地解同一类型题目的训练之后，才非常艰难地进行概括，因而对他们来说，只有在大量的练习之后简缩才会开始。

在有些(较简单的)情形下，有能力学生的推理的结构是如此地简缩，因而在对一道题的知觉和结果之间作出了几乎是直接的联接。在这些情形下，他们用于解题的时间主要取决于化在必要的计算上的时间。表面看来，这有点象“缺乏”推理，缺乏思考。但

是事实上，并非如此。相反，这是最高程度的思维，因为这一简缩结构的基础往往就是逻辑上有充分根据的推理过程，而且通常（在做一定类型的第一个题目时）是在迅速地和清晰地弄清楚过程中的下一环节之后，简缩才出现的。

S. I. 夏皮罗花了长时间去观察有能力的学生，他们在解典型题目时的推理过程被很快地简缩到极点。学生 B. 回答得那样迅速，以致于给人产生了一种印象，即她并没有什么解法，而是事先就知道结果的。至于另一个学生，他很快得出了解题结果，看起来似乎没有听完题目的条件就得出了答案。他的同学开玩笑说："有了回答，再问问题。"然而，在引述的每一个例子中，解题的详尽的心理过程是相当复杂性的。

到现在为止，我们已经讨论了在同一类型题目解答中的心理过程的简缩。但是有能力的学生还有一种特有的特点。一般地说，他们的特征就是在解数学题目（即使是一个新类型的题目）时，有一种在简缩结构（省略演绎）中思考的倾向。因而在某种意义上，我们可以称之为一种"思想缩记"（A. G. 科瓦列夫与 V. N. 米亚西谢夫创造的一种表述，174，第 150 页）。至于这里所说的简缩心理结构即具有明晰的逻辑表述的简缩结构，不单是推理过程的一些环节的缩短，而且是逻辑上有完美证明的推理过程的缩短。当有能力的学生在我们的要求下把简缩结构扩展到完整的结构时（从他们的角度看），这一点就非常明显了。

因此在某种程度上，我们所研究的有能力的学生身上具有简缩数学思维，这与苏联大多数数学家所说的数学思想的特点一点都不矛盾。比如他们把这种数学思想的特点说成是"连续的、彻底分解了的逻辑推理的艺术"（柯尔莫戈罗夫，180），一种"逻辑的推理模式，一种推理过程的精确分解"（A. Ya. 辛钦，427），"羽毛丰满的逻辑论证习惯"，"发觉推理中的粗枝大叶的能力，发觉缺乏完整的证明所必需的一些环节的能力"（B. V. 格涅坚科，92，93，94）。

在简缩了的演绎和论证中，必要的一些环节并不是全部消失了，它们是被缩略了，不再分节了，甚至没有被认识到，但是它们是“不可见地”存在着的。虽然学生在简缩结构中有效地思维着，但他没有也不需要前面的运算，就能够看出并作出后继的数学运算来。如果需要的话，他通常能够把推理过程扩展成完整结构。因此，简缩推理（当然，如果是正确的话）实质上是连续的、正确地分解了的、具有充足论证的逻辑推理。

我们有什么根据认为心理过程实际上是被简缩了或缩短了呢？也就是说，这一过程中省略掉的一些环节没有被意识到，没有在头脑里“泄露出来”呢？下面这些就是根据：

1．作出回答的迅速性。正如已经指出的那样，在一整套实例中，一经理解了一道题目的条件，就立即作出回答（它是“同理解的一瞬间紧密联结在一起的”）。

2．在那些消失的推理环节上恰恰不停顿。

3．当实验者要学生迅速作出他们的推理的详细结构时，他们时常感到困难。受试者自己关于已经想起（或没有想起）某一法则的证词、一般的陈述或是类似的东西，有一定的价值（当然，只是一种辅助的东西）。

为了证实以上所引述的全部见解，我们对有能力的、能力中等的以及没有能力的学生在解题中的推理过程作一些典型的概要性的图解。

最近，A. N. 索科洛夫(387)，L. I. 卡尔米科娃和 E. P. 伊凡涅齐娜(138)提出在解物理题目中的推理过程的统计评价法和图表表示法。1962～1963 年间，卡尔米科娃在一些著作中(152, 153)提出了计算她称之为“节省系数”的东西，这主要是用来确定解一道题目中逻辑上所必需的判断数，以及把实际判断数同这些逻辑上所必需的判断数加以比较。她把这个差额（即“节省下来的判断数”）与逻辑上所必需的判断数相联系。其结果以百分数表示，说

明了学生达到他的目标所使用的方法简缩和节省的程度。

我们于1959年使用的图表表示法，目的是为了形象地比较有能力的、能力中等的及没有能力的学生在解对受试者来说是新的单个题目时的推理过程。为了这个目的，我们把实际的推理过程"迭放"在一个详细的推理过程上。我们认为，从目前的研究目标来看，把实际推理过程与一种逻辑上预言的详细推理过程比较，几乎不能说是正确的。甚至完全可能是，实际的详细推理是按照与逻辑的详细推理多少有点不同的模式进行的。但是我们的研究目标所需要的，是把一个实际的简缩推理过程与一个实际的详细推理过程加以比较。因而在我们图表中的标准是实际的详细推理过程（以及在实验者的要求下，有能力的学生所给出的最完全的"详细变式"）。每一个环节代表一种完整的想法。这样，让我们用图表示两个题目解法中的典型推理。

1. XIX-A-5题

详细的推理过程(R. Sh.，六年级)。

1. "第二个学生必须加上两个戈比才能买一根尺。第一个学生把所有的钱全给了他，但是钱仍不够。

2. "这只有当第一个学生仅有1个戈比时才可能发生。如果他有2个戈比，他们就能买一根尺。

3. "因此，这把尺值25个戈比，因为第一个学生需要再有24个戈比才能买到尺。

4. "第二个学生再需要2个戈比，也就是说，他有23个戈比。"

让我们比较一下六年级学生——一个有能力的学生(R. Sh.本人)，一个能力中等的学生(Ya. V.)，和一个没有能力的学生(Z. I.)的典型的实际的解法过程（见图62）。纵轴标出详细的推理环节。符号图示了从一个环节转到另一个环节的实际推理过程。推理中的环节的总数包括学生所陈述的不必要的和不正确的判断数以及实验者的插话(提示的步子)数。

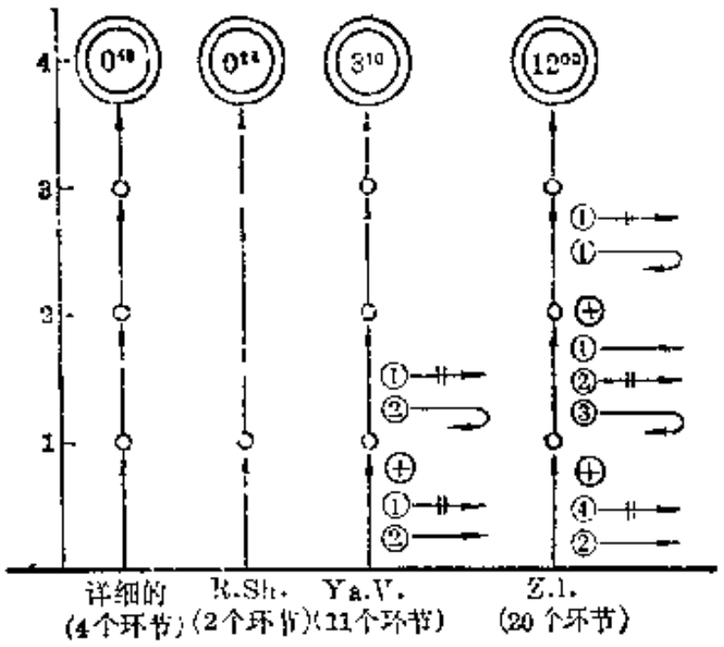


图 62

有数学能力的、中等的和能力差的学生在解答XIX-A-5题时推理过程的图解。

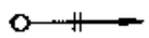
符号说明:



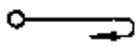
正确答案(数字表示解题所花的时间,以分和秒计);



对于解是正确的,但不必要的(数字表示这些判断的次数);



不正确的判断或运算;



重复;

⊕ 经实验者的帮助。

2. I-A-6 题

详细的推理过程(伏洛佳 L., 10 岁)。

1. "当客车起程时,货车已在它之前 $38\times7=266$ 公里处。

2. "客车比货车每小时多走 $57-38=19$ 公里。

3. "客车要追上货车需 $\frac{266}{19}=14$ 小时。

4. "当客车驶完全程,货车还得行驶 $2\times38=76$ 公里。

5. "如果货车每小时比客车慢 19 公里,那么,货车落后 76 公里,需 $76\div19=4$ 小时。

6. “客车行驶的总时间等于 14+4=18 小时，而货车行驶的总时间则为 7+14+4+2=27 小时。(伏洛佳 L. 说：“不过这非常简单，不用这一方法也可以做。”)

7. “因此 A 地与 B 地之间的距离 $=18\times57=1026$ 公里(或者如果你愿意，$27\times38=1026$ 公里)。”

把伏洛佳 L. 本人，有能力的六年级学生 V. D.，能力中等的六年级学生 G. G. 以及没有能力的七年级学生 Yu. K. 等这几个学生的实际推理过程，与上述典型的实际推理过程相比较(见图 63)。

因此，在其他条件相等的情况下，这种在解题过程中迅速地转

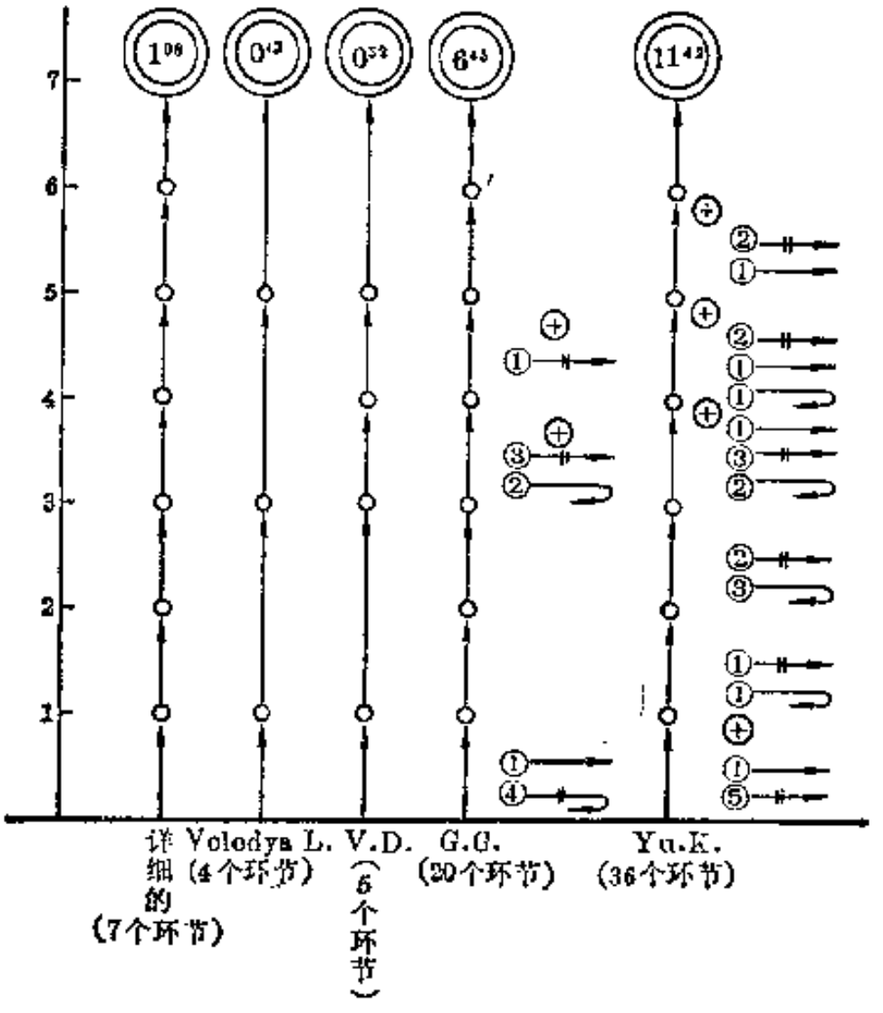


图 63

有数学能力的，中等的和没有能力的学生在解I-A-6题时推理过程的图解。符号说明见图 62。

到用"简缩"结构进行思维的能力，能把数学上有能力的学生区别出来。这种转变通常是在解某种类型的第一道题后立即开始了，而且往往是当推理过程的中间环节"失落"时，或者是当对题目的知觉与执行一套确定的运算之间，甚至更经常的是题目的知觉与结果的知觉之间，建立起独特的直接联想时，这种转变相当迅速地达到最大的发展。在这一情况下，我们的受试者就会说："有什么好解的呢？这是非常明显的"，"我拿起题目就把答案写下"，"题目自己解出来的"。

一组连续的联想系列(有时是一组很长的系列)"剔空了"(如果可以这样表达它的话)，并被一个直接的联想所取代(见图 64)，直接联想的条件就是这一系列中第一个联想的条件，直接联想的结果就是这一系列中最后一个联想的结果。舍瓦列夫形象地称之为"短路"的东西就发生在这个联想链上(445，第 170 页)。

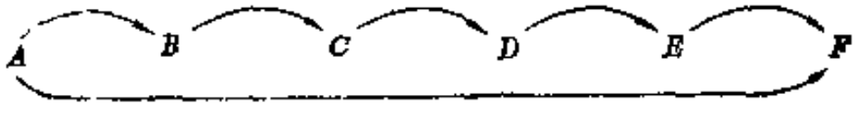


图 64

有能力的学生和能力中等的学生间的区别在于：对前者来说，这些简缩的联想是非常迅速地、往往是"当场"形成的。在这里，有能力的学生"看到了"F 可直接由 A 得出，他理解到 F 是直接地根据 A 推断出来的。然而，对能力中等的学生来说，这一点是不够清楚的(其他条件相等)；他"看不到"这一点，不理解这一点。为了从 A 到达 F，他必须走过有时是相当复杂的路程以实现这些有联系的联想。根据以上所说，很清楚，这些"简缩了的"思想结构的价值，主要是因此确定了信息加工的速度，而且大大加速了和简化了问题解决的过程。当然，要重现一个"缩略"的联想花的时间就少得多(有时候这些联想可以代替几十个或更多的演绎推论)，同时这种联想也方便和简化了复杂运算的进行(而其他学生有时会毫无希望地纠缠在烦琐的演绎链中)并且"节省"了脑力。

心理过程的灵活性

系列 XIII、XIV 和 XV 中的题目为这一节提供了基本材料。受试者的基本小组是由 17 名有能力的七年级学生所组成，他们做完了这些系列中的全部测验。他们与能力中等的小组(24 名学生)和没有能力的小组(17 名学生)作了比较，后两个小组的学生也做完了这一些系列，但经过较长的一段时间。我们另外给很有能力的小组里的学生做了这三个系列中的一些个别测验。

我们要在系列 XIII 中的一些题目里找出最多的解题方法数，也考虑到总的解题时间(但是，试图找出一种解法的变式而没有取得结果所花去的时间不计算在内)。我们在表 15 中指出受试者对系列 XIII 中的测验作业的平均结果 (每个小组)。数据的全距很小，就是说，全部数据接近于平均值。

表 15　解系列 XIII 中题目的方法与时间的平均数

小 组	解全部题目的方法数			解题时间(分钟)		
	测验 A	测验 B	测验 O	测验 A	测验 B	测验 C
C	22	12	14	14	6	23
A	14	18	7	27	14	19
I	7	4	4	28	15	19

在系列 XIV 中，我们比较了题目的第一和第二(改变了的)变式的解答时间，同时以百分数(取最接近的整数)来表示第一变式同第二变式的比率。这一相对的解题时间表明受试者受他原先解题方法的"束缚"有多大。在系列 XV 中，我们类似地计算了解后一道题与解前一道题所花的相对时间。由于测验 XV-G 的特殊性质，我们这里没有考虑这一测验的分数。

表 16 列出了数据的汇总(对每一组受试者给出了他们分数的全距与算术平均数 M)。结果的分析将在下面给出。

「表 16　系列 XIV 和系列 XV 相对解题时间的平均数及全距(%)

组　别	系　列　XIV		系　列　XV	
	全　距	平均数	全　距	平均数
C	86～109	96	102～126	112
A	111～146	131	164～243	187
I	148～252	215	267～655	374

问题是：所有三个系列中实验题的解法可以用一个普遍因素的作用加以解释吗？我们的假设是，系列 XIII、XIV 和 XV 的分数衡量的是同一现象：即，它们都是心理活动的同一个共同特征的指示器，因而这里显示出一种共同的因素。

我们把我们的数据加以因素分析。前面提到过的十七位完成所有三个系列的有能力学生的分数，我们把它挑选出来作因素分析。系列 XIV 和 XV 的分数就是解这些题目的相对解题时间和所解的变式题的总数，构成系列 XIII 分数的是解题时间(对每个学生根据这些分数一一算出秩，这些秩的平均数用来作为因素分析的基础)。我们也计算了受试者在三个系列中每两个系列下的秩的相关性。结果获得了在表 17 中所列示的相关矩阵。表中的数据表明，在解这些系列中的题目时其成功程度具有正相关。

十七名受试者的相关系数值为 0.583 时就在 0.01 水平上显著，而相关系数值为 0.412 时就在 0.05 水平上显著(见 344，第 106～107 页)。因此，我们得到的相关系数是在 0.01 水平上具有统计显著性。

我们根据前面引用的斯皮尔门-塞斯顿公式(见第 12 章)作了因素分析。我们得到了表 18 的因素矩阵。再生的相关矩阵与原有的矩阵相符合。剩余相关系数等于零。

普遍因素上的负荷相当高，意味着对这三个系列中的题目的成功解答，恰恰是某一普遍因素的作用的结果。普遍(共同)因素

表17　系列 XIII～XV 的相关矩阵

(N=17)

	XIII	XIV	XV
XIII	—	0.66	0.69
XIV	0.66	—	0.71
XV	0.69	0.71	—

表18　系列 XIII～XV 的因素矩阵

系　　列	g 的因素负荷
XIII	0.80
XIV	0.82
XV	0.86

在所有这些系列中均有出现，而且相当显著。

让我们对这一因素作一心理学的解释。我们进而作质的分析。

所有这三个系列中的题目旨在研究心理活动迅速重组的能力，以及研究"打破"一个刚好形成的解法模式而代之以一个新的模式的能力。系列 XV 中的测验，就需要特别迅速和敏锐地摒弃已经形成和强化了的运算方法。

在解系列 XIII 的题目时，有能力的学生容易地毫无困难地转到一种新的运算方法上，即从一种心理运算转换为另一种心理运算。许多方面都可辨认出他们一步步走向问题的解决。但是，只是当第一种解法在学生看来是不简单的和不经济的（不优美的）时候，才会有对这个题目寻找几种解法的需要。布置一个特殊的作业后（实验者予以指导），有能力的学生主动地转而去寻找各种新的解法。先前发现的解题方法对他们并不产生任何束缚作用。问题甚至并不在于他们是否成功地找出了几种解题方法或找出了定理的几种证明（特别是毕达哥拉斯定理的证明）。重要的是他们试探解法时，使用多种多样的运算方法，轻而易举地从一种心理运算转变

为另一种心理运算。

对能力中等的学生来说，要转用一种新的方法去解他们已经解过的题目就困难得多。他们在这方面的努力清楚地显示出早先发现的方法的束缚影响——他的思维常常不时地回到早先发现的模式。正如S.I. 夏皮罗的一个学生(一个略高于中等能力的学生)所说："在解一道题目时，要摆脱一种面定的或是不成功的解题方法那是最难的。在需要作出方法上的急剧转变时，我感觉到了自己的弱点。"

至于对没有能力的学生来说，好象已经想出来的解法切断了他们转向新的运算方法的任何可能性。在从一种思维水平转到另一种水平，从一种心理运算转到另一种心理运算时，他们遇到很大的困难。在他们的数学思维中，经常能感到那种特殊的、明显的紧张感。从一种较易方法转到一种较难方法时自然会遇到困难，但他们根本不是这样的问题。有时候他们发现的第一种方法最难，对他们来说，从难的方法转到容易的方法也一样困难(在另外一些时候他们找到某种较容易的方法并没有特别的困难)。

最初找出的解题方法(并不总是最容易的——这一点我们再强调一下!)阻碍着去发现解同一道题的其他方法。这些学生会不会根本没有考虑到其他解法的可能性呢？但是实验者十分肯定地向他们指出了那种可能性。有时会观察到一些有趣的事实，例如忘掉了早先找出的解题方法反倒增加了发现一种新的解题方法的可能性，换句话说，只有忘掉先前的那种运算，才能去掉这种运算的抑制作用。我们特别证实了这一点，就是我们经常观察到，一旦学生显出能在不同的水平上向其他方向思考时，那就意味着他忘掉了先前找出的解题方法了。在一些个别情况下，这种转换的可能性是一种相当精确的判断标准，可以用来确定原先的思路是否已遗忘，就是说，它直接指明了原先思路的遗忘情况(而且在一次特定的检验中证实了这点)。但是在这种情况下就谈不上什么转

换了，因为转换就是意味着在存在旧的解法时转向一种新的思路或是一种新的解题方法，现在实际上已没有象这种意义的转换了。

在我们的一次实验中，我们还观察到一个有趣的案例。一个能力差的六年级女生正在用一种较难的但又是习惯了的方法解一道题。在实验者的帮助下，她艰难地过渡到了另一种较为容易的方法，但是这以后她不能马上想出那习惯的方法。只是过了半小时之后，她才想起了旧的解法，但是……又忘掉新的方法。在I. V. 杜勃洛维娜的实验中，也有性质完全相同的几个案例。

在上面引述的表15中，有关转换的类型差异有多大，这是显而易见的。有能力的学生对系列XIII中的13道题目平均花了43分钟，找到了总共48种解法；能力中等的学生花了60分钟，找到29种解法；没有能力的学生花了62分钟，找到了15种解法。要找出每个连续的解法一般说还更难些。让我们举一些例子。

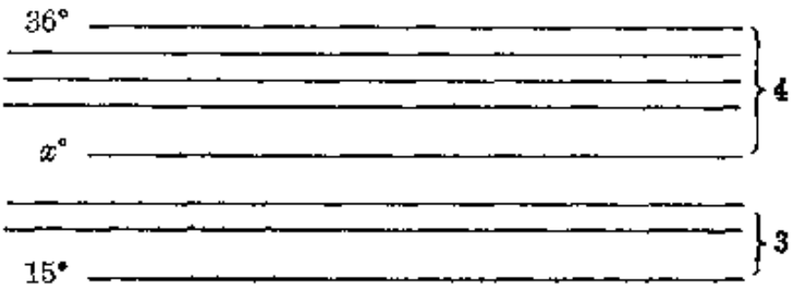
一个有能力的七年级学生G. Kh.，解XIII-A-7这道题："室温为15°的4公升水，加入温度为36°的3公升水。问容器中水的温度是几度？"他不加思考地立即作出了这样的解答：

"三公升水'总起来'为108°。

"四公升'总起来'为60°。

"7公升除总数168°，=24°。"

接着，G. Kh. 又作了如下的"形象的"解法：



这里是他阐明的理由："平均温度不会在中间，而是靠近15°

(因为 15° 水的公升数多)。比率为 4:3。我们把 21° 这一差数，按这样一种关系式(21:7=3)分配，然后，或者是 15 加上 9，或者是 36 减去 12。”

G. Kh. 思考了大约 10 秒钟后，应用了他所熟悉的加权算术平均数公式，写下了如下的式子：

$$\frac{(36\times 3+15\times 4)}{(3+4)}=24°\text{(平均温度)}。$$

他解这道题的所有变式总共花了 1 分 8 秒。

没有能力的学生一个都不能找到这道题的两种解法。他们中的大部分人只能在实验者的帮助下找到一种解法。

这里是 10 岁的索尼娅 L. 解实验性代数题中的一道题(XIII-B-14)时的模式：

$$113^2-112^2\begin{cases}\rightarrow a^2-b^2=\\ \rightarrow (a+1)^2-a^2=\\ \rightarrow a^2-(a-1)^2=\end{cases}$$

后面两个变式(不够“优美”)是她自己找到的，不过是在实验者暗示她考虑了其他解法途径以后才找到的。

最后，另一个例子，有趣的是两个有天赋的 10 岁学生索尼亚 L. 和伏洛佳 L.，以类似的模式用三种方法去解 XIII-A-6 这道题：“汽船顺水航行时速 20 公里，逆水航行时速 15 公里。从 A 地驶往 B 地比反向航行少花 5 小时。问 A 地与 B 地间的距离是多少？”

解法：

1. 顺水，1 公里 3 分钟；逆水，1 公里 4 分钟。每公里差 1 分钟。共差 5 小时，即 300 分钟。距离为 300 公里。

2. 每小时差 5 公里，总共差 75 公里(每小时 15 公里，5 小时)。那么，15 小时，每小时 20 公里，即 300 公里。

3. 5 小时内，75 公里，而这是 1/4 距离(因为逆水航行的速度

等于顺水航行速度的 3/4)。

索尼娅在 25 秒钟内找到了变式(2),另外 30 秒钟内找到了变式(3),最后花了一分钟找到了变式(1)。伏洛佳在 30 秒钟内找到变式(1),另外 40 秒钟内找到了变式(3),最后在 20 余秒钟内找到了变式(2)。在我们的实际经验中,能力中等的学生一次也没有表现过这种思维的机动性,能力差的学生就更不必说了。

在系列 XIV 中,从第一道题过渡到第二道题,要求运算作彻底重组,这一点被题目外表极其相似的现象掩盖着。即使第二道题往往并不比刚刚解出来的第一道题更难些,但能力中等的学生解这样的题目所花的时间几乎增加了三分之一,而能力差的学生所花的时间则要两倍还多。每当第二道题紧接第一道题立即出示时,这道题就会解得相当差劲,受试者遇到的困难比第二道题单独出现时大得多。过渡到另一道题时常常会产生困难。

一个没有能力的学生 V.S.,在实验者的帮助下解了下面这道几何题的第一部分(在解出之前他曾发生许多错误):"给出空间一条直线和直线上的一点。过这一点能够作多少条直线与已知直线垂直?如果这点在直线外,那么在已知直线和线外已知点的同一平面内能够作多少条从点到直线的垂直线?"(要求在头脑里解题。)答:"可以作无数条垂直线。""好,那末第二种情况下又怎样呢?"客观上,这道题并不比第一道题难,可是这个学生解答不了。他的回答是:"也是无穷多。""无穷多的一半"——我们可以说,他的思想集中在"无穷大"上面。他甚至没有去解题,而是力图去证明在第二种情况中会有大量的垂直线。但是对题目却放下不管了;他不再考虑它了。我们在两周内再给他解这道题。虽然不是立即就解出来,但他还是解出来了。然后,我们又把题目的第一部分给他(结果是,他竟然把它忘了)。但是此刻他已不能解答了。学生的思想又被先前的解法模式束缚住了("一根垂直线……不,两根……不,还是一根;它只是延伸到另一面罢了。")因而,先解的题

目对于后解的题目具有一种抑制作用。对没有能力的学生来说，一种已经确定了的思路对发现新的思路具有一种抑制作用。

系列 XV 中的那些题目对我们研究转换心理活动的特点是非常有益的，因为在这里原来的运算方法已被特别地加以强化和定型化。在一些同一形式题目的连续解答中，形成了一个心理运算的模式，当最后一道题出现时，突然地破坏了这个模式。已经建立起来的运算定型自然地抑制了最后一道题的解法。心理活动的突然重组，刚刚建立起来的推理模式的"破坏"并且为另一种模式所取代，使解最后一道题所花时间大大增加(虽然在客观上这道题并不比以前的各道题更难些)。但是这里显示出很大的差异来。有能力的学生的思路很大程度上不受熟悉的、常规的解题方法的束缚——他们解最后一道题所花的时间平均只增加了十分之一，而能力中等的学生几乎多花了一倍的时间，没有能力的学生则花了大约四倍的时间(见表 16)。

至于系列 XVI 中的题目(暗示"自我限制"的题目)，这些题目不仅是没有能力的学生，而且几乎所有能力中等的学生也是无法解答的。24 名能力中等的学生中，只有 3 人解出 XVI-A-2 题，2 人解出 XVI-A-4 题，而且是付出了很大的努力才解出来的。因而，能力中等的学生不可能在解题中摆脱一种定型化了的方法(更不用说没有能力的学生了)。

有能力的学生显然是更顺利地解答系列 XVI 中的各道题。表 19 是这一系列的数据汇总(基本组的 17 名有能力的受试者和非常有能力组的 3 名受试者解答了所有的题目；9 名有能力的学生只是解出了这个系列中的个别题目)。解每一道题的时间不超过十五分钟。

我们援引一个已被证明是最难的题目的解法，这将清楚地表明有能力的学生是怎样摆脱自我限制的。

G. Kh. (七年级)这样解 XVI-A-5 题："直角三角形的一条

表 19　有能力的学生对测验 XVI-A 中的题目的解答

题目	尝试解题的人数	解出题目的人数	平均解题时间(以分、秒计)
1	23	17	6′46″
2	26	25	3′26″
3	25	21	7′13″
4	23	20	5′5″
5	24	16	6′11″
6	21	9	10′18″

直角边为七厘米。若其他两边均以整数表示，求这两边。”

“用一条边可以作一个三角形吗？有点儿奇怪……。对啦，已知一个角——直角，但还是不可能……(作图)。噢，这儿是明显的——边与角都是常数，但是会有很多不同的三角形。可能这道题缺少什么条件？(实验者：“不，这道题是可以解的。”)奇怪……(作图)。嗯，有无数种解法，这里是非常明显的(再作图)。我甚至不是在解什么题目，倒象是要证明这是不可能解的。……当它们都以整数表示时，可能会有许多变式(重读题目条件)。它们在以整数表示时可能只有一种情形(停顿 7 秒钟)。大概是这样——题目中没有说，但它是可以被理解的……然而这必须设法加以证明……假设斜边为 a，未知的直角边为 b，那么根据勾股定理，$a^2=49+b^2$，即 $49=a^2-b^2$……嗯，下一步怎么办？$a+b=\frac{49}{a-b}$。我感到这会得出些什么……如果 a 与 b 为整数，那么它们的和也是一个整数。现在全部清楚了：意思是49能被$a-b$除尽。而且49只能被 7 除尽……但是 $a-b$ 不可能等于 7，这样就不会是三角形(斜边刚好等于两直角边——两边等于第三边)。……就在这儿有一种解法；我没有觉察到……49 不仅可以被 7 除尽，还可以被 1 及 49 除尽。现在我可掌握解法了：这也不可能是 49——斜边将大于两直角边之和。剩下的是：$a-b=1$，和 $a+b=49$。我们即可得到斜边为 25 厘米，一直角边为 24 厘米。”整个解题花去了 2 分 35 秒。

综上所述，我们可以把所选出来的普遍因素解释为心理过程的灵活性。有数学能力的学生在解数学题时，他们的心理过程具有很大的灵活性和机动性。这种机动性和灵活性表现为自由而轻易地从一种心理运算转向另一种性质不同的心理运算，多方面去试探题目的解法，摆脱定型化的、惯用的解题方法的束缚影响，以及毫不费力地重组已建立了的思想模式和运算系统。

没有能力的学生在数学关系和运算范围内，明显地表现出思维上的迟钝、缓慢和紧张，表现出他们运算中的凝固不变的、定型化的特点，以及表现出他们的头脑里保留着原先解题原则或运算方法的顽强印痕，以致在需要重建一种运算时产生一种抑制影响。所有这些决定了他们从一种心理运算转向另一种性质不同的心理运算时存在明显的困难。

关于心理活动领域中的干扰的事实是早已为人们所熟知的。例如，K. 邓克尔(487)，N.R.F. 梅伊尔(489, 643)和 A. S. 鲁钦斯(641)等人的研究指出了过去经验对于问题解决过程的消极影响(由于连续解同一类型题目而形成的片面定向)。"一个人不会解一道题，不是因为他不能找到一种解法，而在于他那习惯的运算方法妨碍了他去想出恰当的解题方法"(梅伊尔，643)。

事实上，在苏联心理学中，"思维的灵活性"这一术语是由梅钦斯卡娅引进实践里来的。甚至在她 1946 年的研究中(289)，就描述过几个关于受试者知道执行适当的解答计划而遭抑制的案例，"在较强的、突然的倾向压力下……朝着最新近的经验这一方向前进"(289，第 124 页)。波果亚夫连斯基和梅钦斯卡娅划分出灵活思维的三个基本标志：(1)随机变化运算的方法；(2)为了符合变化了的条件而重建知识、技能及其系统的敏捷性；(3)容易从一种运算方法转移到另一种运算方法(44，第 187 页)。

T. V. 库特列亚夫节夫(226)从小学各年级学生的家庭作业中研究了从一种心理运算转换到另一种心理运算的过程，他不是从

转换的速度，而是从转换中是否存在错误这一角度来研究的。在卡班诺娃-梅勒(148)，A. A. 柳布林斯卡娅(266)，V. I. 朱可娃(132, 133)，卡尔米科娃(154, 155, 159, 160)，A. V. 斯克里普钦科(374)，R. O. 塞里波瑞亚科娃(370)，B. K. 杜布洛拉伏夫(116)以及G. P. 安东诺娃(30, 30a)等人的著作里，都提到了学生家庭作业中这种转换的难易程度。L. N. 兰达研究了几何题解答中转换的个别差异现象(238)。

在解题中力求清晰、简洁和经济("优美")

有数学能力的学生的这一特点与前一特点密切有关。有能力学生的非常典型的特征，就是对一道题力求找出最合理的解法，探究一条达到目标的最清晰、最简单、最短因而也是最"优美"的途径。这看起来象一种独特的使思想经济的倾向，因为表现为寻求最经济的解题方法。必须指出，这一特点，用尽可能好的方式说，是与"数学的目的"相符合的，关于这点，数学家 V. 格留塞科夫在"电子计算机与数学的未来"一文中写道："数学的目的总是要获得最优美的、最简单的解法，而不仅仅是获得任何一种解法"(91, 第5页)。追求方法的简洁和优美，是过去与现在所有杰出数学家数学思想的特点(例如参见349, 第16页)。A. Ya. 辛钦(426)以及B. V. 格涅坚科(92, 93, 94)等著名苏联数学家特别提到了这一品质。

学生在数学上越有能力，他的思维的这一特点就越显著。非常有天赋的学生对于最简单、最合理解法的追求出现得比较早。九岁的索尼娅 L. 在这方面就特别显著。以下是她如何解下面这道题的过程："等腰三角形中的一条中线将其周长分成12厘米与9厘米两部分。求三角形的边长。"她先作图(见图65)。"这显然不是底边上的中线。长边加一小段比短边加上同样一小段长3厘

米。但是整个三角形的周长为21厘米。两腰长出6厘米，意即边长分别为8、8和5。但是我可以更简单地解这道题：一边再加上它的一半为12厘米，因而每边的长为8、8和5。”（我们可以看到，解法被极度简缩了。然后索尼娅加以阐明：“一腰与另一腰的一半之和等于12厘米。”）然后她说：“不过这里有两种解法。一条边再加上它的一半等于9厘米。第二个三角形的三边长分别为6，6，9厘米。”（应实验者的要求，她作了说明：“腰可能比底边长，也有可能底边比腰长。两种情形都应加以考虑。”）

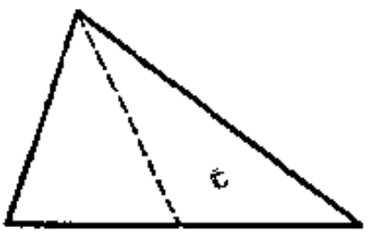


图 65

让我们再举出一些9岁的索尼娅L.发现的“优美”解法的例子，并把她的解法与能力中等的六、七年级学生的典型解法加以比较。

题目：“父亲和儿子都是工人，他们从家里步行到工厂。父亲用40分钟走完全程，儿子用了30分钟。如果父亲比儿子早5分钟离家，问儿子用几分钟可以赶上父亲？”

通常的解法：1分钟内父亲走了全程的 $\frac{1}{40}$，儿子走了 $\frac{1}{30}$，他们的速度之差为 $\frac{1}{120}$。5分钟内父亲走了全程的 $\frac{1}{8}$，儿子将用 $\frac{1}{8}\div\frac{1}{120}=15$ 分钟赶上父亲。

索尼娅的解法：“父亲比儿子早出发5分钟，因而他将比儿子晚5分钟到。那末儿子恰好在半路上赶上父亲，也即用了15分钟。”

题目：“货物存放在3个仓库。第一与第二个仓库共放790吨，第二与第三个仓库共放970吨，第三与第一仓库共放920吨。问每个仓库存放多少货物？”

通常的解法：比如把第一个和与第三个和比较一下，求出它们的差，再把这代入第二个和，如此等等。

索尼娅的解法："把全部存放量都加起来，这就是货物总数的两倍。$\frac{2680}{2}=1340$，这是三个仓库存放货物的总数。因为第一个仓库＋第二个仓库＝790，那末第三个仓库＝550。余下的就容易算出了。"

在给六至八年级有能力的学生做实验时，也观察到了完全相同的现象。在解基本系列 XIII 的题目时，有能力的学生(29人)在当时有 84% 找到了最合理的解法，说明他们很好地意识到为什么他们相信一种解法的某一给定变式是最好的。在 61% 的情况下，这种解法是第一次找到的；在 39% 的情况下，这是第二次找出的。所有有能力的学生在寻求一道题目的解法时，尽管没有对他们提出要求，但他们还是去探求最好的变式。有能力的学生所找到的有些"优美"解法是相当有趣的。

下面是一位八年级学生 S. G. 怎样解 XIX-A-11 这道题的。一开始她列出一个复杂的含有四个未知数的方程组(几乎所有的学生开始都用这种方法)。S. G. 没有去解她所列的方程组，却说："这是可以解的，但非常不方便。总该有一种较为简单的解法。但是这里不需要用方程：40 可以是 5 与 8 这两个数的乘积。又知千位数小于个位数，那么这个数可能是 5××8。嗯，一切都清楚了，这个数为 5478。"(实验者要她说明一下，她说："28 是这两个数字的积：4×7。百位数小于十位数，这些数字只能这样排列。"实验者："那么你是怎样决定 40 只能是数字 5 与 8 的乘积的呢？"学生："是这样，我分解出 40＝2×2×2×5。其中有一个数字必定是 5，因为它不可能是 10。好，那末另一个数字是 2×2×2＝8。")

这里是七年级学生伐利亚 Kh. 解 XIX-A-10 题的记录。他先找出已知数的最小公倍数(60)，并说："60－2＝58，这个数为 58。"应实验者的要求，他作了解释："我把所有的数与余数列成一列，马上发觉除数与余数之差无论如何都是 2。那末，如果我们给

未知数加上 2，这个数就可被所有的数除尽而没有余数。这些数中最小的数为 60，现在我们减去 2，就得 58。”

在我们的实验中，尽管能力中等的学生(更不用说没有能力的学生)对他们的解法的质量(如果在那一点上没有实验者的特别指导)并不给予特别注意，但是有能力的学生却常常不满足于他们找到的第一种解法。他们并不停止解题，而是要弄清楚是否有可能改进解法或是更简单地解题。只有当他们找出的解法是经济的、合理的而且是“优美的”时候，他们才明显地感到满足。从他们的情绪反应看，十分明显，他们体验到一种特殊的美感。当他们知道了同伴或实验者指出的关于某一道题目的“优美”解法(他们自己没能找到这种解法)时，他们也具有同样的感觉。然而在另一方面，许多人在他们找到的解法是“拙劣的”，不灵活的，或是繁复的，而又不能找到更好的解法时，就会直接显露出不满与烦恼的情绪来。

引用一个典型的例子：七年级学生 R. S. 在解 X-A-12 这道题。一开始她设“我”的年龄为 x，“哥哥”的年龄为 y，然后画了一张表(见下面第一张表)。画好表之后，她不满意地看着表，显然不十分喜欢这张表。但她继续解题。画表大约花了 3 分钟，但是几秒钟内就列出了方程组：

$$y+2y-x=96$$

$$x=3(2x-y)$$

	过　去	现　在	将　来
我	$x-(y-x)$	x	y
哥哥	x	y	$y+(y-x)$

做完题目后，R. S. 重新开始画一张表。

实验者：“好，题目解出来了，让我们再做一道题。”

学生：“我感到题目可以解得更简单些。这里完全取决于怎样

设未知数。显然我没有成功地表示这些未知数。我要试一下另一种方法。”

实验者：“为什么呢？题目已经解出来了。”

学生：“我想用另一种方法解这道题。请等一会，我想设年龄之差为 y，这样解起来稍为容易些”（改动了表格）。表格成了这样的形式：

	过　去	现　在	将　来
我	$x-y$	x	$x+y$
哥哥	x	$x+y$	$x+2y$

“嗯，那是另一回事，现在我甚至可以在头脑中解这道题。”

我们的结论得到了最近发表的其他材料的证实。A. V. 佐西莫夫斯基在观察了有能力的学生作业情况后写道：“当他们找到优雅的、美丽的、创造性的解法时，他们感到特别满意”（131，第51页）。E. P. 伊凡涅佐娜提到，在解几何证明题时，有些学生表现出力求采用最简单、最经济的方法，而其他人则采取冗长而不经济的方法，使用大量的运算，这就把学生引离开合理的解题过程了（138）。

数学推理中心理过程的可逆性（迅速而自由地从正向思维序列转到逆向思推序列的能力）

心理过程的可逆性是指从正向思维序列转到逆向思维序列这一意义上的思维序列方向的重建。本书中这一概念包括了两个不同而又是相互关联的过程。

首先，它与只是向一个方向起作用的单向的 $A\rightarrow B$ 型联想（联结）相反，是双向的（或是可逆的）$A\leftrightarrow B$ 型的联想（联结）的建立。

其次，它是推理中心理过程的可逆性，是一种从答案或结论到原始数据的逆向思维，例如在从一个正定理到一个逆定理的转换

中所发生的思维。在一种逆向思路中，思想并不总是必须沿着完全相同的思路进行，而只是向相反方向运动。重要的是，如果思想的方向最初是从 A 到 F，现在则朝另一个方向，是从 F 到 A 运动；但是并不是所有同样的环节，同样的联想之链必须严格地照相反的次序出现。中间环节可以是不同的。难道一条定理的逆只是把这个定理倒过来"念"吗？在这里，思想背对着原先证明的东西，而面向着原来的出发点。但是，思想进行的具体路子会有很大的差异。因此，逆向的思路并不总是可以归结为逆向的联想的。

然而，这种区别并没有为把一种过程与另一种过程明显地分开提供根据。在这两种情况下（这对我们来说是最重要的）思想上都有一种"剧烈转变"的现象发生，思维从一个方向转向相反方向运动，这种转变给许多学生带来一定的困难。一个人头脑里还在想着向一个目标努力，但随后必须立即作出突然的转变——开始离开这一目标。因此，一般说来，有根据认为（例如，象梅钦斯卡娅和卡斑诺娃-梅勒已经发现的那样）从一种正向思路转向逆向思路是灵活思维的一种表现。从上面所说的看来，很清楚，我们并不象皮亚杰那样重视可逆性这一概念（参见第二章第二部分）。

因此，我们将谈一下正向联结与逆向联结①。如果思想系列从 A 到 E 看作是一个正向联结，那么朝相反方向的思想系列（从 E 到 A）就被看作是一个逆向联结。

在我国及其他国家里大量的心理学研究表明，逆向联结是可以在正向联结建立的同时被形成的。

苏联心理学家已经确认，其他条件相等，双向（"正向的"和"逆向的"）联结的建立，对彻底掌握学校教材来说，是一个重要条件。特别是卡斑诺娃-梅勒（147，148，第 64，76 页）用地理教材证实了不是所有的学生都能独立地从正向联结过渡到相应的逆向联结

① 这里直至全书末尾，是在传统心理学的意义上应用"逆向联结"这一术语的，而不是应用控制论或信息论中这个术语的含义。

的。根据卡班诺娃-梅勒的材料，好学生顺利地朝一个方向建立了联结，同时也相当容易地意识到一种反方向联结。对差的学生这是困难的，他们只有通过适当练习，才得以发展这些逆向联结。

V. N. 库利科夫运用关于小学生掌握函数依存性基本概念的材料(231)，以及 L. I. 卡尔米科娃运用掌握物理概念的材料(158，第 38～39 页)都指出了同样的事实。近几年来(1963～1965)E. I. 马希别茨(284，285)在有关几何材料的著作中，对于按照可逆性运算的形成过程去探索数学运算形成的阶段作了尝试。

数学家和教学法专家 P. M. 叶尔德涅耶夫(462，463)与 Ya. I. 格鲁杰诺夫(99，100，101)对于在学习数学中建立起来的逆向联结也予以一定的重视。

正如已经指出过的那样，我们的目标是揭示数学上有能力的、中等的以及没有能力的学生之间，在突然重建心理过程的方向、从正向思路转向逆向思路以及建立这些可逆的(双向)联结和联结系统诸方面能力水平上的各种差异。系列 XVII 中的题目就是为了阐明这一问题的。

有能力的学生在无需特别指导的情况下，解答了给他做的一些逆向题①面没有感到特别的困难。他们很快就辨认出这道逆向题就是刚才解的那道题的对立面。在刚解了一道基本(正向)题后，再解一道逆向题，并不给他们带来什么困难。没有出现对他们的技巧发生干扰的现象，也没有观察到第一道题对第二道题的解法有什么抑制作用。而且，约有半数情况证实了：在解完一道正向题后立即给出的逆向题，与独立于正向题给出的作为原始题目的逆向题相比较，前者解起来更迅速、更容易。特别是，这一切都意味着在径直方向上建立起来的一些联结和联结系统立即("当场")

① 我们把所有在解一个正向题后需要突然重建心理过程方向、从正向思维序列转向逆向思维序列的那些题目(不管它们的数学特征)，看作是心理学意义上的逆向题。

产生一种可逆的特征。当建立和形成一些正向联想时，也就意味着一些逆向联想同时(或者几乎同时)形成或建立了。

绝大多数能力中等的学生未经特别练习就让他们去解那些逆向题。的确，他们中大部分(大约60%)认得出给他们的是逆向题，但是他们解题的信心却不够足。在解了一道正向题后马上去解一道逆向题明显地束缚了受试者的思想与运算——第一道题产生了一种抑制作用。但是给他们一道与正向题无关的逆向题，却较有信心地解出来了。经过适当练习与指导后，能力中等的学生就比较快地掌握了题目的实质。因而，对能力中等的学生来说，建立逆向联结需要特殊的练习，而且在时间上是与正向联结的形成分开的，即首先形成正向联结，然后在适当的练习下形成逆向的联结。

至于没有能力的学生，他们只是在一些简单的情况下，把给他们做的第二道题看作是逆向题。特别是当第二道题是与第一道题完全相同的题目，只不过把正向变为逆向时才这样认为的。他们是单独地根据外部特征去加以判断的("在那里是问这一点，而现在这一点是已知的")。解一道独立于正向题的逆向题，总是要比它在一道正向题后出现时解得更好和更有信心一些。上述原则在一些定理与逆定理的证明中十分明显地反映出来。在证明正定理之后立刻去证明逆定理往往会引起很大的困难。在这种情况下，学生们在证明正定理时学会的推理过程，十之八九会被丢掉。同样一条逆定理，如果是在独立于正定理的情况下去证明它，引起的困难就相对地少些。只有在测验XVII-C中最容易的那些题目的解法中，才观察到个别的例外情况，显然这是由于题目的特殊性质所造成的。即根据简捷乘法公式把一个多项式分解因式，被证明对一些没有能力的学生来说是比较容易的，如果他们事先已经根据同一个公式将一个二项式加以平方的话。显然，这里得到一个直接的"启发"：解第一道题的过程清楚地显示出在第二种情形

下应该得到什么。因此他们经过反复练习后，才困难地同时建立了正向联结和逆向联结。对他们来说，建立逆向联结通常是一种完全特殊的、独立的任务，与相应的正向联结的存在无关。正向联结可以被牢牢地固定在他们的头脑中，但逆向联结未经特殊的练习就不会形成。这里我们讨论的是正确的联结。没有能力的学生常常会建立不正确的联结，例如，他们常常简单地对换前提与结论（诸如："对顶角是相等的"——"相等的角是对顶角"）。对他们来说，甚至不存在在给定的情况下逆定理、逆向推理过程是否正确这一问题。

一位有能力的学生 K. R. 根据"两数之和与两数之差的乘积等于此两数平方之差"这一公式，"当场"掌握了解法的类型。

实验者："现在把式子 $(x-y)^2-25y^8$ 分解因式。"

学生："不过这道题是倒过来的：这里有个平方差。这就已经解出了。"

实验者："这个式子等于什么？"

学生："$(x-y+5y^4)(x-y-5y^4)$，我们必须考虑怎样得到平方，取这些数之和再乘上差。清楚了。"

一位没有能力的学生 B. A. 用同样的公式经过了大量的练习，经历了一些困难，才掌握了解题的方法。他甚至不想去解给他做的任何一道逆向题。

实验者："解答这道题：$5\times5=$　（学生作了正确回答）。现在做这道题：什么数相乘才能得 25？（学生作了正确回答。）现在看：$5\times5=25$ 和 $25=5\times5$，第二道题是第一道题的反面。做这道题：$(2x+y)(2x-y)=$　（学生作了正确回答。）那么 $9x^2-4y^2$ 等于什么？"

学生："我不知道，这些都是怪僻题，我们没有做过这些题目。"

实验者："是的，你没有做过这些题目，但是我们现在在学着做这些题目。现在你考虑一下：两数之和与两数之差的积等于什么？

你是知道的。”

学生：“两数之和与两数之差的积等于第一个数的平方减去第二个数的平方。”

实验者：“对，这可以倒过来说吗？两数平方的差等于什么？a^2-b^2 等于什么？”

学生：“$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。”

实验者：“那么 $9x^2-4y^2$ 等于多少？”

学生：“$(9x+4y)(9x-4y)$……”

我们把以后的讨论过程略去了。这个学生只是在经过反复解释和练习后，才学会了做这一类型的题目，而且只限于一些基本的题目。

下面我们引述在我们指导下 S. I. 夏皮罗所研究的几个典型例子。

九年级学生已经学过正向（从左到右）演算的下述公式：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta。$$

实验者要他们计算

$$\cos 30^\circ\cdot\sin 15^\circ+\cos 15^\circ\cdot\sin 30^\circ=$$

他们中还没有人解过这样的例题。这一解法主要是“从右到左”运用这条熟知的公式。学生中出现了明显的差异。所有有能力的学生在几秒钟内就用这一公式解出了这个例题$\left(\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$。半数以上的中等学生不能解答这个作业，只是徒劳地试图用烦琐的变换去找出 15° 角的正弦和余弦（他们知道 30° 角的这些函数值）。只有大约三名中等学生，在使用了一些显然是不切实际的手段，经过长时间的、毫无成效的求解努力之后才找到了正确的途径。

我们对十年级学生介绍复数的概念时，要求他们把 $(a+bi)\cdot(a-bi)$ 乘出来。一位有能力的学生 D. 得出 a^2+b^2 这一答案后，立

刻提出(一种逆向联结"起作用"了):"这里实际上是把平方和分解因式! 以前是不可能的，但是现在可能了，因为我们已经学了虚数。"就在这时，这位学生又提出了把任何偶数幂的和分解因子这一问题(诸如 $a^4+b^4=(a^2+b^2i)(a^2-b^2i)$。一位能力中等的学生 P. 正确地做了这个乘法，但是没有讲什么。我们十分钟后要他分解 x^2+y^2 这一式子，他十分吃惊，并且说这个式子是不能分解的。

总起来说，我们可以得出这样的结论，有数学能力的学生显然具有迅速而敏锐地重建心理过程方向(从正向思维序列转到逆向思维序列)的能力，明显地具有推理过程的畅顺的可逆性；他们已经形成的那些联结立刻变为可逆的了。对能力差的学生来说，这一过程是极其困难的。

关于数学运算感受器的假说

众所周知，对许多复杂题目的解法不是立即想出的。学生们在解答过程中往往尝试了各种可能性，试验了不同的方法并作了各种努力。许多作者曾经提到过在解题过程中这些尝试的各种不同的性质。这思我们必须指出苏联与美国心理学家对待这个问题的原则区别。在美国心理学中，仍然广泛地倾向于把学习看作是一种基于尝试、错误而进行的活动。由于偶然的猜测产生了各种操作，那些经过证实并加以强化的有效操作保留下来，而那些无效的操作就被逐渐淘汰掉。这种方法甚至在最近的研究中仍有代表性。例如，H. J. 克劳斯梅尔和 L. J. 劳弗林(625)在分析儿童解答"按他们实际程度编制的难度不同的"题目中不同智商的儿童的行为时，就持这种观点(625，第 151 页)。纽厄尔、肖和西蒙等人在 1963 年发表的"创造性思维的过程"一文中指出："尽管这些尝试错误过程具有原始的特征，但它们在具有高度创造性的解题过程中仍然显得十分重要"(493，第 72～73 页)。

苏联心理学家们指出，人的各种尝试活动在原则上是不同的，是为一个自觉的目的所指引，常常以一个明确的假设为先导，是自觉地加以组织的，组成一个明确的系统并经常以一种心理实验的形式出现的(L. N. 兰达，242；A. N. 扎哈罗夫，130，第4页)。因此，各种尝试可以在分析-综合活动的不同水平上产生。只有在极低的水平上，这些尝试活动才是盲目的猜测，这时学生并不确切地意识到为什么要作这样的尝试，以及他们应该得出怎样的结果。

在我们的实验中，我们观察到了有能力的和没有能力的学生，其尝试活动在性质上具有明显的质的区别。数学上无能力的学生所作的尝试，总是以盲目而没有目标的运算及胡乱而无系统的求解企图为特点的(更确切地说，他们想凭猜测碰巧地发现一种解法)。

但是有能力的学生是以服从于一个明确的纲要或计划的有组织的探究系统为特征的。有能力学生的尝试总是有目的、有系统的，并且指向着证实他们所作出的假设。有能力的学生在作尝试时，常常意识到为什么要进行这一尝试，想达到什么目的，以及下一步怎么办。

下面的情况值得注意：有能力的学生在解一些难题时，他们的尝试常常与其说是作为解题的直接企图，倒不如说是一种借助每次尝试中得出的辅助信息来彻底弄清题目的手段。其结果，使这些学生对隐蔽的数学关系的本质形成了概念(这种关系不是题目中直接给出的，但是从题目所给出的各种关系的本质中可以得出)；同时他们在这一基础上拟定了下一步的运算计划。这时我们的受试者会说："我不只是在解题目，我想更好地了解这道题。""在解这道题前，可以让我把它研究一下吗？"

这些探索的方向是怎样确定的？有许多研究阐明了这一问题。最重要的自然是，研究者试图描述在解题过程中对题目所进行的分析的特点。在这一方面，S. L. 鲁宾斯坦和他的同事们的研究是

颇有成果的。他们所确定的两种分析形式——过滤性分析与通过综合的定向分析——以及有关预期性分析的概念(N. A. 梅钦斯卡娅)，对解释预见并筹划解题途径这一过程有很大成就。O. P. 捷列霍娃(416)也考察了分析问题的形式，这种分析能形成一个解题计划(提纲)。近几年来，A. V. 布鲁希林斯基(59, 60, 61, 62)正专注于解题中的心理过程方向这一研究上。

在我们实验期间，出现了这样的问题：有能力的学生还没有完成一次尝试，就感到他们的尝试方向是对头的(或感到这个方向是不会达到他们的目的的)，其根据是什么呢？有能力的学生尚未开始解题，就感觉到"未卜先知"的解法是一条可行的路子，根据又是什么呢？在解题过程中对已知解题方法的合理性的估价是有能力的学生的本性，而能力中等的学生，只有从头到尾演算完毕后，才能对他们所选择的解题方法作出估价。这就产生了一个假设：似乎有一个机能性的心理的控制-评价机制；由于这种机制的作用，每一次尝试中的"负信息"就得以被比较，"试用"，并加以加工处理。L. L. 古洛娃在给乌克兰心理学会议 (1964) 作的报告中，提到"预期答案的一般化观念"这一密切有关的概念，并且在这个基础上她正在进行着探索。

这是一种什么机制呢？让我们援用 K. 安诺欣所设想的一种大脑皮层的特殊的机能性控制装置这一概念，他把它称之为一种运算的感受器(acceptor，源出拉丁语，意即"赞同者"，"接受者")。感受器通过大脑皮层起着评价任何一个运算的结果的作用，以及评价一个人所做的任何事情的可取性。感受器的性质以及所起作用的特殊机制还不清楚。显然这是一种固定了以往经验结果的特殊系统。交付给感受器的是正在进行的运算的负输入。"负输入提供了有关已完成的运算结果的信息，给予机体一个机会去估价已完成的运算的成功水平"(29，第 288 页)。安诺欣根据负输入是表示中间运算的结果还是表示一种最初意向的最后完成，区分出"通

信线路"负输入与"终端"负输入。在感受器里发生着做什么与必需做什么之间的比较，同时评价着所执行的运算的正确性。换句话说，感受器指导并调节着一系列的尝试(28)；如果传递给感受器的输入脉冲不适合，机体就会对情境作出新的分析与检验。

感受器这一概念怎样才能应用于学习过程与解题过程呢？

安诺欣写道："最近我们正在得到的越来越多的材料表明，中枢神经系统广泛地利用了一种运算感受器的原理"(28，第86页)。在这一点上他强调理论也可以解释某些心理现象。特别是"所有教学工作都是起着强迫的负输入的矫正作用——只有在这一基础上，自我教学才成为可能。每次错误的纠正，就是一种当运算感受器的兴奋和来自不正确运算的负输入两者不能会聚时所必然发生的事情。没有这一机制，不论发现一种错误或是改正这种错误都是不可能的"(27，第38页)。

我们研究所得的材料使我们假定，作为一种特殊的心理的控制-评价机制的数学运算感受器是存在的。在这种机制里，"通信线路"和"终端"的负信息是从每次数学尝试，从解题过程中的每次数学运算中取得的。构成这种机制的基础就是一定的概括化了的联结系统，就象过去"数学"经验的集中一样，这种联结系统是在有数学能力的学生身上形成，并执行着感受器的作用的。

在进行任何数学运算、研究或尝试之前，就产生一种关于这一运算、研究或试验的过程和结果的独特的一般观念。在完成数学运算的过程中，负信息与这个一般观念是相互联系着的，这就容许对所完成的运算的效果作出评价——它们是充分的还是不充分的，正确的还是不正确的——并且提供一个纠正正在进行着的探索意图的机会，从而拟定出今后的运算计划。正在进行着的尝试和这种一般观念(数学运算的感受器)二者的一致起着一种特殊形式的证据的作用，而且使学生体验到他所选择的方法是正确的(或相反的)情感。这一切都是自我控制的独特表现形式(众所周知，

自我控制是任何有目的的活动中一个基本要素)。

有能力的和没有能力的学生在解题过程中所作的尝试的不同性质，也可以由开始时这种数学运算感受器的产生以及后来它的消失来解释(按照我们的假说，感受器是被概括了的数学思维的产物，它在有能力的学生身上发展得很好，而在没有能力的学生身上则表现得很弱)。

综上所述，数学运算感受器不过是关于今后研究的问题的一种陈述。我们今后的任务将是检验这种假说，探索数学运算感受器的实质和意义、它的形成的条件和运算的机制。

14 有数学能力的学生信息保持(数学材料)的特点

我们以有能力和很有能力的学生为一方，以没有能力的学生为另一方，比较了他们记忆功能的某些表现，揭示出学生数学信息保持的特点。在这方面，对能力中等的学生只做了比较粗略的研究。这里用一些测验研究了38名有能力和很有能力的学生，9名能力中等的学生和18名没有能力的学生。

有数学能力的学生对数学系统(题目系列)的不同因素的记忆功能，在各方面都是明显的。对题目类型的标志、解题的概括的方法，推理的概要，证明的基本线索以及逻辑模式等都能立即(当场)记住，并且长久保持。具体数据和数字材料记得很好，但基本上只限于解题期间，解题后很快就忘了。

在这一点上应当注意的是，L. P. 多布拉耶夫(114)证实了所谓定期联想的存在，这种定期联想在整个有限的规定期间内，即在解一道具体题目期间发生作用。完成作业后，这些联想就变得无用了，并迅速地瓦解。很明显，也能用类似的性质来区别数学记忆的某些表现。多余的、不必要的数据(如果把它们放进题目里去的话)，有能力的学生通常是不记忆的。他们中的大多数人在解题后立刻忘了题目的内容，但是，对某一类型的解题方法、即运算的一般结构，却记得很好。

我们研究了26名有能力的学生对系列 VI：A–1，A–3，B–1，

B-2, C-2, E-1, E-3 和 E-4 等一些题目的记忆和保持。我们得到 208 个题目的再现材料。在题目中放进一些不必要的事实（每个题目一个）。这些学生分别在第一次阅读后，实验（一节课）结束时，一周后和三个月后再现这道题目。在这期间，我们注意到勿使他们再阅读这个给定的题目。我们记下他们每一次对题目的本质关系、一般解法，具体数据以及不必要的数据的再现情况。总结性的数据列入表 20，并被描成一条曲线（见图 66）。

我们反复地进行下面的简单实验：要求一个有能力的学生做一道某一类型的题目，并且在两个或三个月内，再给他同一类型的

表 20　有能力的学生对系列 VI 中题目因素的再现

（8 道题，26 名学生）

题目因素	第一次阅读后		课结束时		一周后		三个月后	
	数目	%	数目	%	数目	%	数目	%
概括的本质的关系	207	99.5	199	95.7	192	92.8	178	85.6
具体的数据	182	87.5	148	71.3	20	9.6	4	2.0
不必要的数据	156	75.0	64	30.8	2	1.0	0	0

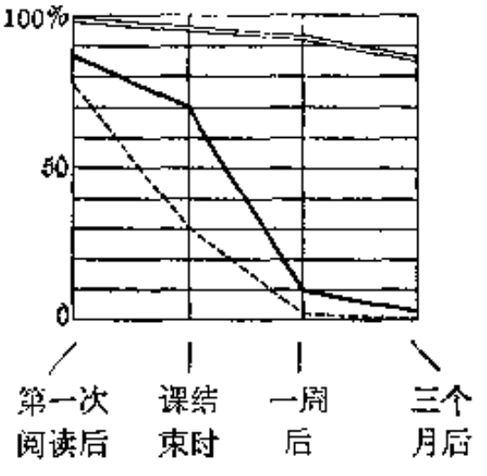


图 66　有数学能力的学生对题目因素的遗忘曲线

（26 名受试者的再现因素的总数，用占要再现的总数的百分率来表示。符号：——概括的关系，——具体的数据，------不必要的数据。）

一道题目(不是他早先做过的那道题)，这道题，据我们所知，他在学校里或家里都没有做过。他有一种"熟悉之感"：他确信已经做过这道题(不是同一类型而是同一道题)。他甚至会指出，大约在哪次实验课上曾经做过这道题。这里只能有一种解释：学生保持了这道题的类型和解题的概括的模式，因而他用自己所熟悉的同一解题模式感知了同一类型的另一道题目。

对很有能力的学生记忆功能表现特点的另一个研究也获得了类似的结果。

从系列 VI 和 XXII 中选出 10 道实验题目，对索尼娅(时年 9 岁)进行实验。要求索尼娅分别在第一次阅读后、课结束时、三个月后和九个月后再现这些题目(同时我们定期地同她一起做实验性数学功课，并在上面这个课题上严格地控制她的活动)。我们的数据是很有意义的：

1．她记住了题目类型的本质标志的复合体，甚至在 9 个月之后还记得这些情况的 90%(10 次中记住 9 次)。

2．在一节课(即 45 分钟)结束时，具体的数据就开始遗忘了。三个月后她只记得这些事实的 10%(10 次中记住 1 次)。

3．多余的、不必要的数据，在一节课结束时只记得当时的 10%(10 次中的 1 次)，并且在三个月后，就完全遗忘了。

对于能力中等的学生，我们没有发觉类似的差别。他们记忆具体数据和数字比较好，但是记忆题目类型的特点则较差，甚至完全不能回忆。我们发现，能力中等的学生试图用同样的努力去记住一般的和特殊的，抽象的和具体的以及本质的和非本质的东西。可以说，他们的记忆是"因多余的信息而负载过重"。

对没有能力的学生的研究，结果怎样呢？利用实验的结果，我们把实验教学组(如已指出的那样，由没有能力的学生和能力中下的学生组成)的受试者分为人数不等的三个组。

人数最多的一组(17 人中有 10 人)表明，在数学范围内，记忆

功能显然非常差(包括对数学概括和具体数据)。然而，他们中有许多人在另外一些学科中却具有良好的记忆。

这些学生记忆很差，特别是对解某一类题目的推理的概要，定理的证明和公式的推导等。这些材料需要他们付出巨大的努力，而且需要经常的反复。许多学生只是机械地记忆这些材料，再现时毫无条理。甚至他们在实验者的帮助下理解和认清了题目的类型及解题中运算的概括的性质后，如果不定期复习这些适当的材料，这一切就会很快地从记忆中消失。对于具体的数学材料，如数字和事实，甚至包括具体的几何材料，他们的记忆都非常差。

这组学生中没有一个人能够把一道实验题目在解题一周后再现出来，在三个月后就更不用说了。当实验课结束时好多人已把题目中本质的因素忘记了。例如，V. T. 在实验者的帮助下，学习了用两种方法来证明三角形的外角定理。猜想他已经完全掌握了。可是在课后发现，一种方法他已经忘记，另一种方法的再现也含糊不清。又如，所有没有能力的学生都喜欢那道关于鱼的题目(VI-A-1)，觉得新鲜。他们都乐于解这道题，但解题时几乎每个人都遇到困难，需要实验者的帮助。在一小时后，10个孩子中有4个忘记了题目中的基本关系和解题原则，7天后再回到这道题目，仅有3人记住了这道题目的类型("我们已知头和尾，尾和身体，身体和头的重量是多少，要求出整条鱼的重量")。只有一个女孩能再现(只是记住，而不是完全重新找出)解题的原则。

第二组(三个学生)跟第一组的区别，在于他们对于数学系统(题目系列)不同因素的记忆功能的表现是不同的。他们记忆概括的因素，就象第一组学生那样差劲。可是，具体的数、数字、数值、特定的题目、几何图形、几何证明时图形中辅助线的位置——这一切都记得很好。

例如，我们对学生进行三角形概念的教学。在黑板上画了整个一系列不同的三角形，包括很不平常的(这些图形是事先挑选和

准备的)。17 名学生全都仔细地观察,但不要他们画在笔记本上。然后擦去这些图形。两周后,我们要他们再现在解释三角形概念时所画的那些三角形。17 名学生中没有一个能够回忆出来。第二组中有两个人例外(此外,还有一个女孩没有上过前一堂课)。这两人中,V. D. 能完全正确地再现当时给予的 6 个三角形中的 3 个,而 V. U. 只再现了 4 个。但是,同样这两个学生,对记忆复杂的定义、公式、推理的一般模式和证明等却和这两个组的其他学生一样仍有很大的困难。在这种情况下,他们通常喜欢死记硬背。例如学生 I. G. 在再现例题 113^2-112^2 时,犯了一个典型的错误。这个题目用代数方法计算的要点在于:如果你能在题目中看出平方差(a^2-b^2),那么就能在头脑里很快算出来。学生 I. G. 在实验者的帮助下算出了这道题,可是一周后,她虽然记住了数 113 和 112 是题目的组成部分,却忘记了它们的数学关系("两数的平方差")。首先她按照 113·112 再现这道例题,接着按照 113+112,最后,经过一些思考,作出第三次改变:113^2+112^2,并且她徒劳地试图回忆怎样简易地口算这道题。一周后她再现了她解过的一道题(VI-A-3):"母亲和女儿、儿子花钱,一个用去 15 卢布,另一个用去 20 卢布,第三个用去 25 卢布。"正象我们所看到的那样,她忘记了主要的因素:这类题目典型而概括的关系的系统。

第三组有 4 名学生,具有较高的记忆数学概括的能力。这一组虽然与前两组没有特殊的差别,但上述这种能力的发展水平比前两组要高一些。

这样,根据对概括的数学材料、抽象的数学关系和符号、独特的题目类型、推理和证明的模式以及概括的解题方法等的拙劣记忆,可以区分出数学上无能的学生。

最有能力的学生能记忆他们已解过的题目的类型和运算的一般特点,但不能记忆题目的一些具体数据或数。另一方面,没有能

力的学生通常只能回忆题目的具体数据或具体事实。如，一个没有能力的学生回想起他解过了"关于鸡兔的题目"或"关于什么一条鱼重2普特的题目"，而有能力的学生则更多地回想起题目的类型(或者既回想起具体数据，又回想起题目的类型)："我做过一道关于整体中各个部分的不同组合的题目——一条鱼，它的尾和头重这些，它的头和躯干重这些，它的尾和躯干重这些"；"是的，有一道关于某工厂生产一种产品(桌子)的题目。我认为，如果日产量增加，那么完成订货单的最后期限应如何改变"。

在再现系列 XI 中没有实际意义的题目时，从中得到了很重要的数据。一周后再现题目 XI-A-3，没有能力的学生大多数不是完全没有记住这道题，就是象下面这样说："我记得它与数字5和7有点什么关系"。然而，有能力的学生通常这样回答："我想起这道题是关于一些数的数学表示式的，这些数除以一个已知数，得到同一个确定的余数。我不记得这些数，只记得其中有一个花招——这个余数比除数大。"

从这些事实中我们可以知道，数学记忆的本质在于，对典型的推理和运算模式的概括的记忆力。至于对具体数据和数值参数的记忆，就数学能力说，它是"中性"的。不论这种记忆能力是强还是弱(象我们的研究所示的)，它本身并不决定有数学能力或是没有数学能力。这完全符合柯尔莫戈罗夫所指出的(180)，数学上的成就很少依赖于对大量事实、数字、数、公式等等的机械记忆。柯尔莫戈罗夫写道，具有这方面的记忆当然是有用的，但是大多数的数学家并无特别显著的记忆力。

法国数学家庞加莱也指出：一种非凡的记忆，对于数学家来说，决不是必不可少的(498)。俄罗斯数学家莫达克海-波尔托夫斯基曾经写道："一个数学家没有必要在他的记忆中保持一个定现的全部证明，他只需记住起点和终点以及关于证明的思想"(300，第525页)。

在心理学文献中，有个别(可是不是很多)关于学生如何牢记数学材料的著作。在 A A. 斯米尔诺夫(384)的一篇论文中引用了一些有趣的材料(柯瓦尔的研究)。在解不同难度的算术题后，要求三年级的一些学生再现题目中的数字。结果是优秀学生再现这些数不如进步慢的学生好，题目愈困难，他们记忆得愈差。柯瓦尔把这一事实解释为：数对寻求解题的方法没有本质意义，因而就记得模糊了。遗憾的是，他没有试图说明：概括的解题方法，从题目中"抽象出来"的概括的关系是怎样被记住的。R. O. 塞里波瑞亚科娃(370)曾经指出，六年级和七年级的没有能力的学生识记和保持个别的、零星的数据和细节比较好。I. M. 索洛夫也指出，在儿童发展中出现的一种新的认识活动的标志，是识记和再现一道题目的"框架"、也就是识记和再现"把与题目结构没有直接关系的任何东西都抛弃掉"而剩下的"赤裸裸的结构"的可能性。(391，第 124～128 页)。

综上所述，我们可以作出明确的结论：有能力的学生的数学记忆，在数和字母符号方面，是概括性和运算性的，它与概括的智力模式和概括的关系这两者的保持和能够迅速再现有关。换句话说，有数学能力的学生的记忆具有显著的选择性：大脑并非保持输入的全部数学信息，而主要是保持那些由具体数据"精炼成的"信息和表示概括而简缩的结构的信息。这是保持数学信息最方便和最经济的方法。以概括和简略的形式(用布鲁纳的术语，以"压缩"的形式 [480，第 25 页]) 保持信息，而不让多余的信息去充塞大脑，这样可以使这些信息保持得更久，用起来也方便些。

最后，我们要指出，我们所谈的是关于对数学概括的记忆力的强弱问题。我们强调，一般地说，不是没有能力的学生记忆不好的问题，甚至也不是他们对概括的记忆不好的问题，正象已经指出的那样，他们中很多人在别的学科中学得很好，甚至取得卓越的进步。根据我们的观察和来自教师的评定，这些学生在非数学领域

(文学、地理、生物、历史)显示出很好的记忆,不只是对实际的具体材料,而且包括对概念、推理模式、概括和结论等。于是,一个学生的记忆一般说来可能是好的,记忆的不足之处可能只是在数学材料的运算方面被觉察,也就是可能仅仅在数学关系和符号方面暴露出来。

15 中小学生数学能力结构中的一些特殊问题

数学气质

我们观察所得的结果表明：在数学天赋很高的学生中，一种我们称之为数学气质的独特的心理结构获得了显著的发展①。这个品质往往在七、八岁时开始以初级的形式表现出来，以后便成为一种非常明显的特性。它的表现形式是：努力使外界现象数学化，一贯倾向于注意现象的数学方面，到处注意空间和数量上的关系以及函数性的依赖关系——总之，用"数学眼光"来观察世界。

前面所提到的那些有天赋的儿童，在这方面提供了丰富的材料，这些儿意中大多数人的特点（虽然在程度上有所不同）是：倾向于从逻辑和数学范畴的角度去解释外界现象，通过逻辑和数学关系的棱镜去感知大量现象，在感知某一活动中的大量现象时识别数学的那一方面。当然，我们目前只能提到倾向，这是因为这种现象在九岁或十岁时还不能变得十分显著。例如，这些儿童中的某几个记忆诗歌的能力较差，他们明显地试图捉摸一首诗的逻辑性和词序，但对诗歌中的韵律和"音乐"则反应迟钝。他们能够很好地

① 这里谈的这种品质在我们以前的出版物（198, 205, 206, 207, 214, 218）中称为数学癖好。现在我们宁愿把它叫做数学气质。我们认为这个术语更确切地反映了现象的实质。"数学癖好"这一术语，我们只把它归入数学天赋的类型的概念。

记住诗的内容，但在背诵诗歌时，经常总是改变词序，而且用逻辑方式把诗重新组织一遍。音乐教学方面往往也有类似的情况：音乐阅读和音乐理论最能吸引他们；我们观察到一种倾向，就是用数学方式来解释和暗记一首音乐作品的主旋律与和音、或演奏中的指法。当这些儿童练习素描时，他们也努力用数学方式来解释尺寸、相互关系和比例。

如果一个在数学方面有天赋的儿童被天文所吸引，那么吸引他的内容往往包含天文图表的绘制，月相以及各行星和恒星间的距离表的计算等等。如果这个学生被地理所吸引，那么吸引他的内容也主要是人口密度表、各种地理投影图以及各种不同图形和图表(诸如山高、河长等等)的计算和绘制。如果他醉心于化学的话，那么吸引他的内容是化学的公式和化学方程式；他会列出非常复杂的化学反应式，或写出门捷列夫周期表。我们发现，他们甚至对历史或语言也明显地发生兴趣。比方说，他们对历史的迷恋，表现在想从数学上来解释东方楔形文字的原理，用数学的破译方法来熟悉古代玛雅印地安部落的语言，等等。

给环境以数学解释的一贯倾向，也表现在下面的事实中：根据我们的观察，在数学方面有天赋的儿童往往坚持在散步、阅读、看电影、上课以及在家时对自己提出问题，例如，“估计”一所巨大建筑物的体积，计算一个体育场的面积(和“里面能坐多少人”)，求出一艘汽艇沿莫斯科河航行的速度，计算他自己所乘的一辆公共汽车的速度，等等。他们会想到这样的问题：“站在克里姆林宫的斯派司卡雅塔上(或站在兴建中的奥斯坦金司卡雅电视塔顶上)能够看到的面积有多大？”“一个人一生中共活了多少秒钟？”“他一生中喝下了多少水？”某些儿童在看了电影《包戈丹·赫米里尼茨基》①后，就开始计算：如果照电影中表演的那样每人捧一掬土，实际上

① 包戈丹·赫米里尼茨基在十七世纪领导乌克兰人民反抗了波兰地主阶级的压迫。——中译者注。

需要多少人才能堆成一个坟冢？

S. I. 夏皮罗花了许多年的时间，在一所数学学校的高年级研究一组有数学能力的学生，在他的许多学生身上能非常明显地观察到数学气质的表现。例如，学生 D 总是从逻辑观点和数学关系来分析他周围以及与他自己有关的一切事物。当 D 看到一些工人在铺瓷砖地板时，他就估计那个地板是否能用给定形状的瓷砖来铺成，用给定的瓷砖可以铺成什么式样的地板，一般地，什么样的瓷砖可以铺成一块已知的地板，等等。当他看到别人在打弹子球时，就思索有关弹子球在被击中时的运动的数学理论。当他看到一幅推销彩票的广告时，就立即开始计算获得各种奖的可能性。

学生 B 甚至一直感到有必要用数学来解释非数学的逻辑关系。有一次，在课堂上大家正在思考一个问题，内容是两列火车相向而行，第一列火车的速度是第二列火车的两倍。B 立即喊道："好象是沿着一条中线在运行。"并解释道："如果一个三角形的顶点和它的对边也以同样的速度沿中线相向而行的话，那么它们将在三条中线的交点上相遇。"

夏皮罗注意到，学校的一切活动在学生 M 看来都是"带着数学色彩的"。他自己承认，他不喜欢化学，"因为化学不落实到比例"；"当我们开始做有关热平衡方程的题目和力学题目时"，物理学引起了他的兴趣。当他读到遗传理论的数学处理时，他甚至对平时不欢喜的生物学也显示了特殊的兴趣。M 在学习语言理论的数学处理时，对语法着了迷（在这之前他对语法从来不感兴趣）。有一次，M 读到一篇特殊的文章，它讨论了在一定的课文中字母出现的正常频率。这一点使他很感兴趣，他决定去检验这个命题。他做了大量的工作，统计了地理课本的正文中每一个字母出现的次数，结果使他相信了这一命题是正确无误的（尽管除了数学外，M 对一件事总是不耐烦和不能持久的）。

难题总会使有能力的学生着迷，增加他们的活动，并且磨炼他

们的才智。有天赋的学生一旦专心致志地解一道题时，总会“摒除”周围的一切事情，甚至他忙于其他事情时，也会一直在思考这道题目。他们中的一名学生这样说：“一道没有解出的题目老是缠住我！”

心理学家 N. E. 苏达科夫(397)有一次对学生尤里 Kh. 进行观察。对数学的专注和对其他一切都不过问已成为尤里的习惯，以致教师们对此也司空见惯，通常不加评论。他的朋友们曾说起，有一次当他们和尤里一同到一所音乐学校的音乐厅去听柴可夫斯基的钢琴协奏曲时，他们注意到尤里在演奏进行时掏出他的笔记本，开始急匆匆地在它上面记下什么。他们估计，尤里记下的一定是演奏中某支乐曲的名称，或者听后的一些印象。但在音乐会后，他们惊奇地发现，他在笔记本上记下的竟是几天以来他一直在想的一道题目的解题思路。这还不是唯一的例子。他们还讲了他在音乐会上和夜自修时的其他一些情况，尤里会使自己摆脱周围的一切事物，而沉浸在数学计算中。

大量著名数学家的传记和自传资料也显示出这种品质，即用数学来解释现实的一种倾向。许多有创造性研究成果的数学家的特征是：“对环境有独特的知觉——他们自己的对世界的‘观察’……他们常常‘用他们自己的方法’来观察一般所熟悉的事物”(M. S. 伯恩斯坦，40)。

数学气质是一种复杂的个体心理结构，它不能归结为知觉、思维等任何认识过程的特征，而明显地接近于格鲁吉亚心理学家所说的“定势”这一概念。显然，它是作为一种特殊的数学天赋的综合表现而形成的，包括认识、情绪、意志诸方面(一种适当的态度、倾向和兴趣，即对数学活动的一种需要。)

当然，人们只能在当代心理学和生理学研究的水平上对上述特定的性质推测其生理学上的解释。我们倾向于这种假设，即在上述情况下，大脑产生了一个特殊的“调谐作用”，好象一种从关系

和符号类型的环境刺激中作出选择的趋势一样。显然，我们可以假定具有"数学倾向"头脑的人是存在的。我们也可以推测这种性质是在一个人的一生中逐渐形成的，但是以某些素质、即大脑的某些先天的解剖学-生理学的特点为其基础。

从分析数学能力成分的角度来看突然解出题目（"灵感"、洞察力）

众所周知，各种各样的题目作业（包括数学题目）解答，往往不是一系列清晰和精确的连续思维的结果。在整个一系列情况中，经过无效的尝试或失败后"灵感"会突然出现，一种猜测、即一个仿佛是偶然的、难以解释的解题思想会从心里冒出来。这种突然现象连本人也无法作出满意的解释，因为他对这种有成效的新思路的一切起因一无所知。唯心主义的心理学把这种突然解出题目的现象（英语和德语都称为"洞察力"）看成是一种特殊能力的表现，这种特殊能力可以不依赖过去的经验而直接"掌握"环境中本质的（数量的和空间的）关系。

许多国外的心理学家和一些数学家（如庞加莱、莫达克海-波尔托夫斯基），把这种对事实的直接理解，即一种直接的"心理判断"比作是一种散漫的认识活动，它建立在从某些逻辑运算连续迁移到另一些逻辑运算的详细推理过程的基础上（R. 吴伟士，483；纽厄尔，肖和西蒙，493）。苏联的研究人员（S. L. 鲁宾斯坦，354，355；A. N. 列昂节夫，256；G. S. 科斯秋克，191；V. N. 普希金，341，342；Ya. A. 波诺马列夫，335；V. 谢夫丘克，448；等人）在他们的著作中表明，一个人体验到突如其来的灵感的现象，尽管表面上看来好象与过去的经验没有联系，但毕竟是先前长期思维的结果，是先前获得的经验、技能和知识的结果；它需要加工并运用一个人早先积累的信息。

在现场实验研究以及在对五年级到八年级学生作业的观察中，我们经常遇到这种“灵感”或猜测的情况(似乎不好解释地突然感觉到原始而正确的解题思想)。S. I. 夏皮罗研究了九、十年级中有数学能力的学生，他更频繁地遇到这种现象。

我们不想用任何方法对洞察力作本质上的分析，而只想揭示一下有能力的学生这些表现的基础是什么。我们基本上是这样推测的，这些表现的基础不会超出我们已经揭示出来的数学才能的成分，而且任何这样的事实，都可以从我们关于数学能力结构的概念出发得到解释。事实上，在绝大多数情况下，我们最后都成功地找到了这些环节，如果没有这些环节的话，人们就会得到突然的和无根据的“灵感”这一印象了。

1．概括化往往潜伏在突然猜测或“灵感”的里面：即在各种数学对象、模式或问题的共同性质(有时是非常间接的性质)的基础上，不知不觉地应用了运算(或某一个别策略)的一般方法或某种解法的一般原理。我们在这里再次强调，受试者不论在“灵感”发生时或发生后，对这一点都是意识不到的。在受试者的经验中，这种问题是从未碰到过的，但相似的特征(甚至是一点点相似)却碰到过。

如 P. A. 舍瓦列夫所注意到的那样，受试者在解复杂的题目时，通常试图把一道题目归到他已经熟悉的一个类型中去，但他并不感觉到正在运用这一策略，也没有意识到他在运算中所用的一般原理。舍瓦列夫强调指出，这就是为什么受试者似乎感到解法象灵感似地突然出现而没有充分原因的理由(446，第 102 页)。

我们的受试者不仅无意识地努力把一道题目归入一个熟悉的类型中去，而且在分析题目的条件并作出探索性的尝试时，还努力“抓住”题目中那些可以使他们运用经验中某些一般或特殊的方法、策略来解题的因素。受试者通常意识不到他们“灵感”的客观起源(或模糊地意识到；例如，一个能力很强的学生D.曾经说过，在

解新题目时他心里往往会产生一种他"以前曾经接触过"的感觉)。

2．许多表面上意料不到的突然出现的"灵感"或猜测(洞察力),可以用在简缩了的结构中进行思维的一种倾向,用最精简的联想的存在来解释,这些对数学能力很强的学生来说是很自然的。当推理过程很具体时,我们容易找到从一种思想过渡到另一种思想的过程;思维是通过怎样的连续"动作"而达到适当的解答,这是一清二楚的。当推理过程被简缩,它里面的整个一系列中间环节被"略去"时,要想跟踪这些思路往往就很困难了,仿佛从一种思想过渡到另一种思想缺少逻辑上的动机,它是未经证实的,它的产生出人意外并不可理解。

这个思想并不特别新奇。本文献中许多地方曾这样指出,如果在一个对任何人来说都是十分清楚的推理过程中,把所有的中间环节都省略掉,只留下开始和最后的环节,那么这常常给人一种不知所措的印象。"通常由'直觉'得到的结论可以分解成一个完整的结论链,而作出结论的那个人常常不仅实际上意识不到其中的所有环节,甚至连别人也无法使他意识到它们"(舍瓦列夫,446,第96页)。舍瓦列夫这里所指的是,一个人不能意识到一个逻辑上完整的论证中的所有环节。但我们现在所指的是,在实际的推理过程中一个有能力的学生经常意识不到(不论在解题时或在解题后)所有的中间环节。"本身自明",即一个结果的直接发现,往往是这种认识模糊的(或完全不认识的)推理过程的结果。在这种情况下,学生有时不可能意识到把它引向结果的中间推演的整个系统,即使他想这样做。布鲁纳试图解释洞察力的现象,他写道:"思想家获得了答案,……但他对获得答案的过程很少有任何意识"(480,第58页)。科瓦列夫和米亚西谢夫分析了科学上(特别是数学上)的能力后,写道:"科学家们的推测和发现好象事先准备好了的论文一样在心中发光,但它们的发展过程往往是含糊的"(174,第132页)。他们指出,由于一些环节的省略而造成的心理过程的

缩短，是与这些环节从意识范围内摆脱出来有联系的；因此，“一个人可以找到一些解题的例子，说明按题目详细的解答顺序来再现解题过程是困难的，或再现是不完全的”(174，第148页)。

我们已经挑选出来作为“灵感”基础的两种情况(概括能力和用简缩结构思维的能力)是密切相关的，以后也将如此认为。

现举例说明如下：一个有能力的七年级学生 G. R. 正在做国立莫斯科大学力学数学系入学考试的一道试题 (180，第23页)：“四根管子通向水池。第1，2，3号管打开后，水池12分钟可以灌满；第2，3，4号管打开后，水池15分钟可以灌满；第1，4号管打开后，水池20分钟可以灌满。如果四管同时打开，问水池需要多少时间才能灌满？”起初 G. R. 试着用方程组来解这道题目，结果纠缠于繁复的方程组中。她试图用不同的方法建立方程组，但仍不得要领。然后，她突然有所领悟：她开始迅速地边写边说：“噢，这道题可以很容易地做出来：管子的两倍，即两个第1管，两个第2管……，一分钟可灌满水池的 $\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}=\frac{1}{5}$。一组管子每分钟灌满水池的 $\frac{1}{10}$，或者说，10分钟可以把水池灌满。”

解题后，实验者问 G. R. 是怎样想出这个解法的，以前她是否做过类似的题目。她的回答是否定的：她没有解过这类题目，她也不知道她是怎样想出这个解法的。学生和实验者花了很长时间来寻找她想出这个解法的根源。我们甚至检查了她在五、六、七年级时所有的笔记本。在其中一本笔记本上我们发现，两年前她曾做过一些根据两数的和与差来求两数的题目，方法如下：

$$\begin{array}{rr} & A+2=40 \\ + & A-2=10 \\ \hline & 2A=50 \end{array}$$

在此之后不久，她用同样的方法做过一道已知汽艇顺水和逆水速度求流速的问题。

我们不能再发现什么了。很可能的一点(当然不是无可置疑的)是，她保留了解题的最一般的思路，并且不知不觉地把它迁移到新的场合中去，而自己在解题时或解题后却一点也没有感觉到。G. R. 在如今的题目中摹仿了这一模式，用下面的方式指出了题目中的关系，从而证实了我们的假设：

$$1+2+3\cdots\cdots=$$

$$\cdots\cdots 2+3+4=$$

$$1\ \cdots\cdots\ +4=$$

现在可以较容易地看出，从前的思路被应用到这道题目上去了。

就学生方面而言，整个过程都不是自觉的，从表面上看好象是典型的洞察力。这里，令人感兴趣的两个情况(当然，假定我们的假设是正确的话)是：(1)这个迁移是经过一个非常长的时间以后才发生的；(2)迁移仅仅发生于解题方法的最一般的原则上。

一个有天赋的10岁的学生索尼娅L.正在做下面这一道题："求证所有属于 276276, 591591, 112112 这一类型的数都能被 13 整除"(邓克尔问题)。她进行了十分钟毫无结果的尝试，把所给出的数一个个除以 13，最后突然出人意外地宣布："啊！我已经做出来了。上面任何一个数都可以写成：$xyz000+xyz$；我们把公因数提到括号外得到 $xyz\times(1000+1)$。在这两个因数中，一个能被 13 整除，即 $1001\div13=77$。"可以看出，解这道题目的关键，就是要找出这些数在结构上的共同规律($abcabc=abc\cdot1001$)。那么，在索尼娅的过去经验中，有什么东西可能启发她去发现这些数的一般表示式呢？索尼娅本人是一点也不知道的，只觉得解题的经过就好象是一次突然的莫名其妙的猜测。经过长时间思索以后，她说，大约三个月以前她曾用代数方法来表示某一类型的所有的数，同时马上补充道："啊，对了，我已经写出了能被某一个数整除的那些数的一般形式，以及被某个数除后以另一个数作为余数的那些数的一般形式。"在检查了她的笔记本后(她把实验课的笔记本小心地保存起

来)，她和实验者发现，四个月以前她的确已经做过题目 XI-A-3。可以假定，一般方法的概括和迁移在这里也构成洞察力的基础。

下面让我们从夏皮罗的研究成果中引用两个例子：

受试者B正在做下面一道题："求证一个多位数与它的数字的乘积之比不小于$\frac{11}{9}$。"我们不准备在这里引述其解法，我们只指出用分母逐项去除分子的方法是证明这道题目的决定性步骤和转折点。受试者说不出她是怎样找到这个决定性步骤的。在分析她以前做过的题目时，实验者发现她很久以前曾做过下面这一道题："求证$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2\left(\frac{a}{b}>0\right)$。"在解这道题时她曾经应用了分母逐项除分子的同样的方法，在这道题目中上述方法是相当"显而易见的"(435)。

学生D正在做下面这道题(见图67)："如果半径$r=1$，而且图中两个阴影部分相等，试求OO_1。"

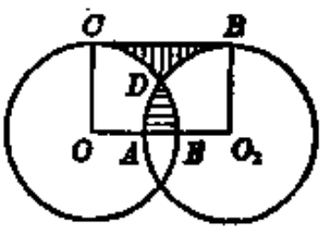


图 67

他看了看图，马上说道："长方形等于半圆，$OO_1=\frac{\pi}{2}$。"受试者似乎立刻"看到了"结果。的确，这是一个高度简缩的推理过程。D是这样"展开"的："在四分之一圆O_1AB中我们用相等的部分CDB来代替阴影部分。"此后，我们从他身上再也"挤"不出什么东西了。D是用简缩的结构进行思维的，进一步的解释照他看来似乎是多余的。无论如何，实际的具体推理过程是这样的："在其中一个四分之一圆(例如O_1AB)中，我们用相等的(根据条件)部分CDB来代替阴影部分ADE。于是我们得到，长方形是由四分之一圆OCE和等于四分之一圆的图形O_1BCE组成的。因此，长方形的面积等于半圆的面积。半圆的面积是$\frac{(\pi r^2)}{2}=\frac{(\pi\cdot 1^2)}{2}=\frac{\pi}{2}$，长方形的面积也是$\frac{\pi}{2}$。在面积是

$\frac{\pi}{2}$ 的长方形中，一边(r)是 1. 所以另一条边(OO_1)必等于 $\frac{\pi}{2}$。”

如前所述，我们的任务并不是要揭示洞察力的本质。我们只不过想表明，有能力的学生在解题时所表现出来的许多关于突然出现的、似乎是莫名其妙“灵感”的事情，都可以用过去经验的不自觉的影响来解释，构成这些事情基础的是对数学对象、关系和运算的概括能力和用简缩的结构进行思维的能力。

有能力的学生在持续而紧张的数学活动中的韧性

在研究有数学能力的学生的数学活动时，我们注意到他们的一个典型特征：比起上其他课，甚至上他们相当感兴趣的课来，他们在数学课上能减少疲劳。即使延长课时（适合他们年龄的）也不会引起明显的疲劳。为了进行实验起见，我们延长上课时间（3 小时），而且不给一些中间休息的时间。只有到课快要结束时才观察到一些疲劳的迹象（如发生错误，记忆迟钝下来等等）。

也许有人会这样设想，学生之所以很少感到疲劳，是因为数学对他们来讲是容易的，是一种轻松的活动。但实际上并非如此。我们反复授课，直到学生智力的极限。他们努力学习，虽然比起其他课来紧张程度差不多，可是疲劳的程度却轻得多。这种特性在天赋很高的学生的活动中是很突出的。从上面所述的现象中显而易见，当他们埋头于长时间的计算时，是显著地不象可能预期的那样容易感到疲劳。

与此相联系，我们注意到，没有数学能力的学生，在学习数学时，比起学习其他学科（也许是他们不感兴趣的，或感到困难的学科），更加显著地感到疲劳。学生和教师都提到这一点，我们自己的观察也证实了这一点。没有能力的学生在上数学课时，如果不

用心学习，或中断听课(这是经常出现的)的话，那么他们就不会感到疲劳。如果他们是在学习的话，那么就会比其他学生更加容易感到疲劳，这是因为在数学对象间建立联系，总是要求他们全力以赴。

夏皮罗也注意到，有能力的学生在处理数学信息时，不大感到疲劳。他的那些有能力的学生也能够花上 3 至 4 小时，来做要求付出很大脑力劳动的复杂数学题目，而不感到疲劳。(有些学生在解题时甚至越到后来越做得好!)他的学生中有一位说："最好的休息就是认真地做数学作业。"下面的事实也可以说明减少疲劳的现象：有能力的学生在上了加强的数学课以后还能顺利地学习其他学科，而能力中等的学生在上了数学课以后对新材料(其他科目)的反应和学习，就要比平时差得多(433)。

A. V. 波诺马列娃 (336) 和 R. O. 塞里波瑞亚科娃等人都作过同样的观察。波诺马列娃注意到，有能力的学生能"无限制地解物理和数学题目而完全不感到疲劳。"我们所注意到的这个事实已由 N. S. 列伊捷斯(252, 254)详细地作了描述，但是他所观察到的有天赋的学生对紧张的心理活动的需要和不易疲劳等，是在更广泛的领域里表现出来的。

夏皮罗作了一个有趣的尝试，他用实验的方式验证了(但缺少受试者主观上的证据)，有能力的学生在完成持续而紧张的数学作业时不大感到疲劳，并从数量上估计了数学能力水平不同的学生在这些条件下疲劳的积累(433, 435)。他把使用计算尺时计算技能的速度作为疲劳程度的指标。他的九、十年级的学生全都早已掌握了用计算尺进行计算的技术。

夏皮罗事先计算了每个受试者用计算尺正确计算的个别速度(结果发现，每个受试者根据给定的计算方法的框架用计算尺进行计算时，都有着他自己的最高速度)。这些结果对每个学生来说是稳定的，这样我们把与稳定的个人速度的显著差别看作是由于控

制因素(疲劳)的作用而引起的,就有了根据。每个受试者学习数学2至3个小时(为了排除题目的相对难度的影响,每个受试者都做经过选择的不超出他们能力范围的个别作业,如果每个人所做的作业是相同的话,那么这些作业对某些人来说可能太难,而对另一些人来说则可能太容易),然后测量受试者在上了紧张的数学课后的计算速度,并与课前的速度进行比较,夏皮罗得出下面的结论:(1)上过了紧张的数学课后,有能力的学生的计算速度出现了微不足道的下降(如果上课时间不太长,最多不超过一个小时,则计算速度往往反而上升)。这一现象在别种活动中是观察不到的,同样的学生在上了紧张的历史课或文学课后,计算速度就明显地下降。(2)能力中等的学生,在上了相同的数学课后,计算速度减慢了一半,而且可以在计算中看到大量的错误。

这个材料从其他教师那里得到证实。在这次实验后的下面几节课上,有能力的学生没有表现出疲劳的迹象,而能力中等的学生则在下面的课上开始明显地感到疲劳。

有能力的学生在数学课上疲劳减少这一现象(与他感兴趣的其他活动形式相比较),使我们很想知道,我们是否可以这样说,一个人神经过程(特别是神经过程的力量)性质的一种"偏好",是与他的某些活动的性质相一致的(我们知道,捷普洛夫论述过,一个人的神经性质的偏好只是与神经系统的不同部分相一致的)。

捷普洛夫在一些有关神经系统力量的重要文章中,曾经指出了它的坚强性和工作能力,以及在持续的刺激作用下它的高度的抗疲劳能力(408,第515页)。"疲劳出现的快慢……表示神经系统的强弱"(414,第495页)。N. S. 列伊捷斯也注意到刺激过程的力量的迹象,例如象当一个学生可以长时间地集中注意而没有显出疲劳时对持续压力的忍耐力(252)。显然也有这样一些事例,即神经过程的力量的这些迹象仅仅是一个人的一种活动(在目

前情况下指的是数学活动)的特征，并不转移到他的活动的其他形式上去。这是神经过程力量的一种带有"偏好"的特殊表现(正如 V. S. 梅尔林所注意到的，在活动的积极动机存在或不存在的情况下神经过程灵活性带有"偏好"的表现一样 [293，第 89 页])。

16 数学能力各成分上类型、年龄和性别的差异

(数学气质方面的)结构类型

众所周知，在任何科学(以及艺术)领域中，才能，作为一个能力的质的组合，总是因人而异的。但是对于所有不同质的才能来说，才能结构中某些基本的类型差异总是可以探索出来的——某些特定的类型，它们彼此之间有着明显的差异，但通过不同的途径可以在适当的领域里达到同样高的成就。

当然，这一切同样可以应用到数学领域中去，这是有充分理由的。在个体的数学能力结构里，各成分的组合可以是不同的，就象它们可以形成结构的不同类型和数学气质的不同类型一样。结构的某些变化是发生的；就是说，在能力中的一些成分补偿另一些成分的情况下，数学活动中的高度成就，能由不同的能力综合体实现。正如柯尔莫戈罗夫所指出的："在不同的组合中，会遇到数学能力的不同方面"(180，第11页)。数学气质的不同类型之所以存在，不仅是人们中间个别的、典型的心理差异的结果，而且也是不同的数学分支对一个人提出不同要求的结果。"在某个范围里，寻求最优算法的能力被证明是最有用的；而在另一个范围里，组合的能力是重要的。……在某些范围里，常常要用到几何上的解释，而在其他一些范围里，则很少这样用到"(S. I. 希伐茨伯德，439，第43页)。

在过去和现在的一些著名的数学家中，都曾经有过不同类型的卓越的代表人物。例如，数学家 B. K. 姆洛泽耶夫斯基，按才能的性质他是一个几何学家，根据他自己的话，他学习数论感到困难，而且毫无兴趣，在他的一生中，这似乎是他唯一不感兴趣的数学分支(349，第7页)。巴黎科学院院士兼巴黎大学教授 C. 埃尔米特自述道："我实在无法向你描述，在学习我所厌恶的画法几何学时，我要付出多少努力才能理解其中一点点东西。……如果一个人能只在分析的范围里进行思考的话，那他是多么幸运啊！"(1890 年 5 月 8 日给斯梯尔耶的信，419，第 94 页)。另一位法国数学家庞加莱尽管具有出众的数学才华，但在青年时代就已显示对作图的绝对的无能。还可以举出许多类似的例子。

如果只考虑学龄儿童的话，人们是一般不会说到数学能力的多样化的，然而，即使这样，有经验的教师也要指出，不同的类型是存在的。例如，在我们用书面询问过的 56 位教师中，有 52 位就指出有些学生的能力只是在代数或几何方面(代数型和几何型)，虽然他们感到很难按照类型来对大多数学生进行分类。

虽然如我们所注意到的那样，在一门学科上的能力不总是表现为在该学科的高度的成功，但其间仍然存在着相当高的相关。因此，我们决定对许多学生的代数分数和几何分数作一个比较。1964～1965 年间，我们对莫斯科六年级至十年级的 1512 名学生作了这样的比较，以挑出代数分数和几何分数之间有明显差异的例子。我们把 2 分之差看成明显的差异(一般指 5 分和 3 分，或 4 分和 2 分之差)。而 1 分之差(这种情况很多，约占 30%)则不予考虑：首先，这个差距不够大，我们不能由此面谈论类型；其次，它经常可以用偶然的情况来作解释。我们的材料通过同教师的讨论而被证实。(这两门学科中，具有同样要求的作业的分数之间一种稳定的、非随机的关系，是我们所感兴趣的。)显然，选择的标准是十分严格的。因此具有这种明显差异的个案很少——在 1500 名

学生中总共只有23人(1.52%)，或者说每两个班中平均只有一个个案。在这些个案中，10名暂时被划分为"代数型"，13名被划分为"几何型"。但是(如教师们所证实的那样)这些个案都是这两种类型的非常突出的代表。

我们认为，"学校式的"数学类型的存在，与一个学生心理活动中的言语-逻辑和视觉-形象成分的相对作用有关，因此我们作了如下的实验性研究。我们根据下面的一些指标，来研究34名有能力的学生的个别差异：(1)受试者解题时在多大程度上依靠视觉意象，他是否努力把数学关系视觉化，甚至对最抽象的数学系统他是否感到有必要作出一种形象的解释；(2)他的空间几何概念是怎样完善地发展起来的——对于空间中一个立体的位置和它的各部分间的相互位置，以及立体、图形、平面、线条等的相互关系，他进行视觉化(凭智力去"观察")的能力(即他的几何想象力)，倒底如何。这一研究是用系列XXIII，XXIV和XXV中的题目来进行的。

首先，应用这些系列来研究的结果使我们得出两个命题：(1)这两种成分(即把抽象数学关系视觉化的能力和形成空间几何概念的能力)在数学能力的结构中并不是必要的成分。它们存在与否(更精确地说，它们是强还是弱)，*并不决定数学天赋的程度，而只是决定它的类型*。有数学能力的学生可以在言语-逻辑和视觉-形象成分之间有不同的相关性，但是这种相关性决定着他究竟属于哪一个类型；(2)在我们的实验里，对抽象数学关系视觉化的能力和形成空间几何概念的能力之间，显示出一种非常密切的相互关系。在每一例子中，我们都观察到一种能力与另一种能力的对应关系①。

作为研究的结果，我们根据所得到的参数，把所有的受试者分

① 当然，这并不证明下列说法：两种指标是同一种性质(比如第一信号系统的良好发展)的不同表现。弄清楚这点并不是我们的任务。但这个问题需要彻底加以研究。

成三组，在最后一组又分出两个小组。这些实验表明，根据言语-逻辑成分和视觉-形象成分之间的相关性，确实可以区分出数学能力的不同结构，这确定了以不同方式使数学活动能顺利进行的不同的数学气质。

这使我们可以分离出一种分析型(一种分析的或数学上欢喜抽象的气质)、一种几何型(一种几何的或数学上欢喜形象的气质)和一种调和型的两种变式(一种调和气质的抽象变式和带意象的变式)。前两个类型应当根认为具有某种局限性，事实表明，它们只是对某些数学学科的学习特别有利。虽然这些类型的代表在掌根学校教材方面获得了很大的成功，但是他们也确实体验到某些将在下面讨论的特殊的困难。

当然，如在任何心理类型学中所常见的那样，这些类型(根端的类型除外)之间的界限并不是十分清楚的，当中存在着过度性的(混合的)变式。

庞加莱(670)、阿达玛(595)、雷韦兹(677)和莫达克海-波尔托夫斯基(300)等人的著作中都提到过分析型和几何型，但是他们把这些名词与数学创造力中的逻辑方式和直觉方式联系起来。Z. P. 迪内斯(558)谈到分析型和构造型；魏德林(727，第69页)则谈到数学思维的视觉方面和抽象方面。J. 赖格莱(747)联系到计算因素(N)或空间因素(S)的作用，挑选出适当的学校数学的类型。K. 斯屈恩慈(702)对天赋作了清晰的分类，例如，分离出一种经验型和一种概念型。运用到数学中，前者是指一种应用类型，它是朝向能直接观察到的时空关系的，而不是朝向根念的结构。后者是爱好演绎法的理论家的类型。V. 埃克尔和 T. 济享(596)提出三种类型：视觉成分处于主要地位的，抽象成分处于主要地位的，以及两者保持平衡的。

在苏联的一些研究人员中，梅钦斯卡娅从思维的抽象成分和形象成分的关系这一点出发，对学生在解题中的个别差异问题进

行了大量的研究。她选出了具有以下相对优势的学生：(1)形象思维较抽象思维占优势；(2)抽象思维较形象思维占优势；(3)两种思维形式是调和发展的(44，第27～33页)。G. P. 安东诺娃近来也运用了同样的分类(30a)。

许多作者已经观察到，代数和几何之间的主要差异会引起这两方面学习成绩之间的弱的相关性。A. A. 包达列夫指出了掌握代数和几何的难度上的差异 (46，第99～100页；48，第107页)。P. M. 赛蒙兹(704)注意到，在代数上有无能力的情况没有必要引伸到几何上去，反之亦然。贝兹计算过代数和几何学习成绩之间的相关系数。结果表明，这个系数是很小的 (0.18)，而代数和算术学习成绩之间的相关系数则是 0.76。根据魏德林的研究，计算因素(N)和空间因素(S)之间的相关系数等于0(727，第157页)。

虽然，根据我们的观察，在分析型和学习代数的成绩之间，相应地在几何型和学习几何的成绩之间，存在着相关性，但是上述的分类不应看成是一种按学科关系(指学校学科——代数和几何)的思维分类。认为分析型只在代数中表现出来，而几何型只在几何中表现出来，是不可能的。分析的气质也可以在几何中表现出来，同样，几何的气质也可以在代数中表现出来。阿达玛注意到，有些人正在从事几何方面的研究，但他们仍然是分析学家，而另一些人是几何学家，却正在与纯粹的分析打交道。

在我们的研究中，由34名有能力的学生组成的基本组里，6名属于分析型，5名属于几何型，13名属于调和型的第一变式，10名属于调和型的第二变式。能力最强的那一组里也进行了类型的划分，但是由于该组受试者年龄太小，类型的差异没有清晰地显示出来，面我们对待受试者的分类问题又十分谨慎，所以在该组16名学生中，仅7名被划定了类型(4名属于第一类型，其他三种类型中各有1名)。

在分别描述每一类型之前，让我们对所有这些类型作一高度

简要的相对的评价。严格地说，我们注意到，言语-逻辑成分在所有具有数学能力的学生身上都发展良好，而只有视觉-形象成分的发展可以是或多或少的。于是，一个人仅能在相对意义上说视觉-形象成分比言语-逻辑成分占优势(正象在一个正常而健康的人、甚至是所谓艺术家型的人身上，第一信号系统无论如何也不能支配第二信号系统，这是因为高级神经活动不能受低级神经活动的支配——参看 M. M. 科尔卓娃)。表 21 中就是这些类型的非常一般的倾向。

下面我们对每一类型作较详细的描述。

分析型

我们把受试者基本组的 6 名学生列入这个类型。能力很强的艾拉 S.、伏洛佳 kh.、基里亚 kh. 和迪马 L. 也属于这个类型。夏皮罗的两名受试者 M 和 P 是这一类型的突出代表。

这个类型的代表在思维上的特征是：发展良好的言语-逻辑成分明显地支配着弱的视觉-形象成分。他们很容易地用抽象的模式进行运算，他们在解题中对于形象化的对象或模式不需要借助于视觉，甚至当题目中给出的数学关系"暗示"要用形象的概念时也是如此。

这一类型的代表并不是以具备使视觉-形象概念化的能力为特征的，因此，当依靠意象可以得出简单得多的解法时，他们却仍然运用比较困难而复杂的逻辑分析的解法。他们能非常顺利地解表达抽象的题目，而且他们力图尽可能地把那些用具体、形象的方式来表达的题目转变到抽象的水平。他们完成同概念分析有关的运算，要比完成有关几何模式或图形的分析的运算容易一些。

根据有能力的学生解系列 XXIII 的结果所填的一些个人的方格表，很能说明问题。对于详细的说明，我们建议读者看第 8 章。这里我们只简要地说一下。这一系列的题目，根据视觉化的程度以及解答时思维的视觉-形象成分和言语-逻辑成分所起的作用，

表 21　数学类型(气质)简述

描　　述	类　　型			
	I 分　析　型	II 几　何　型	IIIa 调　和　型	IIIb 调　和　型
学生数	10	6	14	11
言语-逻辑成分的发展	很强	超过平均水平	强	强
视觉-形象成分的发展	弱	很强	强	强
成分的相关性(推测的)	言语-逻辑占优势	视觉-形象占优势	平衡	平衡
解题中视觉支柱物的作用	不能运用，但感到不需要	能够运用，且感到需要	能运用，但无所帮助	能运用，且有所帮助
系列 XXIII 中的题目是怎样解的*:				
M_1 组和 M_2 组	M	V	M	Mj
V 组	M	V	V	V
A_1 组和 A_2 组	M	V	M	V
空间概念	弱	很好	好	好

* 符号的解释见正文。

分成几个组(几个测验)。V 组("视觉"组)的题目，如果借助于视觉-形象的手段解起来就比较简单，否则解起来就比较复杂。M_1 组和 M_2 组("思维"组)的题目则用纯粹的思维方式解答，想把它们转变成视觉意象的语言是比较困难的。A_1 组和 A_2 组("平均"组)的题目处于一个中间的地位。每一组有 6 个题目，按复杂程度从 1 依次排列到 6。每个受试者解这些题目的结果都用方格表来表示，表内填上下列符号：+ 表示已解出，− 表示没有解出；V 表示用视觉手段解的，M 表示未用这些手段解的，VM 表示同时用两种方式解的。表 22 是学生 S. K. 的个人方格表。

表 22　分析型的典型代表(学生 S. K.)的个人方格表

题　目	测　验				
	V	A_1	A_2	M_1	M_2
1	+ M	+ M	+ M	+ M	+ M
2	+ M	+ M	+ M	+ M	+ M
3	+ VM	+ M	+ M	+ M	+ M
4	+ VM	+ M	+ M	+ M	+ M
5	+ M	+ M	+ M	+ M	+ M
6	+ V	+ M	+ M	+ M	+ M

显而易见，不仅 A_1 组和 A_2 组中的题目，而且还有 V 组中的题目，都是不依靠诸如实物演示或图解的视觉手段就解出来的。在 30 道题目中只有 3 道是运用视觉手段的，而且其中两道题目该学生是用了两种解法。甚至对一些运用视觉-形象手段来解显得比较合理的题目，也还是运用了分析的解题过程。

分析型代表中，空间概念(特别是三维空间的概念)发展得较差。这一点在解系列 XXV 的题目时十分明显：每个人都解了

XXV-A-7 这道题，这道题目通过分析的方法，是比较容易地在他们的头脑里直接解出来的。但 9 名中却有 4 名学生没有在头脑里直接做出与此相关的 XXV-A-6 这道题——这道题目是在纯粹的空间概念上构成的。在做出这道题的 5 名学生中，4 名仍然是通过分析的方式找到解题途径的。在要求只能用脑子想的测验 XXV-B 中(立体几何)，也可观察到相同的情况。例如，每个人都解出了 XXV-B-3 和 XXV-B-15 这两道题，但是没有一个人做出 XXV-B-16 这道题；前面两道题可以通过分析的方式掌握给出的关系，而在后面一题中这是完全不可能的。

要求不作图形而在头脑中求出一个已知图形绕某轴旋转而得到的旋转体的形状，这道题目，被学生通过复杂的推理方法解出来了(虽然该旋转体的形状能够很容易地视觉化)。下面是学生 S 的推理过程："一个直角三角形不是绕着一条直角边在旋转吗？现在我来想想看……上面一点是不会旋转的——它在一条直角边上。另一条直角边上的各点都在离开轴的不同距离上旋转，而且每一点在运动时离开轴的距离不变。由于距离相等，所以每一点都描出一个圆周来，它们合在一起就形成一个圆。这就是说，在下面有一个圆，在上面有一个点。在旋转过程中，斜边把它们连结起来。于是就得到一个锥体，对吗？"(几何型的代表把这种题目看成是"幼稚的"——他们一眼就"看出"了这个旋转体："我在这里可以描绘出它旋转的方式，显然，得到的是一个锥体。")

至于系列 XXIV 的题目，所有属于分析型的受试者无一例外地都是从言语陈述而不从图形来了解题目的意义，并且较喜欢与题目的"言语"变式打交道。

让我们介绍一些分析型气质的代表解题的典型例子。例如做这样一道题："如果一块砖的重量等于 1 公斤加上半块砖的重量，那么这块砖重多少？"他们当中甚至没有一个人试图直观地描绘其中的已知关系，他们是用推理方法来解这道题的。然而，所有几何

型的代表们都画出一张示意图(见图 68)，或在心中对此图有一个概念，并"看出"这块砖重 2 公斤。又如，XXIII-V-6 这道题的解法是典型的。一般来说，学生开始用分析的方法来解，结果往往是纠缠于复杂的方程和推理中。只是在坚持用分析的方法作了一些尝试后，他们才根据实验者的建议，转而用视觉的方法，画出一个图解形式的钟面，并依靠视觉手段进行推理("因为他是在 17:00 到 18:00 点之间完成工作的，所以早先长针在 5 和 6 之间，于是时间大约是 12:28" 等等)。这种方法也同样适用于 XXV-B-10 这道题的解答(求出一个环的各个截面的形状)。几何型的代表在心中截取截面，就此看出截面的形状，而分析型的代表则在复杂的计算中迷失方向，只有在失败之后，他们才转过来作图，但即使在这种情况下，他们也没有看出环的形状，而只是借助于图形来进行推理。


图 68

迪马 L. 有过一次奇特的解题经过。他在头脑里正确地解出了下面这样一道简单的题目："在三角形 ABC 中，角 B 等于 46°，角 C 等于 66°，过角 A 顶点的一条直线 MN 在三角形外面与边 AB 交成 24° 的角。求直线 MN 与边 AC 的夹角。"后来实验者要求他用一个图来表达这道题目的全部内容。结果是，虽然迪马 L. 解出了这道题，但他却一点也没有从直观上来描述它的条件和解答，因而没有能立刻完成这个任务。

S. I. 夏皮罗在有关分析型和几何型"极端"代表的思维特征方面搜集了许多有趣的材料。例如，对于"一个幅角的正弦和余弦可以等于零吗"这件一道题，几乎同时听到两种有特色的回答："不，因为它们的平方和将不等于 1"(分析型 D 的话)；"不，因为正弦在水平直径的终点上等于零，而余弦在垂直直径的终点上等于零"(几何型 Sh 的话)。夏皮罗的某些有能力的学生对偶函数、单调函数和反函数的图象特征有着丰富的知识，但是仍然不能运

用这些特征来研究函数。另一方面，另外一些人能记住这几类函数的分析定义，但是这些对于研究函数的图象特征却没有什么帮助。比如说，虽然他们对于对数函数的特征有着丰富的知识，并且知道如何去运用它们，但是他们在对图象中的这些特征作几何解释时却遇到困难。

柯尔莫戈罗夫曾写道："只要有可能，数学家总是尽力把他们正在研究的问题从几何上视觉化。"(180，第10页)。分析型的学生不努力去这样做，这明显地导致了他们在数学发展上的某种片面性。

几何型

受试者基本组里的5名学生被列入这个类型。波里亚 G.(来自能力很强的一组）和夏皮罗班里的几名学生（B, Sh 等人）也属于这一类型。

这一类型代表的思维特征，是具有高度发展的视觉-形象的成分，我们可以暂且说，它比高度发展的言语-逻辑成分占优势。这些学生对于一种抽象的数学关系的表达式，常常感到有必要从直观上来作解释，并且在这方面表现出很大的独创性：在这个意义上，相对地说，他们常常以图形表现来代替逻辑性。但是如果他们在创造视觉方面不顺利，在解题时不能把物体和图形视觉化，那么他们在运用抽象模式进行运算时就会遇到困难。甚至在一道题目运用推理很容易解出来，而用视觉方法却很困难并且是多余的情况下，他们仍然坚持用视觉的模式、意象和概念来进行运算。

例如有这样一道题："一个正方形的每边增加3cm，因而它的面积增加了39 cm^2。求所得的正方形的边长。"这道题目对有能力的六年级学生来说是便当的，他们通过方程式 $(x+3)^2-x^2=39$，只用几秒钟就可以解出来。但是几乎所有几何型的代表在解题时都用了比较复杂的方法。他们首先画出一个图形(见图69)，然后利用这个图作如下的推理(他们的说明是用箭头表示的)："这个

(x)必须是一个正方形，它的边长是3cm，这就是说，它的面积是$9cm^2$。两个长方形(y)的面积必定是$30cm^2$，即每个长方形的面积是$15cm^2$。一条边是3cm，因此另一条边必然等于5cm。于是原正方形的边长是5cm，边长增加后变成8cm。”

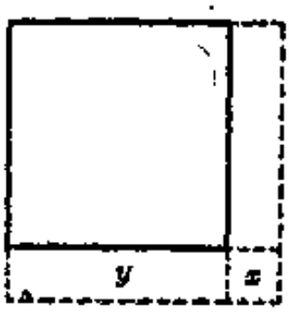


图 69

这些学生容易适应有意象来支持的材料；他们做有关图解、图象、图形分析的作业，感到比做有关概念和定义分析的作业来得便当。

根据有能力的具有几何气质的学生解系列 XXIII 题目的结果而填的个人方格表，也是非常有意义的（见表23——我们建议把它与表22中分析型代表的个人方格表作一比较）。显然，不仅 A_1 和 A_2 组的题目（A_1-1除外）是依靠图解的视觉手段解出来的，而且 M_1 和 M_2 组的大部分题目也是如此。在28道题目中，只有3道完全没有运用视觉手段。即使在应用困难或行不通的情况下，他们也仍然运用视觉-形象的手段。

表23 一个几何型的典型代表（学生 S. Ruk.）的个人方格表

题目	测验				
	V	A_1	A_2	M_1	M_2
1	+ V	+ M	+ V	+ V	+ V
2	+ V	+ V	+ V	+ V	+ V
3	+ V	+ V	+ V	+ V	− M
4	+ V	+ V	+ V	+ MV	+ MV
5	+ V	+ V	+ V	+ MV	+ M
6	+ V	+ V	+ V	没有解	没有解

几何型代表的特征，是具有高度发展的空间概念。即使是系列 XXV 中一些最复杂的题目（诸如 XXV-B-10 和 XXV-B-11 等题），他们也都能在头脑里迅速而精确地做出来。在这些场合下，学生们尽量强调，他们不是在解题，而是看到了所要求的东西。

系列 XXIV 的解题结果是令人感兴趣的。倘使言语陈述和对应的图形（测验 XXIV-B）不一致，那么几乎所有的学生都从图形中去找他们解题的线索，结果造成大错。当实验者证明他们草率解出的所有题目都做错了时，你可以看到他们的混乱情况。他们叹息道："这点我是知道的，但是图形欺骗了我！"在测验 XXIV-C 的题目中，所有的几何型受试者都毫不犹豫地宁可与题目的视觉变式打交道。如果提供一个言语变式，那么他们全体都会把这材料迅速地转化成图形的语言。

正如上面提到的，"几何型"学生都试图把一道题目转化到视觉-形象的水平上，他们在这方面表现出很大的创造性，他们在寻找表示各种关系及函数性依赖关系的视觉的图解方式时是足智多谋的。他们在这方面的潜力是用之不竭的。

下面是几何型所有的代表是怎样解 XXIII-M_1-4 这道题的（六年级 D. D. 的解法）：先画出图形（见图 70），然后作出某种简要的推理："2＝未知数的 $\frac{5}{12}$，

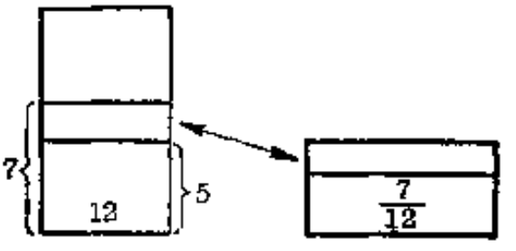


图 70

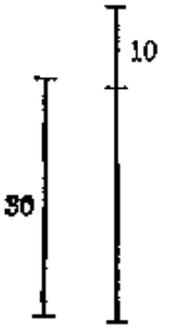


图 71

因此一件土耳其式长袍值 4 卢布 80 戈比。"

再看他们是怎样解 XXIII-M_3-2 这道题的（9 岁的波里亚 G. 的解法，见图 71）："我们把第二根线向下移动，使得下面出现等于 5 的一小段。于是上面也有等于 5 的一小段。他晚走 5 分钟，早到 5 分钟，他在半途上赶上了弟弟"。

最后，我们引用 D. L.(六年级)对于一道相当复杂的题目的最初解法，这道题目通常是要列出方程组来解的(见图 72)："我现在的岁数是我弟弟当年岁数的两倍，我当年的年龄与弟弟现在的年龄相同。我们俩人的岁数合起来是 63，问我们两人各有几岁？"

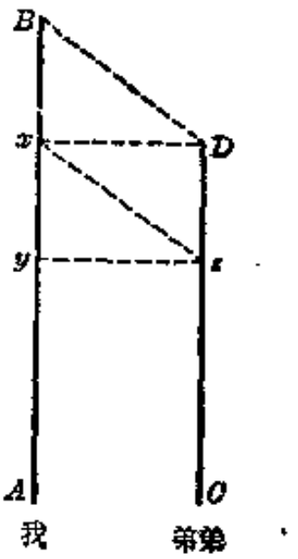


图 72

"Bx 是我们的年龄差；当我的年龄是 Ax 时，他的年龄是 Cz；$Cz=\frac{AB}{2}$(根据条件)，$Ay=\frac{AB}{2}$。但 $Bx=Dz$。这就是说，$By=2Bx$；$AB=4xB$，而 $CD=3xB$；63 岁 $=7$ 个部分；$Bx=9$ 岁。答案：36 岁和 27 岁。"

有能力的学生(特别是有能力的高年级学生)甚至对抽象的数学题目也努力给予直观的图解，在这个过程中他们有时得到了独特的"发现"。在读了费马大定理(对任何正整数 a、b、c、n，如果 $n>2$，那么方程 $a^n+b^n=c^n$ 是不可能成立的)之后，学生 D "当场"对它作出了几何上的解释：

$a^1+b^1=c^1$ 是可能的；c 是两个线段之和；

$a^2+b^2=c^2$ 是可能的；c 是以 a 和 b 为直角边的一个直角三角形的斜边。

$a^3+b^3=c^3$ 这一方程是不可能的，那么，它在几何上的含义是什么呢？D 作出了如下的解释：不存在边长都是整数的三个立方体，其中一个立方体的体积等于其他两个立方体的体积之和(夏皮罗，434)。

要学生做下面这一道题："对于任何复数 x 和 y，求证：

$$|x+y|^2+|x-y|^2=2(|x|^2+|y|^2)。"$$

有能力的具有几何气质的学生从这一等式马上看到了关于平行四边形对角线的平方和的定理。基本上所有的模型都是基于这

样的一个几何概念：两个复数的和或差的模是沿着对应的向量所作的平行四边形的对角线的长。“复数是可以被看成向量的。于是作为向量和的模 $|x+y|$，就是沿着向量所作的平行四边形的对角线”(学生 S；见夏皮罗，435，第 229～230 页)。

在学习数列的极限时，课堂上举了一个可以“超过”极限的数列的例子。许多学生感到吃惊：他们刚刚学过无穷小的概念和数列极限的概念。但是学生 Sh. 找到了一个形象化的解释：“这很清楚……它是可以超过极限的，甚至超过许多次。以前我不是这样考虑的。它是超过了……但它并不停下来。好象一只快要停止摆动的钟摆那样……不，并不完全象一个钟摆。钟摆到头来是要停下来的。但在这里它超过了零点，但同时继续无限地接近零点。

在解“已知两个数 a 和 b，试求它们的最大公约数 (GCD) 和最小公倍数(LCM)之间的关系”这道题时，学生 B 运用的最初的方法(据她的解释，是为了“形象化”)是，用线段的加法和减法来代替数的乘法和除法。她是这样推理的：如果我们把一根管子放进另一根直径不同的管子里(每根管子代表一个数)，然后把表示它们长度的数的最大公约数看成是这两根管子的共同部分，把最小公倍数看成是两根管子合起来的全长(见图 73)。$x+y=a+b$，又因为这里的加法是代表乘法，所以我们得到：$\mathrm{GCD}(ab)\cdot\mathrm{LCM}(ab)=ab$。

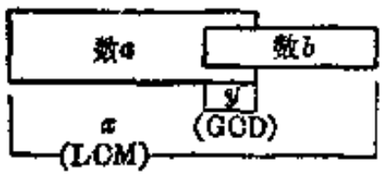


图 73

在许多情况下，我们发现，只有当受试者能作出一种几何解释时，他们才能完全弄清并信服一个确定的函数依赖关系或公式。当六年级学生 S. R. 初次熟悉“两数和的平方”这一简捷乘法公式时，她就试图从几何上去解释它，并作出了下面的图形(见图74)。她满意地表示：“现在我真正明白和理解这个公式了！”

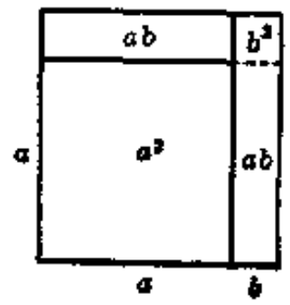


图 74

后来她用几何方法来解释所有其他的公式，甚至对一个十分复杂的问题也是如此。例如，对于两数之和的立方或两数之差的立方这些问题，她也一定要画出一个复杂的立体几何的示意图。

一个自然而然的问题产生了：如果概括数学材料的能力和需要，概括的记忆，都是具有数学能力的学生的本性，那么它会不会妨碍几何气质的代表去"巩固"视觉-形象模式，并逐步运用视觉-形象模式进行思维呢？

当然，在一定程度上，它是一种障碍（因此我们说，几何气质在这一类型学生的数学思维中是某一种有限的品质）。但仅仅是在一定程度上！事实上，这些学生所运用的图解模式乃是具体和抽象的一种独特的综合。如 M. E. 波茨马诺娃所指出的那样(54)，一个图解模式完全是一种视觉的抽象形式——这种数学关系的图解表示是抽象的、概括的。虽然它确定地构成一种明确的直观形式，但它的视觉性和具体性仍然是特殊的和相对的。波茨马诺娃已经令人信服地表明，在一个图中（一个图解模式中），总包含着视觉意象的模式化和一定的概括化。用这样一种概括的视觉意象来支持概念，甚至将概念与之"结合"起来，并不妨碍概括的思维。在这种情况下，这个意象在某种意义上是一个抽象概念的意义和内容的"载体"。"几何型"的学生感到有必要在一般的水平上来解释问题，但是对他们来说，这种一般水平仍然受到这类意象的支持。在这一点上，他们与能力低的学生有所不同——对后者来说，视觉意象真正束缚了思维，他们把思维推向具体水平，从而妨碍了用一般形式来解释问题。

当然，有能力的"几何型"学生所用的视觉-形象模式并不都是相对概括的。也存在着非常特殊和具体的视觉意象。当然，在这种情况下，它们对思维的概括可能产生消极的影响。

上面所说的一切也关系到"几何型"学生的记忆。他们记忆形象的材料要容易、迅速和持久得多。在记忆言语-逻辑材料时，

他们试图"附上"一个视觉意象上的概括，并且在记忆中用这种形式来保持这一概括。在能力最强的"几何型"学生当中，甚至对几何材料的记忆也具有一种"视觉概括"的性质。例如，他们所记忆的并不是完整的几何图形，而是它的一种概括的模式。莫达克海-波尔托夫斯基曾经提到过许多"几何型"数学家的相应的能力："几何学家的空间记忆不是凭眼睛的记忆。他并不记得一个图形的视觉形象，他记得的仅仅是直线和曲面之间或它们各部分之间的相互位置"(300，第528页)。

调和型

我们所研究的有能力的学生中，有相当多的学生(基本组的34名中有23名)属于调和型。他们的典型特征是，发展良好的言语-逻辑成分和视觉-形象成分保持相对的平衡，但前者起着主导作用。这一类型代表的空间概念发展良好；他们全都成功地做了系列XXV的题目。他们在形象地解释抽象关系上，显得很有独创性；但他们的视觉意象和模式却服从言语-逻辑的分析。当这些学生用视觉意象来思考问题时，他们清楚地认识到，一个概括的内容是不能被特殊的事例所穷尽的。他们成功地同时应用分析方法和形象-几何方法，解出了许多题目。

例如，夏皮罗给他的学生做这样一道题："$a^2+b^2=c^2$；a，b，$c>0$。能说出这些数的一次幂之间的关系吗？"

许多有能力的学生(调和型)同时用分析法和几何法来论证这道题：

1．$a^2+b^2=c^2$；$a^2+b^2+2ab=c^2+2ab$；$(a+b)^2=c^2+2ab$；$(a+b)^2>c^2$；$a+b>c$。

2．这里a，b，c是直角三角形的边，因此$c<a+b$。

分析型的代表仅仅注意到第一种可能性，几何型的代表仅仅注意到第二种可能性。

我们观察了调和型的两种变式。它们之间的差异基本上归结

如下：在发展良好的言语-逻辑成分和视觉-形象成分处于平衡的情况下，变式 A 的特点在于它不运用视觉-形象手段，而倾向于心理运算，而变式 B 的特点则在于它运用视觉-形象模式，同时倾向于心理运算。因此我们决定把它们说成是抽象-调和亚型和形象-调和亚型。这两个亚型的代表，能够同样好地通过视觉-形象的手段来描述数学关系，但前者没有感到这样做是必要的，同时也不努力去这样做；而后者则感到是必要的，并且在解题时经常依靠图解模式。这种支持对前者只有很小的帮助，但对于后者则可以简化解答。如果必要，前者可以取得视觉意象的帮助，而后者没有视觉-形象模型的支持也可以解题。在分析数学材料时，前者宁可从言语-逻辑的陈述着手，而后者则宁可从视觉-形象的特性着手。例如，在我们彻底研究过的极有天赋的学生中，索尼娅 L. 属于第一种亚型，伏洛佳 L. 则属于第二种亚型(两人都在 9 到 11 岁之间)。

从对于系列 XXIII 题目的个人方格表中可以很清楚地看到这两种变式之间的差异。我们可以用索尼娅 L. 和伏洛佳 L.(在 1959～1960 年他们参加的一次实验中，应用了系列 XXIII 的简化的变式)的个人方格表(表 24 和 25)来证实上述的观点。

表 24　抽象-调和亚型的个人方格表
(索尼娅 L.，来自系列 XXIII 的题目)

题　目	测　验				
	V	A_1	A_2	M_1	M_2
1	+ MV	+ M	+ M	+ MV	+ M
2	+ M	+ M	+ M	+ M	+ M
3	+ V	未解	+ M	+ MV	− M
4	+ VM	+ M	+ VM	+ M	未解

表 25　形象-调和亚型的个人方格表

（伏洛佳L.，来自系列XXIII的题目）

题　　目	测　　验				
	V	A_1	A_2	M_1	M_2
1	+ V	+ MV	+ V	+ V	+ MV
2	+ VM	+ V	+ V	+ VM	+ V
3	+ V	未解	+ V	+ V	− MV
4	+ V	+ V	+ VM	+ VM	未解

为了有助于理解抽象-调和亚型的某些特征，让我们描述一下索尼娅 L. 解题的某些特点。索尼娅 L. 的特点是空间概念的高度发展，但她并不喜欢解需要用到这些概念的题目，尽管她能绰有余裕地解出它们。例如，她正确而迅速地解了某一系列(XXV)的各种很不相同的题目，包括相当复杂的那些题目，如："一支铅笔的一端是固定的，另一端可以在空间中任何可能的位置。问这一端描出什么样的曲面？"(在 3 秒钟内作出了正确的回答——一个球的表面。)又如："已知空间中两条交错的直线，在什么条件下，它们投射成：(*a*)一条直线和直线外的一点；(*b*)两条平行直线？"(在 6 秒钟和 9 秒钟内得出正确的答案。)

这里还应该注意索尼娅 L. 的另一个特点。在解整个系列的题目时，她很少感到有依靠视觉意象的必要，甚至当题目"暗示"可以这样做时，她也是如此。可能有人认为，她在解题时真的不会利用视觉意象。但结果并非如此。当我们特地要求她将一道题形象化，并借助于意象来解这道题时，她在绝大多数情况下总是顺利地完成了这些任务，甚至在这方面往往显得很有才智。

这时我们作出另外一种推测：也许索尼娅有着这样一种生动

的视觉概念(一种"遗觉"性质的概念)，使她总能运用这些概念而不求助于纸和笔。但下面的观察结果与这个推测相矛盾：我们注意到，当我们对她"提示"解题思路时，索尼娅总是勉强地观察我们怎样用图形来"解释"题目。她之所以细心观察，显然是"出于礼貌"，但有时也会把头稍微转过去，继续做她的题目，两眼凝视着空中。我们问她，既然她知道如何用图形来"解释"一道题，那么为什么她还是宁愿不采用这种方法呢？她回答说，她已经"习惯于这种方式"，而且对她来说这"容易得多"。对她解实验题的过程进行分析后，就可证实这一点。有时，她甚至不借助视觉的支持就解了这样一些题目，如："直角三角形中两个锐角的平分线交成的角等于多少度？"她没有试图画出该题目的条件，而只是看着旁边，思索了一会儿说："两个角加起来为90°，它们的一半是45°，从180°减去45°=135°。"显然，对她来说，在某种意义上逻辑或推理往往代替了视觉意象的支持；在利用抽象模式进行思考上她毫不感到困难，因此她感到没有必要把抽象模式和视觉意象"结合"起来。

许多数学上能力中等、特别是没有能力的学生，在解题时也不借助于视觉模式，其原因是他们不知道怎样做，而对索尼娅来说，则是因为她感到没有必要。

这些类型上的差别(对于所有类型而言)，而着年龄的变化而变得更加突出、更为生动和更加明确。我们要强调的是，我们所选出的那些类型都是学龄期表现的类型。自然，数学能力方面一切可能的个别差异和类型差异并不全部包括在内，比如在成人数学家中所能观察到的那些能力。

还须注意到，我们并不想根据其他的参数来建立一种类型学。例如，从有能力的学生身上可以发现，他们在掌握数学材料的速度方面存在着差异(这种差异甚至在成名的数学家和著名的专家身上也可以观察到。我们知道，希尔伯特在掌握新观念方面是非常迟钝的)。

我们没有试图根据计算能力的发展来建立类型学，虽然在这方面也可以在学生、以及著名的学者中间观察到很大的个别差异。例如，高斯和欧拉是第一流的计算专家，而 A.安培早年也曾表现出这种能力，但后来又没有了。庞加莱曾自述道："我不得不承认，我在做加法时是肯定不会没有错误的"(498)。

我们所建立的类型显然具有一般的意义。这些类型的存在可由许多其他的研究得到证实。在数量关系上视觉概念化的能力方面，卡尔米科娃注意到个别的差异(154)。亚基曼斯卡娅强调指出，有些学生在学习几何时发现分析言语材料较为便当，而其他一些学生则发现分析视觉材料较为便当："有些学生在分析图表时遇到困难，但能轻而易举地分析题目的条件。有些学生则恰恰相反。……另外还有一些学生能容易而迅速地分析条件和图表这两者"(470)。E. Sh. 巴锡罗娃(37)也曾指出，一些学生面向图形中言语表示的符号，面另一些学生则面向形象的符号。L. N. 兰这(238)曾证实，与概念分析有关的作业在各种学生中引起了困难。

数学能力结构的年龄动态

有关学生数学发展中年龄特征的概念源出于皮亚杰的早期研究，至今它仍在国外心理学中广为流传着。据我们所知，皮亚杰当时认为儿童只有到了 12 岁才具有抽象思维的能力(493a)。L. 约翰诺特分析了青少年的数学推理的各个发展阶段，断言直到 12 岁或 13 岁时，学生还是在视觉的具体水平上思维的，只有到了 17 岁时才能形成形式的代数水平（关于掌握运算和符号）上的思维(620, 第 51 页)。

F. 霍特雅特在他的 1956 年的著作中也断言儿童只有到 11 岁或 12 岁时才开始在数学上表现出抽象的能力，而且开始用抽象的形式进行推理。

如已经指出的那样，苏联心理学家的研究得出了完全不同的结果。P. P. 布隆斯基就论述过概括和抽象的思维、以及理解证明的能力在青少年(11 到 14 岁)中的深入发展。

近来的一些研究，包括 A. V. 斯克里普钦科(372)和 O. Ya. 利哈乔娃(262)的研究，其对象是学生数学思维的某些年龄特征。A. A. 包达列夫 (46, 48) 和 L. N. 普罗柯林科 (337, 338)，发现了青少年和高年级学生解几何题时推理的某些特征。但普罗柯林科显然非常"严格"地规定了年龄界限，而忽视了个别差异。人们很难同意他下面这样的严格划分：六年级学生解题的特点是用再现法；七年级学生解题的特点是用创造法；九年级学生的解题特点是用归纳法来进行推理，他们的思维是详尽的(他们试图不漏掉推理过程中任何一个环节)；而十年级学生则通常用演绎法，并试图以节略的形式进行推理(338, 第 304 页)。

我们对数学能力的研究，包括对从学龄初期到学龄晚期整个学校教学期间数学能力诸成分发展中的年龄差别，作一次考查。我们研究了数学能力结构中的年龄差别，即在学校教学影响下，对于低、中、高不同学龄范围，发展中的诸成分所表现的特殊性质。

这里产生了一个合乎逻辑的问题：我们能在什么程度上，来提到年幼儿童，尤其是一、二、三年级儿童的数学能力呢？

L. V. 杜勃洛维娜在我们领导下所进行的研究(122, 123)，为回答这个问题提供了如下的依据。当然，除了有特殊天赋的儿童外，严格说来，我们对这个年龄阶段还说不出任何已经形成的数学能力的结构。因此，"数学能力"这个概念一用到幼年儿童(8～10 岁的儿童)身上，就多少具有暂时性，而对这个年龄阶段的数学能力成分的研究，通常只涉及这些成分的初级形式的问题。但是，数学能力的个别成分甚至在低年级也可以形成。我们分离出来的这些成分的一些明显的"粗略的"或"萌芽的"形式，甚至在二年级的个别学生身上也可以观察到，而在学校教学的影响下，可以从二

年级到四年级观察到显著的发展。出现这些初级的萌芽形式是十分自然的：要说在六年级到八年级或多或少形成的"学校式"数学能力结构不能"追踪"到学龄初期，那是困难的。此外，这里的问题并没有涉及到全体学生——我们是在研究最有能力的学生的数学能力，他们比起其他学生来能更顺利地进行数学活动。另一方面，在我们研究年龄差别时，我们不能为那些特别有天赋的儿童（象索尼娅 L.、伏洛佳 L. 等）所左右；他们是一些特殊的个案，已经"脱离"了他们年龄的一般情况。自然，数学能力发展中的年龄差别要在中等学生和有能力的学生的全体中来进行研究。这里我们还必须指出，在一定的年龄范围内（特别是比较能力最强的学生与能力最弱的学生时），个别差异已被证明是十分显著的。

我们并不想把我们所得到的关于数学能力发展的特征十分"严格地"附着到一定的年龄上。D. B. 叶利科宁、V. V. 达维多夫、L. V. 赞可夫、A. V. 斯克里普钦科以及其他人的研究已经表明，一旦教学的内容和方法改变时，这些特征就有可能在最小的年龄中相当广泛地发生显著的变化。

我们心理研究所的同事们（叶利科宁和达维多夫）在一些学校里所做的实验性教学表明，通过特殊的教学方法，幼年学生可以获得比一般所想象的要大得多的抽象和推理的能力。然而，虽然学生中的年龄潜力主要取决于教学条件，但如果认为学生的年龄潜力完全是由教学所创造出来的，那就错了。因此在这个问题上，G. P. 谢德罗维茨基等所表示的那种极端的观点，是不正确的（459），谢德罗维茨基认为，自然的心理发展中一种可以预见的路线是不存在的。我们认为，一种比现状更为有效的教育制度可以"压缩"整个过程，但有一定的限度；它可以改变一点发展的程序，但不能把一种完全不同的性质强加于发展的路线。这种程序不能是任意的。例如，在概括简单的数学关系的能力没有形成之前，概括复杂的数学关系的能力是不能形成的。

因此，我们所说的有关数学能力发展的年龄差别，是一个多少有点暂时性的概念。事实上，我们的任务乃是研究一般的倾向，即在教学的影响下数学能力结构中基本成分发展的一般方向。正是由于我们约定只考虑目前的教学水平，所以我们将暂时把这种发展的一些个别阶段或水平与学生的年龄联系起来。

我们是根据下面这些参数，来对数学能力发展中的年龄差别进行分析的：(1)对数学材料的形式化的知觉；(2)数学材料的概括；(3)数学思维的简缩特性(即在数学活动中以省略的结构进行思维的倾向)；(4)心理过程的灵活性；(5)力求精力的显著节省和解答的"优美"；(6)数学记忆。一般说来，这一方案是符合我们关于数学能力结构的概念的。我们对于每一成分发展中的年龄差别分别进行考查，目的只是为了能用最精晰、最明确的形式来描述其发展过程。当然，实际上各种成分是不可分割地相互联系着的，它们构成一个完整的综合体，是这个综合体得到了发展。

我们按照上面的提纲，对数学能力各种成分的年龄发展进行下面的分析。除了自己的研究外，作者还运用了在他指导下，由I. V. 杜勃洛维娜(122)和S. I. 夏皮罗研究得到的材料。

对数学材料的形式化的知觉

这种成分早在二、三年级就开始以一种"萌芽"的形式表现出来了。在教学的形响下，能力最强的学生就发展出一种努力获得对题目条件的一种理解和比较它的数据的倾向。开始，使使们感兴趣的不仅有个别的数量，而且还有数量间的关系。能力低的学生把题目的各个具体成分看成是没有相互联系的，并在读了题目后，就马上开始用所有的已知数来进行不同的运算，一点也不考虑题意，也不试图去分解出题目的基本关系，面较有能力的学生则在感知了题目的条件后，就明显地感到有必要去发现其间的关系，把个别的标志和数量联系起来。这个过程多少要用一些时间来"展开"；"当场""掌握"关系是观察不到的(或只有在能力最强的学生

解最简单的题目时才能观察到)。

较有能力的学生逐渐开始看出了题目中某些数量之间的关系。因此,他们对题目中涉及的具体事物往往不予重视。有时他们甚至混淆了所提到的事物的名称。能力低的学生则紧紧抓住事物的确切的名称。他们在题目中看到的不是某些数学关系,而只是一些他们认为有用的具体事物。例如,维拉 Ya.(一个二年级的学生)正在做一道关于白杨的题目。当实验者好几次故意地称它们为树时,维拉怀疑地望着实验者,纠正他好几次,而维拉自己只说白杨。在自编应用题中也可以观察到同样的事例。能力低的学生往往从事物内容着手(例如,"我要编一道有关苹果的题目"),然后在引入关系时遇到了困难。较有能力的学生则从关系着手(例如,"我要编一道关于'比多比少'的题目"),然后,把这些关系"事物化"。

在计算关系方面,较有能力的学生和许多能力中等的学生,早在二、三年级时就开始能区别数据——把解题所需要的数据挑出来,领悟哪些数量是缺少的,哪些数量是多余的。渐渐地,对题目条件的最初的定向过程开始被"简缩"了。这种知觉的"简缩"特征在解比较容易的题目时是十分明显的,其中有少许事实是,学生能比较容易地立即掌握整个关系系统。这种"简缩"知觉的倾向从二年级到四年级不断得到加强。

杜勃洛维娜从较有能力的四年级学生中观察到一种明显的倾向,即对题目条件具有一种独特的分析-综合的知觉。他们感知到的不仅是个别因素,而且还有一些特殊的"语义的数学结构",相互联系着的数学的量和类型的复合体。当然,这种特性只有用比较简单的算术材料才能使它显示出来,因而大致是在一种初级的水平上。

来自杜勃洛维娜研究的例子,可以说明有能力的和能力低的小学儿童对题目条件的知觉的差异。在一个系列的题目中,她给

学生一些条件比较难记的题目。她把其中一道题读了一遍，随后要求他们把能够记得的每一件事情讲出来(读题前通知他们是要这样做的)。她所感兴趣的是，在她读过一通之后，一个学生对该题目感知到什么，以及首先引起他注意的是什么。能力差的学生复述题目时，并不考虑这道题是否能够用所给的信息解出来。他们往往能精确地记住数字和具体事实，但一般回忆不出它们是怎样联系起来的。

有能力的儿童是能够把可用来解题的资料重述一遍的(特别重要的是，往往只用一般的形式)，原因是尽管他们有时会忘记一些数字和名称，但他们是能抓住并理解题目的本质的。

对题目条件的分析-综合的知觉以后发展成这一过程的简缩形式(缩短)。在中学的几年里，很有能力的学生在感知不大复杂的题目时，对条件的最初的分析-综合过程被最大限度地"简缩"了，这种简缩过程是在极其有限的时间里进行的，以致实际上是和知觉"同时发生"的。——任何部分的分析工作，任何明显的推理成分实际上都是没有的。

在中年级，知觉的形式化的倾向和形式结构的产生，是最有能力的学生的普遍特征。

有能力的学生对数学材料的知觉的另一个特征，开始在中年级表现出来，并在高年级获得了显著的发展(这里根据夏皮罗的研究)。我们这里所指的是，当学生从各种观点去知觉和评价一道题或数学式子时，知觉明显的多方面、多水平的特性。在一个实验系列中，十年级学生正在分析 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 这个恒等式。能力低的学生只能够指出，它提供了一个根据已知的角的余弦(或正弦)去计算这个角的正弦(或余弦)的机会。然而有能力的学生，在解释这个等式时还指出了其他一些性质，特别是：(1)"它是指 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 总不会大于 1"。(2)"如果两个数的平方和等于 1，那么其中的一个数等于一个角的正弦，而第二个数等于这个角的余弦。"

夏皮罗从高年级学生中又注意到另外一些特性：在教学的影响下，研究一道题目的充分性（完备性）和统一性（一致性）的倾向，以及区分什么是假设、什么是结论的倾向的产生和发展。夏皮罗把这些数学思维的特性与所谓符合公理的思想的形式联系起来。

上面提到的每一事例，都说明在学校教学的影响下，学生感知数学材料时使它形式化的倾向，即一种在具体的数学式子或题目中感知形式结构的能力的产生。学生从具体事实中摆脱出来，首先只是感知数量之间的纯粹关系。有能力的学生的这种倾向早在小学末期就出现了，而且随着年龄的增长面得到明显的加强。

对于感知一种类型的形式结构，学生需要分析同一类型表达式的数量越来越少。由于只是对一种现象进行分析，没有把它同一些类似的现象加以比较，所以，结果产生了"掌握"一种类型的形式结构的能力。

数学材料的概括

概括数学材料的能力，正如在不同的题目和例子中抓住共同点，以及相应地，在共同点中发现不同点的能力一样，要比其他一切成分形或得更早，甚至在一年级就可以看到它的表现——当然，这还只不过是一种相当初级的形式。在这一阶段中还难以把这一能力说成是一种概括材料的特殊能力。相反，我们宁可把这一能力说或是一般的概括能力，这是可教性品质的表现之一。我们这里所说的情形并不适合天赋很高的学生，他们在一年级时，甚至早在学前期末，这种概括能力就已经作为一种特殊能力表现出来了。我们之所以能作出这一结论，根据是杜勃洛维娜关于数学材料和非数学材料的实验，对一组天赋很高的学生的发展所作的研究，以及对许多著名科学家的传记资料的研究。

在学校教学的最初阶段中，数学概括通常是逐渐"成熟的"，并且只是扩散到现象的比较有限的范围。概括化随着年龄的增长变得更为显著，扩散到范围更大的一类数学现象中去。一种比较简

单的概括形式可以在低年级中观察到：从特殊到已知的东西和一般的运动，即从特殊中看到已知的东西和一般的能力，换言之，使特殊的情况处于一般的法则之下。这种概括的类型到中年级就获得了较大程度的发展。学生越是有能力，他就越能更好地应付适当概括的题目。通常我们只有在中年级的开头才看到归纳的概括形式，即从特殊到未知的东西和一般。

随着对于某种概括所必需的单一类型练习的次数逐渐减少，概括能力得到了发展。这种概括在中年级能力最强的学生中立即发生，通过对一种现象(各别地摄取)的分析而进入一系列类似的现象，正如在单一的事例中感知到未知的东西和一般的能力一样。这种"从许多特例到未知的东西和一般"的概括方法，可以逐步转变为一个在本质上不同的"从一个特例到未知的东西和一般"的方法。

这种能力与对数学材料形式化知觉的能力是密切相关的，与"形式化的知觉"相类似，我们称它为"形式化的解法"。让我们举例来说明。U是一个尚未熟悉简捷乘法公式的有能力的少年，他在一次实验课上做了例题$(2a+7b)^2$，下面是他解题和推理的记录："平方是指自乘，按科学的说法，是将一个因子乘两次。……结果是$4a^2+14ab+14ab+49b^2$，或者说中间是$28ab$。……呀，中间两个数总是相同的。……它们总是等于两个已知项的积。因此，我可以用简便的形式来解这种例题——两项相乘，再把所得的结果加一倍。但第一项和最后一项是因子中第一项和第二项的平方。于是这些例题的较为简单的解法就是，把第一项的平方、第二项的平方和它们积的两倍加起来。这只是稍微作了简化，但毕竟是简单了一些。……如果括号内是减号则结果怎样呢？……这时平方仍总是正的，原因是负乘负总得正，而乘积的两倍总是负的，原因是异号的项相乘，积总是负的。于是，把有两项的整个式子平方时，我们应当把第一项的平方和第二项的平方先加起来，然后取

它们的积的两倍，其符号为正(如果括号内是加号)或负(如果括号内是减号)。这就是全过程了，现在我就按这个方法来解题。”

概括地解题(即用一般形式来解每一个特殊题目的倾向)，一般是有能力的青少年的典型特征。这种倾向的初级形式甚至在低年级有能力的儿童身上也可以看得到。如果用字母形式解题，那么这类学生也不会有困难。二年级学生塞雷兹 I. 十分从容地解出了对于这种类型来说他所碰到的第一道题目：“一家商店运到 8 袋面粉，每袋重 a 公斤，某一天卖掉 3 袋面粉，问还剩下面粉多少公斤？”

正如夏皮罗所指出的，不仅是概括特殊的材料，而且还把一个已经概括的题目转化到更一般的水平上去，是有数学能力的年龄较大的学生的典型特征。如果一个用一般形式解出一道所给的题目的青少年，能由此而解出这一已知类型的所有题目，那么一个年龄较大的学生试图要解出的就不仅是题目的已知类型，而且还包括更一般的题目，他正在解的题目只是其中的一个特例。顺便提一句，这正好是有能力的年龄较大的学生，为什么对几何题目通常力求用更一般的三角方法来解的原因。例如，他们非常喜欢余弦定律，因为它把几何的三个定理完全结合在一起了。

从夏皮罗的研究中可以看到有趣的事例。有数学能力的十年级学生 A 和 Sh，正在解下面这道题：“如果 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$，求证

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)=(a_1b_1+a_2b_2)^2\text{”}。$$

A 对这些条件看了一眼，就对题目作出了一个令人意想不到的解释：这就是要证明，如果两个矢量平行，那么两个矢量的数量积必等于它们的模的乘积。这种矢量的解释使 A 得以把题目概括为：

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2)^2。$$

原先的题目，现在只是更一般的题目的一种特殊情形。学生 Sh 在解出这题后，立即提出下面的问题：“这道题可以是哪一道更

一般的题目的一个特例？”为了回答这个问题，他从这一特例出发，独立地推导出数学上众所周知的柯西-布尼雅科夫斯基公式。在这一点上，夏皮罗指出，在数学上有能力的年龄较大的学生当中，概括化可以形成，而且可以立即在几种水平上起作用。（关于这方面的更详细的情况，可以看下面有关数学记忆的这一部分。）

最后，已经证实，有数学能力的年龄较大的学生已经达到了对不同类型题目的分析和解答，概括探索的方法和原则的水平。这些方法可以用概括的不同程度来区别。

末了，我们要论及概括活动的动机方面。概括倒底被引导或被推动到什么方向去呢？这里的一条发展线索是十分明显的，那就是从外部的要求到内部的需要。在开始阶段（低年级和中年级的一小段），概括是由某些外部刺激所引起的（如教师的指导，实验者的要求，题目的逻辑性等）。这里通常不需要概括。随着发展，概括变得日益不依赖于外部刺激了。在中年级才明显地出现对概括的需要（甚至在没有外部要求的情况下也是如此）。概括在高年级获得了特别的发展。如夏皮罗在他的研究中所发现的那样，一道题既有灵巧而独特的解法，又有较复杂而概括的解法；如果这时要求学生在两者之间作出选择，那么大多数有能力的学生会倾向于后一种解法，因为他们对概括的因素有着非常高的评价。

思维的简缩

数学活动中推理过程以及相应的运算系统的简缩或省略是有数学能力的学生所特有的，这些学生主要在高年级（虽然这种现象甚至在中年级学生中也可以明显地看得到）。如杜勃洛维娜的研究所表明的那样，数学能力的这一成分在低年级仅表现为一种非常初级的形式。只有对于最简单的题目，她才能设法在二年级有能力的学生的解题中看到省略的思维过程。一旦题目变得复杂起来时，就要仔细考虑，一步一步地解答，这时推理是详尽的。在有能力的三、四年级学生中，特别是当他们解了某一类型的一些题目和

例题后，简缩的特性更为明显。这时，推理的个别环节往往被省略掉了，但是运算通常被保留下来，并连续地再现于纸上。

一个有能力的三年级学生盖利亚 K. 做了这样一道题："一些儿童为学校展览会画了 32 幅画。5 名三年级学生每人画了 4 幅，其余的画是由 6 名二年级学生平均画的。问二年级学生每人画了多少幅？"盖利亚看过这道题后，当即说道："12 除以 6，每人画了 2 幅。"在实验者的要求下，盖利亚说明了详细的解答和相应能整个运算系统：$(4\times5=20;\ 32-20=12;\ 12\div6=2)$。

可以看出，数学能力的这一成份从中年级到高年级的发展是沿着两条路线进行的。一方面，某种同一类型的推理和相应的运算系能不断地重复，这在早期对于简缩过程的开始是一个必要条件，而以后就渐渐地不再成为必要条件了。甚至在解新类型的题目时，推理过程和相应的运算系统一开始就立即被简缩了。对那些数学能力很强的 6～8 年级学生，特别是高年级学生来说，能们的简缩过程往往是完全不能察觉到的。事实上，在数学中他们是用简缩的结构进行思维的，这使他们在解题时具有一种独特的"远见"，可以更快地处理数学信息。

另一方面，第二条发展路线涉及到学生对推理过程中省略了的环节的意识。他们对于思维序列中省略了的环节和运算系能中省略了的运算究竟是如何意识的？省略了的环节在开始时是被意识到的。学生无论是说还是写，都不使这些省略了的环节流露出来，但是他们清楚地"坚持"大声息维，并把相应的运算重现在纸上，其间能观察到的停顿，正好就是落在那些被省略了的环节上。后来，省略了的环节在一定的时刻就意识不到了。学生显然已不需要这样了，在适当地方的停顿也观察不到了，推理过程是连续的，如果停顿可以观察到的话，那往往是因为在那里推理过程是详尽的，这一点在开始时似乎显得有点奇怪。但是推理是容易展开的，这一点学生在任何时候都可以做到——当面难出现或实验者

要求这样做时。最后，如我们早已指出的那样，在以后的发展阶段中，当学生不是缩简他的推理过程而是用已简缩的结构进行思维时，如果遇到需要尽可能完善地展开推理过程的情况，他就会有一定的困难。在个别的情形中，学生在使他们的思维序列具体化上有着明显的困难。他们声称，对他们来讲，思维的序列是非常清楚的，所以他们从来不去考虑它："一个人怎能解释已经完全清楚的事情呢？"例如，学生 D（十年级）做这样一道题："求两个数的最大公约数和最小公倍数之间的关系。"他立即说道："最大公约数和最小公倍数的乘积等于这两个数本身的乘积。"他的详细推理过程似乎是这样的："两个数的最大公约数是它们的公因数，当这两个数无公约数时，最小公倍数是这两个数本身的乘积。"对他自己来说，这个推理是够清楚的，但对他的大多数伙伴来说它就不清楚了。

心理过程的灵活性

这个成分的初级形式只在有数学能力的幼年学生中出现。例如，在所研究的二年级学生中，从一个思维过程转到另一个思维过程，寻找几种不同的方法解同一道题目的明显的倾向，几乎不能从任何一个学生的身上觉察到。这样的转变对他们来说是很难做到的。实验者所提出的适当的要求往往使他们不知所措。一道题目可以有几种不同的（全部是正确的）解法的这一观念，对他们中大多数人来说，是不能接受的。但是有数学能力的三、四年级学生在探索其他的解法时，却表现出一定的心理过程的灵活性（诚然，这种现象不是他们自发的，而总是在实验者提出启发性的问题之后才产生的）。甚至到了高年级，数学能力较差的学生也难以从一种心理运算转到另一种（性质不同的）心理运算。他们经常为最初发现的解法所束缚，倾向于老一套的思维序列。令人感兴趣的是，在这种情况下，并不是难以从一种能单的解法转到一种较复杂的解法的问题。如果较易的解法对他们来说是新的和不熟悉的，而较

难的解法却是他们所习惯的和熟悉的，那么即使从一种较难的解法转到一种较易的解法，也通常会发生困难。一种解法成为另一种解法的障碍。

思维的灵活性，是随着从原先的思维序列的影响束缚下逐渐地(完全)解脱出来而发展的。在有数学能力的青少年和年龄较大的学生中，发展中的思维方法的破坏和重建是迅速而平稳地完成的。他们主动地寻求解题的不同方法。

在解题时力求精力的节省和合理性("优美性")

评价一些可能的解题方法，从它们中间选出最清楚、最简便、最经济、最合理的解法，这种倾向在低年级还没有明显地表现出来。只有那些能力最强的学生在用不同的方法解题后，才能从中评价出"较简单"或"较复杂"的，"较好"或"较差"的，等等。杜勃洛维娜所研究的较有能力的二、三年级学生中，只有 31% 的人，在清楚地看到其他一些解法并对它们的相对合理性作出评价时，才能用最简便、最经济的方法马上解出一道题。

这个倾向只有在中年级才开始明显地表现出来。如果对能力中等的学生来说，目标就是解一道题，那么对有数学能力的学生来说，目标就是用最好的、最经济的方法来解这道题。虽然青少年在寻求题目的最合理的解法时并不总是成功的，但在大多数情况下，他们所选择的方法却能引导他们相对迅速而容易地达到目的。

这个成分在高年级学生中获得了特别的发展。夏皮罗强调指出，在他所研究的所有有数学能力的高年级学生身上，这种倾向都很突出，而且以非常生动而鲜明的形式表现出来。这些学生在初次解答后，通常就开始创造性的探索，目的是研究和改进前面的解法，以找出最经济和合理的方法。

数学记忆

在低年级，我们还观察不到数学记忆本身的发展形式的表现(当只能记住概括和心理模式时)。根据杜勃洛维娜的观察，在这

个年龄阶段，有能力的学生经常把各种具体的材料和关系记忆得同样好。一般的和特殊的方面，相关的和无关的方面，必要的和不必要的方面在他们的记忆中都并列地保存着。但是题目材料中的关系，对他们来说逐渐成为基本的东西了。如果他们有所遗忘，那么遗忘的不是数学关系而是一些数或具体的材料。

随着年龄的增长，记住关系的重要性日益增加，面对具体材料的记忆则退居次要的地位。记忆从保持特殊的、具体的、对后来发展无关紧要的东西中逐步解脱出来。

有数学能力的青少年对于数学系统(题目)的不同因素的记忆，有着不同的表现。他们的记忆是概括的和"周期性的"。题目的类型，解答的概括的方法，推理的模式和证明等等都能迅速地记住，并且牢固地保持下来。具体的材料也能很好地记住，但基本上只是在解题时，此后它们就迅速地被忘掉了。多余的材料就记得很差了。不是所有的数学信息都能记住，能记住的主要是那些"摆脱了"具体价值的信息。

在有数学能力的高年级学生身上，数学记忆在质的方面获得了新的特征。这里，我们要提出夏皮罗所研究的两个特征。第一个特征如下：前面已经指出，在高年级有能力的学生中，概括已经形成，并在不同的普遍性水平上发生作用。必须补充的是，同样的数学材料可以在不同的概括水平上同时保存在记忆中，它们互相并存着。例如，记忆中保存着一个公式的最主要的函数意象(它是没有细节的，只反映函数依赖关系的最一般的性质)，同时，与它一起保存下来的还有一个较具体的意象形式，最后还有这个公式本身。这首先可以使学生容易从函数依赖关系的一般性质中推导出这个公式(如果它已被忘记了)，其次可以使学生事先"估计"在某一具体情况中运用这个已知公式的可能性。

例如，研究的结果表明，有能力的十年级学生能够立即在三个水平上记住三角形面积的公式：(1)公式的最主要的函数意象(三

角形的面积是两条边及其夹角的一个函数)；(2)一个概括程度较低的意象，但仍不包含公式本身(三角形的面积是两条边及其夹角的正弦的一个函数)；(3)面积公式本身$\left(S=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C\right)$。大多数有能力的十年级学生也能在两个水平上记住倍角的正切公式：

(1) $\operatorname{tg}2\alpha=f(\operatorname{tg}\alpha)$ 和 (2) $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$。

有能力的高年级学生在数学记忆方面的第二个特征是，他们能够很好地回忆起解题的一般方法，这种回忆通常是用不带细节的最一般的表达方式。例如，我们上面提到过的一个几何题目的解法(见图67)，其基本思想乃是一个等积变换的思想。是什么东西使这个学生产生这一思想呢？结果发现，这个学生过去曾用类似的思想解过题目("在赖布金①的书中也有这些题目，我已经把它们做出来了")，但他虽尽了最大的努力，还是没有回想起这些题目。被保持的只是方法本身以及它的思想。

上面对中小学生的数学能力结构的各个主要成分的年龄发展问题，作了一个非常一般的和暂时性的描述。在不同的年龄范围内，这些成分在质的方面是不同的，它们各以一种特殊的形式表现出来。

研究的结果表明，这些成分的表现随着年龄的增长而在数量方面和质量方面出现有规律的变化。前面的整个发展过程为每一个新阶段的到来作准备，使新阶段由此面产生，并成为过渡到新的更高的发展水平的先决条件。这一发展路线是在学校教学的决定性的影响下形成的，虽然它不是由学校教学所唯一决定的。

不是所有的数学能力的成分都在同一时间开始形成的。在我们所研究的全部情况中，数学能力的发展是从最早的成分、即概括数学对象、关系和运算的能力的形成开始的。而简缩推理过程的

① 一本数学教科书的作者。——英译者注。

能力，概括的记忆，以及解题时力求经济和合理性，则是在后来各阶段才形成的。有理由使人相信，这些数学能力的成分是在最初的概括数学材料的能力的基础上形成的。但是，当然啰，这个问题还需要专门的研究。

我们的下一个任务，就是要研究在和年龄有关的发展过程中学生掌握数学能力的一些条件，其目的在于有意识地审慎地在学校教学期间指导和控制这一发展过程。

数学能力的性别差异

性别上的差异对数学能力发展的性质和成就的水平是否会产生影响？年幼的和年长的男孩和女孩在数学思维上会有质的区别吗？

苏联心理学对此还缺乏适当的研究。显然，不用说，大家认为在这一方面并不存在着原则上的差异，而一些基本差异是完全用传统、用教养和教育条件等来解释的。

外国心理学的一些(相对来说是少量的)著作，试图揭示男孩和女孩在数学思维上的个别质的特征。有些著作直截了当地指出男孩比女孩优越，另外一些著作虽然也指出男孩和女孩的一些思维特征，但在这点上则持否定态度。

斯腾在他的关于儿童和青少年天赋分析的名著(506)中，表示自己不同意这样的论点：即男孩与女孩在智力上的差异是由于受到不平等的教养和学校教育的结果。在他看来，原因在于有不同的内部倾向。斯腾评论道，女性较少倾向于抽象的逻辑思维，她们在这方面的能力较差(506，第 33 页)。

1963 年 E. P. 托兰斯的一本着作(721)出版了。作者给学校各年龄的男孩和女孩出了一些需要简单形式的创造性科学思维的题目。根据他的材料，在发现创造性解题的思想和原则方面男孩

要胜过女孩(男孩指出较多的可能性,他们的思想得到较高的评价等等)。

就数学思维本身而论,斯皮尔门和桑代克根据观察和实验,在他们的著作中也有过对这一问题的某些看法。斯皮尔门认为数学思维在性别上的差异,如果存在,那也是无关紧要的,其次它们取决于环境的可能性超过了取决于内部条件的可能性(69,第229~230页)。桑代克在他的《代数心理学》一书(715)中,根据日常经验和专门研究,认为男孩和女孩之间在代数能力方面不存在明显的差异。与此同时,桑代克还注意到,男孩对代数发生较大的兴趣,可以把它与他们对物理学和工程专业所发生的"兴趣"联系起来。在《以心理学为基础的教学原理》一书中,他还写道:"男性和女性之间在能力方面没有表现出明显的差异"(502,第96页)。但他从中注意到,女孩较倾向于记住细节,并能较精确地把材料重述一遍。

1925年,虽然A. E. 卡默隆认为男孩和女孩在数学能力方面不存在本质上的差异,但她也指出男孩和女孩之间在空间概念的适应方面还是存在差异的,男孩在这方面发展较好。她指出,这种差异可能是教学和实践的结果,因为当男孩和女孩在一起接受教学时,这种优越性就变得不怎么显著。但是在这种情况下,卡默隆注意到:"男孩在较复杂形式的意象方面仍然保持着优势"(545,第43页)。

1940年,A. M. 布拉克韦尔(529)运用因素分析,来研究100名男孩和100名女孩解各种测验题的结果,并在同样的条件下从男孩当中分离出3个特殊的因素,从女孩当中分离出4个特殊的因素。从女孩中分离出一个男孩所缺乏的特殊因素,称它为x因素——准确或精确的因素,也就是以相对精确的形式保持材料的能力。此外,表现在言语因素方面的差异看来也是存在的。在女孩当中它是一个纯粹的言语因素,但在男孩当中则应该改称为言

语-推理因素(象"一种用言语形式操纵观念的能力")。作者认为,因而男孩进行任何一种言语-逻辑的工作,都要比女孩容易得多。十年后,即1951年,另外一个因素方面的研究(B. 麦克阿列斯特,651),也发现男孩和女孩之间的某些差异。在算术运算的形式方面,双方的成绩是接近的,但在一个是一般智力测验和另一个是算术推理测验的两个测验中,男孩明显地超过了女孩。

A. 安纳斯塔西(1958年)在有关差异心理学的重要的一般著作中所引用的材料表明,男孩在计算性运算的测验和算术推理的测验中胜过女孩,这种差异在小学里还看不出,但是到了中学尤其是到了大学,这种差异就逐渐变得十分明显了(514,第476~477页)。最后,我们还要提及F. 霍特雅特于1956年发表的论文(614),文中提供了有关简单数学推理的实验结果:男孩在解题的水平方面占了优势,即男孩在较高、较概括的水平上解题的百分比大于女孩的百分比。

如果我们要对以上所有的研究结果进行概括的话,则我们可以说,根据这些资料,男孩在逻辑推理方面比女孩占优势,而女孩则在精确性、严密性、准确性,即一种"拘泥于细节"的思维方面占优势。但正如研究者们自己所指出的那样,这些材料倒底可靠到什么程度,以及这些特性在多大程度上是"先天的",仍然是悬而未决的问题。

我们可以肯定地说,我们的研究连同杜勃洛维娜和夏皮罗的研究在一起,并没有揭示出男孩和女孩在数学思维上的任何质的、特有的特征。我们所询问过的一些教师也没有发现这些差异。

当然,男孩实际上更加经常地显示出数学能力(以及力学能力)。这一点在低年级中是不明显的,但到了高年级就变得十分显著了。在数学奥林匹克(竞赛)的获奖者中,男孩经常比女孩多;在专门的数学学校和训练班中学习的学生中,男孩人数较多。在夏皮罗从事教学并进行实验的库尔斯克市立第六学校中,在物理-数学

班学习的男生有21名，女生有9名。在国立莫斯科大学物理-数学寄宿学校里学习的357名学生中，只有38名是女生(A. V. 佐西莫夫斯基的材料，131；1966年该校有91名男孩和10名女孩结业)①。进入莫斯科第二学校(该校偏重数学)的有637名男生和260名女生。在我们用实验方法研究过的有天赋的儿童当中，有14名是男孩，2名是女孩。

但是我们相信，这种实际上的差异，应当归因于传统上的差异，归因于对男孩和女孩的教养，归因于对男性和女性在职业上的普遍看法。结果是数学往往在女孩感兴趣的范围之外。至少，迄今我们手头上还没有可靠的材料可供我们作出与此不同的结论。

① 1966年6月20日的《莫斯科晚报》。

17 数学能力和个性

如前所述，要在数学活动中取得成功，需要某些个性品质。有些能力，即使是一种高水平的能力，如果不和个性或它的情感-意志方面的一定倾向相结合，这些能力本身就不能导致高度的成就。

国外一些研究工作所用的主要方法是研究有天赋的儿童，在与普通的、"中等的"儿童比较中揭示他们的个性特征。

从十九世纪末到大约1920年，美国的心理学文献中占统治地位的观点是，有天赋的儿童除智力以外，其他方面都比普通的、正常的儿童要差。这种观点认为，智力天赋同情感-意志和社会领域里的一些缺点是有机地联系着的(见 W. B. 巴比，521；H. D. 卡特，548a；P. A. 威蒂，738)。有天赋的儿童总被认为是生理上虚弱，病态，无吸引力，情绪不稳定，神经质，性情古怪，并表现出无致府主义和个人主义的特性。

后来的研究，不仅不能证实这些观点，而且几乎在每一方面都致立了相反的看法。这些研究从三十年代初起，描述性较少，而生动的科学性居多，倾向于研究个性的某些方面。例如，D. W. 布雷(531)分离出决定杰出成就的三种因素：能力、个性因素和环境的有利配合。W. 亚伯拉罕(508)专门研究了学生对活动的态度以及作为他们创造力源泉的兴趣。K. K. 詹都阿(617，618)对有天赋的儿童研究了它们个性的社会特性和情绪方面。G. L. 海伦(609)研究了有天赋的青少年的性格特征。

很多研究(其中我们将主要注意 L. S. 霍林沃尔斯，L. M. 特

尔曼和 P. A. 威蒂等人的著作)都表明，首先，有天赋的学生的生理发展、健康状况和"体格标准"都在一般水平之上。J. E. 本特莱(527)(第 15~16 页)曾断言，身体的健康，一方面和体格参数存在着正相关，另一方面也和智力水平存在着正相关。E. H. 马登斯(648)指出了有天赋的儿童的社会顺应性，霍林沃尔斯则指出了他们的"合作的愿望"。许多研究者注意到有天赋的儿童在情绪和心理上的很高的稳定性，以及他们的活泼性、幽默感、独创性，好奇心和新异感，也注意到他们那些使人嘱目的性格特征和气质以及他们"对正当行为的强烈倾向"。此外，有天赋的儿童在礼貌、纪律、自我批评、独立性和敏感性等方面都超过了一般儿童，他们更能获得人们的信赖。还须指出，由于有天赋的儿童在各方面的发展都超过了他们的年龄范围，因此他们时常疏远同年龄的孩子——模仿年龄较大的孩子或喜欢离群独处。

在苏联，列宁格勒的心理学家 B. G. 安南耶夫、A. G. 科瓦列夫、V. N. 米亚西谢夫等人对个性的不同方面的研究颇有成果，这些个性的不同方面与种种能力结合后，形成一个能导致高度成就的特性"结合体"。

在对数学能力的研究中，象上面所指出的那样，我们花了相当长的时间研究了一批不同年龄的有天赋的儿童，其中包括对他们个性品质的探讨。我们前面已经介绍了一部分这些儿童的概貌。这些概貌以及一些杰出的从事研究工作的数学家的传记资料、教师和从事研究工作的数学家对书面问卷的回答、和一些已经发表的研究材料，使我们能够相当准确地分离和描述在数学上取得成功所必需的个性品质。下面就来谈谈这些特性。

S. L. 鲁宾斯坦强调指出："对于形成任何一种重要的能力，都必须首先引起对某种类型活动的十分强烈的需要"(351，第 294 页)。这个观点完全适用于数学能力。

首先，我们应当指出，"在一种行业中，爱好和能力的一致性"

(米亚西谢夫，304，第17～18页)，这是有能力的学生的特征，它对成功地进行数学活动是非常重要的。对数学的特别积极的态度表现在：在这适当的范围内存在着浓厚和正当的兴趣，学习数学的努力和需要，以及对数学的炽烈的热情。这种爱好，如对数学活动的需要，是发展能力的最强大的动力(米亚西谢夫，303，第13页)。一个人对数学工作没有热情，他就不可能成为这方面有创造性的学者——这种热情能使人奋发研究，发挥他对这项工作的潜能和积极性。如果一个学生对数学没有爱好，那么即使他有很强的能力，要完全精通数学也是很难的。爱好或兴趣在这里所起的作用说明了这样一个事实：一个人对数学有了兴趣就能专心致志，从而有力地运用和发展他的能力。数学家们自己是经常指出这一点的，他们的全部生活和创造活动也证明了这一点。能力总是和爱好息息相关的，数学家莫达克海-波尔托夫斯基说，"充沛的力量总要力求表现出来"(300，第507页)。

N. F. 多布雷宁非常详尽地阐述了关于某种活动对一个人的意义的思想(117，118，119，120)，这对正在讨论的问题是很有价值的。一个人所从事和经历的某种活动的重要社会意义变成了对他个人的意义。G. V. 伏罗比也夫(73)和 A. V. 斯捷潘诺夫(394)指出了这种丰富的意义对教学过程，对形成掌握数学(几何)教材的能力的影响。

Yu. A. 萨马林(360，361)在研究学生的热烈而积极的态度对学习活动的作用时指出："没有比漠不关心的态度更坏了"(361，第82页)。在一种活动中，一个有能力而没有兴趣的人，要比虽然没有显著的能力却有强烈兴趣的人，所取得的成果要小(A. A. 柳布林斯卡娅，266)。

A. A. 包达列夫(46，47，49)的研究提供了具体的材料，即学生对一门学科的态度会在他的知觉、思维、记忆和想象等特性上留下一定的痕迹。学生缺乏积极的态度，就会阻碍他们的活动潜能

的发展。

对待数学的积极和消极的态度对数学活动能否取得成功的影响，在国外也已有了专门的研究。这里，值得注意的是 L. R. 埃极和 R. M. 特列格尔(512)在 1961 年的著作，其中研究了在数学领域中的成就方面"对数学的态度的作用"。他们把测验研究的结果与学生在学校数学方面的进步进行了比较，并与从问卷中显露出来的对数学的态度(对数学爱好还是厌恶，解题是否带来一种满足的感觉，是否抱一种漠不关心的态度等等)进行了比较。相关分析显示了所有三种指标的相互关系。K. E. 布朗和 P. G. 约翰逊(535)，也研究了在数学活动中的积极态度对活动获得成功的影响，一般地，也获得了类似的论据。

我们关于有天赋的学生的那些素描，是生动的佐证，即证明了能力只有在爱好面前，或者只有在对数学活动(在它的相对的初级形式中)具有特别的需要时，才能有效地发展。正如那些素描所示，我们观察的所有儿童，没有例外地对数学都有一种强烈的兴趣，都有一种专注于数学的倾向，都永不知足地努力获得数学知识和解题。

但是，尽管在通常情况下能力与爱好有联系，但这不是一个普遍的规律。比如说，根据对某种类型的活动是否爱好以及这种爱好的明显程度来判定能力是否存在，那就错了。在个别情况下，这种断定甚至会与事实完全不同。A. F. 拉祖尔斯基已写了有关这个问题的文章。列维托夫(245)，米亚西谢夫(301, 305)和包达列夫(47)也指出了这一点。

象下面这样的一些情况在学校里会经常遇到：一个学生在数学上有能力，却很少有兴趣，在学习这门学科时没有突出的成绩。但教师如果能启发他对数学的兴趣，使他喜欢学习数学，那么这个学生就会被数学"迷住"，就能迅速取得很大的成绩。这种情况，在一些著名的从事研究工作的数学家如罗巴切夫斯基，M. V. 奥斯

特洛格拉特斯基，N. N. 鲁金等人的经历中也可以看到。

尽管这样，我们得重申，在实践中我们无数次地观察到能力和兴趣或爱好是一致的：喜爱学习某种活动使能力得到训练和相应的发展，而这种发展着的能力对活动的成功又起着积极的作用，而成功，反过来又"强化"了爱好和兴趣。

列宁说过："没有'人的感情'，就从来没有也不可能有人对于真理的追求"(7，第255页)。人的情感是在任何活动(包括数学活动)中发展能力的一个重要因素。创造的喜悦，从紧张的智力活动中得到的满足感，以及在这一过程中得到的情感享受，能提高一个人的精神状态，调动他的力量，并且鼓舞他去克服困难。一个冷漠无情的人不可能成为一个创造者。我们所研究的有天赋的儿童，他们对数学活动都倾注着深厚的情感，这是他们的特征，他们每一次获得新的成就后都感到由衷的喜悦。正象波果亚夫连斯基和梅钦斯卡娅所指出的那样(44，第267～268页)，一次小小的发现所带来的快感，不只是简单的对成果的感受，而且还包含着因意识到困难已被克服，自己的努力业已达到目的而发生的满足感。

独特的审美感对数学创造力来说有重大的价值。庞加莱曾描述过数学家们所体验到的那种真正的美感：这是一种数学的美感，一种数和形的和谐感，一种几何的优美感(499，第18页)。雷韦兹(676)说："数学家之所以要创造，是因为精神构成物的美给他带来快乐。"对优美解法的这种感受，是我们所观察到的那些有能力的学生的特征。学生们说："好一个漂亮的解答！""象一场精彩的棋赛，这种方法激起我心中的喜悦。"他们的面部表情和举止也证实他们享受到那种美感：他们的眼睛闪烁着光芒，他们满意地、微笑地搓着双手，彼此请别人来赞赏他敏锐的思路或特别"优美的"解法。

象一般的能力一样，全面、深入地发展数学能力的可能性，也

完全依靠性格特征的发展水平，特别是意志的发展水平。象 B. G. 安南耶夫指出的那样(19)，能力和性格的发展是相互联系着的。数学能力是在数学活动过程中形成和发展的，就在这同一过程中，性格特征也形成了。V. E. 赛尔金娜(398)当时研究了性格特征对能力发展的影响。在这里首先要提到的是目的的明确性，坚持和顽强。

M. S. 伯恩斯坦在"科学创造力的心理学"(40)一文中说："一个有创造性的科学家不喜欢容易的问题或用简单的方法去解答问题。……困难和阻挠对他的创造力提供了一种独特的额外刺激。"一个人的能力不论多么卓越，如果没有勤奋和顽强工作的习惯，就不可能在某种活动中取得很大的成绩。他至多也只能保留其潜在的能力。正象一位著名的苏联数学家所指出的："创造性活动中主要的是连续工作的能力，就是花几个月，几年甚至几十年的时间去达到一个既定目标的能力，不倦地寻求解决问题的方法。这对数学家是至关重要的，特别是当他总是……设计和试行成千种方法以找出一种正确的方法时。"① 坚持，有工作潜能和勤奋，经常在我们所观察的有天赋的学生的数学活动中表现出来，在我们前面引用的一些个案中也是显而易见的。A. V. 佐西莫夫斯基(131)观察了莫斯科数学寄宿学校的学生，也指出他们高度的坚持性和专心致志的工作给他们带来了快乐和满足。N. S. 列伊捷斯(254)在有天赋的儿童中观察到一种对工作的异乎寻常的爱好和特别喜欢紧张的工作，包括那位有天赋的数学家埃里克·符。但是也有例外，有些有数学能力的学生错误地认为他们无需在这方面特别用功，凭他们的能力就能"解决"问题。老师和家长应该不断地教育他们，尽管有能力，但要精通数学就必须勤奋、坚持、刻苦。还应该耐心地培养学生这些品质，引导学生不在解数学题的困难面前退却，而要坚持到底。

① "M. A. 拉夫连节夫六十诞辰"，苏联《中小学数学》，1961 年，第一期，

创新精神，对新事物的敏感，也是从事研究工作的数学家的一种品质。在科学上，新事物是在和过时的旧事物的斗争中产生的。科学上的变革者“不仅创造了一些新事物，他也破坏了一些旧事物”(伯恩斯坦，40)。

当然，上面所谈的关于从事研究工作的数学家的全部性格品质，只是在他的数学活动中可能有选择地出现，而不是他的生活和活动的其他方面的特征。科瓦列夫和米亚西谢夫十分正确地指出(174，第147页)，一个学者可能意志薄弱、工作潜能差、容易疲劳，但在数学活动中却能显示出完全不同的品质：高度的组织力，坚持性和有工作潜能。

一个真正的学者还需具备这样一种性格特征：一种对自己，对自己的潜力和成就的批评的态度——谦虚，这是一种对自己的能力进行权衡的态度。必须记住，如果对有能力的学生采取一种不适当的态度，即过分夸奖他，夸大他的成绩，夸耀他的能力，过分突出他的优越性，那么就很容易使他形成一种自己比别人高明、独具非凡本质的信念，这就好比用“顽固的骄傲自大的病毒”来毒害他。有一段时期，我们的报纸用了一些华而不实的标题，诸如“培养未来的罗蒙诺索夫的学校”，“发掘罗蒙诺索夫的后继人”。在莫斯科开办了一所培养年轻数学家的学校，报上一篇文章称它为“培养未来的罗蒙诺索夫的学校”①。这样，每个学生都会自信“我是未来的罗蒙诺索夫”！一篇关于数学学校学生的调查报告曾用这样的标题：“120个牛顿”(438，第59页)。没有人考虑到这对14～15岁的儿童会带来怎样的影响；而这些孩子正是在个性迅速形成的时候，正是在形成对自己和对别人的态度的时候②。

---

① 《莫斯科真理报》，1963年1月6日。

② 1966年7月13日《莫斯科晚报》刊登了一则“培养未来的罗巴切夫斯基的学校”的报导，若有其事地说，市立第18寄宿学校正在培养未来的罗巴切夫斯基和爱因斯坦。那时候，本书早已交给出版社了。

最后，有一点要指出，一个人在没有提高基础文化水平以前，就不能在数学上有所发展。一个人必须始终全面地、和谐地发展他的个性。如果除数学以外对任何事情都采取“虚无主义”的态度，纯然从“单方面”去发展能力，是不能促使数学活动有所成就的。

18 关于数学能力结构的一般问题

结构概要：成分的相互关系

我们所收集的实验性和非实验性的材料以及对专题文献的研究，使我们能够谈及在作为数学才能的综合的心理品质结构中占有特殊地位的那些成分。

现在我们给出学龄期数学能力结构的一般轮廓(我们如以前那样，从解题的基本阶段出发来看数学能力的结构)：

1．获得数学信息

A．对于数学材料的形式化知觉的能力，掌握题目的形式结构的能力。

2．加工数学信息

A．在数量关系和空间关系方面，以及在数和字母符号方面进行逻辑思维的能力；用数学符号进行思维的能力。

B．对数学对象、关系和运算的迅速而广泛的概括能力。

C．简缩数学推理过程和相应的运算系统的能力；以简缩的结构进行思维的能力。

D．数学活动中心理过程的灵活性。

E．力求解法的简洁、清楚、经济和合理。

F．迅速和随意地改变心理过程的方向，从正向思维序列转到

逆向思维序列的能力(数学推理中心理过程的可逆性)。

3．保持数学信息

A．数学记忆(对数学关系、类型特征、论证或证明的模式、解题的方法以及探索的原则等的概括记忆)。

4．一般的综合性成分

A．数学气质。

这些成分都是密切联系、互相影响的，它们集合起来形成单一的综合系统、成为数学才能的一种与众不同的特征群，那就是数学气质。

在结构中虽然有用但不是必要的那些成分，不包括在数学才能的结构内。在这个意义上，那些成分对数学才能来说是中性的。然而，它们是否出现在结构中(更确切地说，它们的发展程度)决定了数学气质的种类。下面便是在数学才能的结构中不是必要的那些成分：

1．作为暂时特征的心理过程的敏捷性。一个人工作的速度并没有决定性的价值。数学家可能考虑问题审慎，甚至很慢，但却非常透彻和深刻。

2．计算能力(迅速而精确地计算的能力，常指心算)。我们知道有些人能心算出复杂的数学计算题(几乎能立即算出三位数的平方和立方，或算出六位数的立方根)，但不能解任何复杂的题目。我们也知道，过去和现在都有对数学没有任何贡献的非凡的"计算家"。另一方面，著名的法国数学家庞加莱自己写道，他甚至在数加法时也不能避免出错。

3．对符号、数和公式的记忆。正如柯尔莫戈罗夫所曾指出的，许多著名的数学家并不一定在这方面有出众的记忆力。

4．对空间概念的能力。

5．把抽象的数学关系和函数依赖关系视觉化的能力。

必须强调指出，我们的数学能力结构的轮廓，是对中小学

生的数学能力而言的。在尚未进行专门的研究前，我们不能预先说出，要达到什么程度才能被看成是数学能力结构的一般轮廓，即要达到什么程度才能被认为是充分发展的有才能的数学家。

当然，能力结构中这些特定的内容主要是决定于教学方法，因为它们是在教学过程中形成的。但是我们已经确定的成分应该不受任何条件的限制而列入这个结构。比如说，不可能想象会有这样一种教学系统，它不把概括能力或数学记忆力包括在数学能力的结构中。

在分析数学才能结构的轮廓时，我们可以看到，在数学活动的知觉、思维和记忆方面所描述的一些特性具有普遍的意义。例如，对于题目的形式化知觉就是这样一种知觉，它是概括的、简缩的和灵活的；数学记忆是对概括的、简缩的、灵活的系统的记忆。如果我们谈到对某个题目条件的形式化的(概括的)知觉，我们也就会谈到形式化的(概括的)解法和形式化的(概括的)记忆。所以，结构的具体轮廓可以用与上不同的、非常简明的公式来表示：数学才能的特征就是在数学关系、数与字母符号的领域内概括的、简缩的和灵活的思维，就是数学气质。这种数学思维的品质，导致数学信息加工速度的加快(这是由于概括和简缩结果，以小的信息量代替了大的信息量)，从而也节约了神经和心理能量(参见 C. W. 泰勒和 F. 巴龙，707)。运用联想说的术语，似乎可以说：数学能力就是用数学材料去形成概括的、简缩的、灵活的和可逆的联想和联想系统的能力。这些能力在有能力的、中等的和没有能力的学生中以不同的程度表现出来。在某些条件下，只要给以最少量的练习，这些联想便会在有能力的学生中"当场"形成。然而在没有能力的学生中，形成起来就非常困难。对于能力中等的学生，逐渐形成这些联想的必要条件，是要有一套特别安排的练习和训练。

在初步分析了数学能力并获得能力结构的概念后，我们并不认为数学能力的成分研究已经完成。对每个成分加以彻底研究，

以便深入它的本质，揭示它的生理学基础，是非常重要的。

如上所述，结构的成分是彼此密切相关的，形成了一个单一的系统、一个综合的结构，即数学气质。在解题过程中，它们的密切关系已由上述许多例子说明了。有些成分是如此密切相关，以致不少研究者有理由认为它们不过是同一性质的不同表现而已。例如，鲁宾斯坦叙述了概括和简缩这样一种成分(355，第130～131页)。他在一篇论文中写道，心理过程的简缩程度是概括和分析的相互关系的派生表现。心理过程愈简缩，它就愈同已经发展或正在迅速发展的概括一道起作用(356)。P. A. 舍瓦列夫也认为简缩就是概括的结果，概括的联想也就是简缩的联想。A. M. 马丘什金也持有同样的观点(280)，他认为，当概括的过程变得更彻底时，详细的运算就以一种新的形式、即简缩的运算形式出现。此外，P. Ya. 加里培林的观点也与此相近。

所有这些观点都是正确的。但是如果一个成分是跟随另一个成分的，是由另一个成分所决定的，那么这也并不意味着他们之间可以划一个等号。派生出来的并不等同于原来的，这正是因为它是派生出来的。因此很难同意鲁宾斯坦的下列论点，就是到最后，"第二个指标并不超过第一个指标的界限"(356，第9页)。我们觉得，即使一个成分(简缩)是另一个成分(概括)的派生物，也应该把它们看作是两种不同的成分，因为它们是完全不同的心理现象。所有其他成分完全有可能是在最初发展起来的成分(概括能力和数学气质)的基础上形成的。但是，在这种情况下，我们应该谈到数学气质的不同成分，而不是把它们都归并为概括能力和数学气质。

数学能力的特殊性

问题是，我们所选出来的成分要达到什么程度才算是特殊的

数学能力呢？ 它们可能是一般的能力，还是仅仅是特殊的数学气质？那么，数学能力恰恰就是一般的智能，数学只不过是供一般智能表现的一块好"场所"吗？科瓦列夫和米亚西谢夫对所有特殊的科学能力，确实是这样提出问题的："在这种情况下（说到科学能力——原作者注），这是否就是一个充分可塑的健康的大脑，它的活动一方面受对活动需要的支配，另一方面又受当时环境的支配呢？"（174，第130页）。我们将以这个观点来考察我们在数学才能结构中所选出来的一个基本能力——概括数学对象、关系和运算的能力。

当然，概括能力按其本质来说，是一种普通能力，通常以一般的可教性品质为特征。N. A. 梅钦斯卡娅曾反复地指出这一点。正如鲁宾斯坦所指出的，把概括能力作为所有能力的主要成分是合乎情理的，因为能力作为一种个性的品质，应是在从一些条件迁移到其他的条件、从一些材料迁移到其他的材料的心理运算中表现出来的。然而，这里讲的不是概括的能力，而是概括用数和字母符号表示的数量和空间关系的能力。

概括数学材料的能力就是一种特殊能力，我们怎样来为我们的这一观点辩护呢？ 第一，我们注意到这种能力是在特殊领域内表现出来的，不能把它与其他领域内的相应能力的表现互相联系起来。许多著名天才人物（著名的数学家和非数学家）的传记资料和专家们的观点，尤其是我们访问过的从事研究工作的数学家的观点和意见，都证实了这一点。M. A. 拉夫连节夫院士强调指出："在我生平中，我曾再三遇到这样一些人，他们在某方面有才能，而在其他的方面却是平平庸庸的。也许这种对照，在与我关系非常密切的科学——数学中，在那些有显著能力的人们身上显得最为突出"（232，第40页）。换句话说，有才能的数学家在别的领域里可能毫无天资。数学家庞加莱和莫达克海-波尔托夫斯基断言，数学能力的特殊本质使数学成为不是人人都可接近的（670；300，第

533 页)。换句话说，有一般才能的人，可能在数学上毫无天资。D. I. 门捷列夫在校求学时，在数理两门功课上成绩优异，但在语言课程方面却只得 0 分或 1 分 (174, 第 136 页)。从 A. S. 普希金的传记资料中我们可以推定，他在出席帝国学会时曾为数学伤心地流下了眼泪，尽管他尽了很大的努力，却"总不见什么成果"。

然而也确有另一种情况：有不少人兼有数学和(比如说)文学的天赋。例如，数学家 S. 柯瓦列夫斯卡娅便是一位有才能的作家，她的文学著作也得到很高的评价。V. Ya. 布尼亚柯夫斯基是十九世纪的著名数学家，又是诗人。十九世纪英国数学教授 C. L. 道格逊是一位有才华的童话作家，他用刘易斯·卡罗尔的笔名写下了举世闻名的《阿丽丝漫游奇境记》一书。此外，诗人 V. G. 本尼迪克托夫也写了一本深受大众欢迎的算术书。A. S. 格里鲍耶多夫在某大学数学系读书时成绩很好。著名剧作家 A. V. 塞可伏-科培林在莫斯科大学接受数学教育时表现出极高的数学能力，著有《悬链线理论》一书，并因此获得金质奖章。果戈里和莱蒙托夫两人非常喜欢做数学难题。托尔斯泰则悉心研究算术教学方法(安德罗诺夫, 23)。

其次，我们可以指出一系列国外的研究，这些研究表明(尽管他们只是用测验方法，用相关和因素分析来证明)，在智力分数(众所周知，概括能力是一般智力的最重要特征之一)和数学成就测验之间只存在着弱的相关(参见 P. M. 赛蒙兹, 704 和 E. R. 邓肯, 560)。J. W. 盖泽尔和 P. W. 杰克逊 (579) 以及 I. 弗莱舍尔 (566) 也指出，对个体来说，一般心理天赋和创造力两者之间很少重迭。根据 B. R. 勃金汉姆的资料(537, 第 213 页)，智力测验表明智力跟历史 (0.54) 和英语 (0.52) 这两者的相关最高，而跟数学 (0.21) 的相关最低。在另一项同一类的研究中，对不同类型的学校，智力与代数成绩分别以 0.25 和 0.38 相关，而与几何成绩则以 0.40 相关。在另一著作中，盖泽尔和杰克逊(578)指出，一个"高

智商”的学生是以比较刻板的方式考虑问题和进行规范运算的，而一个有“高度创造力”的学生则倾向于“岔开”刻板的思维而“转向”独创性①。

第三，为了证明我们的观点，我们可以来看儿童在校学习时的进步记录(分数)。许多教师指出，一个学生的迅速和熟练的概括能力可能在一门课上显示出来，而在别的课程上就没有。例如，我们有几个受试者在数学上确有“当场”概括的能力，而在文学、历史或地理上就没有这种能力了。与此相反的例子也有，有些学生善于并能迅速地将文学、历史和生物学的材料加以概括和系统化，但在数学上却没有类似的能力。

A. A. 包达列夫在他的一些著作中(46, 48)指出，一个学生的概括能力的水平，常常不能同样地在不同的知识领域表现出来。他的结论是，有一类学生“当场”概括的能力只能在比较狭隘的领域内表现出来。这方面的具体资料可见 Yu. A. 萨马林所写的有关较大年龄学生的智力类型的说明(366)。

学习成绩大体能在某种近似的程度上说明学生的能力。把学生的不同科目的成绩在此作一比较是有益的。为此，将1964～1965学年里莫斯科某些学校的1086名6年级～11年级(共32个班级)学生的年终成绩，加以统计和分析。我们选取了数学教学上水平不同的一些学校。我们对数学科目和非数学科目之间成绩上的显著差异(即数学科目的平均分数和相应的非数学科目的平均分数之间差2分)感兴趣。数学成绩好而其他科目成绩显著较差的学生中有这样一些学生，他们的分数是(分号前的分数是数学成绩，分号后的分数是非数学的成绩)：(5, 4; 3, 3, 3, 2), (3, 3; 2, 2, 2, 2), 和(4, 4; 3, 2, 3, 2)。在数学成绩差而其他成绩显著较好的学生中，一些学生的分数如下：(2, 3; 4, 4, 4, 4), (3, 3; 4, 5, 4, 5)

① 当然，这里主要决定于研究一般智力和创造力的研究者所应用的测验的性质。所以，不可能毫无保留地采用他们的材料。

表 26　数学和其他科目之间分数上有差异的学生的分布

年　级	学生总数	数学成绩好，其他科目成绩差的人数	数学成绩差，其他科目成绩好的人数
6	64	0	2
7	168	10	8
8	336	12	19
9	270	9	11
10	186	3	16
11	62	3	4
总计	1086	37(3.4%)	60(5.5%)

和(3, 3; 5, 5, 5, 5)。现把数据总结成表 26。

夏皮罗为了研究他的九年级的学生，在其他学科的任课教师的协助下，把这些学生按数学能力、物理能力和文学能力分组(他是根据"最接近"或"最远离"数学的标准来取这些科目的)。30 个学生中，仅 16 人同时被分在数学和文学这两组内，23 人同时被分在数学和物理这两组内，有 12 人同时被分在所有的三组内。学生在不同学科上的能力之间的相关系数是：数学-物理 0.75；数学-文学 0.49；物理-文学 0.21。

第四，为了申述我们的论点，特将我们在实验中得到的学生解答数学和非数学测验题目的结果作个比较：

第一个这样的比较是在系列 XV 的测验上作出的。在这一系列中，除了机敏地改变强化的刻板的运算系统、从一种运算方法转换到另一种方法的数学测验外，还有一个特殊测验，就是根本改变非数学活动情况(校读一张表)中刻板的心理运算的测验。在数学测验和非数学测验上学生所获得的成绩之间没有相关。这两种活动显然彼此完全无关。在有些例子中则看到负相关——有些学生成功地解出了数学测验的题目，在数学活动中显示出思维有很大的灵活性，但是在特殊测验上的成绩却很差，以及相反的情况。我们不想作细致的分析，理由有二：一是完成这个特殊测验并

得出任何一定结论的学生人数太少(共 15 名),二是我们未能使学生有兴趣地做这个特殊测验。有些人做这个测验时,态度冷淡、兴趣不大,这说明作业是枯燥无味和单调的。在这种情况下,如果我们不能设法使两种测验的兴趣因素保持平衡,那么当然就不能对所得的材料予以过分重视了。因此,我们不想作出系列 XV 的题目揭示了心理过程灵活性的特殊现象的结论,我们认为,我们所得的结果是很近似的,需要进一步补充证实。

在系列 XII 中我们获得了更有意义的材料,这一系列的那些非数学概括的测验是跟形成人造的概念有关的。这一系列的测验题引起了学生的兴趣。共有 24 名有能力的学生完成了这一系列的测验题。根据解这一系列测验题的平均分数,确定了这 24 名受试者的秩。然后,决定采用如下的方法:我们考查了关于数学概括的这些系列的相关矩阵(参见第 13 章第一节的表 10),并选出了两对系列,其中一对的两个系列相关最小,另一对的两个系列相关最大。接着我们把系列 XII "嫁接"到上述的每个系列上,并对这 24 名受试者,计算出系列 XII 和所选的每个系列的结果之间秩的相关系数①。这样,我们求得了两个三阶的相关矩阵:一个包括系列 XII(概括非数学材料)和彼此间相关最小的概括数学材料的两个系列;另一个包括系列 XII 和彼此相关最大的两个系列。这样做是为了评价非数学的系列 XII 在和两个彼此"相距最远"的数学系列以及和两个彼此"相距最近"的数学系列合在一起时,它在其中的地位。

最小的相关(见表 10)在系列 VII 和系列 X 之间,为 0.37。我们得到表 27 所示的相关矩阵。可见,在这些系列中解题的成绩显示了正相关。我们的相关系数的统计显著性达 0.05 水平。

然后将这些数据进行因素分析。因素化是在斯比尔门的单因

① 所有公式详见第 12 章,这里一概略去。该章还附有因素分析全部程序的说明。

表 27　系列 VII、X 和 XII 的相关矩阵

($N=24$)

	VII	X	XII
VII	—	0.37	0.34
X	0.37	—	0.41
XII	0.34	0.41	—

表 28　系列 VII、X 和 XII 的因素矩阵

系　　列	g 的因素负荷
VII	0.55
X	0.67
XII	0.61

子模式基础上进行的。按照单因子解法，因素化的结果是用因素矩阵的形式来表示的（参见表 28）。再生的相关矩阵是与原来的矩阵相符的，剩余相关系数等于零。

得出的负荷在统计上是显著的，但不是很高。三个系列在普遍因素上都有显著的负荷（这里所指的普遍因素当然就是概括能力）。这意味着，普遍（共同）因素对三个系列来说，都是存在的，虽然并不是很明显地表示出来。

现在我们用另一对系列做同样的工作。最大的相关（见表 10）在系列 IX 和系列 X 之间，为 0.68。得出的相关矩阵见表 29。十分清楚的是，这些系列中解题的成绩也显示了正相关。相关系数的统计显著性达 0.01 水平（系列 IX 和系列 X）和 0.05 水平（其他系列）。数据都被进行因素分析（参见表 30）。再生的相关矩阵跟原来的矩阵相符，剩余相关系数等于零。

得出的负荷具有统计显著性。系列 IX 和 X 在普遍因素上有很高的负荷。至于系列 XII，虽然有显著的负荷，但是明显地较低。因素矩阵可以明确地用下列方式来解释：当然，普遍因素（一

表 29　系列 IX、X 和 XII 的相关矩阵

($N=24$)

系　列	IX	X	XII
IX	-	0.68	0.46
X	0.68	—	0.41
XII	0.46	0.41	—

表 30　系列 IX、X 和 XII 的因素矩阵

系　列	g 的因素负荷
IX	0.87
X	0.78
XII	0.53

般概括能力)影响所有三个系列的解法，但是系列 IX 和 X 显然是结合在一起的，在它们的范围内有一个群因素在起着作用(这点是斯比尔门的模式所未曾设想到的)。这个群因素，根据所有的材料来看，就是概括数学材料的能力。

于是，系列 XII "连接着"关于数学概括的彼此相关最小的这一对系列。可以得出如下的总的结论：作为一般能力的概括能力，影响着所有概括测验的解答，不管数学的和非数学的，但是，有一种象群因素那样的东西把数学测验联系起来。使我们相信这一点的是这样一个事实，学生越有能力，解概括数学材料的测验题的分数与解系列 XII 的测验题的分数之间的相关就越小。我们下一个任务是要核实这个假定：组织一大批受试者参加所有 8 种有关概括的测验，并根据霍尔津格的双因素模型使之因素化(参见捷普洛夫，410)。

第五，杜勃洛维娜的实验(122, 123)，在支持我们关于数学能力特殊性的假定，尤其是概括数学材料的能力方面，是一个重要的论据。杜勃洛维娜特别为小学生设计了若干系列的概括非数学材

表31 数学和非数学材料的概括水平

系列	题目类型	概括水平				
		1（低）	2	3	4	5（高）
最有数学能力的学生 (VC)						
数学的	A					100.0
	B					100.0
	C					100.0
	D					100.0
非数学的	a				37.5	62.5
	b			25.0	62.5	12.5
	c			25.0	62.5	12.5
	d				75.0	25.0
有数学能力的学生 (C)						
数学的	A				38.0	62.0
	B				42.0	58.0
	C				46.0	54.0
	D				39.0	61.0
非数学的	a				23.0	77.0
	b				46.0	54.0
	c				46.0	54.0
	d				38.0	62.0
没有数学能力的学生 (I)						
数学的	A	83.0	17.0			
	B	83.0	17.0			
	C	100.0				
	D	100.0				
非数学的	a	58.3	16.7	25.0		
	b	42.0	8.0	42.0	8.0	
	c	42.0	12.5	33.0	12.5	
	d	50.0	17.0	33.0		

数据来源：杜勃洛维娜(122)。

料的题目(俄语、文学、非学术性材料)。由于没有充分的理由使人相信,概括数学和非数学材料的系列会给小学生带来同样的困难,所以基本的分析以可教性为线索,弄清学生在发展概括数学和非数学材料的能力方面的进展情况。

杜勃洛维娜的表中(122),说明了解概括数学和非数学材料的题目的简要结果。表中的数据是用占每个能力组中学生总数的百分比给出的(见表31)。

如果我们把截然不同的两组(VO和I)学生概括数学和非数学材料的结果加以比较,我们会发现所有VO组的儿童概括数学材料的水平是5级,面概括非数学材料则有时降至3级水平。I组儿童概括数学材料的水平是最低的1级,但是他们概括非数学材料却可升至4级水平。

如果在多数的小学生中概括能力表现为一般能力(能力中等的学生表内没有说明),那么在这个年龄的(三、四年级)数学上很有能力的学生,就已经显出,数学方面的概括明显优于其他方面的概括(即使其他方面发展得很好时也是如此)。这些差异从三年级初到四年级末有明显的增加。有数学能力的小学生,概括数学对象比起概括非数学材料来,进步快得多,也更容易教。

这就使杜勃洛维娜作出如下的结论,就是概括的能力,即使在低年级,也能表现为一种特殊能力去概括数学的各种对象、关系和运算,虽然我们通常看到的似乎只是非常一般的心理品质的表现。

以上种种使我们形成了关于数学能力特殊性的主张,即:一个学生的心理活动的某些特性可以只是他的数学活动的特性——只能在用数和字母符号表示的空间和数量关系方面出现,不是他的其他形式活动的特性,不与其他领域内相应的表现有关。于是,在一些情况下,本质上是一般的心理能力(例如概括能力)能作为特殊能力(概括数学对象、关系和运算的能力)出现。看来这里有种种理由来谈到特殊的、专门的能力,而不是在数学活动上以唯一形

式折射出来的一般能力。谁也不会否认，确有一种特殊的音乐记忆力，理由是，它最终是一般记忆力的一种表现。

数学世界(以数和字母符号表示的数量和空间关系的世界)是非常特殊和奇异的。数学家就是与那些空间和数量关系的符号名称打交道，用它们来思考问题，把它们结合起来，以及用它们来运算。在这个与众不同的数学世界内，在相当特殊的活动过程中，一般能力发生了变化，以致在保持一般本质的同时，以一种特殊的能力表现出来。就这一意义说，一般能力既是一般的，又是特殊的，这个辩证的统一，使人们能弥补心理文献中存在的把一般能力和特殊能力过分并列的缺陷，这一缺陷已被 N. S. 列伊捷斯(253，第6~7页)等人所指出。当然，一般能力的特殊表现的存在，绝不排除同样的一般能力有其他表现的可能性(如同一个人在数学上有能力并不排除他在其他方面也有能力)。

关于数学能力本质的某些见解

我们在数学能力是先天的还是习得的问题上的见解，以及关于素质的作用的见解，部分地已在本书第一部分的有关章节中论述了。我们提请读者注意，我们对这个问题的主张是，数学能力不是先天的，而是一生中在某种素质基础上形成的习得的特性。素质的作用根据所涉及的是何种能力面有所不同，在普通的数学能力的发展中，这种作用是最小的，但是对数学研究者的杰出的天赋来说，这种作用就特别大了。

我们研究的材料——对大量文献的分析以及对儿童期和成人期数学天赋特别高的事例的分析(后者是根据传记材料)，为我们提出数学天赋的本质问题提供了下面一些特别有用的事实：(1)经常(但并非必然)很早就形成数学能力，而且常常是在不利的条件下形成的(比如说，遭到父母的明显反对，因为他们顾虑孩子的能

力表现得太早、太突出了),在开始时缺乏系统的和有目的的指导;(2)对数学研究有浓厚的兴趣和爱好,而且也常常出现在早期;(3)有高度的(常常是有选择性的)从事数学工作的潜能,这与在紧张的数学课上疲劳程度相对较低有关;(4)一种数学气质,即透过数学关系的棱镜来感知许多现象的特殊的倾向——在数学范畴的水平上觉察这些现象的倾向,这是有数学能力的人的一种特征。

上述内容,使我们对特殊的(我们强调这点!)数学天赋事例中的脑的先天功能特性的作用,提出这样一种假设:有些人的大脑是独特地倾向于(协调于)把空间关系、数量关系以及符号从外界刺激中分离出来的,并正是最适宜于在这类刺激中进行工作。在对具有数学特性的刺激作出反应时,联结是相对迅速而容易地形成了,付出的努力较小,精力的消耗也少。由此类推,数学上的无能(同样要提醒,这是极端的事例)是由于大脑很难分离出数学的概括的关系、函数依赖关系、抽象的数与符号之类的刺激,而且难以用它们来进行运算。换句话说,有些人在脑的结构和机能特性上具有天生的特点,这些特点特别有利于(或很不利于)数学能力的发展。

"任何人都能成为数学家,还是数学家必须是天生的?"这是一个严肃的问题,我们想作出如下的假设性的回答:"任何人都能成为一名普通的数学家,但是杰出的、天才的数学家一定是天生的。"然而,这不是我们的创见,很多著名学者也是这样说的。我们已经引证过柯尔莫戈罗夫的话:"在数学领域内……天才、天赋……并不是天生地赋予每一个人的。" I. E. 塔姆院士同样提到:"创造新事物……只是有特别天赋的人才是力所能及的"(即具有高水平的科学创造力的人——原作者注)①。

上面所说的迄今只是一种假设。我们认为,要证实我们的设想,可以沿着以下的基本方向进行研究,甚至积累生理学的事实来弄清问题:

① "寻找天才",《消息报》,1962年1月3日。

1．进一步发展捷普洛夫所提出的论点，其大意是，除了作为整个神经系统特征的一般类型特性外，还有更特殊的类型特性，它们是大脑皮层、大脑不同系统和不同分析器等个别部分的功能特征，这些特殊的类型特性可以归结成作为特殊能力基础的各种素质(250，第87页；407，第74～75页)。正如我们已经假定的那样，我们可以大体上说，一个人的神经过程(尤其是力量)的一种特性是和他的某种活动的本性一致的。以上我们企图说明，数学上特别有天赋的儿童和发展成熟的数学家的神经过程力量的基本特征(即心理的持久力、工作潜能、高度的抗疲劳能力、长时间保持紧张的能力和集中注意的能力，等等)可能只与他们的数学活动有关，而不是他们其他活动的特征。这是指，神经过程力量的特征，在数学活动中以一种方式表现出来，而在其他的活动中表现为其他的方式，或一般地说，不同的特征是依赖于活动的性质的。

2．发展对大脑皮层各部分功能的特殊化的研究。鲁利亚成功地精心阐述了他的论点："皮层的不同部分……具有它们严格的特殊化的功能"(263，第116页)。在他的1963年出版的«人脑与心理过程»著作中，以及在最近的各种论文中(263，264)，都引证了令人感兴趣的资料，这些资料跟所讨论的问题有关。例如，鲁利亚在他的一篇文章("脑和心理")中写道："大脑左半球皮层的顶骨-枕骨区受到影响时，几何关系的运算，心算会受到干扰"(263，第116页)。他在另一本著作中解释道，"在顶骨-枕骨区有用于视觉-空间的分析和综合的皮层器官"(265，第51页)。

在这个设想方面作出巨大贡献的是A．A．根金的研究，他于1960年夏季在列宁格勒举行的关于能力问题的会议上，作了题为"研究数学上无能的一种心理神经学方法"的专题报告(65)。根金的电生理学研究指出，"没有数学能力的学生的数学符号运算"，在皮层视觉区引起的反应较其下顶骨区要强，而"根据神经生理学的概念，正是下顶骨区的反应对于符号的运算才是适当的"(85，第43～

44 页)。根金还指出，对于一个正在正常学习数学的学生来说，在同样的条件下，首先观察到的是下顶叶的反应，这便使他有条件提出这样一种假设：如果在数学上确是无能，那么可以看到大脑皮层的下顶骨区以及它和大脑其他部位相毗连地方的功能的成熟水平是低的。

3．第三个方向，只是泛泛而谈，但也许有一定的意义。S. I. 夏皮罗和 L. I. 马曼斯基在"论信息论应用于人的能力的研究"一文中，提出了如下的问题：对年龄相同、所受训练也大致相同的人，有着一定的表示提取、加工和保存某类信息的通道容积特征的平均量。在这方面具有明显的个别差异，这就是能力上的差异(436，第 76 页)。

未来研究的一项重要任务就是阐明数学能力的生理学性质。现代心理学和生理学的水平，是完全有条件提出关于人的某种特定能力的生理性质和生理机制这样的问题的。

参考文献

英译本编者注　翻译和编辑这份广泛的参考文献书目时，在忠实于原著和方便英语读者的使用之间，我们采取了一些折衷的办法。条目尽可能采用美国心理学会通行的参考文献的格式，主要的例外是删去了杂志文章的页码。各种杂志名称沿用原来语种的文字，俄文的书名和文章篇名则译成了英文。书目中一些英美版参考文献被编入俄译书目栏，但正文中所引用的文字全部取自英文版。全部书目按作者姓名的西里尔字母顺序排列。

我们把那些有英译本的苏联文献编在苏联著作的书目中。一些苏联著作的英文翻译可以在下面这些集子里找到：

J. 基尔帕特里克和 I. 维斯佐普(主编)：《苏联关于数学教学的心理学研究》(Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics)，斯坦福，加州，中小学数学研究组，1969～1972，六卷本(引文简用《苏联研究》)。

N. 奥康诺(主编)：《近代苏联心理学》(Recent Soviet psychology)，纽约：利弗莱特，1961。

B. 西蒙(主编)：《苏联心理学》(Psychology in the Soviet Union)，斯坦福，加州，斯坦福大学出版社，1957。

B. 西蒙和 J. 西蒙(主编)：《苏联教育心理学》(Educational psychology in the USSR)，斯坦福，加州，斯坦福大学出版社，1963。

另外一些著作的英译，特别是引自《心理学问题》(Voprosy Psikhologii)或《苏维埃教育学》(Sovetskaya Pedagogika)杂志的文章，可能出现在《Soviet Psychology》或《Soviet Education》杂志上，但这些翻译在目录中没有指出。

下面是书目中所采用的缩写：

APN　俄罗斯联邦教育科学院

LGU　国立列宁格勒大学

LGPI　国立列宁格勒教育研究所

MGU　国立莫斯科大学

MGPI　国立莫斯科教育研究所

GNIIP　国立教育科学研究所

GIP　国立心理研究所

中译本译者说明　参考文献第一部分的标题，英译本是 Communist Party Literature，中译为“马列主义经典著作及苏联共产党文件”，并将这部分书目尽可能改为中译本。

马列主义经典著作及苏联共产党文件

1. 马克思，《资本论》(第一卷)，北京，人民出版社，1975 年。
2. 马克思和恩格斯，《早期著作选》(俄文版)，莫斯科，国家政治出版社 (Gospolitizdat)，1956 年。
3. 马克思和恩格斯，“德意志意识形态”，《马克思恩格斯全集》(第 3 卷)，北京，人民出版社，1960 年。
4. 恩格斯，《反杜林论》，北京，人民出版社，1970 年。
5. 列宁，“又一次消灭社会主义”，《列宁全集》(第 20 卷)，北京，人民出版社，1958 年，第 181～202 页。
6. 列宁，“自由派教授论平等”，《列宁全集》(第 20 卷)，北京，人民出版社，1958 年，第 137～140 页。
7. 列宁，“书评”，《列宁全集》(第 20 卷)，北京，人民出版社，1958 年，第 254～257 页。
8. 列宁，“国家与革命”，《列宁全集》(第 25 卷)，北京，人民出版社，1958 年，第 371～478 页。
9. 列宁，“怎样组织竞赛？”，《列宁全集》(第26卷)，北京，人民出版社，1959 年，第 378～389 页。
10. 列宁，“苏维埃政权的当前任务”，《列宁全集》(第 27 卷)，北京，人民出版社，1958 年，第 216～255 页。
11. 列宁，“在一次代表大会上的演说”，俄文版《列宁全集》(第 37 卷)。
12. 列宁，“莫斯科征收党员周的总结和我们的任务”，《列宁全集》(第 30 卷)，北京，人民出版社，1957 年，第 53～57 页。
13. “苏联共产党纲领”，《苏联共产党第二十二次代表大会主要文件》，北京，人民出版社，1961 年，第 163～280 页。

关于能力的苏联著作

14. Agaev, Sh. S. The development of geometric concepts in schoolchildren. In

Fourth Joint Scientific Conference of Physiologists of the Transcaucasian Pedagogical Institutes: Theses of reports. Erevan, 1957.

15. Agranovskii, A. Letters from the University of Kazan. *Izvestiya*, May-June 1960.
16. Aidarova, L. On the capable and the "incapable." *Sem'ya i shkola*, 1964, No. 1.
17. Aleksandrov, A. Educators of talent. *Izvestiya*, 16 May 1963, No. 116.
18. Aleksandrov, V. A. Teaching the elements of algebra in the six grades of middle school and the development of mathematical thought in algebra lessons. Candidate's dissertation, Moscow, 1956.
19. Anan'ev, B. G. On interrelationships in the development of abilities and character. In *Reports at the Conference on Questions in the Psychology of Personality.* Moscow: APN Press, 1956.
20. ——. On the correlation between abilities and giftedness. In V. N. Myasishchev (Ed.), *Problems of abilities.* Moscow: APN Press, 1962.
21. ——. The formation of giftedness. In V. N. Myasishchev (Ed.), *Inclinations and abilities.* Leningrad: LGU Press, 1962.
22. Andreevskii, N. V. Methods, forms, and content of the work of mathematics circles in elementary mathematics. Candidate's dissertation, Moscow, 1950.
23. Andronov, I. K. L. N. Tolstoi's activity in the area of mathematics education. *Matematika v Shkole*, 1960, No. 6.
24. Andronov, I. K., & Bradis, V. M. *Arithmetic* (2d ed.). Moscow: Uchpedgiz, 1962.
25. Anokhin, P. K. The acceptor of an operation as the afferent apparatus for the rapid spread of excitations in the conditioned reflex. In *Theses of reports at the First Congress of the Society of Psychologists* (Vol. 3). Moscow, 1959.
26. ——. New data on the characteristics of the afferent apparatus of the conditioned reflex. In *Materials of the Conference on Psychology.* Moscow: APN Press, 1957.
27. ——. Characteristics of the afferent apparatus of the conditioned reflex and their value for psychology. *Voprosy Psikhologii*, 1955, No. 6. (English translation in *Recent Soviet psychology*, pp. 75–103).
28. ——. Theory of a functional system as a precondition for the construction of physiological cybernetics. In *Biological aspects of cybernetics.* Moscow: APN Press, 1962.
29. ——. Physiology and cybernetics. In *Philosophical questions of cybernetics.* Moscow: Socioeconomic Literature Press, 1961.
30. Antonova, G. P. Individual characteristics of the mental activity of primary schoolchildren. *Voprosy Psikhologii*, 1955, No. 6.

30a. ——. On the correlation between individual differences in pupils' mental

activity and characteristics of their higher nervous activity. *Voprosy Psikhologii*, 1966, No. 1.

31. Aristova, N. P. Pupils' independent work in arithmetic lessons in the fifth grade. In *To prepare for life and work*. Moscow: APN Press, 1963.
32. Artemov, V. A. A course of lectures in psychology. Chapter 34 of *Abilities and giftedness* (2d ed.). Khar'kov: Khar'kov University Press, 1958.
33. Asmus, V. F. *The problem of intuition in philosophy and mathematics*. Moscow: Sotsekgiz, 1963.
34. Afonina, S. I. Out-of-class work in mathematics in the upper grades of middle school. Candidate's dissertation, Tashkent, 1952. (Synopsis)
35. Balk, M. B. *The organization and content of out-of-class lessons in mathematics*. Moscow: Uchpedgiz, 1956.
36. Basyrova, E. Sh. Individual psychological characteristics of the mastery of geometric concepts. *Sovetskaya Pedagogika*, 1962, No. 12.
37. ——. Individual differences in the formation of mental operations depending on the correlation of the signal systems. *Voprosy Psikhologii*, 1965, No. 4.
38. Belyi, B. I. Towards the question of heuristic and lecture methods of teaching mathematics. *Matematika v Shkole*, 1959, No. 6.
39. Bernstein, M. S. The instruction and upbringing of children in the USA. *Sovetskaya Pedagogika*, 1961, No. 6.
40. ——. The psychology of scientific creativity. *Voprosy Psikhologii*, 1965, No. 3.
41. Bitov, O. From search — to discovery. *Uchitel' skaya Gazeta*, 21 July 1962.
42. Blonskii, P. P. *Selected pedagogical works*. Moscow: APN Press, 1961.
43. Bogoyavlenskii, D. N. Psychological preconditions of developing instruction. In *Theses of reports at the Second Congress of the Society of Psychologists* (Vol. 5). Moscow: APN Press, 1963.
44. Bogoyavlenskii, D. N., & Menchinskaya, N. A. *Psychology of the mastery of knowledge in school*. Moscow: APN Press, 1959. (English translation of Chapter 4 in *Educational psychology in the USSR*, pp. 50–67).
45. Bogoyavlenskii, D. N. The formation of modes of mental work for pupils as a way to develop thinking and to activate learning. *Voprosy Psikhologii*, 1962, No. 4.
46. Bodalev, A. A. On the adolescent's school abilities and their manifestations. In V. N. Myasishchev (Ed.), *Problems of abilities*. Moscow, APN Press, 1962.
47. ——. On the correlation between the adolescent's need for activity and his ability in it. In *Theses of reports at the First Congress of the Society of Psychologists* (Vol. 3). Moscow, 1959.
48. ——. On the adolescent's abilities for generalization and their manifestations.

In V. N. Myasishchev (Ed.), *Inclinations and abilities.* Leningrad: LGU Press, 1962.

49. ——. An attempt to study the adolescent's "school abilities" in relation to his interests. *Abilities and needs. Uchenye Zapiski LGU,* 1960, No. 287.
50. Boiko, E. I. Towards a statement of the problem of skills and habits in modern psychology. *Sovetskaya Pedagogika;* 1955, No. 1.
51. Bongard, M. Shaping the learning process. *Nauka i Zhizn',* 1965, No. 6.
52. Borisova, M. N. An investigation of the phenomenon of relative predominance of the first and second signal systems in conditions of visual recall. In B. M. Teplov (Ed.), *Typological characteristics of man's higher nervous activity* (Vol. 1). Moscow: APN Press, 1956.
53. ——. Methods of determining the interrelation of the first and second signal systems in conditions of visual recall. In B. M. Teplov (Ed.), *Typological characteristics of man's higher nervous activity* (Vol. 1). Moscow: APN Press, 1956.
54. Botsmanova, M. E. On the role of graphic analysis in solving arithmetic problems. *Doklady APN,* 1960, No. 6. (English translation in *Soviet studies, 6,* 119–23.)
55. ——. Psychological questions in the use of graphic schemes by pupils in primary grades while solving arithmetic problems. In *The application of knowledge in pupils' school practice.* Moscow: APN Press, 1961.
56. Bochkovskaya, O. T. On mistakes in pupils' independent solution of arithmetic problems and the reasons they arose. *Doklady APN,* 1959, No. 2.
57. Bradis, V. M., Minkovskii, V. L., & Kharcheva, A. K. *Mistakes in mathematical reasoning.* Moscow: Uchpedgiz, 1959.
58. Breiterman, M. D. The development of pupils' thinking in problem-solving. *Matematika v Shkole,* 1952, No. 3.
59. ——. An investigation of the direction of the mental process. Candidate's dissertation, Moscow, 1964.
60. ——. The generalized intention in problem-solving. Communication 1. The mental process as a realization of a generalized intention. *Doklady APN,* 1960, No. 5.
61. ——. The generalized intention in problem-solving. Communication 2. *Doklady APN,* 1961, No. 2.
62. ——. On the determination of the mental process. *Sovetskaya Pedagogika,* 1965, No. 10.
63. Budarnyi, A. A. Overcoming poor progress. *Narodnoe Obrazovanie,* 1963, No. 10 (Supplement).

64. ——. Ways and methods of foreseeing and overcoming poor progress and the repetition of grades. Candidate's dissertation, Moscow, 1965. (Synopsis)
65. Bykova, N. I. A psychological-pedagogical description of a third grader in the process of arithmetic instruction. In N. A. Menchinskaya & V. I. Zykova (Eds.), *Ways of increasing success in mathematics*. Moscow: APN Press, 1955.
66. Vaganov, Sh. I. In close cooperation. In *For lasting knowledge in mathematics*. Kazan': Tatizdat, 1965.
67. Vedenov, A. V. On the formation of pupils' abilities for learning. *Nachal'naya Shkola*, 1953, No. 6.
68. Vilenkin, N. Ya. On the scientific content of out-of-class work in mathematics. *Matematika v Shkole*, 1965, No. 6.
69. Vinogradova, A. D. The understanding and mastery of functional dependencies in mathematics by pupils in the fourth to sixth grades. *Uchenye Zapiski LGU imeni Gertsena*, 1954, *96*.
70. Vladimirskii, G. A. An experimental verification of a method and system of exercises for developing spatial imagination. *Izvestiya APN*, 1949, *21*. (English translation in *Soviet studies*, *5*, 57–117.)
71. Vlasova, T. N. Towards the question of the psychological-pedagogical preconditions for implementing an individual approach as a means of activating thinking. In *Questions in the activation of pupils' thinking and creativity: Theses of reports from the Lenin MGPI*. Moscow: Lenin MGPI Press, 1964.
72. Questions in the formation and development of pupils' spatial concepts and spatial imagination. *Works of the Institute of Teaching Methods. Izvestiya APN*, 1949, *21*.
73. Vorob'ev, G. V. The formation of geometric concepts on the basis of perceptions and concepts. Candidate's dissertation, Moscow, 1954. (Synopsis)
74. Voronets, A. M., & Polov, G. N. *Child and youth mathematicians*. Moscow, Leningrad: Gosizdat, 1928.
75. The All-Siberian Physics-Mathematics Olympiad. *Nauka i Zhizn'*, 1962, No. 3.
76. Vygotskii, L. S. *Selected psychological research*. Moscow: APN Press, 1956.
77. ——. The problem of instruction and mental development at school age. In *Selected psychological research*. Moscow: APN Press, 1956. (English translation in *Educational psychology in the USSR*, pp. 21–34.)
78. Gal'perin, P. Ya. Some interpretations of the hypothesis of mental operations. *Voprosy Psikhologii*, 1960, No. 4.
79. ——. An experimental study of the formation of mental operations. In *Reports at the Conference on Questions in Psychology*. Moscow: APN Press, 1954. (English translation in *Psychology in the Soviet Union*, pp. 213–25.)

80. ——. The development of research on the formation of mental operations. In B. G. Anan'ev & others (Eds.) *Psychological science in the USSR* (Vol. 1). Moscow: APN Press, 1959. (English translation: Washington, D. C.: U. S. Joint Publications Research Service, 1961.)

81. ——. Supervising the processes of learning. In *New research in the pedagogical sciences.* Collection 4. Moscow: Prosveshchenie, 1965.

82. Gal' perin, P. Ya., & Talyzina, N. F. The formation of elementary geometric concepts on the basis of a pupil's organized action. *Voprosy Psikhologii*, 1957, No. 1. (English translation in *Recent Soviet psychology*, pp. 247–72.)

83. Gatkevich, D. I. Characteristics of seventh graders' disclosure of essential relationships in the solution of mathematics problems. In *Questions in the activation of pupils' thinking and creativity: Theses of reports from the Lenin MGPI.* Moscow: Lenin MGPI Press, 1964.

84. Gel'fand, M. B., & Pavlovich, V. S. *Out-of-class work in mathematics in the eight-year school.* Moscow: Prosveshchenie, 1965.

85. Genkin, A. A. A psychoneurological approach to the study of incapacity in mathematics. In *Conference on the Problem of Abilities: Theses of reports.* Leningrad: LGU Press, 1960.

86. Germanovich, P. Yu. *A collection of mathematics problems on keenness of wit.* Moscow: Uchpedgiz, 1960.

87. Gibsh, I. A. Pupil activity as a necessary condition for the teacher's work on raising the quality of instruction. *Matematika v Shkole*, 1959, No. 6.

88. ——. Principles, forms, and methods of teaching mathematics. *Izvestiya APN*, 1958, 92.

89. Gibsh, I. A., Semuchin, A. D., & Fetisov, A. I. *The development of pupils' logical thinking in the process of teaching mathematics in the middle school* (2d ed.). Moscow: Uchpedgiz, 1958.

90. Ginzburg, R. L. Towards a typology of pupil mastery of school material. *Voprosy Psikhologii*, 1956, No. 6.

91. Glushkov, V. Electronic computers and the future of mathematics. *Nauka i Zhizn'*, 1956, No. 6.

92. Gnedenko, B. V. On the cultivation of a mathematics teacher. *Matematika v Shkole*, 1964, No. 6.

93. ——. On perspectives in mathematics education. *Matematika v Shkole*, 1965, No. 6.

94. ——. The role of mathematics in the development of technology and industry. *Matematika v Shkole*, 1962, No. 1.

95. Govorkova, A. F. Experimental instruction in some intellectual skills. *Voprosy*

Psikhologii, 1962, No. 2.

96. Gonobolin, F. N. On pupils' understanding of geometric proofs. *Izvestiya APN*, 1954, 54.
97. ——. On the creative work of a Moscow teacher. Moscow Municipal Advanced Teacher Training Institute, 1957.
98. Goncharov, V. L. Mathematics as an academic subject. *Izvestiya APN*, 1958, 92.
99. Grudenov, Ya. I. One of the main causes of sixth graders' poor progress in geometry. *Doklady APN*, 1962, No. 5.
100. ——. On the psychological bases for constructing a system of exercises in mathematics and methods of teaching geometry. Candidate's dissertation, Moscow, 1965.
101. ——. Pupils' independent work with a textbook in executing mathematical exercises. In *New research in the pedagogical sciences*. Collection 4. Moscow: Prosveshchenie, 1965.
102. Gruzenberg, S. O. *Genius and creativity: Foundations of the theory and psychology of creativity*. Leningrad: P. P. Soikina Press, 1924.
103. Guznyaev, V. F. Ways of increasing the effectiveness of teaching the solution of textual algebra problems. In *Questions in the reconstruction of mathematics instruction in school*. Moscow: APN Press, 1963.
104. Gurova, L. L. Characteristics of the solution of arithmetic problems by unsuccessful pupils in the fifth and sixth grades. Candidate's dissertation, Moscow, 1953. (Synopsis)
105. ——. Pupils' awareness of their own mental operations in solving an arithmetic problem. *Doklady APN*, 1959, No. 1. (English translation in *Soviet studies*, 3, 97–102.)
106. ——. A creative approach to the solution of textbook problems, and the problem of algorithmization. In *Questions in the activation of pupils' thinking and creativity: Theses of reports from the Lenin MGPI*. Moscow, 1964.
107. Gur'yanov, E. V., Menchinskaya, N. A., & Shevarev, P. A. The Eighteenth International Congress of Applied Psychology. *Voprosy Psikhologii*, 1958, No. 4.
108. Gusarskaya, G. Developing the abilities of every pupil. *Narodnoe Obrazovanie*, 1962, No. 2.
109. Guseva, V. A. The development of pupils' independent thinking in mathematics lessons. In B. P. Esipov (Ed.), *Pupils' mental activity in instruction*. Moscow: APN Press, 1960.
110. Davydov, V. V. An experimental introduction of elements of algebra in

elementary school. *Sovetskaya Pedagogika*, 1962, No. 8.

111. Long live mathematics! *Nedelya*, 12–18 January 1964, No. 3.

112. Danilova, E. F. *How to help pupils find a way to solve geometric problems* (2d ed.). Moscow: Uchpedgiz, 1961.

113. Depman, I. Ya. *Tales about mathematics*. Leningrad, 1954.

114. Dobiaev, L. P. Mental processes in the composition of equations. *Izvestiya APN*, 1957, 80 (English translation in *Soviet studies*, 3, 103–83.)

115. Dobrolyubov, N. A. Pupils with slow comprehension. In N. G. Chernyshevskii & N. A. Dobrolyubov (Eds.), *Selected pedagogical views*. Moscow, Leningrad: APN Press, 1949.

116. Dobromyslov, B. K. Developing thinking in mathematics lessons. In *Works of the First Scientific-Pedagogical Conference of Teachers in the City of Leningrad*. Leningrad: Lengorono, 1940.

117. Dobrynin, N. F. Activating thinking and creativity in the light of the principle of significance. In *Questions in the activation of pupils' thinking and creativity: Theses of reports from the Lenin MGPI*. Moscow: Lenin MGPI Press, 1964.

118. ——. The problem of activity of the personality and the principle of social significance in psychology. In *Reports at the Conference on Questions in the Psychology of Personality*. Moscow: APN Press, 1956.

119. ——. The problem of significance in psychology. In *Materials of the Conference on Psychology*. Moscow: APN Press, 1957.

120. ——. The problem of pupils' mastery of the significance of school material. *Uchenye Zapiski MGPI imeni Potemkina*, 1958, 19 (4).

121. Dobrynina, M. F. Mental processes in the composition of equations. In *Problem-solving in the middle school*. Moscow: APN Press, 1952.

122. Dubrovina, I. V. An analysis of the components of mathematical abilities at primary school age. Candidate's dissertation, Institute of Psychology, APN. (Manuscript)

123. ——. Individual differences in the capacity to generalize mathematical and nonmathematical material in primary school age. *Voprosy Psikhologii*, 1966, No. 5.

124. Dyrchenko, I. I. The development of pupils' mathematical abilities in extra-curricular assignments. Candidate's dissertation, Moscow, 1963.

125. Esenin-Vol'pin, A. S. On the axiomatic method. *Voprosy Filosofii*, 1959, No. 7.

126. Zhorikova, M. A. Individual differences shown by pupils from five grades in solving arithmetic problems. *Second Republican Scientific Conference on*

Pedagogy and Psychology: *Theses of reports*. Tashkent, 1959.

127. Zhukov, S. F. The problem of activating pupils in investigations in the psychology of education. *Sovetskaya Pedagogika*, 1966, No. 8.
128. Zhuravlev, B. B. On mathematical vision. *Matematika v Shkole*, 1940, No. 5.
129. Zankov, L. V. (Ed.) *The development of pupils in the process of instruction*. Moscow: APN Press, 1963.
130. Zakharov, A. N. On the use of information in problems solved with the aid of trials. In *Thought and speech*. Moskow: APN Press, 1963.
131. Zosimovskii, A. V. An interesting experiment. *Sovetskaya Pedagogika*, 1965, No. 6.
132. Zykova, V. I. *Essays in the psychology of mastering elementary geometric knowledge*. Moscow: Uchpedgiz, 1955.
133. ——. The psychology of sixth-grade pupils' mastery of geometric concepts. *Izvestiya APN*, 1954, 61. (English translation in *Soviet studies*, *1*, 149-88.)
134. Zyablovskii, V. V. The school for young mathematicians. *Matematika v Shkole*, 1963, No. 1.
135. Ibragimov, R. V. Instilling pupils' interest in mathematics and developing their mathematical abilities. In *For lasting knowledge in mathematics*. Kazan': Tatizdat, 1965.
136. ——. Think, find, and be persuaded! *Uchitel' skaya Gazeta*, 8 June 1965.
137. Ivanitsyna, E. P. On the actualization of knowledge in solving geometry problems. *Doklady APN*, 1962, No. 2 (English translation in *Soviet studies*, 4, 149-53).
138. ——. Rational and nonrational methods of thinking (on material for solving geometric problems on proof). *Voprosy Psikhologii*, 1965, No. 3.
139. Ivanov, P. I. *General psychology*. (Chapter 15. Abilities.) Tashkent: Gosizdat, Middle and Upper School, 1964.
140. Ivanov-Smolenskii, A. G. *Essays in the pathophysiology of higher nervous activity*. Moscow: Medgiz, 1949.
141. Ignat'ev, E. I. An analysis of the reasons for failure in mathematics in middle school. *Matematika i Fizika v Shkole*, 1963, No. 3.
142. ——. Questions in the psychological analysis of the process of drawing. *Izvestiya APN*, 1950, 25.
143. ——. *In the realm of mother-wit* (2d ed.). Moscow, Leningrad: 1924–25. 3 vols.
144. Ignat'ev, E. I., Gromov, M. D., & Lukin, N. S. *Psychology*. (Chapter 18. Abilities.) Moscow: Prosveshchenie, 1965.
145. Indik, N. K. Mental processes in the formation of a new operation. Candidate's

dissertation, Moscow, 1951.

146. Itel'son, L. B. Mathematical methods in pedagogy and pedagogical psychology. Doctoral dissertation, Akhundov Azerbaijan Pedagogical Institute, 1965.

147. Kabanova-Meller, E. N. A psychological analysis of the application of geographic concepts and principles. *Izvestiya APN*, 1950, 28.

148. ——. *The psychology of the formation of knowledge and skills in pupils: The problem of modes of mental activity*. Moscow: APN Press, 1962.

149. ——. The role of the diagram in the application of geometric theorems. *Izvestiya APN*, 1950, 28. (English translation in *Soviet studies*, *4*, 7–49.)

150. Kalmykova, Z. I. The activization of search methods of problem-solving as one of the leading principles of developing instruction. In *On the psychological features of pupils' creative activity: Theses of reports from the Lenin MGPI*. Moscow: Lenin MGPI Press, 1962.

151. ——. The dependence of the level of mastery on pupils' activity in instruction. *Sovetskaya Pedagogika*, 1959, No. 7.

152. ——. Towards criteria of mental development. In *Theses of reports at the Second Congress of the Society of Psychologists* (Vol. 5). Moscow: APN Press, 1963.

153. ——. Some methods of diagnosing mental development in the process of instruction. In *Questions in the activation of pupils' thinking and creativity: Theses of reports from the Lenin MGPI*. Moscow: Lenin MGPI Press, 1964.

154. ——. The processes of analysis and synthesis in the solution of arithmetic problems. *Izvestiya APN*, 1954, *61*.

155. ——. The processes of analysis and synthesis in the solution of arithmetic problems. *Izvestiya APN*, 1955, *71*.

156. ——. A psychological analysis of the formation of a concept of problem type. *Izvestiya APN*, 1947, *12*. (English translation in *Soviet studies*, *6*, 7–29.)

157. ——. Psychological peculiarities of the application of knowledge to the solution of physics problems. *Doklady APN*, 1957, No. 4.

158. ——. Progress tempo as one of the indexes of individual differences in pupils. *Doklady APN*, 1959, No. 6.

159. ——. Progress tempo as one of the indexes of individual differences in pupils. *Voprosy Psikhologii*, 1961, No. 2.

160. ——. Levels of applying knowledge to the solution of physics problems. In *The psychology of applying knowledge to the solution of school problems*. Moscow: APN Press, 1958.

161. ——. The effectiveness of the application of knowledge in physics under various conditions of learning. In *The application of knowledge in pupils'*

school practice. Moscow: APN Press, 1961.

162. Kanin, E. S. Exercises as a means of conscious mastery of algebra by pupils in grades five to seven. *Matematika v Shkole*, 1965, No. 3.

163. Kachurin, M. The comprehensive development of the pupil's personality — the task of the present day. *Narodnoe Obrazovanie*, 1964, No. 10 (Supplement).

164. Kedrov, B. A logical-psychological analysis of discovery. *Nauka i Zhizn'*, 1965, No. 12.

165. Kireenko, V. I. An investigation of basic abilities for drawing. *Izvestiya APN*, 1948, *13*.

166. ——. Towards the question of experimental studies of artistic abilities. In *Reports from the Conference on Issues in the Psychology of the Personality*. Moscow: APN Press, 1956.

167. ——. On capable and incapable pupils. *Sovetskaya pedagogika*, 1964, No. 9.

168. ——. *The psychology of abilities for pictorial activity*. Moscow: APN Press, 1959.

169. Kirshgol'd, L. A. A psychological-pedagogical description of a first grader in the process of arithmetic instruction. In N. A. Menchinskaya & V. I. Zykova (Eds.), *Ways of increasing success in mathematics*. Moscow: APN Press, 1955.

170. Kovalev, A. G. Diagnosing abilities in the teacher's actual work. In V. N. Myasishchev (Ed.), *Inclinations and abilities*. Leningrad: LGU Press, 1962.

171. ——. Towards the question of the structure of ability for pictorial activity. In V. N. Myasishchev (Ed.), *Problems of abilities*. Moscow: APN Press, 1962.

172. ——. Towards a theory of literary abilities. *Abilities and needs*. *Uchenye Zapiski LGU*, 1960, No. 287.

173. ——. *The psychology of personality*. (Chapter 9. Abilities.) Leningrad: Herzen LGPI Press, 1963.

174. Kovalev, A. G., & Myasishchev, V. N. *Man's mental characteristics* (Vol. 2). *Abilities*. Leningrad: LGU Press, 1960.

175. Kovantsov, N. I. Are mathematical abilities innate? *Voprosy Psikhologii*, 1965, No. 3.

176. Kozlov, S. F. Ability and giftedness. *Sovetskaya Pedagogika*, 1940, No. 6.

176a. Kolbanovskii, V. N. The role of spatial imagination in the development of technological abilities. In N. D. Levitov & V. A. Krutetskii (Eds.), *Abilities and interests*. Moscow: APN Press, 1962.

177. Kolmogorov, A. N. Axiom (The axiomatic method in mathematics). In *Great*

Soviet encyclopedia (Vol. 1). (2d ed.)

178. ——. Mathematics. In *Great Soviet encyclopedia* (Vol. 26). (2d ed.)

179. ——. Science demands enthusiasm. *Izvestiya*, 1962, No. 44.

180. ——. *On the mathematician's profession*. (3d ed.) Moscow: MGU Press, 1959.

181. ——. The search for talent. *Izvestiya*, 1963, No. 83.

182. Kolpachev, V. P. The role of the establishment of two-way bonds in the mastery of geography material. *Voprosy Psikhologii*, 1957, No. 4.

183. Kol'tsova, M. M. *I. P. Pavlov's doctrine of the signal systems of reality*. Moscow: Znanie, 1955.

184. Kompaniits, P. A. Experience, intuition, and logic in mathematics instruction. In *Activating pupils' activity in mathematics instruction*. Moscow: APN Press, 1961.

185. Konstantinov, B. The talents around us. *Izvestiya*, 13 April 1963, No. 89.

186. Kordemskii, B. A. *Mathematical ingenuity*. Moscow: Technical-Theoretical Literature Press, 1956.

187. ——. *Essays on mathematical problems on ingenuity*. Moscow: Uchpedgiz, 1958.

188. Kosareva, N. V. A psychological-pedagogical description of a sixth grader in the process of mastering geometric knowledge. In N. A. Menchinskaya & V. I. Zykova (Eds.), *Ways of increasing success in mathematics*. Moscow: APN Press, 1955.

189. Kossov, B. B. Some principles of the formation of generalized associations. In *Questions in the activation of pupils' thinking and creativity: Theses of reports from the Lenin MGPI*. Moscow: Lenin MGPI Press, 1964.

190. ——. Characteristics of the mastery of elementary algebraic knowledge by pupils with different typological interrelations of the first and second signal systems. *Voprosy Psikhologii*, 1956, No. 4.

191. Kostyuk, G. S. Questions in the psychology of thinking. In B. G. Anan'ev & others (Eds.), *Psychological science in the USSR* (Vol. 1). Moscow: APN Press, 1959. (English translation: Washington, D. C.: U. S. Joint Publications Research Service, 1961.)

192. ——. Preface. In E. I. Mashbits & V. M. Rondarovskaya, *Foreign conceptions of programmed instruction*. Kiev: Kvirtu Press, 1964.

193. ——. (Ed.). *Psychology*. Kiev, 1957. (In Ukrainian)

194. ——. Psychological questions of the supervision of the development of abilities. In *Theses of reports at the First Congress of the Society of Psychologists* (Vol. 3). Moscow, 1959.

195. Kostyuk, G. S., Prokolienko, L. N., & Sinitsa, I. E. On ways of directing

pupils' mental development in the process of instruction. In *Theses of reports at the Second Conference of the Society of Psychologists* (Vol. 5). Moscow: APN Press, 1963.

196. Kraizman, M. L. On the development of pupils' creative thinking in geometry teaching. *Matematika v Shkole*, 1955, No. 6.

197. Kruglyak, M. I. On the problematic exposition of school material. In *Questions in the activation of pupils' thinking and creativity: Theses of reports from the Lenin MGPI*. Moscow: Lenin MGPI Press, 1964.

198. Krutetskii, V. A. An analysis of the individual structure of mathematical abilities in schoolchildren. In N. D. Levitov & V. A. Krutetskii (Eds.), *Abilities and interests*. Moscow: APN Press, 1962. (English translation in *Soviet studies, 2*, 59-104.)

199. ——. Age distinctions in the development of mathematical abilities in schoolchildren. *Sovetskaya Pedagogika*, 1965. No. 11.

200. ——. Questions of the diagnosis of mathematical abilities in schoolchildren. *Radyans'ka Shkola*, 1963, No. 1. (In Ukrainian)

201. ——. Child mathematicians. *Sem'ya i Shkola*, 1961, No. 9.

202. ——. The study and development of children's abilities in the USSR. *Pedagogika* (Prague), 1962, No. 6. (In Czech)

203. ——. Towards the question of mathematical abilities in schoolchildren. In N. D. Levitov & V. A. Krutetskii (Eds.), *Abilities and interests*. Moscow: APN Press, 1962. (English translation in *Soviet studies, 2*, 5–57.)

204. ——. Towards a typology of pupils with little ability in mathematics. In *Questions in the psychology of pupils' abilities*. Moscow: Prosveshchenie, 1964.

205. ——. Mathematical abilities. *Sem'ya i Shkola*, 1961, No. 6.

206. ——. Mathematical abilities. In *On the cultivation of abilities in the family*, Moscow: Znanie, 1962.

207. ——. Mathematical abilities. In *How to develop and cultivate abilities in children*. Moscow: APN Press, 1962. (English translation in *Soviet studies, 2*, 113–28.)

208. ——. Mathematical abilities and their development in schoolchildren. *Sovetskaya Pedagogika*, 1962, No. 9.

209. ——. Some characteristics of the thinking of pupils with little ability in mathematics. *Rumyno-Sovetskie Zapiski*, 1962, No. 2. (In Rumanian)

210. ——. On the mathematical abilities of schoolchildren. In E. I. Ignat'ev (Ed.) *Questions in the psychology of personality*. Moscow: Uchpedgiz, 1960.

211. ——. On some characteristics of the thinking of pupils with little ability in mathematics. *Voprosy Psikhologii*, 1961, No. 5.

212. ——. On the nature of pupils' relative incapacity for mathematics and some ways of overcoming it. In *Questions in the psychology of pupils' abilities*. Moscow: Prosveshchenie, 1964.

213. ——. On the psychological nature of pupils' relative incapacity for mathematics. In *Theses of reports at the Second Congress of the Society of Psychologists* (Vol. 2). Moscow: APN Press, 1963.

214. ——. An experimental analysis of the structure of mathematical abilities. In *Conference on the Problem of Abilities: Theses of reports*. Leningrad: LGU Press, 1960.

215. ——. An experimental study of schoolchildren's mathematical abilities. *Voprosy Psikhologii*, 1959, No. 1. (In Rumanian)

216. ——. An experimental study of schoolchildren's abilities to master mathematics. *Voprosy Psikhologii*, 1959, No. 1.

217. ——. An experimental psychological analysis of schoolchildren's mathematical abilities. In V. N. Myasishchev (Ed.), *Problems of abilities*. Moscow: APN Press, 1962. (English translation in *Soviet studies*, 2, 105-11.)

218. Krutetskii, V. A., & Lukin, N. S. Essays in the psychology of the older pupil. In *Some characteristics of the school activity of older pupils*. Moscow: Uchpedgiz, 1963.

219. ——. Abilities of the adolescent. In *The psychology of the adolescent*. (2d ed.) Moscow: Prosveshchenie, 1965.

220. Krutetsky, V. A. A study of mathematical abilities. Seventeenth International Congress of Psychology. Washington, D. C., 20-26 August 1963.

221. ——. A study of structure, ways of development and diagnosis of mathematical abilities. Proceedings of the Seventeenth International Congress of Psychology. *Acta Psychologica*, 1964, 23. (In English)

222. Krutetski, V. A. Some characteristics of the thinking of pupils with little capacity for mathematics. In B. Simon & J. Simon (Eds.), *Educational psychology in the USSR*. Stanford, Calif.: Stanford University Press, 1963. (In English)

223. Krutetskii, V. A. Studies and abilities of schoolchildren in the USSR. *Annual Report of Educational Psychology in Japan*, 1963, 2.

224. Krutetsky, V. A. Study and development of schoolboys' and schoolgirls' abilities in the USSR. *Tohoku Journal of Educational Psychology*, 1963, 1 (1). (In English)

225. Krylov, N. I. The dependence of the automatization process on the structure of practiced operations. In *Questions in the study of higher neurodynamics in connection with the problems of psychology*. Moscow: APN Press, 1957.

226. Kudryavtsev, T. V. Switching from one mental operation to another (in the schoolwork of primary pupils). In *The psychology of applying knowledge to the solution of school problems*. Moscow: APN Press, 1958.

227. Kur'min, A. M. Ways of increasing pupils' activation in geometry lessons in the seventh grade. *Matematika v Shkole*, 1962, No. 5.

228. Kur'mina, N. V. Pedagogical abilities. (Chapter 9. The psychological structure of a teacher's activity and the formation of his personality.) Doctoral dissertation, Leningrad, 1964.

229. Kur'mitskaya, M. I. Basic difficulties in the solution of arithmetic problems by pupils in auxiliary schools. Candidate's dissertation, Moscow, 1954. (Synopsis)

230. Kulikov, V. N. Primary pupils' comprehension of mathematical dependency. *Voprosy Psikhologii*, 1957, No. 2.

231. ——. The understanding of functional dependencies (in material for the solution of examples and problems by fourth graders). Candidate's dissertation, Moscow, 1952. (Synopsis)

232. Lavrent'ev, M. A. Searching for talents. *Narodnoe Obrazovanie*. 1962, No. 1.

233. ——. On some mysteries of nature. *Nauka i Zhizn'*, 1965, No. 7.

234. ——. The torch of talent. *Izvestiya*, 23 March 1963, No. 71.

235. Lazurskii, A. F. (Ed.) *The natural experiment and its school application*. Petrograd, 1918.

236. ——. *The classification of personalities*. Petrograd: Gosizdat, 1921.

237. Landa, L. N. Towards a psychology of forming methods of reasoning (using material in the solution of geometry problems on proof by pupils in grades seven and eight). Candidate's dissertation, Moscow, 1955. (Synopsis)

238. ——. Some data on the development of mental abilities. *Doklady APN*, 1957, No. 3.

239. ——. Teaching pupils methods of rational thinking and the problem of algorithms. *Voprosy Psikhologii*, 1961, No. 1.

240. ——. On some deficiencies in the study of pupils' thinking. *Sovetskaya Pedagogika*, 1956, No. 11.

241. ——. On some inadequacies in the mental activity of pupils, co mplicating the independent solution of problems. *Izvestiya APN*, 1961, *115*.

242. ——. On the role of trials in the process of thinking. In *Theses of reports at the Conference on Questions in the Psychology of Cognition (20–22 May 1957)*. Moscow, 1957.

243. ——. On the formation in pupils of a general method of mental activity in problem-solving. *Voprosy Psikhologii*, 1959, No. 3.

244. ——. On the formation in seventh and eighth graders of a general method of independent proof. In *Materials of the APN Session on Questions of the School's Educative Work at Various Levels of Instruction*. Moscow: APN Press, 1958.

245. Levitov, N. D. On psychological components of technological activity. *Voprosy Psikhologii*, 1958, No. 6.

246. ——. *On the mental states of man*. Moscow: Prosveshchenie, 1964.

247. ——. The problem of compensation in psychology. In N. D. Levitov & V. A. Krutetskii (Eds.), *Abilities and interests*. Moscow: APN Press, 1962.

248. ——. The problem of the experimental study of abilities. In V. N. Myasishchev (Ed.), *Problems of abilities*. Moscow: APN Press, 1962.

249. ——. *The psychology of labor*. (Section on capacities for labor.) Moscow: Uchpedgiz, 1963.

250. Leites, N. S. Individual differences in abilities. In B. G. Anan'ev & others (Eds.), *Psychological science in the USSR*. Vol. 2. Moscow: APN Press, 1960. (English translation: Washington, D. C.: U. S. Joint Publications Research Service, 1962.)

251. ——. On age characteristics of schoolchildren. In *Typological characteristics of man's higher nervous activity*. Vol. 5. Moscow: Prosveshchenie, 1967.

252. ——. *On mental giftedness*. Moscow: APN Press, 1960.

253. ——. Giftedness and age distinctions. *Voprosy Psikhologii*, 1962, No. 5.

254. ——. An inclination for effort as a factor in giftedness. *Izvestiya APN*, 1959, *25*.

255. ——. Abilities. In A. A. Smirnov, A. N. Leont'ev, S. L. Rubinstein, & B. M. Teplov (Eds.), *Psychology*. (2d ed.) Moscow: Uchpedgiz, 1962.

256. Leont'ev, A. N. An experimental study of thinking. In *Reports at the Conference on Questions in Psychology*. Moscow: APN Press, 1954.

257. ——. On the social nature of man's mind. *Voprosy Filosofii*, 1961, No. 1.

258. ——. On the formation of abilities. *Voprosy Psikhologii*, 1960, No. 1.

259. ——. *Problems in the development of the mind*. Moscow: APN Press, 1959.

260. Leont'ev, A. N., Gal'perin, P. Ya., & El'konin, D. B. The reform of the school and the goals of psychology. *Voprosy Psikhologii*, 1959, No. 1.

261. Lin'kova, N. P. Towards the question of spatial thinking. In *Questions in the psychology of pupils' abilities*. Moscow: Prosveshchenie, 1964.

262. Likhacheva, O. Ya. The formation of basic algebraic concepts in sixth-grade pupils. In *Materials of the APN Session on Questions of the School's Educative Work at Various Levels of Instruction*. Moscow: APN Press, 1958.

263. Luriya, A. R. The brain and the mind. *Kommunist*, 1964, No. 6.

264. ——. The human brain and mental processes. In *Materials of the Conference on Philosophical Questions in the Physiology of Higher Nervous Activity and Psychology*. Moscow: APN Press, 1962.

265. ——. *Human brain and psychological processes*. Vol. I. Moscow: APN Press, 1963. (English translation: New York: Harper & Row, 1966.)

266. Lyublinskaya, A. A. On the method of diagnosing children's mental development. In *Questions in psychology: Materials of the Second Transcaucasian Conference of Psychologists*. Erevan, 1960.

267. Lyudmilov, D. S. An important means of developing logical thinking. *Matematika v Shkole*, 1963, No. 1.

268. Lysenko, N. F. Charles Darwin on the qualities of a scientist's mind. *Voprosy Psikhologii*, 1961, No. 1.

269. Lyapunov, A. A. On the foundation and style of modern mathematics. *Matematicheskoe Prosveshchenie*, 1960, 5.

270. Maergoiz, D. M. On literature in the psychology of mathematics instruction. *Voprosy Psikhologii*, 1957, No. 3.

271. Maiburova, D. Towards the question of the role of intuition in the school geometry course. In *Materials of the Third Uzbek Republican Scientific Conference on Questions in Psychology* (Vol. 2). Tashkent, 1964.

272. Malkov, N. E. Individual typological characteristics of mobility of the nerve processes in the mental activity of older pupils. In *Theses of reports at the Second Congress of the Society of Psychologists* (Vol. 5). Moscow: APN Press, 1963.

272a. ——. The manifestation of individual typological differences in nerve processes in mental abilities. *Voprosy Psikhologii*, 1966, No. 1.

273. Mal'kova, Z. Questions on the instruction of gifted children in the educational press of the USA. *Narodnoe Obrazovanie*, 1958, No. 8.

274. Manzon, B. A. The activation of pupils in mathematics lessons. *Matematika v Shkole*, 1960, No. 3.

275. ——. On increasing the effectiveness of the mathematics lesson. *Matematika v Shkole*, 1959, No. 2.

276. Markov, A. A. Mathematical logic. In *Great Soviet encyclopedia* (Vol. 25). (2d ed.)

277. Markushevich, A. I. Towards the question of the reform of the mathematics course. *Matematika v Shkole*, 1964, No. 6.

278. ——. Mathematical science and school education. *Sovetskaya Pedagogika*, 1965, No. 1.

279. Maslova, G. G. The development of spatial concepts in pupils in the eight-year

school during problem-solving in geometry. *Matematika v Shkole*, 1964, No. 3.

280. Matyushkin, A. M. The analysis and generalization of relationships. In S. L. Rubinstein (Ed.), *The thought process and principles of analysis, synthesis, and generalization*. Moscow: APN Press, 1960.

281. ——. Some problems in the psychology of thinking. In A. M. Matyushkin (Ed.), *The psychology of thinking*. Moscow: Progress, 1965.

282. ——. An investigation of psychological principles of the process of analysis. *Voprosy Psikhologii*, 1960, No. 3.

283. ——. On two ways of generalising relationships. *Doklady APN*, 1959, No. 3.

284. Mashbits, E. I. How pupils' mastery of the method of solving mathematics problems depends on the method of instruction. Candidate's dissertation, Kiev, 1965. (Synopsis)

285. ——. The formation of generalized operations as a way to prepare pupils for independent solution of geometry problems. *Izvestiya APN*, 1963, *129*.

286. Mashbits, E. I., & Bondarovskaya, V. M. *Foreign conceptions of programmed instruction*. Kiev: Kvirtu Press, 1964.

287. Medelyan, G. A. A psychological analysis of mistakes in the solution of arithmetic problems by pupils in the fifth and sixth grades. *Izvestiya APN*, 1955, *71*.

288. Mel'nikov, M. A. An experiment in differentiated instruction in the Soviet middle school. *Sovetskaya Pedagogika*, 1962, No. 9.

289. Menchinskaya, N. A. Intellectual activity in solving arithmetic problems. *Izvestiya APN*, 1946, No. 3. (English translation in *Soviet studies*, *3*, 7–51.)

290. ——. *Essays in the psychology of teaching arithmetic*. (2d ed.) Moscow: Uchpedgiz, 1950.

291. ——. *The psychology of teaching arithmetic*. Moscow: Uchpedgiz, 1955.

292. Menchinskaya, N. A., & Moro, M. I. *Questions in the methods and psychology of teaching arithmetic in the elementary grades*. Moscow: Prosveshchenie, 1965.

293. Merlin, V. S. The effect of an interesting assignment on the manifestation of mobility of the nervous processes. *Voprosy Psikhologii*, 1963, No. 3.

294. ——. *An essay in the psychology of personality*. Perm Book Publishers, 1959.

295. Mitkevich, G. G. A psychological-pedagogical description of a fourth and fifth grader in the process of arithmetic instruction. In N. A. Menchinskaya & V. I. Zykova (Eds.), *Ways of increasing success in mathematics*. Moscow: APN Press, 1955.

296. Mikhailova, K. K. Methods of activating pupils' activity in the study of mathematics. In *Questions in the reconstruction of mathematics instruction in school*. Moscow: APN Press, 1963.

297. Mikhal'kov, G. From the practice of an individual approach to mathematics instruction. *Narodnoe Obrazovanie*, 1963, No. 11.

298. Mikhal'skii, K. A. Solving complex arithmetic problems in the auxiliary school *Ievesliya APN*, 1952, *41*.

299. Molodshii, V. N. The axiomatic method. In P. V. Stratilatov (Ed.), *Questions of mathematics teaching in the middle school*. Moscow: Uchpedgiz, 1961.

300. Mordukhai-Boltovskii, D. The psychology of mathematical thinking. *Voprosy Filosofii i Psikhologii*, 1908, *4* (94).

301. Myasishchev, V. N. On the connection between inclinations and abilities. In V. N. Myasishchev (Ed.), *Inclinations and abilities*. Leningrad: LGU Press, 1962.

302. ——. The problem of abilities in Soviet psychology and the immediate goals of working it out. In *Theses of reports at the First Congress of the Society of Psychologists* (Vol. 3). Moscow, 1959.

303. ——. The problem of abilities in Soviet psychology and its immediate tasks. In V. N. Myasishchev (Ed.), *Problems of abilities*. Moscow: APN Press, 1962.

304. ——. Abilities and needs. *Abilities and needs. Uchenye Zapiski LGU*, 1960, No. 287.

305. Myasishchev, V. N., & Rybalko, E. F. A child's abilities in relation to his attitudes. In *Questions in the psychology of education and upbringing: Theses of reports*. Kiev: Press of the Ukrainian Section of the Society of Psychologists, 1961. (In Ukrainian)

306. Nagibin, F. F. *Mathematical treasure chest*. Moscow: Uchpedgiz, 1958.

307. Nasyrov, A. Using the developing influence of mathematics. *Narodnoe Obrazovanie*. 1965, No. 3.

308. Nasyrov, A. Z. Pupils' independent work on mathematics lessons in grades five to ten. Candidate's dissertaion, Moscow, 1955. (Synopsis)

309. Nebylitsyn, V. D. The modern state of factor analysis. *Voprosy Psikhologii*, 1960, No. 4.

310. ——. The factorial structure of intelligence. *Voprosy Psikhologii*, 1961, No 2.

311. Neelova, A. P. Features of analytic-synthetic activity in the independent performance of school assignments in geometry. In *On the psychological features of pupils' creative activity: Theses of reports from the Lenin MGPI*. Moscow: Lenin MGPI Press, 1962.

312. Nefed'ev, A. A. Towards the question of the organization of pupils' independent work in mathematics. *Uchenye Zapiski Irkutskogo Pedinstituta*, 1957, No. 13.

313. Nikitin, B. P. An experimental objective evaluation of the level of development of pupils' technological abilities. In *Questions in the psychology of pupils' abilities*. Moscow: Prosveshchenie, 1964.

314. Nikitin, N. I. On various methods of proving theorems. *Matematika v Shkole*, 1962, No. 6.

315. Nuikin, A. Science—Shape up! *Komsomol'skaya Pravda*, 21 October 1965.

316. Ovchinnikova, I. Abilities must be developed. *Nauka i Zhizn'*, 1964, No. 12.

317. Ol'shannikova, A. E. Indexes of tiring activity and the strength of the nervous system with respect to the process of stimulation. In *Typological characteristics of man's higher nervous activity* (Vol. 5). Moscow: Prosveshchenie, 1967.

318. Menchinskaya, N. A., & Moro, M. I. (Eds.). *Experimental work by teachers of the elementary grades of a school in memory of V. I. Lenin*. Moscow: Prosveshchenie, 1964.

319. On the condition and measures for improving mathematics teaching in the schools of the RSFSR: Order No. 57 of the Minister of Education of the RSFSR, 21 February 1962. *Matematika v Shkole*, 1962, No. 3.

320. Ostrovskii, A. I., & Kordemskii, B. A. *Geometry helps arithmetic*. Moscow: Fizmatgiz, 1960.

321. Pavlov, I. P. *Complete collected works* (Vol. 3, Book 2). (2d ed.) Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press, 1951.

322. *Pavlov's Wednesday Clinics* (Vols. 2, 3). Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press, 1954.

323. Pereverzeva, A. Searching for new methods in mathematics teaching. *Narodnoe Obrazovanie*, 1962, No. 1.

324. ——. The new in the mathematics lesson. In *The organization of a lesson in the foremost schools of Lipetsk province*. Lipetski, 1962.

325. Perel'man, Ya. I. *Living mathematics*. (4th ed.) Moscow: Technical-Theoretical Literature Press, 1955.

326. ——. *Algebra for fun*. Moscow, Leningrad: Gosizdat, 1959.

327. ——. *Arithmetic for fun*. Moscow, Leningrad: Gosizdat, 1959.

328. ——. *Geometry for fun*. (7th ed.) Moscow, Leningrad: Technical-Theoretical Literature Press, 1950.

329. Peskov, T. The spatial concepts of pupils in the middle school. *Matematika v Shkole*, 1940, No. 1.

330. ——. *Independent work in mathematics by pupils in grades five to eight*. Moscow: Uchpedgiz, 1962.

331. Petrakov, I. S. The Second All Russian Mathematical Olympiad *Matematika*

v Shkole, 1962, No. 4.

332. Pinskii, B. I. *Psychological features of the activity of mentally retarded pupils* Moscow: APN Press, 1962.

333. Platonov, K. K. Address to the Conference on Philosophical Questions of the Physiology of Higher Nervous Activity and Psychology. In *Philosophical questions of the physiology of higher nervous activity and psychology: Materials of the allunion conference*. Moscow: USSR Academy of Sciences Press, 1963.

334. Polyak, B. G. *Entertaining problems*. Moscow: Uchpedgiz, 1953.

335. Ponomarev, Ya. A. *The psychology of creative thinking*. Moscow: APN Press, 1960.

336. Ponomareva, A. V. Developing pupils' abilities in the middle school. *Sovetskaya Pedagogika*, 1963, No. 12.

336a. *Curricula for the middle school*. Moscow: Prosveshchenie, 1966.

337. Prokolienko, L. N. Some characteristics of the development of thinking in adolescents. In *Theses of reports at the Second Congress of the Society of Psychologists* (Vol. 2). Moscow: APN Press, 1963.

338. ——.Characteristics of the reasoning of pupils in the eighth to tenth grades when substantiating a method of problem-solving. In *Questions in psychology: Materials of the Second Transcaucasian Conference of Psychologists*. Erevan, 1960.

339. Protopopova, L., & Gertsik, A. The cognition of mathematics. *Uchitel' skaya Gazeta*, 16 September 1965.

340. Menchinskaya, N. A., & Zykova, V. I. (Eds.). *Ways of increasing success in mathematics*. Moscow: APN Press, 1955.

341. Pushkin, V. N. Man's heuristic activity. *Nauka i Zhizn'*, 1964, No. 10.

342. ——. *Heuristics and cybernetics*. Moscow: Znanie, 1965.

343. Rabinovich, S. Ya., & Shubert, A. M. Two cases of mathematical giftedness in children. *Psikhologiya i Deti*, 1917, Nos. 3—4.

344. Ramul', K. A. *An introduction to the methods of experimental psychology*. Tartu: University of Tartu Press, 1963.

345. Rebus, B. M. Spatial imagination as an important ability for technological activity. Candidate's dissertation, Stavropol', 1965.

346. Rep' ev, V. V. Towards the question of pupils' independent work in mathematics lessons. *Matematika v Shkole*, 1962, No. 4.

347. Rovenskii, Z., Uemov, A., & Uemova, E. *The machine and thought*. Moscow: Gospolitizdat, 1960.

348. Roitman, P. B. The connection between instruction and upbringing in mathematics lessons. *Matematika v Shkole*, 1964, No. 6.

349. Rossinskii, S. D. *Boleslav Kornelievich Mlodzeevskii (1858—1923)*. Moscow: MGU Press, 1950.
350. Rostovetskaya, L. A. On individual features of the development of pupils' independent thought in algebraic instruction. Rostov, 1965. (Manuscript)
351. Rubinstein, S. L. *Being and consciousness*. Moscow: USSR Academy of Sciences Press, 1957.
352. ——. Questions in psychological theory. *Voprosy Psikhologii*, 1955, No. 1. (English translation in *Psychology in the Soviet Union*, pp. 264—78.)
353. ——. *On thought and ways of investigating it*. Moscow: USSR Academy of Sciences Press, 1958.
354. ——. *Foundations of general psychology*. Moscow: Uchpedgiz, 1940.
355. ——. *The principles and direction of psychology*. Moscow: USSR Academy of Sciences Press, 1959.
356. ——. The problem of abilities and questions in psychological theory. *Voprosy Psikhologii*, 1960, No. 3.
357. ——. I. M. Sechenov's psychological views and Soviet psychological science. *Voprosy Psikhologii*, 1955, No. 5.
358. ——. Theoretical questions in psychology and the problem of personality. *Voprosy Psikhologii*, 1957, No. 3.
359. Rudik, P. A. *Psychology*. (Chapter 18. Abilities.) (2d ed.) Moscow: Physical Culture and Sport, 1964.
360. Samarin, Yu. A. Knowledge, needs, and skills as a dynamic basis for mental abilities. In V. N. Myasishchev (Ed.), *Problems of abilities*. Moscow: APN Press, 1962.
361. ——. Towards the question of the manifestation and correlation of abilities and interests at school age. In V. N. Myasishchev (Ed.), *Inclinations and abilities*. Leningrad: LGU Press, 1962.
362. ——. On the associative nature of mental activity. *Voprosy Psikhologii*, 1957, No. 2.
363. ——. *Essays in the psychology of mind: Characteristics of the pupil's mental activity*. Moscow: APN Press, 1962.
364. ——. Problems of the development of general and special abilities for instruction. *Abilities and needs. Uchenye Zapiski LGU*, 1960, No. 287.
365. ——. The systematic, dynamic nature of mental activity as a basis for creativity. In *Questions in the activation of pupils' thinking and creativity: Theses of reports from the Lenin MGPI*. Moscow: Lenin MGPI Press, 1964.
366. ——. The style of older pupils' mental work. *Izvestiya APN*, 1948, *17*.
367. Samodurova, Z. S. From experience teaching algebra in the sixth and seventh

grades. *Matematika v Shkole*, 1957, No. 2.

368. Esipov, B. P.(Ed.). *Pupils' independent work during lessons*. Moscow: APN Press, 1961.

368*a*. Samokhvalova, V. I. On individual differences in remembering different types of material. *Voprosy Psikhologii*, 1962, No. 4.

369. Serebrovskaya, E. K. *An experiment in out-of-class work in mathematics in the sixth and seventh grades*. Moscow: Uchpedgiz, 1954.

370. Serebryakova, R. O. An experiment in the psychological analysis of pupils' socalled "incapacity for learning." In *Conference on the Problem of Abilities: Theses of reports*. Leningrad: LGU Press, 1960.

371. Sechenov, I. M. *Elements of thought*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press, 1943.

372. Skripchenko, A. V. Characteristics of the thought of seventh-and eighth-grade pupils in composing equations. In *Questions in psychology: Materials of the Second Transcaucasian Conference of Psychologists*. Erevan, 1960.

373. ——. Psychological features of pupils' mastery of negative numbers. In *Theses of reports at the First Congress of the Society of Psychologists* (Vol. 1). Moscow: APN Press, 1959.

374. ——. Psychological characteristics of pupils' mastery of negative numbers. In *Scientific notes: Scientific Research Institute of Psychology* (Vol. 10). Kiev: Radyans' ka Shkola Press, 1959.

375. ——. The formation of generalized methods of solving arithmetic problems in younger pupils. *Voprosy Psikhologii*, 1963, No. 3.

376. ——. The formation in younger pupils of skill in solving arithmetic problems by composing equations. *Izvestiya APN*, 1963, *129*.

377. Slavina, L. S. On some characteristics of the mental work of unsuccessful pupils. Reports at the Conference on Questions in Psychology. *Sovetskaya Pedagogika*, 1954, No. 1 (English translation in *Psychology in the Soviet Union*, pp. 205—212.)

378. ——. The psychological conditions for increasing pupils' intellectual activity in schoolwork. *Izvestiya APN*, 1955, *73*.

379. Slavskaya, K. A. On the problem of "transfer." *Doklady APN*, 1957, No. 2.

380. ——. On the "transfer" of a problem-solving principle. *Doklady APN*, 1959, No. 4.

381. ——. The thought process and the use of knowledge. In S. L. Rubinstein (Ed.), *The thought process and principles of analysis, synthesis, and generalization*. Moscow: APN Press, 1960.

382. Smirnov, A. A. *The psychology of memory*. Moscow, Leningrad: APN Press, 1948.

383. ——. Thorndike's work in the psychology of mathematics and pedological distortions in the school. *Matematika i Fizika v Shkole*, 1936, No. 6.

384. ——. The development of memory. In B. G. Anan'ev & others (Eds.), *Psychological science in the USSR* (Vol. 1). Moscow: APN Press, 1959. (English translation: Washington, D. C.: U. S. Joint Publications Research Service, 1961.)

385. Sobolev, S. L. The poetry of mathematics. *Literaturnaya Gazeta*, 14 December 1961.

386. Shorokhov, E. V. (Ed.). *Contemporary psychology in capitalist countries*. Moscow: USSR Academy of Sciences Press, 1963.

387. Sokolov, A. N. The graphic contrast between a logically posited and an actual solution of a problem. *Voprosy Psikhologii*, 1961, No. 6.

388. ——. Thought processes in pupils' solutions of physics problems. *Izvestiya APN*, 1954, *54*.

389. Solov'ev, I. M. The thinking of mentally retarded pupils in solving arithmetic problems. In I. M. Solov'ev (Ed.), *Characteristics of the cognitive activity of pupils in the auxiliary school*. Moscow: APN Press, 1953.

390. ——. The thinking of pupils in the auxiliary school in solving arithmetic problems. In D. I. Azbukin (Ed.), *Educational work in special schools* (Vols. 3—4). Moscow: Uchpedgiz, 1952.

391. ——. Cognitive activity in the solution of arithmetic problems by deaf pupils and by those who can hear. In *On the mental development of deaf and normal-hearing children*. Moscow: APN Press, 1962.

392. Solov'ev, Z. A. Developing cognitive activity and independence in pupils during mathematics lessons. In *For lasting knowledge in mathematics*. *Kazan'*: Tatizdat, 1965.

393. Stepanov, A. V. Towards the question of the psychological nature of pupils' mathematical development. Candidate's dissertation, Moscow, 1952. (Synopsis)

394. ——. Towards the question of the stimuli of creative initiative and activity in connection with the problem of pupils' mathematical development. In *Questions in the activation of pupils' thinking and creativity: Theses of reports from the Lenin MGPI*. Moscow: Lenin MGPI Press, 1964.

395. Stolyar, A. A. The cultivation of pupils' logical thought in geometry lessons. Candidate's dissertation, Moscow, 1951. (Synopsis)

396. Strezikozin, V. Is differentiation necessary? *Uchitel'skaya Gazeta*, 15 January 1966.

397. Sudakov, N. I. The psychological trait of persistence in pupils in the upper grades. Candidate's dissertation, Moscow, 1950.

398. Syrkina, V. E. The development of abilities and character. *Sovetskaya Pedagogika*, 1947, No. 2.

399. Talyzina, N. F. Towards the question of the mastery of elementary geometric concepts. In *Materials for the Conference on Psychology*. Moscow: APN Press, 1957.

400. ——. An experiment in the supervised instruction of elementary geometry in school on the basis of the theory of formation of mental operations. In *Theses of reports at the Second Congress of the Society of Psychologists* (Vol. 5). Moscow: APN Press, 1963.

401. ——. Properties of deductions in solving geometry problems. *Izvestiya APN*, 1957, *80*. (English translation in *Soviet studies*, *4*, 51—101.)

402. Talyzina, N. F., & Butkin, G. A. Towards the problem of proof in the elementary geometry course. *Doklady APN*, 1960, No. 3.

403. ——. An experiment in teaching geometric proof. *Izvestiya APN*, 1964, *133*.

404. Tendryakov, V. Your son and the legacy of Komenskii. *Moskva*, 1965, No. 11.

405. Teplov, B. M. An investigation of the properties of the nervous system as a way to study individual psychological differences. In B. G. Anan' ev & others (Eds.), *Psychological science in the USSR* (Vol. 2). Moscow: APN Press, 1960. (English translation: Washington, D. C.: U. S. Joint Publications Research Service, 1962.)

406. ——. Results and perspectives of an investigation of the typological properties of man's nervous system. In *Problems of individual differences*. Moscow: APN Press, 1961.

407. Teplov, B. M., & Leites, N. S. Towards the problem of individual psychological differences. In *Reports at the Conference on Questions in the Psychology of Personality*. Moscow: APN Press, 1956.

408. Teplov, B. M. *Problems of individual differences*. Moscow: APN Press, 1961.

409. ——. The problem of giftedness. *Sovetskaya Pedagogika*, 1940, Nos. 4—5.

410. ——. Elementary methods of factor analysis. In *Typological characteristics of man's higher nervous activity* (Vol. 5). Moscow: Prosveshchenie, 1967.

411. ——. The psychology of musical abilities. In *Problems of individual differences*. Moscow: APN Press, 1961.

412. ——Abilities and giftedness. *Uchenye Zapiski GNIIP*, 1941, *2*.

413. ——Abilities and giftedness. In K. N. Kornilov, A. A. Smirnov, & B. M. Teplov (Eds.), *Psychology*. (3rd ed.) Moscow: Uchpedgiz, 1948

414. ——. Typological properties of the nervous system and their value for psychology. In *Philosophical questions in the physiology of higher nervous activity and psychology: Materials of the all-union conference*. Moscow: USSR Academy of Sciences Press, 1963.

414a. Teplov, B. M., & Nebylitsyn, V. D. A study of the basic properties of the nervous system. *Voprosy Psikhologii*, 1963, No. 5.

415. Terekhova, O. P. On the activation of pupils in the process of their mental upbringing. In *Questions in the activation of pupils' thinking and creativity: Theses of reports from the Lenin MGPI*. Moscow: Lenin MGPI Press, 1964.

416. ——. On the generalization of one of the forms of analysis. *Voprosy Psikhologii*, 1960, No. 4.

417. ——. A psychological analysis of one of the methods of activating pupils' mental activity. In *On the psychological features of pupils' creative activity: Theses of reports from the Lenin MGPI*. Moscow: Lenin MGPI Press, 1962.

418. Tokareva, V. A. An experimental investigation of the interrelation between the need for activity and ability in it. In *Materials of the Third Uzbek Republican Scientific Conference on Questions in Psychology* (Vol. 2). Tashkent, 1964.

419. *Works of the First All-Russian Conference of Mathematics Teachers* (Vol. 1). St. Petersburg, 1913.

420. Umanskii, L. I. Towards the problem of abilities in connection with types of higher nervous activity. In *Theses of reports at the Second Congress of the Society of Psychologists* (Vol. 5). Moscow: APN Press, 1963.

421. Umetskii, V. A. On the development of mathematical thinking in arithmetic lessons. *Matematika v Shkole*, 1954, No. 5.

422. Uspenskii, V. Linguistics, mathematics, and the new tradition. *Nauka i Zhizn'*, 1965, No. 10.

423. Fetisov, A. I. Out-of-class assignments in mathematics. *Izvestiya APN*, 1958, 92.

424. ——. The formation of mathematical concepts (in pupils). *Izvestiya APN*, 1958, 92.

425. ——. Elements of logic in mathematics teaching. *Izvestiya APN*, 1958, 92.

426. Khinchin, A. Ya. On the educational effect of mathematics lessons. *Matematicheskoe Prosveshchenie*, 1961, 6. (Reprinted in *Matematika v Shkole*, 1962, No. 3.)

427. ——. On so-called "problems to be done in the head" in the arithmetic course. *Matematicheskoe Prosveshchenie*, 1961, 6.

428. ——. On formalism in school mathematics teaching. *Izvestiya APN*, 1946, 4.

429. Khomushid, M. S. Basic features of methods of teaching algebra in the eight-year school. In *Questions in the reconstruction of mathematics instruction in school*. Moscow: APN Press, 1963.

430. Tsesyulevich, A. S. Our wishes. *Matematika v Shkole*, 1948, No. 2.

431. Chernov, A. P. Some results of a study of the mental experimentation of pupils in the middle school. In *Theses of reports at the First Conference of the Society of Psychologists* (Vol. 3). Moscow, 1959.

432. Chetverukhin, N. F. An experimental study of pupils' spatial concepts and spatial imagination. *Izvestiya APN*, 1949, *21*. (English translation in *Soviet studies*, *5*, 5—56.)

433. Shapiro, S. I. A study of pupils' individual characteristics in processing mathematical information. *Voprosy Psikhologii*, 1965, No. 2.

434. ——. Pupils' generalized mathematical thinking and visual supports. In *Reports at "Pedagogical Readings."* Moscow: Institute of Psychology, APN, 1965. (Manuscript)

435. ——. A psychological analysis of the structure of mathematical abilities in older school-age children. Candidate's dissertation, Kursk, 1966.

436. Shapiro, S. I., & Umanskii, L. I. On applying information theory to the study of a person's abilities. *Voprosy Psikhologii*, 1963, No. 2.

437. Shardakov, M. N. Towards the question of the development of a pupil's causal thinking. *Izvestiya APN*, 1948, *17*.

438. Shvartsburd, S. I. A scientific-practical conference on out-of-class work with pupils in mathematics (Survey). *Matematika v Shkole*, 1965, No. 6.

439. ——. On the development of pupils' interests, inclinations, and abilities in mathematics. *Matematika v Shkole*, 1964, No. 6.

440. Shevarev, P. A. Towards the question of basic types of associations. In *Theses of reports at the Second Congress of the Society of Psychologists* (Vol. 5). Moscow: APN Press, 1963.

441. ——Towards the question of the nature of algebraic skills. *Uchenye Zapiski GIP*, 1941, *2*.

442. ——. Some remarks on the problem of associations. *Izvestiya APN*, 1957, No. 80.

443. ——. Generalized associations. *Voprosy Psikhologii*, 1958, No. 1.

444. ——. *Generalized associations in pupils' school work*. Moscow: APN Press, 1959.

445. ——. An experimental psychological analysis of algebraic mistakes. *Izvestiya APN*, 1946, *3*.

446. ——. Thought processes in a pupil's school work. *Sovetskaya Pedagogika*, 1946,

No. 3.

447. Shevchenko, K. Questions in elementary mathematics promoting the development of mathematically generalized thought. *Matematika v Shkole*, 1937, No. 1.

448. Shevchuk, V. The explanation of phenomena and the problem of insight. *Voprosy Psikhologii*, 1964, No. 2.

449. Shemyakin, F. N. Some problems in the contemporary psychology of thought and of speech. In *Thought and speech*. Moscow: APN Press, 1963.

450. Shenshev, L. V. General features of thought in the processes of learning mathematics and foreign languages. *Voprosy Psikhologii*, 1960, No. 4.

451. Shekhter, M. S. The problem of simultaneous learning. Candidate's dissertation, Moscow, 1964. (Synopsis)

452. Shirokov, V. F. *A collection of arithmetic problems on understanding*. Moscow: Uchpedgiz, 1949.

453. Shor, Ya. A. On some methods in the struggle against formalism. *Matematika v Shkole*, 1948, No. 1.

454. ——. *On the solution of arithmetic problems*. Moscow: APN Press, 1951.

455. ——. The development of functional thinking on the generalization of type problems. *Matematika v Shkole*, 1950, No. 4.

456. Shoktor-Trotskii, S. I. *Methods of arithmetic: A handbook for teachers in elementary school*, 1916.

457. Shurko, M. Is a vital problem solved? *Narodnoe Obrazovanie*, 1963, No. 2.

458. Shchedrovitskii, G. P. A study of children's thought using material in solving arithmetic problems. In *The development of cognitive and volitional processes in preschool children*. Moscow: Prosvoshchenie, 1965.

459. ——. On the necessity of typological investigations in psychology and education. In *Questions in the activation of pupils' thinking and creativity: Theses of reports from the Lenin MGPI*. Moscow: Lenin MGPI Press, 1964.

460. El' konin, D. B. A psychological research study in an experimental class. *Voprosy Psikhologii*, 1960, No. 5.

461. El'konin, D. B., & Davydov, V. V. *Questions in the psychology of the school activity of younger pupils*. Moscow: APN Press, 1962.

462. Erdniev, P. M. Towards the question of activating the teaching of subjects in the physics-mathematics cycle. *Sovetskaya Pedagogika*, 1957, No. 8.

463. ——. On the role of direct and reverse bonds in mathematics instruction. *Voprosy Psikhologii*, 1962, No. 6.

464. ——. *The development of habits of self-control in mathematics instruction*. Moscow: Uchpedgiz, 1960.

465. ——. *Comparison and generalization in mathematics instruction*. Moscow: Uchpedgiz, 1960.

466. Ern, F. A. *Essays on methods in arithmetic*. Riga, 1915.

467. Efroimson, V. Man and genetics. *Literaturnaya Gazeta*, 7 August 1965, No. 93.

468. Yagunkova, V. P. Individual psychological traits of pupils capable of literary creativity. In *Questions in the psychology of pupils' abilities*. Moscow: Prosveshchenie, 1964.

469. Yakimanskaya, I. S. Pupils' perception and comprehension of a drawing and the condition of a problem while solving it. In *The application of knowledge in pupils' school practice*. Moscow: APN Press, 1961.

470. ——. Individual differences among pupils, manifested in the solution of geometric problems on proof. *Doklady APN*, 1959, No. 1. (English translation in *Soviet studies*, *4*, 119—25.)

471. ——. Levels of analysis, synthesis, and abstraction in reading a drawing among fourth to eighth-grade pupils. *Voprosy Psikhologii*, 1959, No. 1.

472. Yakobson, P. M. Technological abilities and their study by pupils. In *Questions in the psychology of pupils' abilities*. Moscow: Prosveshchenie, 1964.

473. Yarmolenko, A. V. On one attempt at constructing a theory of ability. *Uchenye Zapiski LGU*, 1959, No. 265.

474. ——. On mistakes in determining abilities. In V. N. Myasishchev (Ed.), *Inclinations and abilities*. Leningrad: LGU Press, 1962.

475. Yaroshchuk, V. L. A psychological analysis of the processes involved in solving model arithmetic problems. *Izvestiya APN*, 1957, *80*. (English translation in *Soviet studies*, *3*, 53—96.)

476. ——. The role of the awareness of type signs in solving arithmetic problems of a defnite type. *Voprosy Psikhologii*, 1959, No. 1.

外国著作的俄语译本

477. Hadamard, J. *Elementary geometry*. Translated from French. Moscow: Uchpedgiz, 1957.

478. Betz, W. The problem of correlation in psychology: On the correlation of mental abilities. Chapter 5 of *Ability in mathematics*. Translated from German. Moscow: Russkaya Knizhka Press, 1923.

479. Binet, A. *Modern ideas of children*. Translated from French. Moscow, 1910.

480. Bruner, J. S. *The process of education*. Translated from English. Moscow:

APN Press, 1962. (Originally published Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1960.)

481. Bourbaki, N. [pseud.]. The architecture of mathematics. Translated from French. *Matematicheskoe Prosveshchenie*, 1960, *5*.

482. Wiener, N. *I am a mathematician*. Translated from English. Moscow: Nauka, 1964.

483. Woodworth, R. S. *Experimental psychology*. Translated from English. Moscow: Foreign Literature Press, 1950.

484. Gattegno, C. The pedagogy of mathematics. Translated from French. In *Teaching mathematics*. Moscow: Uchpedgiz, 1960.

485. Golacz, E. A study of the conditions of generalization. Translated from Czech. *Voprosy Psikhologii*, 1962, No. 3.

486. Descartes, R. *Rules for the direction of the mind*. Translated from French. Moscow, Leningrad: Sotsekgiz, 1936.

487. Duncker, K. *The psychology of productive (creative) thinking*. (Chapter on the processes of solving mathematics problems.) Translated from German. In A. M. Matyushkin (Ed.), *The psychology of thinking*. Moscow: Progress, 1965.

488. Dewey, J. *The psychology and pedagogy of thinking*. Translated from English. Moscow: Mir, 1919.

489. Maier, N. R. F. Reasoning in humans. Translated from English. In A. M. Matyushkin (Ed.), *The psychology of thinking*. Moscow: Progress, 1965.

490. Mathematics tests (used in the schools in the USA). From the pamphlet *A Description of the College Board Achievement Tests*, published in the USA. Translated from English. *Matematika v Shkole*, 1961, No. 3.

491. Moede, W., & Piorkowski, H. *Childhood giftedness*. Translated from German. Moscow: Rabotnik Prosveschcheniya, 1925.

492. Meumann, E. Lectures in experimental pedagogy. Part 2. In *Children's individual traits*. Translated from German. Moscow: Mir, 1914—17.

493. Newell, A., Shaw, J. C., & Simon, H. A. The processes of creative thinking. Translated from English. In A. M. Matyushkin (Ed.), *The psychology of thinking*. Moscow: Progress, 1965. (Originally published in H. E. Gruber, G. Terrell, & M. Wertheimer (Eds.), *Contemporary approaches to creative thinking: A symposium held at the University of Colorado*. New York: Atherton Press, 1962; pp. 63—119.)

493a. Piaget, J. *The language and thought of the child*. Translated from French. Moscow, Leningrad: Uchpedgiz, 1932.

494. ——. Mathematical structures and operative structures of thought. Translated from French. In *Teaching mathematics*. Moscow: Uchpedgiz, 1960.

495. Polya, G. *How to solve it: A new aspect of mathematical method.* (2d ed.) Translated from English. Moscow: Uchpedgiz, 1961.
496. ——. *Mathematics and plausible reasoning,* Translated from English. Moscow: Foreign Literature Press, 1957.
497. ——. *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving.* Translated from English. *Matematika v Shkole,* 1964, No. 6.
498. Poincaré, A. *Mathematical discovery.* Translated from French. Yur'ev, 1909.
499. Simon, B. *The English school and intelligence testing.* Translated from English. Moscow: APN Press, 1958.
500. Thorndike, E. L. *Questions in the teaching of algebra.* Translated from English. Moscow: Uchpedgiz, 1934.
501. ——. *The new methods in arithmetic.* Translated from English. Moscow, Leningrad: Uchpedgiz, 1932. (Originally published Chicago and New York: Rand-McNally, 1921.)
502. ——. *Principles of teaching, based on psychology.* Translated from English. Moscow: Rabotnik Prosveshcheniya, 1929. (Originally published New York: A. G. Seiler, 1906.)
503. ——. *The psychology of arithmetic.* Translated from English. Moscow, Leningrad: Uchpedgiz, 1932. (Originally published New York: Macmillan, 1922.)
504. Huarte, J. *A study of abilities in science.* Translated from Spanish. Moscow: USSR Academy of Sciences Press, 1960.
505. Haeussermann, E. *Potential opportunities for the mental development of the normal and the anomalous child.* Translated from English. Moscow: Prosveshchenie, 1964.
506. Stern, W. *Children's and adolescents' intelligence and methods of investigating it.* Translated from German. Knigospilka Press, 1926.
507. ——. *The psychological methods of testing intelligence.* Translated from German. Petrograd: Zemlya Press, 1915.

外国著作

508. Abraham, W. A hundred gifted children. *Understanding the Child,* 1957, *26.*
509. Adkins, D. C., & Lyerly, S. B. *Factor analysis of reasoning tests.* Chapel Hill: University of North Carolina Press, 1952.
510. Adler, A. Was kann die Individualpsychologie zuer mathematischen "begabung" sagen? *Internationale Zeitschrift für Individualpsychologie,* 1933, *11.*

511. Ahmavaara, Y. On the unified factor theory of mind. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae*, 1957, Ser. B., *106*.

512. Aiken, L. R., Jr., & Dreger, R. M. The effect of attitudes on performance in mathematics. *Journal of Educational Psychology*, 1961, *52*.

513. Alexander, W. P. Intelligence, concrete and abstract. *British Journal of Psychology, Monograph Supplement*, 1935, No. 19.

514. Anastasi, A. *Differential psychology*. (3d ed.) New York: Macmillan, 1958.

515. Anderson, H. H. (Ed.). *Creativity and its cultivation*. New York: Harper, 1959.

516. Ayers, G. H. Predicting success in algebra. *School and Society*, 1934, *39*.

517. Baker, H. J. Characteristics of superior learners and the relative merits of programs of enrichment and acceleration for them. In W. S. Gray (Ed.), *Classroom techniques in improving reading*. *Supplementary Educational Monographs*, 1949, No. 69.

518. Baldwin, A. L. The role of an "ability" construct in a theory of behavior. In D. C. McClelland & others, *Talent and society*. Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1958.

519. Barakat, M. K. A factorial study of mathematical abilities. *British Journal of Psychology, Statistical Section*, 1951, *4*.

520. ——. Factors underlying the mathematical abilities of grammar school pupils at the age of 14. Thesis, University of London, 1950.

521. Barbe, W. B. Characteristics of gifted children. *Educational Administration and Supervision*, 1955, *41*.

522. Barbe, W. B., & Frierson, E. C. Teaching the gifted: A new frame of reference. *Education*, 1962, *82*.

523. Bauer, R. A. (Ed.). *Some views on Soviet psychology*. Washington, D. C.: American Psychological Association, 1962.

524. Baumgarten, F. Die Begabung und ihre Probleme. *Mensch und Arbeit*, Suppl. 15, 1963.

525. Beke, E. Über mathematische Begabung. *Internationale Zeitschrift für Individualpsychologie*, 1933, *11*.

526. Bennett, G. K., Seashore, H. G., & Wesman, A. G. *Differential aptitude tests*. New York: Psychological Corporation, 1947.

527. Bentley, J. E. *Superior children*. New York: Norton, 1937.

528. Birch, J. W., & Reynolds, M. C. The gifted. *Review of Educational Research*, 1963, *33* (1).

529. Blackwell, A. M. A comparative investigation into the factors involved in mathematical ability in boys and girls. *British Journal of Educational*

Psychology, 1940, *10*.

530. Bloom, S. W. The early identification of potential scientists. *School Science and Mathematics*, 1955, *55*.

531. Bray, D. W. *Issues in the study of talent*. New York: King's Crown Press, Columbia University, 1954.

532. Bristow, W. H., & others. Identifying gifted children. In P. A. Witty (Ed.), *The gifted child*. Boston: Heath, 1951.

533. Brown, W. An objective study of mathematical intelligence. *Biometrika*, 1910, *7*

534. Brown, W., & Thomson, G. H. *The essentials of mental measurement*. (4th ed.) Cambridge: Cambridge University Press, 1940.

535. Brown, K. E., & Johnson, P. G. *Education for the talented in mathematics and science*. U. S. Office of Education Bulletin 1952, No. 15. Washington, D. C.: Government Printing Office, 1953.

536. Bryan, J. N. Education of the gifted. *School Life*, 1962, *44*.

537. Buckingham, B. R. Mathematical ability as related to general intelligence. *School Science and Mathematics*, 1921, *21*.

538. Burks, B. S. The relative influence of nature and nurture upon mental development. *Yearbook of the National Society for the Study of Education*, 1928, *27* (Pt. 1).

539. Burnett, R. W. How good teachers teach science. *School Science and Mathematics*, 1955, *55*.

540. Burt, C. General ability and special aptitudes. *Educational Research*, 1959, *1* (2).

541. ——. *The distribution and relations of educational abilities*. London: Darling & Son, 1917.

542. ——. The inheritance of mental ability. *American Psychologist*, 1958, *13*.

543. Buswell, G. T., & John, L. Diagnostic studies in arithmetic. *Supplementary Educational Monographs*, 1926, No. 30.

544. Cairns, G. C. An analytical study of mathematical abilities. *Catholic University of America Educational Research Monographs*, 1931, *6* (3).

545. Cameron, A. E. A comparative study of the mathematical ability of boys and girls in secondary schools. *British Journal of Psychology*, 1925, *16*.

546. Canisia, M. Mathematical ability as related to reasoning and use of symbols. *Educational and Psychological Measurement*, 1962, *22*.

547. Carpenter, R. Creativity, Its nature and nurture. *Education*, 1962, *82*.

548. Carroll, H. A. *Genius in the making*. New York: McGraw-Hill, 1940.

548a. Carter, H. D. Gifted children. In C. W. Harris (Ed.), *Encyclopedia of*

educational research. (3d ed.) New York: Macmillan, 1960.

549. Cartwright, M. L. *The mathematical mind.* London: Oxford University Press, 1955.

550. Coleman, R. H. *An analysis of certain components of mathematical ability, and an attempt to predict mathematical achievement in a specific situation.* (Doctoral dissertation, Indiana University.) Ann Arbor, Mich.: University Microfilms, 1956, No. 17, 945.

551. Collar, D. J. A statistical survey of arithmetical ability. *British Journal of Psychology,* 1920, *11.*

552. Conant, J. B. Education of the academically talented. *School and Society,* 1958, *86.*

553. Courtis, S. A. Measurement of growth and efficiency in arithmetic. *Elementary School Teacher,* 1909, *10;* 1911, *11.*

554. Davies, G. R. Elements of arithmetical ability. *Journal of Educational Psychology,* 1914, *5*

555. Davis, N. Creative activities for gifted pupils. *School Review,* 1955, *63.*

556. Deschamps, C., & Mihaud, E. Figures géométriques vues par de jeunes techniciens. *Enfance,* 1951, No. 4.

557. Dickter, M. R. Predicting algebraic ability. *School Review,* 1933, *41.*

558. Dienes, Z. P. The growth of mathematical concepts in children through experience. *Educational Research,* 1959, *2.*

559. Dodd, J. Our retarded children. *University of Kansas, Bureau of Child Research, Public Information Series,* 1959, No. 2.

560. Duncan, E. R. The identification and education of the gifted in mathematics. In G. Z. F. Bereday & J. A. Lauwerys (Eds.), *The year book of education, 1961: Concepts of excellence in education.* London: Evans Brothers, 1961.

561. Duncker, K. A qualitative (experimental and theoretical) study of productive thinking (solving of comprehensible problems). *Journal of Genetic Psychology,* 1926, *33.*

562. Ebel, R. L. Must all tests be valid? *American Psychologist,* 1961, *16.*

563. Ebert, R. S. Generalization abilities in mathematics. *Journal of Educational Research,* 1946, *39.*

563*a*. Harriman, P. L. (Ed.). *Encyclopedia of psychology.* New York: Philosophical Library, 1946.

564. Fehr, H. F. Mathematics for the gifted. *Bulletin of the National Association of Secondary-School Principals,* 1954, *38.*

565. Flack, W. S. Investigation of mathematical ability in the classroom. *Forum of Education,* 1926, *4.*

566. Flescher, I. Anxiety and achievement of intellectnally gifted and creatively gifted children. *Journal of Psychology*, 1963, *8*.

567. Fliegler, L. A., & Bish, C. E. The gifted and talented. *Review of Educational Research*, 1959, *29*.

568. Fouché, A. *La pédagogie des mathématiques*. Paris: Presses Universitaires de France, 1952.

569. Fouracre, L. Psychological tests of mathematical ability. *Forum of Education*, 1926, *4*.

570. Freehill, M. F. *Gifted children: Their psychology and education*. New York: Macmillan, 1961.

571. Fruchter, B. The nature of verbal fluency. *Educational and Psychological Measurement*, 1948, *8*.

572. Gagné, R. M., & Paradise, N. E. Abilities and learning sets in knowledge acquisition. *Psychological Monographs*, 1961, *75* (14, Whole No. 518).

573. Gagné, R. M., Mayor, J. R., Garstens, H. L., & Paradise, N. E. Factors in acquiring knowledge of a mathematical task. *Psychological Monographs*, 1962, *76* (7. Whole No. 526).

574. Gallagher, J. J. *Analysis and research on the education of gifted children*. Springfield, Ill.: Office of the Superintendent of Public Instruction, 1960.

575. Garrett, H. E. *Statistics in psychology and education*. (5th ed.) New York: Longmans, Green, 1958.

576. Gattegno, C. La pédagogie des mathématiques. Chapter 6 in J. Piaget & others, *L' enseignement des mathématiques*. Paris: Delachaux et Niestlé, 1955.

577. Getzels, J. W., & Jackson, P. W. *Creativity and intelligence*. New York: Wiley, 1962.

578. ——. The highly intelligent and the highly creative adolescent. In C. W. Taylor (Ed.), *The third (1959) University of Utah research conference on the identification of creative scientific talent*. Salt Lake City: University of Utah Press, 1959.

579. ——. The meaning of "giftedness." *Education*, 1962, *82*.

580. Godfrey, M. Vitalizing problem solving. *Education*, 1962, *83*.

581. Goldberg, M. L. Recent research on the talented. *Teachers College Record*, 1958, *60*.

582. Goldberg, M. L., & Passow, A. H. The effects of ability grouping. *Education*, 1962, *83*.

583. Goodenough, F. L. *Mental testing, its history, principles, and applications*. New York: Rinehart, 1949.

584. Goodhart, B. F., &. Schmidt, S. D. Educational characteristics of superior

children. *Baltimore Bulletin of Education*, 1940, *18*.

585. Goslin, L. A. *The search for ability: Standardized testing in social perspective*. New York: Russell Sage Foundation, 1963.

586. Gottschaldt, K. Der aufbau der Begabung. *Bericht über den Kongress der deutschen Gesellschaft für Psychologie, Göttingen*, 1953, *17—18*.

587. Graesser, R. F. Note on teaching. *School Science and Mathematics*, 1955, *55*.

588. Green, R. F., Guilford, J. P., Christensen, P. R., & Comrey, A. L. A factor-analytic study of reasoning abilities. *Psychometrika*, 1953, *18*.

589. Greenberg, L. A critique of classic methods of identifying gifted children. *School Review*, 1955, *63*.

590. Grotberg, E. H. Adjustment problems of the gifted. *Education*, 1962, *82*.

591. Guiler, W. S. Forecasting achievement in elementary algebra. *Journal of Educational Research*, 1944, *38*.

592. Guilford, J. P. The structure of intellect. *Psychological Bulletin*, 1956, *53*.

593. ——. Three faces of intellect. *American Psychologist*, 1959, *14*.

594. Michael, W. B., Zimmerman, W. S., & Guilford, J. P. An investigation of two hypotheses regarding the nature of spatial-relations and visualization factors. *Educational and Psychological Measurement*, 1950, *10*.

595. Hadamard, J. *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1945.

596. Haecker, V., & Ziehen, T. Beitrag zur Lehre von der Vererbung und Analyse der zeichnerischen und mathematischen Begabung, insbesondere mit Bezug auf die Korrelation zur musikalischen Begabung. *Zeitschrift für Psychologie*, 1931, *120—21*.

597 Haeussermann, E. *Developmental potential of preschool children*. New York: Grune & Stratton, 1958.

598. Halperin, S. L. A clinico-genetical study of mental defect. *American Journal of Mental Deficiency*, 1945, *50*.

599. Hamley, H. R. *Relational and functional thinking in mathematics*. Ninth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. New York: Teachers College, Columbia University, 1934.

600. ——. (Ed.). *The testing of intelligence*. London: Evans Brothers, 1935.

601. Hamza, M. A study of certain aspects of retardation in mathematics amongst secondary grammar school pupils by factorial and individual methods. Doctoral dissertation, Leeds University, 1951.

602. ——. Retardation in mathematics amongst grammar school pupils. *British Journal of Educational Psychology*, 1952, *22*.

603. Harlow, H., Miller, J. G., & Newcomb, T. M. Identifying creative talent in

psychology. *American Psychologist*, 1962, *17*.

604. Harman, H. H. *Modern factor analysis*. Chicago: University of Chicago Press, 1960.

605. Havighurst, R. J. Community factors in the education of gifted children. *School Review*, 1955, *63*.

606. Hendrix, G. Learning by discovery. *Mathematics Teacher*, 1961, *54*.

607. Hildreth, G. School-wide planning for the gifted. *Educational Administration and Supervision*, 1955, *41*.

608. Hímpsel, J. Zur Frage der mathematischen Sonderbegebung in der höheren Schule. *Archiv für die gesamte Psychologie*, 1937, *99*.

609. Holland, J. L. Creative and academic performance among talented adolescents. *Journal of Educational Psychology*, 1961, *52*.

610. Holland, J. L., & Astin, A. W. The need for redefining "talent" and "talent loss." *Journal of Higher Education*, 1962, *33*.

611. Hollingworth, L. S. *Children above 180 IQ Stanford-Binet*. Yonkers-on-Hudson: World Book, 1942.

612. ——. *Gifted children: Their nature and nurture*. New York: Macmillan, 1926.

613. Holzinger, K. J., & Harman, H. H. Comparison of two factorial analyses. *Psychometrika*, 1938, *3*.

614. Hotyat, F. Les difficultés psychologiques des débutants dans le raisonnement mathématique. *Mathématiques et Pédagogie*, 1955—56, No. 9.

615. Humphreys, L. G. The organization of human abilities. *American Psychologist*, 1962, *17*.

616. Hunt, J. McV. *Intelligence and experience*. New York: Ronald Press, 1961.

617. Jamuar, K. K. Achievement and some background factors. *Psychological Studies*, 1963, *8*. (*Psychological Abstracts*, 1964, *38*, No. 3202)

618. ——. Personality and achievement. *Psychological Studies*, 1961, *6*. (*Psychological Abstracts*, 1964, *38*, No. 3203)

619. Jenkins, J. W. An analysis of the factors entering into the results of tests based on the logical principles of mathematics. Doctoral dissertation, University of London, 1939.

620. Johannot, L. *Le raisonnement mathématique de l' adolescent*. Paris: Delachaux et Niestlé, 1947.

621. Karnes, M. B., McCoy, G., & others. The efficacy of two organizational plans for underachieving intellectually gifted children. *Exceptional Children*, 1963, *29*.

622. Kelley, T. L. *Crossroads in the mind of man*. Stanford, Calif.: Stanford University Press, 1928.

623. Kennedy, W. A., Willcutt, H., & Smith, A. Wechsler profiles of mathematically gifted adolescents. *Psychological Reports*, 1963, *13*.

624. Keppers, G. L. Is algebra a "tool subject"? *School Science and Mathematics*, 1955, *55*.

625. Klausmeier, H. J., & Loughlin, L. J. Behaviors during problem solving among children of low, average and high intelligence. *Journal of Educational Psychology*, 1961, *52*.

626. Klausmeier, H. J., & Feldhusen, J. F. Retention in arithmetic among children of low, average, and high intelligence at 117 months of age. *Journal of Educational Psychology*, 1959, *50*.

627. Kolstoe, O. P. A comparison of mental abilities of bright and dull children of comparable mental ages. *Journal of Educational Psychology*, 1954, *45*.

628. Kommerell, V. Über mathematische Begabung. *Zeitschrift für pädagogische Psychologie und experimentelle Pädagogik*, 1928, *29*.

629. Kough, J. *Practical programs for the gifted*. Chicago: Science Research Associates, 1960.

630. Kundu, R., & Chakraborty, A. A study of relationship between speed and score in mental work. *Psychological Studies*, 1963, *8*. (*Psychological Abstracts*, 1964, *38*, No. 3206)

631. Kupisiewicz, C. *O efektywnoci nauczania problemowego*. Warsaw: Naukowe, 1962. (In Polish)

632. Langer, S. K. Algebra and the development of reason. *Mathematics Teacher*, 1931, *24*.

633. Leahy, A. M. Nature-nurture and intelligence. *Genetic Psychology Monographs*, 1935, *17*.

634. Lee, D. M A study of specific ability and attainment in mathematics. *British Journal of Educational Psychology*, 1955, *25*.

635. Lee, J. M., & Hughes, W. H. Predicting success in algebra and geometry. *School Review*, 1934, *42*.

636. Lehman, H. C. *Age and achievement*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1953.

637. Le Ny, J. F. Tests ou indicateurs psychologiques? *Raison*, 1957, No. 19.

638. Lietzmann, W. *Mathematik in Erziehung und Unterricht*. Leipzig: Quelle & Meyer, 1941.

639. Lobdell, L. O., & Van Ness, W. J. Grouping and enrichment. *Education*, 1962, *82*.

640. Locke, E. A. Some correlates of classroom and out-of-class achievement in gifted science students. *Journal of Educational Psychology*, 1963, *54*.

641. Luchins, A. S. Mechanization in problem solving. *Psychological Monographs*, 1942, *54* (6, Whole No. 248).

642. MacKinnon, D. W. The nature and nurture of creative talent. *American Psychologist*, 1962, *17*.

643. Maier, N. R. F. An aspect of human reasoning. *British Journal of Psychology*, 1933, *24*.

644. ——. The behavior mechanisms concerned with problem solving. *Psychological Review*, 1940, *47*.

645. Mann, M. What does ability grouping do to the self-concept? *Childhood Education*, 1960, *36*.

646. Marshall, M. S. In reply to Dr. Wilson. *Educational Administration and Supervision*, 1955, *41*.

647. ——. The case of the "gifted" child. *Educational Administration and Supervision*, 1954, *40*.

648. Martens, E. H. Gifted children: What do we know about them? What shall we do about them? *Nation's Schools*, 1951, *47*.

649. Martinson, R. A. Guidance of the gifted. *Education*, 1962, *82*.

650. Martinson, W D., & Stamatakos, L. C. An attempt to motivate potentially superior students. *School and Society*, 1959, *87*.

651. McAllister, B. Arithmetical concepts and the ability to do arithmetic. *British Journal of Educational Psychology*, 1951, *21*.

652. McClelland, D. C., & others. *Talent and society*. Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1958.

653. McCuen, T. L. Predicting success in algebra. *Journal of Educational Research*, 1930, *21*.

654. Mehl, J., & Mroczkowski, M. Ein Fall mathematischer Frühbegabung. *Zeitschrift für Psychologie*, 1964, *169*.

655. Mensenkamp, L. E. Tests of mathematical ability and their prognostic values. *School Science and Mathematics*, 1921, *21*.

656. Merrifield, P. R., Guilford, J. P., Christensen, P. R., & Frick, J. W. The role of intollectual factors in problem solving. *Psychological Monographs*, 1962, *76* (10, Whole No. 529).

657. Michaud, E. L'enfant et les figures géométriques. *Journal de Psychologie Normal et Pathologique*, 1947, *40*.

658. Mitchell, F. W. The nature of mathematical thinking. *Australian Council for Educational Research, Educational Research Series*, 1938, No. 53.

659. Murray, J. E. An analysis of geometric ability. *Journal of Educational Psychology*, 1949, *40*.

660. Neel, J. V., & Schull, W. J. *Human heredity*. Chicago: University of Chicago Press, 1954.

661. Newland, T. E. A critique of research on the gifted. *Exceptional Children*, 1963, *29*.

662. Ohles, J. G. Differential learning. *Education*, 1962, *82*.

663. Oldham, H. W. A psychological study of mathematical ability, with special reference to school mathematics. I. *British Journal of Educational Psychology*, 1937, *7*.

664. ——. A psychological study of mathematical ability, with special reference to school mathematics. II. *British Journal of Educational Psychology*, 1938, *8*.

665. Olson, W. C., & Hughes, B. P. Growth patterns of exceptional children. In N. B. Henry (Ed.), The education of exceptional children. *Yearbook of the National Society for the Study of Education*, 1950, *49* (Pt. 2).

666. Parnes, S. J. Can creativity be increased? *Personnel Administration*, 1962, *25*.

667. Passow, A. H., & others. *Planning for talented youth*. New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University, 1955.

668. Penrose, L. S. A clinical and genetic study of 1280 cases of mental defect. *Special Research Series, Medical Research Council, London*, 1938, *229*.

669. Plumlee, L. B. The verbal component in mathematics items. *Educational and Psychological Measurement*, 1949, *9*.

670. Poincaré, H. L'invention mathématique. *Revue du Mois*, 1908, *6*.

671. Possecker, R. Schülerübungen: Ein Mittel zur Steigerung der Lernintesität im Mathematikunterricht. *Pädagogik*, 1960, No. 1.

672. Pressey, S. L. Concerning the nature and nurture of genius. *Scientific Monthly, New York*, 1955, *81*.

673. Pritchard, M. C. The contributions of Leta S. Hollingworth to the study of gifted children. In P. A. Witty (Ed.), *The gifted child*. Boston: Heath, 1951.

674. Proceedings of the Seventeenth International Congress of Psychology. *Acta Psychologica*, 1964, *23*.

675. Reese, H. W. Manifest anxiety and achievement test performance. *Journal of Educational Psychology*, 1961, *52*.

676. Révész, G. *Talent und Genie*. Berne: A. Francke, 1952.

677. ——. The indivisibility of mathematical talent. *Acta Psychologica*, 1940, *5* (2—3).

678. Rimoldi, H. J. A. Study of some factors related to intelligence. *Psychometrika*, 1948, *13*.

679. ——. The central intellective factor. *Psychometrika*, 1951, *16*.

680. Rogers, A. L. Experimental tests of mathematical ability and their prognostic value. *Teachers College Contributions to Education*, 1918, No. 89.

681. Rose, G. Die Bedeutung des Gedächtnisses für den Mathematik und Rechenunterricht. *Zeitschrift für pädagogische Psychologie und experimentelle Pädagogik*, 1922, *23*.

682. Rosenfeld, G. Zu einigen Grundfragen der Begabungstheorie. *Pädagogik*, 1960, No. 1.

683. Ruthe, P. Über mathematische Begabung, ihre Analyse und ihre Prüfung bei 13 jährigen begabten Volksschülern. *Praktische Psychologie*, 1920, *1*.

684. *The gifted: Educational resources*. Boston: Porter Sargent, 1961.

685. Schiefelbusch, B. L. Our gifted children. *University of Kansas Bureau of Child Research, Public Information Series*, 1958, No. 1.

686. Schiller, B. Verbal, numerical and spatial abilities of young children. *Archives of Psychology*, 1934, No. 161.

687 Schneck, M. R. The measurement of verbal and numerical abilities. *Archives of Psychology*, 1929, No. 107.

688. Science Aptitude Test: Mathematics section. Science Talent Search Examination. New Delhi: National Council of Educational Research and Training, 1965.

689. Shertzer, B. (Ed.). *Working with superior students: Theories and practices*. Chicago: Science Research Associates, 1960.

690. Spearman, C. "General intelligence," objectively determined and measured. *American Journal of Psychology*, 1904, *15*.

691. ——. *The abilities of man*. London: Macmillan, 1927.

692. ——. *The nature of "intelligence" and the principles of cognition*. London: Macmillan, 1923.

693. Spearman, C., & Wynn Jones, L. L. *Human ability*. London: Macmillan, 1950.

694. Stalnaker, J. M. Recognizing and encouraging talent. *American Psychologist*, 1961, *16*.

695. Stanley, J. C. Enriching high-school subjects for intellectually gifted students. *School and Society*, 1959, *87*.

696. ——. Test biases of prospective teachers for identifying gifted children. *School and Society*, 1959, *87*.

697. Stern, W. *Die Intellegenz der Kinder und Jugendlichen und die Methoden ihrer Utersuchung*. (4th ed.) Leipzig: Barth, 1928.

698. Stevanović, B. P. Testovn. Tsentar za profesionaliu orijentatsisu. Belgrade, 1964.

699. Stolurow, L. M. Implications of current research and future trends. *Journal of Educational Research*, 1962, *55*.

700. Stone, C. W. Arithmetical abilities and some factors determining them. *Teachers College Contributions to Education*, 1908, No. 19.

701. Strang, R. Mental hygiene of gifted children. In P. A. Witty (Ed.), *The gifted child*. Boston: Heath, 1951

702. Strunz, K. *Pädagogische Psychologie des mathematischen Denkens*. Heidelberg: Quelle & Meyer, 1962.

703. Sutherland, J. An investigation into some aspects of problem solving in arithmetic. *British Journal of Educational Psychology*, 1941, *11*; 1942, *12*.

704. Symonds, P. M. Special disability in algebra. *Teachers College Contributions to Education*, 1923, No. 132.

705. Székely, L. Knowledge and thinking. *Acta Psychologica*, 1950, *7*.

706. ——. Productive processes in learning and thinking. *Acta Psychologica*, 1950, *7*.

707. Taylor, C. W., & Barron, F. (Eds.). *Scientific creativity: Its recognition and development*. New York: Wiley, 1963.

708. Terman, L. M. A new approach to the study of genius. *Psychological Review*, 1922, *29*.

709 ——. (Ed.). *Genetic studies of genius*. Stanford, Calif.: Stanford University Press. 1925, 1926, 1930, 1947, 1958. 5 vols.

710. Terman, L. M., & Oden, M. H. *Genetic studies of genius* (Vol. 4). *The gifted child grows up*. Stanford, Calif: Stanford University Press, 1947.

711. Thomas, H. Die mathematische Begabung und ihre Prüfung. *Industrielle Psychotechnik*, 1929, *6*.

712. Thomson, G. *The factorial analysis of human ability*. (4th ed.) Boston: Houghton Mifflin, 1950.

713. Thorndike, E. L. On the organization of intellect. *Psychological Review*, 1921, *28*.

714. ——. The abilities involved in algebraic computation and in problem solving. *School and Society*, 1922, *15*.

715. Thorndike, E. L., & others. *The psychology of algebra*. New York: Macmillan, 1923.

716. Thurstone, L. L., & Thurstone, T. G. Factorial studies of intelligence. *Psychometric Monographs*, 1941, No. 2.

717. Thurstone, L. L. *Multiple-factor analysis*. Chicago: University of Chicago Press, 1947.

718. ——. *The vectors of mind*. Chicago: University of Chicago Press, 1935.

719. ——. Primary mental abilities. *Psychometric Monographs*, 1938, No. 1.
720. Thurstone, T. G., & Byrne, K. M. *Mental abilities of children*. Chicago: Science Research Associates, 1951.
721. Torrance, E. P. Changing reactions of preadolescent girls to tasks requiring creative scientific thinking. *Journal of Genetic Psychology*, 1963, *102*.
722. Tyerman, M. J. England's special schools for the gifted. *School and Society*, 1959, *87*.
723. Vernon, P. E. *The structure of human abilities*. (2d ed.) London: Methuen, 1961.
724. Vogt, W. Zur Frage der mathematischen Begabung. *Internationale Zeitschrift für Individualpsychologie*, 1933, *11*.
725. Wadia, K. A. Identification of the gifted. *Guidance Review*, 1963, *1*.
726. Wenzl, A. *Theorie der Begabung*. Leipzig: Meiner, 1934.
727. Werdelin, I. *The mathematical ability: Experimental and factorial studies*. Lund: Gleerups, 1958.
728. Wilson, R. C., Guilford, J. P., & others. A factor-analytic study of creative-thinking abilities. *Psychometrika*, 1954, *19*.
729. Wilson, F. T. Comment on the case of the "gifted child." *Educational Administration and Supervision*, 1955, *41*.
730. ——. Salvaging gifted students in regular classrooms. *Educational Administration and Supervision*, 1955, *41*.
731. Wilson, J. H. Group factors among abilities involved in a school certificate examination. *British Journal of Educational Psychology*, 1933, *3*.
732. Winch, W. H. Accuracy in school children: Does improvement in numerical accuracy "transfer"? *Journal of Educational Psychology*, 1910, *1*.
733. Witty, P. A. A study of one hundred gifted children. *University of Kansas Bulletin of Education*, 1930, *2* (7).
734. ——. Contributions to the "IQ" controversy from the study of superior deviates. *School and Society*, 1940, *51*.
735. ——. Educational programs for the gifted. *School and Society*, 1959, *87*.
736. ——. Educational provision for gifted children. *School and Society*, 1952, *76*; 1953, *78*.
737. ——. Some considerations in the education of gifted children. *Educational Administration and Supervision*, 1940, *26*.
738. ——. The gifted child: Facts and fallacies. *National Parent-Teacher*, 1943, *42*.
739. ——. (Ed.) *The gifted child*. Boston: Heath, 1951.
740. ——. The gifted and the creative pupil. *Education*, 1962, *82*.

741. Witty, P. A., & Lehman, H. C. Ability versus effective ability. *Psychological Review*, 1928, *35*.

742. ——. Drive: A neglected trait in the study of the gifted. *Psychological Review*, 1927, *34*.

743. Wolfle, D. Diversity of talent. *American Psychologist*, 1960, *15*.

744. Woodring, P. Ability grouping, segregation and the intellectual elite. *School and Society*, 1959, *87*.

745. Woodrow, H. The ability to learn. *Psychological Review*, 1946, *53*.

746. Worcester, D. A. *The education of children of above-average mentality*. Lincoln: University of Nebraska Press, 1955.

747. Wrigley, J. The factorial nature of ability in elementary mathematics. *British Journal of Educational Psychology*, 1958, *28*.

主题索引

（汉字按汉语拼音字母表顺序排列）

e 因素 22～23, 36, 37;
  e 因素负荷的计算公式 275;
  e 因素和数学能力 37, 38～39, 45;
  e 因素和学校科目上的成功 37;
  所选测验中的 e 因素 41。
M 参见“记忆”。
N 参见“用数字计数的能力”。
P 参见“知觉能力”。
R 参见“推理能力”。
S 参见“空间概念”，“空间概念的能力”，“空间因素”。
S 参见“特殊因素”。
V 参见“言语能力”。
W 参见“流畅”。
x 因素 420。

A

埃里克·符 428。
艾拉 S 253～256, 389。

B

变换题 113。
标准化测验 xii, 12, 13, 50。
波里索娃指数 209, 236, 247, 252。
波里亚 G 267～269, 394。

C

“残余”因素 43。
操作（运算） 参见“活动”。
测验 125;
  标准化测验 xii, 12, 13, 50;
  测验的本质 15, 20～21;
  测验的目的 11, 13;
  测验的限度 vii, viii, 12, 15～17, 19;
  集团测验 16;
  美国的测验 13;
  研究性的测验 14, 20, 123, 125;
  预测性测验 13, 20～21;
  诊断测验 123, 125;
  智力和成就测验 436～437;
  最早的测验 12;
  作为一种指标（标志）的测验 12, 15, 20～21。
测验分数 vi～vii, 16, 40, 123。

成绩　参见"学校成绩"。
成就
　成就(成绩)测验　vii, 12;
　成就中的因素　423;
　学校数学的成绩(成就)　31～32, 436～439。
抽象　66, 110。
抽象能力　46, 48, 50, 53, 70～71, 73, 111, 224～225;
　抽象能力的性别差异　419;
　抽象能力发展　68, 404～405;
　非数学能力成分的抽象力　112;
　感知题目时的抽象力　277～278, 285;
　索尼娅的抽象力　236;
　作为数学心理品质的抽象力　228。
抽象型　230, 250。
出声思考(大声思考)　vii, 117～119。
创新精神　参见"主动性"。
创造力　10, 21;
　创造力的类型　229～230;
　创造力的源泉　423;
　创造力和一般心理能力　435～437。
　参见"创造性的数学能力","创造性思维","数学创造力"。
创造性的数学能力　26, 27～32, 85～86;
　创造性数学能力的美感　427;
　创造性数学能力的先决条件　87;
　创造性数学能力与素质　82～83;
　数学上有天赋的儿童的创造性数学能力　87。
创造性思维(思想)　50, 64, 85～87, 419。
　参见"创造力"。
创造(性)思维　52, 54, 66。

D

代数测验　134～135, 141～146, 154～155, 157, 160～161, 167, 169, 171～172, 177～178, 179～180, 188～189, 191～192, 198～199。
代数能力　32～35, 39, 48, 385, 388, 420。
代数题目　125。
代数型　385。
代数学家　60, 226, 266。
　参见"代数型"。
迪马L　256～259, 389。
定量思维　26～27, 50。
"定势"的概念　373～374。
动机　20, 86, 92, 424～425, 427～428。
独创性　70, 424。
独立性　92～93, 222, 424。
对测验成绩的影响　12。
对数学的爱好　227。

对数学的热情(热爱) 70, 92, 227～228, 424～425。
顿悟 参见"灵感"。
多余的数据 277, 278, 279, 286, 362;
多余数据(信息过多)的实验题目 135～138。
多因素理论 22～24, 29～30, 40。

E

儿童学 61。

F

发展的指标 121。
伐利亚 Kh 349～350。
非逻辑推理能力 228。
非数学家 31, 53。
非数学思维的实验题目 209～210。
分数秩的相关性 274, 291～292, 338～339, 438～441。
分析
分析和简缩 434;
分析能力 223;
分析形式 63～64, 286, 287, 316, 359;
作为思维活动(运算)的分析 63, 66。
分析家(分析学家) 51, 60, 229, 248. 385。
参见"分析型"。
分析器 78, 82. 446。
分析型 x. 51, 229, 378, 388, 389～394。
分析-综合
感知, 知觉(领会)题目的分析-综合 276, 282～283, 286, 409;
能力研究中的分析-综合 98。
参见"分析-综合活动"。
分析-综合活动 66, 70, 71, 235。
分析-综合想象力 235。
伏洛佳 Kh. 265～267, 389。
伏洛佳 L. 241～248, 334, 335, 343, 401, 402, 406。
符号
符号的准确性 73;
符号的运用 26～27, 37～38, 45, 47, 49, 110, 112;
作为数学特征的符号 110。
附加练习 143。
负输入 359。

G

概括
概括的本质 319;
概括的过程 63 67;
概括的回忆 107;
概括的需要 227～228, 413;
概括与简缩的关系 433;
数学材料的概括 x 441～444, 410～413;
作为解法的概括 318。

参见"数学的概括"。
概括能力
个案:艾拉S.的概括能力 254～255;
迪马 L.的概括能力 259;
伏洛佳 Kh.的概括能力 266;
列尼亚 K.的概括能力 261～262;
基里亚 Kh.的概括能力 251;
赖纳S.的概括能力 271;
索尼娅L 的概括能力 236～237;
概括能力的发展 410～411;
概括能力的年龄差异 443;
概括能力的实验题目 126～129, 141～165, 179～181, 190～192, 439～441;
概括能力的指数(指标) 143, 160, 290;
概括能力和神经过程 78;
概括能力在灵感中的作用 375～376;
作为普遍因素的概括能力 440～441;
作为数学能力构成成分的概括能力 48, 49, 60～61, 71, 107, 111～112, 223, 224, 272, 433～434, 434～436;
作为智力特征的概括 436～437。
参见"数学的概括能力"。
概念型 387。
感觉能力 76。
格式塔理论 52。
个别差异
成就(成绩)的个别差异 4, 48, 68, 69;
概括能力的个别差异 107, 293, 311～318, 321;
解题过程的个别差异 52～53;
可教性的个别差异 94～95;
力求"优美"解法的个别差异 347～351;
能力的个别差异 79, 80, 94～95;
忍受疲劳的个别差异 380～382;
神经过程的个别差异 78;
视觉记忆的个别差异 95;
视觉能力的个别差异 404;
数学气质的个别差异 384～404;
数学能力的个别差异 7～8, 52, 53, 73, 94～95, 404, 433;
心理过程可逆性的个别差异 351～357;
心理过程灵活性的个别差异 337～347;
信息保持的个别差异 362～369;
信息加工的个别差异 447;
形成联想的个别差异 433;
与概念有关的作业的个别差异 404;
直觉的个别差异 58。
个体发生(发展) 53, 75。
个性特征(个性品质)

个性品质(人格)和能力 21,91～92;
个性特征的发展 429～430;
个性特征和成就 423;
个性特征和数学能力 227,423～430。
高等教育学院(Vuz学校) 241,271。
构造型 387。
工程学(工程的) 63, 95, 421。
工作潜能 91, 428, 444, 446。
工作速度(进度) 221～222, 289～290。
公理法 111。
公式
简捷乘法公式 141, 142, 145～146, 179～180, 280～281, 281～282, 294～295, 398;
应用公式的能力 47, 47～48。
观察法 29, 104, 106。
归纳因素 23。
参见"推理因素"。
诡辩术 187～192。
过程
对过程的分析 25, 43, 45。
参见"解题过程"。
过去经验
过去经验对测验成绩的影响 12;
过去经验对能力的影响 119;
解题中过去经验的作用 51～52, 53, 119, 346;
性别差异的过去经验根源 419～420。

H

好奇心(求知欲) 9, 28, 424;
好奇心和数学能力 50, 228。
环境
环境对能力的影响 9, 10, 27, 82～83, 444～445;
环境造成的性格差异 420。
活动 ix, 75, 77, 82, 83, 89, 93, 424～425。
参见"数学活动"。
活动的意义 426。

J

机智 222, 224。
基里亚 Kh. 248～253, 308, 389。
基因频率 9, 11。
几何测验 132, 135, 137, 139～140, 146～148, 150, 155, 157～158, 167, 168～169, 172, 178, 180～181, 189, 191～192, 199～205, 205～207。
几何关系的运算 446。
几何能力 17, 32, 33, 34, 38～38, 385, 387～388, 403～404。
几何图形想象力 386。
几何习题 125, 138～140, 345。
几何型 x～xi, 51, 385～388, 390,

394～400。
几何学家 51, 60, 226, 229, 385, 394。
参见"几何型"。
技能
技能和数学能力 92～95;
技能和准备状态 93～94;
技能与能力 ix, 48, 87～91;
思维技能 67～68。
技术能力 94～95, 119。
计算
伏洛佳 L. 的计算法 244～245;
计算速度 382;
计算题 113;
心算 73。
计算(数字、数值)的因素 38, 41, 42～43, 45, 49, 387, 388。
计算(数字)能力 23;
迪马 L. 的计数(计算)能力 256～257;
计算能力的性别差异 421;
计算能力和数学能力 32～33, 38, 43, 73, 271～272, 403～404, 432;
计算能力和智力的相关 38;
计算能力受干扰 446;
文献中计算能力的事例 269～272。
计算剩余相关系数的公式 275。
计算型 229。
计算再生相关系数的公式 275。
记忆 23, 60, 94～95;
对于事实的记忆 73, 432。
对于数字的记忆 60, 61～62。
对于细节的记忆 420。
概括记忆 107;
关于记忆的题目系列 125;
几何学家的记忆 399～400;
个案: 艾拉 S. 的记忆 254;
伏洛佳 Kh. 的记忆 266;
伏洛佳 L. 的记忆 244;
基里亚 Kh. 的记忆 248;
列尼亚 K. 的记忆 261～262;
萨沙 V. 的记忆 270;
记忆的个别差异 25;
记忆的精确性和准确性 49;
记忆和神经过程 78;
记忆和数学能力 26, 27, 38, 40, 43, 46～47, 50, 59, 222, 224;
联想记忆 23;
视觉记忆 94～95;
态度对记忆的作用 425;
音乐记忆 443～444。
参见"数学记忆"。
坚持性 参见"毅力"。
坚韧、顽强 227, 428。
简缩能力 46。
简缩推理 57, 64～65, 322, 330～331, 433～434;
感知问题时的简缩推理 280～281, 408;
个案: 伏洛佳 L. 的简缩推理 245～247;
基里亚 Kh. 的简缩推理 252;

萨沙L.的简缩推理 265;
索尼娅L.的简缩推理 238;
简缩推理的发展 414;
简缩推理的渐进性 323;
简缩推理的年龄差异 413～415;
简缩推理的评价、估量 122,332;
简缩推理的实验题目 126～129, 141～150,155～161,179～185, 192～204;
简缩推理的图解 332,333～334, 335;
简缩推理的意识 414;
简缩推理的直觉思维特点 51;
简缩推理在灵感中的作用 376～377;
解代数题目时的简缩推理 64;
数学能力的简缩推理成分 108, 112, 226;
有数学天赋学生的简缩推理的特点 272;
作为数学心理品质的简缩推理 228。
参见"数学推理的简缩"。
校对测验 172。
教学
教学的组织 69;
教学对能力的影响 75,80;
教学对数学能力的影响 ix, 40, 403, 409, 418, 419, 433, 445;
性别差异在教学上的原因 419, 420。
参见"教学实验"。
教学实验 67, 122, 141～142, 213～214, 310。
教养
教养对能力的影响 9, 79～83;
性别差异的教养根源 419～422。
解法
产生解题方法的因素 113;
解法的解释 116;
解法的迁移 63。
解题
解题的猜测 64;
解题的成分 x, 219;
解题的视觉意象 385;
解题的远见 414;
解题中的尝试、错误 357。
参见"解题过程"。
解题的相对定型 170。
解题过程
格式塔的解题过程理论 52;
解题过程的差异 ix, 16～20;
解题过程的定量描述 122;
解题过程的方向 358～359;
解题过程的基本环节(步骤、阶段) 219～220;
解题过程的记录 118～119;
解题过程的记忆 362;
解题过程的时间 118, 122;
解题过程的研究 16～18, 51～52, 63, 115～119;
解题过程分析 18,44,100, 113;
解题过程和数学能力 107～108, 433;

解题过程中指导语("提示")的作用 52～53;
解题过程质的特征 123。
解题时间 273。
解题水平 420～421。
解题中的视觉支持(借助形象) 225;
解题中分析型的视觉支持 389, 391, 392～394;
解题中几何型的视觉支持 391～392, 394～400;
解题中调和型的视觉支持 390, 400～401, 402, 403。
进步(进展)的速度 71～72, 78, 120～121, 403;
工作进度 221～222, 289～290;
训练速度 120～121。
经济
精力的节省 226, 433;
思维的节约 238～239。
经验 参见"过去经验"。
经验型 387。
具体运算 55。
具体型 230。

K

可教性(接受教学的可能性) 70～71, 434～435。
可教育性 86, 94。
空间成分
数学思维的空间成分 48～49。
空间概念
分析型的空间概念能力 391～392;
几何型的空间概念能力 391～392, 396;
空间概念的能力 16, 23, 37～38, 46;
空间概念的水平 385～386;
空间概念和视觉意象能力 386;
空间概念能力的测验 14;
空间概念能力和工程技术能力 94～95;
男孩中更为明显的空间概念能力 420;
数学能力中空间概念的作用 73, 109, 112, 225, 432;
数学思维中的空间概念能力 50;
调和型的空间概念能力 390, 400, 402。
空间因素 39, 41, 43, 387, 388。

L

理解 40, 47;
概念的理解 27, 40。
联结(联系) 参见"联想"。
联系
处理(数的)联系 45;
寻找联系的能力测验 41～42。
联想
(暂时)联系的形成 64, 77;
联系系统 64, 66;

联想（联结、联系）的类型 64, 65～66, 108, 174～175, 288, 351～357, 362, 376, 433;
联想的性质 131, 320, 433, 445。
量的分析 103, 122～123。
列方程式 131, 282。
列尼亚K 259～262。
临近发展区 121, 160。
灵感 181～182, 374;
创造性中的灵感 55～56, 57;
灵感的解释 376, 380;
灵感的情景 64;
有能力学生的灵感 374～380。
参看"直觉"。
零散思维 51, 57。
领会(领悟) 276注。
逻辑测验 155～159, 159～161, 183～185, 190～192。
逻辑推理的题目 181～185。
逻辑推理能力
个案: 迪马L. 的逻辑推理能力 258～259;
基里亚Kh. 的逻辑推理能力 251～252;
萨沙L. 的逻辑推理能力 264～265;
索尼娅L. 的逻辑推理能力 235;
逻辑推理能力的发展 114;
逻辑推理能力的实验题目 127, 128, 155～161, 179～190;
逻辑推理能力的性别差异 419～420, 421～422;
数学思维中的逻辑推理能力 51, 52, 72;
数学能力的逻辑推理成分 46～47, 50, 112, 222, 224, 228, 229～230, 431。
逻辑型 229～230。
流畅性 23。

N

耐心 74, 84。
脑
大脑的数学倾向 374, 445;
大脑两半球 78～79, 445～445;
大脑在能力中的作用 435, 445～446。
参见"皮层"。
内省法 29, 29～30, 46, 48, 50, 54, 60, 116。
能力
高级认知能力 xii, 25;
教学对能力的影响 47～48, 81～82;
能力的补偿 84;
能力的复合 84;
能力的个别差异 vii, 3, 5～6, 62;
能力的特殊性 3, 62～63, 83, 84, 443, 445～447;
能力的形成 3～5, 9, 76, 83;
能力的性质 ix, 9, 12, 74, 76,

83～84, 86～97, 120～121, 446～447;
能力的学说(理论) 3, 62, 83～84;
能力定义 ix, 90～97;
能力发展 ix, 3～8, 9, 20, 75～77, 79～83, 85, 424～427;
能力复杂性 89;
能力和个性 91～93, 423, 425～426, 427～428;
能力和素质、爱好 76, 93, 424～425;
能力和信息-加工容量 447;
能力和准备状态 94;
能力结构 23, 25, 62, 94, 122;
能力问题被排除(取销) 69, 70;
能力预测 19～21;
能力研究 vii, 61, 62～63, 125;
能力种类 84;
特殊的能力 参见"能力的特殊性";
先天(固有)的能力 ix, 4, 9, 10, 46, 61, 75, 79;
自然的能力 76 页注①。
参见"数学能力"。
能力(潜能, capacity) 95～96。
能力的运用 27, 40, 73。
能力倾向 4, 21, 95。
逆向联结 351～352。
参见"联想的类型"。
逆向题目的性质 174～175, 352 注。

P

批判性思维 46, 127, 166～167。
皮层(皮质)
大脑皮层构造的感受器 359～360;
皮层的区域 78, 82, 446～447;
皮层的类型学特性 446;
皮层在潜意识(无意识)思维中的作用 57。
参见"脑"。
疲劳
疲劳的标志 382;
疲劳对测验成绩的影响 12。
疲劳的可能性
埃克里 B. 的疲劳可能性 270;
艾拉 S. 的疲劳可能性 253～254;
波里亚 G. 的疲劳可能性 267～269;
伏洛佳 Kh. 的疲劳可能性 265～267;
萨沙 L. 的疲劳可能性 264;
索尼娅 L. 的疲劳可能性 239;
消除疲劳的可能性 223, 226, 272, 381～383, 445, 446。
普遍(一般)因素
概括能力的普遍因素 440～441;
普遍因素和数学能力 34, 35～36;
系列 I、II 和 III 的普遍因素

275～288;
系列 V～X 的普遍因素 290～293, 318;
系列 VII, V 和 XII 的普遍因素 440;
系列 IX, X 和 XII 的普遍因素 440～441;
系列 XIII～XV 的普遍因素 338, 346;
斯比尔门模式中的普遍因素 22。
参见"g因素"。
普通数学测验 182～183。

Q

谦虚，学者的特征 429。
潜能（potentiality） 参见"能力倾向"。
勤奋 91, 92, 104, 226, 428。
勤奋(努力)的素质 63, 70。
清晰性
目的明晰性 92, 227;
思维的清晰性 228。
情绪和能力 92, 95, 427。
缺数据
对信息不全的题目的知觉 285 表 8;
缺少信息的实验题目 133～136;
学生对缺少信息的实验题目的反应 277～279。
群因素 22～23, 30, 32～45;
随处可见的群因素 440～441。

R

人为(人造)的概念 162, 439。

S

萨沙 L. 262～265, 308～310。
神经系统
神经系统的力量 382, 446;
神经系统的类型特征 77, 82;
神经系统活动 98。
审美感 55, 427。
生物学因素 参见"素质"。
实践能力 23。
实验题目 124～210;
按题目条件列方程式 159～161;
按已知类型编题目 153～155;
暗示自我限制的题目 173～174;
不切实际的题目 161～162;
不同类型题目的系统 146～150;
从具体逐渐过渡到抽象的题目 150～153;
揭示视觉形象与语言逻辑活动的题目 209～210;
解法具有不同程度直观性的题目 192～198;
解实验题 115, 121～122;
具有变换内容的题目 168～170;
具有多种解法的题目 165～167;
具有互相渗透的元素的题目 138～140;

启发性题目 179～181;
缺少信息的题目 133～136;
数学诡辩的题目 187～190;
实验题的来源 130;
实验题的目的 115;
实验题目的年龄范围 130;
实验题目的编号 125;
实验题目的编排 124, 130;
实验题目的教育性 121～122;
实验题目的难度 115;
实验题目的系列类型 124;
实验题目的性质 113～114;
实验题目的种类 125;
实验题区别于心理测量学的测验 123;
使受试者过去经验均等化的实验题 119～120;
条件难记的题目 190～192;
同一类型题目的系统 141～146;
未提出问题的题目 131～133;
信息过多的题目 136～138;
形成人为（人造）概念的题目 162～165;
序列题目 185～187;
要求重建运算的题目 170～173;
要求理解和逻辑推理的题目 181～185;
用语言和视觉表述的题目 198～204;
与空间概念有关的题目 204～209;
正向和逆向题目 174～178;
证明题 155～159。
参见"实验题的系列类型"。
实验题目系列 124, 126～129, 438。
参见"实验题目"。
实验研究的程序 213～215。
适宜性 参见"准备状态"。
视觉意象（视觉想象、直观形象）49, 50, 247, 250, 254～255。
视觉记忆 209。
视觉能力 385～387, 432。
视觉-形象成分
波里亚 G. 的视觉-形象成分 268;
数学能力中的视觉-形象成分 71;
言语-逻辑成分和视觉-形象成分的相关 209, 386, 388～389, 389～390, 394, 400～401;
作为心理类型决定因素的视觉-形象成分 388～389。
参见"波里索娃指标"。
视觉-形象因素 41。
视觉因素 参见"空间因素"。
数学
数学的目的 347;
数学对社会的价值 7;
数学科学 109～110;
学习数学的本质 109～111, 443;
学习数学的能力 24, 67～68, 69, 74～75 82;

作为学校科目的数学 105～106, 109～110。
数学材料的形式化概念 参见“数学材料的知觉”，“数学材料知觉形式化”。
数学材料的知觉
数学材料知觉的分析-综合 138～140, 185;
数学材料知觉的年龄差异 408～410;
数学材料知觉的特征 276～288;
数学材料知觉形式化 284～285, 407～410, 431, 433。
数学创造力
数学创造力的本质 55～58;
数学创造力的主观性 86;
数学创造力和智力 31;
先天的数学创造力 74;
需要数学创造力的习题 114, 120。
参见“创造力”。
数学的概括性 110。
数学概括
低能学生的数学概括 293, 295～297, 298～299, 301, 302, 308～311, 318;
非常有天赋的学生的数学概括 305～306;
数学概括的记忆 368～369;
数学能力不同的学生数学概括的水平 312～313;
有能力学生的数学概括 293, 294, 297～298, 299～300, 301～305, 313～315, 316～318。
中等能力学生的数学概括 294～295, 298, 299～300, 306;
参见“概括”。
数学概括能力 107, 289～322, 399;
数学概括能力的个别差异 293, 311～317, 321;
数学概括能力的年龄差异 443;
数学概括能力的评价 290;
数学概括能力的群因素 440～441;
数学概括能力的水平 289, 312;
数学概括能力的速度和广度 289～290;
数学概括能力的特殊性 434～444;
数学概括能力和概括能力 434;
作为数学能力成分的数学概括能力 431。
参见“概括能力”。
数学活动 85～86, 90, 113;
对数学活动的需要 373～374, 426～427。
参见“活动”。
数学记忆
伏洛佳 Kh. 的数学记忆 266;
关于数学记忆的实验题目 126～129, 136～138, 146～153, 161～162, 165～167, 181～185, 190～204;

很有能力学生的数学记忆 364;
没有能力(能力较低)学生的数学记忆 x,364～366;
能力中等学生的数学记忆 297;
数学记忆的本质 59,367～369,433～434;
数学记忆的年龄差异 416～419;
有能力学生的数学记忆 x,362～363;
作为数学能力成分的数学记忆 111～112,224,228,272,432。
参见"记忆"。
数学家
数学家的类型 51～52,385,388,399～400,403;
数学家的能力 432,434～436;
数学家的特征 424～430,432;
数学家的需要 7;
数学家先天的天赋 445。
数学盲 213。
数学能力
教师对数学能力的评价 211～212;
关于数学能力类型的实验题 126～129,138～140,155～159,170～173,185～190,192～210;
数学能力的本质 x～xi,29,72～74,92～93,95,96,221～230,444～447;
数学能力的补偿 84;
数学能力的成分 46～47,48～49;
数学能力的创造性方面(创造性特点) 26～27,27～28,41,41～42;
数学能力的定义 26～29,40,90～97;
数学能力的概念 85,405;
数学能力的个别差异 6～8,51～52,52～53,72～73,94～95,404,433;
数学能力的结构 viii～ix,ix～x,29,29～30,32～50,59～61,69～74,96,221～230,431～434;
数学能力的类型 29,51～52,83～84,98～99,105,108,124,228～230;
数学能力的年龄差异 72～73,97～98,103,130,404～419,444;
数学能力的生理本质 78～79,445～447;
数学能力的水平 85～86,212～213;
数学能力的特殊性 27～28,29～33,62～63,105,228,272,434～444;
数学能力的心理分析 44;
数学能力的性别差异 419～422;
数学能力的形成和发展 ix,ix～x,7～8,50～51,73～74,83～84,99,212～213,404～405,

425～429, 444;
数学能力的研究 25, 51注, 122～123;
数学能力的应用方面 27;
数学能力的再现方面 26, 40, 42;
数学能力对实践（练习）的需要 73;
数学能力复合体 84;
数学能力和个性特征 423～430;
数学能力和数学活动 89～90;
数学能力和对数学的兴趣 444～445;
先天(固有)的数学能力 27～29, 74, 84, 444～446;
作为数学能力基础的计算能力 271;
作为一般心理能力的数学能力 434～435。
参见"能力","数学气质"。
数学癖好 370注。
数学气质 x～xi, 94～95, 370～374;
个案: 伏洛佳Kh.的数学气质 266～267;
伏洛佳L.的数学气质 248;
基里亚Kh.的数学气质 250;
萨沙L.的数学气质 263, 264;
索尼娅L.的数学气质 240;
数学气质的结构类型 384～404;
数学气质和定势的概念 373;
数学天赋的气质 参见"数学天赋";
数学天赋的心理气质 272, 373, 433～434, 444～445;
作为数学能力成分的气质 431～432, 434～435。
作为一个体系的数学气质 434。
参见"抽象型","代数型","分析型","概念型","几何型","计算型","结构型","经验型","具体型","逻辑型","数学能力";"数学能力的类型","数学天赋的类型","调和(混合)型","数学心理","直觉型","综合型"。
数学上的形式主义(形式化) 110～111。
数学视觉 138。
数学思维
关于数学思维成分的实验题目 185, 192～209;
数学思维的成分 37, 47～49;
数学思维的抽象方面 110, 387～388;
数学思维的过程 viii～ix, x～xi, 37～38, 48～49, 54～55;
数学思维的结构 48～49;
数学思维的视觉特点 387;
数学思维的特殊性 59;
数学思维的性别差异 419～422;
有天赋儿童的数学思维 86。
参见"非数学思维的实验题","数

学推理”，“思维”。
数学题
数学题的类型 94；
数学题与逻辑题 181。
数学天赋
对数学天赋的个案研究 ix，x，231～269；
关于数学天赋的研究 17，98，103；
数学天赋的发展 7～8，79，271；
数学天赋的结构 431～432；
数学天赋的类型 226～227，387；
数学天赋的数学气质 370～374；
数学天赋的特殊性 30，31～32，59；
数学天赋的性质 97～99，271～272，433～434，444～445；
数学天赋和文学天赋 436；
数学天赋与创造性 85～87；
文献中关于数学天赋的实例 269～272；
先天的数学天赋 27～28；
与数学天赋才能有关的特性 17，424～430；
作为综合特征的数学天赋 95。
参见“天赋(天资、才能)”。
数学推理 43～44，72，228；
数学推理的发展 404～405；
数学推理的性别差异 421。
参见“数学思维”，“推理”。
数学推理的简缩
低能(没有能力)学生的数学推理简缩 326，329～330；
数学推理的简缩和数学才能 433；
数学推理的简缩能力 322～336，431；
有才能学生的数学推理简缩 x，324～325，330～331，336。
中等学生的数学推理简缩 325～327，329，336；
数学心理(智慧、头脑) 31，57，59，227～228，229～230。
参见“数学气质”。
数学兴趣 70，271～272；
数学兴趣的性别差异 422；
数学兴趣和数学能力的关系 92，228，424～425。
数学学习
关于学习数学的影响 97～98；
数学学习能力 30～31，85～86，86～87，93～95，104～105；
数学学习所需的性格特征 427～428。
数学因素 38。
数学中的功能(机能)性思维 37，46。
数字测验 185～187。
思维
创造性思维结果的新颖性 86；
积极思维 9；
皮亚杰的思维概念 54；
数量(定量)关系的思维 26，50；

思维的抽象成分 71, 389;
思维的广度和深度 53;
思维的精确性(正确性) 26, 228, 420～421;
态度对思维的作用 425～426;
思维的灵活(机动)性 71;
思维和能力 51～52, 60, 71, 72, 94～95;
思维速度 60, 227, 229, 235, 266～267, 432;
思维运算 54～55;
探索的思维 58;
形象思维 94。
参见"视觉-形象成分", "推理", "心理操作(运算)", "言语-逻辑成分"。
思维的简洁性 228。
思维的精确性 26, 228, 421。
思维的可逆性
皮亚杰指明的思维可逆性 55;
思维可逆性的本质 351;
思维可逆性的概念 351～352;
思维可逆性的个别差异 352～357;
思维可逆性的实验题目 128, 174～178;
索尼娅L.的思维可逆性 238;
有才能学生的思维可逆性 x, 353;
作为数学能力成分的逆向思维 108, 112, 223～224, 225～226, 351～357, 431～432。
思维(心理过程)的灵活性 336～347;
低能学生的思维灵活性 340, 341～342, 343, 344, 345～346;
个案: 伏洛佳 Kh. 思维的灵活性 266～267;
伏洛佳 L. 思维的灵活性 244～245;
索尼娅 L. 思维的灵活性 237～238;
过去经验对思维灵活性的作用 346;
解题思维的灵活性 53;
关于思维灵活性的实验题 126～129, 146～150, 159～161, 165～178, 187～190, 438;
数学能力中的思维灵活性的成分 7, 108, 112, 225, 228, 271～272, 431, 433;
思维灵活性的个别差异 339～346;
思维灵活性的年龄差异 415～416;
思维灵活性的评价 122, 336～337, 345～346;
有才能学生的思维(心理过程)灵活性 339, 340, 343, 344, 346;
中等学生的思维(心理过程)的灵活性 340, 341～342, 343, 344。
思维过程
测验中思维过程的忽视 16;

创造性思维中的思维过程 86～87;
对思维过程的研究 ix;
解题中的思维过程 116～117;
思维过程和能力 18, 94～95。
参见“数学思维过程”,“推理过程”。
思维过程的方向 53。
思维效率 71。
斯比尔门模式 参见“因素分析:斯比尔门模式的因素分析”。
算法 111。
算法能力 参见“计算能力”。
算术测验 131～132, 134～135, 137, 148～150, 154, 160, 168～169, 171, 176～177, 179, 188, 190～191, 194～197。
算术成绩 388, 421。
算术能力 32～35, 47;
算术能力成分 60～61, 71～72;
算术能力的性别差异 421;
算术能力与其他能力的关系 33～34。
算术题目 33, 113～114, 125。
速度
记忆的速度 77～78;
能力形成的速度 88～89;
思维的速度 60, 227, 229～230, 235, 266～267, 431～432;
学习的速度 71～72, 403。
素质、爱好 76～77, 80, 97;
爱好的发展 104;
对数学活动的爱好 92, 424～427;
素质、爱好对能力发展的作用 ix, 76, 78～83, 424～425;
素质、爱好和能力 76, 82～83, 93, 424～427;
素质和神经系统 446;
素质与天赋才能 99, 271～272;
素质在数学能力中的作用 444。
作为数学气质基础的素质 373～374。
索尼娅 L. 231～241, 283, 305～306, 307～308. 342, 348, 364, 378, 401, 402～403, 406。

T

态度(定势)
对数学的态度 92, 104, 424～426;
对中小学校不同学科的态度 104, 426;
态度对测验成绩的影响 20;
态度和能力 91, 95;
态度和数学气质 373;
态度和准备状态 93～94;
态度与作为创造力来源的兴趣 423。
谈话法 ix, xi, 103。
探究过程 63。
特殊测验 172～173。
特殊能力 13, 62～63。

特殊因素 22, 23, 35。
特性
个性(人格、特性) 91～92, 93～94, 423;
心理特性(心理品质) 89～90, 91～92, 94～95;
性格(特性、品质) 91, 92, 104～105, 423, 424, 427～429。
题目
题目的实质 X;
题目的内容 362;
题目的情境结构 53～54;
题目的视觉性 192;
题目的元素(因素) 277～278;
作为心理活动指标的题目 115。
参见"实验题目","数学题目"。
题目的难度 114。
题目的直观程度 192。
题目定向
参见"信息收集"。
题目"阶梯" 114～115, 121, 141。
题目结构的知觉 277～278;
对相似题目的题目结构的知觉 297～298;
关于题目结构知觉的实验题目 126～129, 131～155, 159～162, 185～187, 190～192;
题目结构知觉的多面性 138～139;
题目结构的分析综合知觉 109, 281～288;
题目结构知觉的评价 273;
题目结构知觉概念的范围 288。
题目类型 67, 125。
天赋(天资、才能)
禀赋的诊断 15;
数学天赋 30～32, 123, 445;
天赋(天资、才能) 96～97;
天赋的研究 12, 62～63;
天赋对能力和性格的作用 91～92;
天赋与环境 79～80, 83～84;
先天(固有)的天赋 79～80;
一般天赋和特殊天赋 84;
资产阶级心理学论天赋(天资) 10～11。
天资 参见天赋。
调和(混合)型 xi, 387, 388, 390, 400～404。
头脑中逼真的意象 402。
图形测验 186～187, 207～209。
推理 9, 32, 64～65。
参见"数学推理","思维"。
推理过程 63, 64～65, 114。
参见"思维过程"。
推理能力 17, 23, 43, 46～47, 114。
推理因素
推理因素和g因素的相关 41;
推理因素和数学能力 39, 43;
用于选择测验的推理因素 41。
参见"演绎因素"。
推理自动化 44, 47。
推理中的根本成分(要素) 65～66。

W

未提出问题
对未提出问题的题目的知觉 277～279, 285;
未提出问题的实验题目 131～133。
文学（文艺、艺术）能力 63, 93, 436。
稳定性 424。
问卷法 ix～x, 104。
无意识思维 56, 59, 375。
物理兴趣 421～422。

X

习惯(熟练)
和能力形成对比的习惯 ix, 87～92;
习惯对能力的影响 119～120;
习惯对解题的作用 53;
习惯和数学能力 92, 93～94;
习惯和准备状态 94。
下意识的思维
参见"无意识思维"。
先天(固有)能力 9, 61, 88, 421。
参见"遗传"。
相关分析 29。
相关系数
剩余相关系数 275～276, 291～293, 338, 440;
再生相关系数 275～276, 291, 292, 338, 440。
想象
数学想象力 60, 228;
态度对想象的作用 425～426;
想象力和能力 46, 73, 94～95。
效度 115。
心理测量学 15～16, 122, 135。
心理发展
参见"智力发展"。
心理运算 66～70。
参见"思维"."思维过程"。
心理状态 92, 93。
信度系数 115～116。
信号系统 51, 65, 79, 199, 388～389。
信息保持
关于信息保持的实验题目 128, 190～191;
解题中的信息加工 x, 220;
数学能力中信息保持的作用 124, 431;
有数学能力学生的信息保持 362～369。
参见"记忆"。
信息的概念 219～220。
信息过多的实验题目 135～138。
信息加工
关于信息加工的实验题目 126～128, 141～190;
解题中的信息加工 x, 220;
数学能力中信息加工的作用

124, 431;
信息加工的速度 414, 433;
有数学能力的学生的信息加工 289～361。
信息论 447。
信息收集
关于信息收集的实验题目 126, 131～140;
解题中的信息收集 x, 220～221;
数学能力中信息收集的作用 124, 431;
信息收集的评价 273;
有数学能力学生的信息收集 273～288。
形成联系的规律 64。
形式运算 55。
形象化成分
参见"视觉-形象成分"。
形象活动的能力 62～63, 94～95。
性别差异 35～36, 214～215, 419～422。
性格
参见"特性、品质"。
兴趣
兴趣的发展 104;
兴趣对测验成绩的影响 12, 20;
兴趣和能力的关系 82, 91, 92～93;
兴趣和数学气质 373;
数学能力中的兴趣因素 26～27;
兴趣在成就中的作用 424～425;
兴趣在能力发展中的作用 424;
作为创造性源泉的兴趣 423。
学习过程的控制 133。
学校
高等教育学院 241, 271;
年轻数学家的学校 429;
普通学校 4～5;
普通(大众)学校 4～5。
学校分数
学科间学校分数的比较 32, 385～386, 437～439;
学校分数和数学能力的关系 40～41, 43～44;
学校分数和智力关系 436～437;
学校分数与教师对能力的评价 211～212。
学校科目 ix, 32～35, 106。
参见"学校分数"。
学校数学 109～110, 113～114。
学校数学能力
外国心理学中的学校数学能力 26, 27, 40, 41。
学校数学能力的本质 63～64, 84;
学校数学能力的结构 431～434;
学校数学能力和素质 82～83;
学校数学能力与创造性数学能力 85～86。
训练
参见"教学"。

Y

言语表达
参见"出声思考"。
言语-逻辑成分
艾拉S.的言语-逻辑成分 255;
伏洛佳L. 的言语-逻辑成分 248;
萨沙L. 的言语-逻辑成分 265;
视觉-形象成分和言语-逻辑成分的相关 209, 386, 388～389, 389～391, 394, 400～401。
参见"波里索瓦指标"。
言语能力 23, 34。
言语-推理因素 420～421。
言语因素
言语因素的负载 41～42, 43;
言语因素的性别差异 420～421,
言语因素和数学能力 38, 39。
参见"流畅"。
演绎推理 26, 46, 50, 73～74。
演绎推理测验 42。
演绎因素 23, 43, 42～45。
参见"推理因素"。
一般的数学推理
参见"推理因素"。
一般心理能力
一般的心理能力和创造力的关系 436;
一般的心理能力(智力)和数学能力的关系 29, 29～32, 434。
遗传 3～4, 9～11, 27～28。
参见"先天(固有)能力"。
艺术能力 62～63, 95。
艺术型 389。
意志 27, 91, 92, 93, 95。
毅力(坚持性) 84, 91, 92, 104, 227, 428。
因素
因素的解释 22, 24, 35～36, 41, 45;
因素分析的假设性结构 24, 41。
参见"群因素"。
因素的轮组方法 35。
因素分析 xi, 21～22;
霍尔津格的双因素模式 441;
外国心理学中的因素分析 21～22;
为因素分析选择的测验 36～37;
研究能力结构的因素分析 122;
因素分析的层次结构学说 23, 35;
因素分析的多因素说 23, 29～30, 40;
因素分析的局限性 44, 45;
因素分析的斯比尔门模式 23, 30, 273～275, 290～291, 338, 439～440, 441;
因素分析的形心法 35～36, 40, 45;
因素分析研究法 vi～vii, 22～23, 23～25, 29, 29～30, 98;

因素分析在数据分析中的应用 273～275, 290～293, 337～338;
运用因素分析研究性别差异 420～421;
运用因素分析研究智力和成就（成绩） 436～437。
因素化
因素化的论证 275;
因素化的条件 274～275。
音乐能力 62～63, 94～95, 443～444。
"优美"解法 165, 238;
不关心"优美"解法 349;
力求解法"优美" x, 228, 266～267, 272, 339, 347～350, 416, 427, 431;
实验题"优美的"解法 127, 165～167;
优美解法与一般解法 413。
幽默感 424。
尤里 Kh. 373。
有天赋(天才)儿童
对有天赋儿童的研究 14;
有天赋儿童的人格特征 423, 424;
有天赋儿童的社会特征 423;
有天赋儿童的体格特征 423～424;
有天赋儿童能力的发展 6。
参见"数学的天赋(天才)"。
有天赋学生的"身体标准" 423～424。
酝酿 57～58。
运算
参见"活动"。
运算感受器 357～361。

Z

再造性的数学活动 85～86。
证明 52, 111;
证明的概括 301;
证明的过程 52;
证明能力 405;
证明题 52, 67～68, 113, 299～300, 329, 351。
知觉
态度对知觉的作用 425～426;
知觉和能力 49～50, 94～95;
知觉作为"领会"意义的使用 276 注;
知觉对数学思维的影响 53;
知觉的整体性 94～95;
知觉和解题 219。
知觉的能力 23。
知识
知识和能力的关系 33, 47, 51, 92, 93～95 119;
知识和准备状态 93～94。
直接联系
参见"联结(联想)类型"。
直觉
数学直觉 31, 51～52;

直觉的特征 57, 181～182;
直觉和数学能力 47, 51, 73, 229。
参见"灵感"。
直觉型 51。
职业 92。
指导性练习 64。
质的分析 25, 98, 103。
智慧(机智)的敏捷性(急智)(quick-wittedness) 60, 64。
智慧的敏锐性 (keen-wittedness) 60, 222, 224。
参见"概括能力", "数学概括能力"。
智慧倾向 28。
智力
智力的发展 xii, 20～21, 55, 67, 71～72, 282;
智力的性别差异 421;
智力和成就 436;
智力和概括能力 435;
智力和生理特征 424;
智力和数学能力 26, 36, 42～43, 46, 49,50～51, 228～229;
智力和天赋 84;
智力和学校的分数 436;
智力因素的本质 23～24, 29, 36。
智力测验 11～13。
种系发生 77。
主动性(创新精神) 104, 428。
主要心理能力 23, 30。
注意 94。
追溯家谱的方法(传记法) 27。
准备状态 20～21, 93～94。
准确(精确)的因素 420～421。
自律(纪律、自我批评) 91, 424。
自我批评 429。
自我观察
参见"内省"。
综合测验 162, 173～174。
综合能力 223。
综合型 229～230。
组合的能力 46, 228。
专心(全神贯注,聚精会神) 46,78, 92, 227, 446。
作为有天赋儿童品质的纪律 92, 424。
作图题 113。