【课堂研究】

看见不可见，让数学教育更加平易近人

——以圆锥曲线的概念教学和单元设计为例

张志勇[1]，张加红[2]
（1.常州市第五中学，江苏常州　213023；2.常州市三河口高级中学，江苏常州　213017）

【摘　要】“看见不可见”的教学主张，始于数学可视化的教学理解。文章以圆锥曲线的概念教学和单元设计为例，以GeoGebra为技术软件平台，从三个层面解读和诠释了“看见不可见”的内涵与价值：扎根践行，在技术应用中实现融合赋能；反思循证，在路径探寻中达成教研相长；自觉担当，在教学创新中推动学科育人，从而实现平易近人的数学教育的目标。

【关键词】教学主张；圆锥曲线；可视化教学；核心素养；单元教学

数智时代的当下，教育数字化已成为开辟教育发展新赛道、塑造教育发展新优势的重要突破口。那么，如何回应数字教育这一热点话题，推动数学教育的场景创新和教学形态变革呢？笔者认为，一方面要“看见不可见”，挖掘数字技术的表征优势，在抽象的数学与生动的现实间搭建联系通道，为学生理解概念创设背景，为学生探索规律启发思路，为学生解决问题提供路径；另一方面要探寻数学的教育价值，追求平易近人的数学教育，构筑学生身心成长与学科之间的生动关联，使学生在头脑中寻找概念、在概念关联中产生方法、在方法梳理中形成模式。基于这样的思考，便有了“看见不可见，让数学教育更加平易近人”的教学主张。本文以圆锥曲线的概念教学和单元设计为例，以GeoGebra为技术软件平台，从三个层面解读和诠释“看见不可见”的内涵与价值。

一、扎根践行，在技术应用中实现融合赋能

“看见不可见”的提出，始于数学可视化的教学理解[1]。二十多年的信息技术应用的实践研究，在用什么技术、如何使用技术、为什么用技术的不断追问中，我们认识到数学是抽象的、不可见的、难以被感官直接感知。想要推动信息技术与数学课程的深度融合，便要想方设法让数学变得具象化、看得见、可操作，正如“让我听见的，我会忘记；让我看见的，我就领会了；让我做过的，我就理解了”。

圆锥曲线作为椭圆、抛物线和双曲线的统称，其实就是用平面去截两个对顶圆锥所得的截线。第一，圆锥曲线属于平面几何内容，而平面截圆锥则是立体几何问题，于是，实现平面与立体间的穿梭过渡便是概念教学的第一个难点。第二，截线的形状取决于截面与圆锥的相对夹角，其中的分类标准往往只可意会，很难言传。于是，技

【作者简介】张志勇，正高级教师，江苏省首届苏教名家培养对象，江苏省“333高层次人才培养工程”培养对象，江苏省高中数学名师工作室主持人，江苏省教科研先进教师，主要研究方向为中学数学教育教学、试题研究及信息技术与数学学科的深度融合；张加红，高级教师，江苏省首届师德模范，江苏省“333高层次人才培养工程”培养对象，常州市特级教师后备人才，常州市学科带头人，主要研究方向为数学可视化教学与数学教师专业发展。

【基金项目】国家社会科学基金“十四五”规划2022年度教育学一般课题“‘双减’背景下义务教育阶段作业设计研究”（BHA220139）；江苏省教育科学“十四五”规划2021年度课题“基于核心素养的高中数学大单元教学价值意蕴与路径探析研究”（SJMJ/2021/10）

术赋能的要点在于构建出如图1所示的学习场景（其中α为圆锥轴线与母线的夹角、β为圆锥轴线与截面的夹角）。由图1可知，拖动滑动条改变α、β的值，可以“看见”截线形状的变化。结合两个平面视图，不难发现相应的数学结论：$\beta>\alpha$时截线为椭圆，$\beta<\alpha$时截线为双曲线，中间的“分水岭”则是抛物线（$\beta=\alpha$时）。事实上，构造对顶圆锥正是为了“看见”双曲线的双支，而GeoGebra中的“无限长圆锥（<点>，<直线>，<度|弧度>）”指令恰可以有效弥补我们的认知短板。

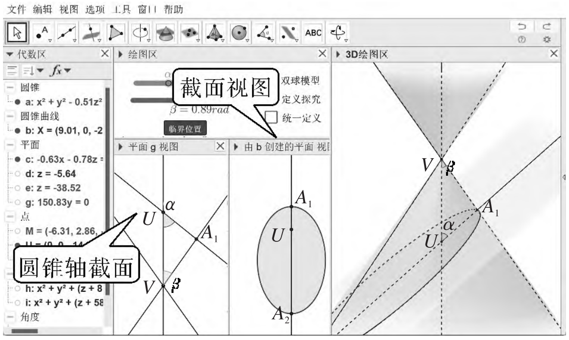

图1　平面截圆锥模型中理解截线定义

借助数字技术的表征优势，构建所见即所得的学习场景，可以形象、直观地帮助学生理解圆锥曲线的截线定义，但数学不能只是停留在猜测与想象层面，还得有推理和论证。如何证明图1中的曲线是椭圆还是双曲线，需要从轨迹定义的视角给出进一步的推断。为了实现截线定义与轨迹定义的关联佐证，比利时数学家旦德林发明了双球模型，即在对顶圆锥内“放入”两个球（与圆锥面和截面均相切），利用球外一点到球的切线长相等和圆台母线长度的不变性，可以推导出轨迹定义，从而得到相对严谨的数学论证。具体来说，以椭圆截线为例（如图2），球O_1、O_2与截面

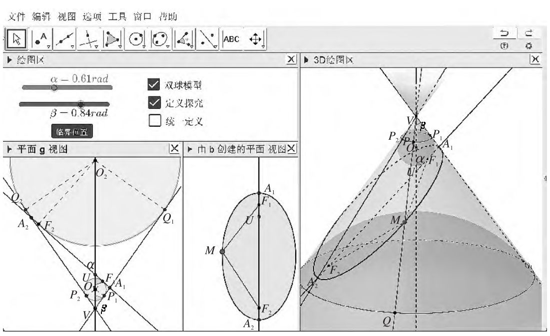

图2　双球模型中探讨轨迹定义

相交于点F_1、F_2，与圆锥面相切得到圆周π_1、π_2，任取椭圆上一点M，设圆锥母线VM与圆周π_1、π_2分别交于P、Q两点，则有$MF_1=MP$、$MF_2=MQ$，于是$MF_1+MF_2=MP+MQ=PQ$（定值），从而证得M点的轨迹为椭圆（双曲线可以类比得证）。

技术应用中的“看见不可见”，就是将抽象的数学内容可视化，是一种信息技术与数学课程的融合策略。推进信息技术与数学课程的深度融合，重要的是扬技术表征可视之长，避数学抽象理解之短，构建数学可视化学习场景，将抽象的数学内容用可视化的形式进行清楚、直观地呈现和表达，实现在提升学生数学学习兴趣的同时，推动学生的数学理解。技术应用中的“看见不可见”更是一种数学可视化的实施路径。教师在抽象的数学与生动的现实间构建联系通道，可以为学生插上直观想象的翅膀，让他们看到客观现象的数学本质，理解数学概念的抽象生成。学生通过进一步的实验操作和自主探索，可以发现丰富翔实的案例资源，让数学理性的种子得以生根发芽。

二、反思循证，在路径探寻中达成教研相长

技术融合固然可以改进我们的教与学，但要实现真正的赋能教学，则离不开课堂教学探索和反思研究跟进。在推进技术融合的过程中，往往会遇到很多隐性的教与学的问题，重要的是要看见问题而不能熟视无睹。教师在想方设法将问题显性化的同时，也为探讨教与学的改进提供了可能，这样“看见不可见”便成了一种教学研究策略和教师专业成长的行动指南。

图1告诉我们角度值α、β的变化决定了截线的形状，那么直观的背后有着怎样的真相？由于离心率e是刻画圆锥曲线形状的重要变量，我们自然有了“用α、β来表示离心率e”的设想。我们将如图2所示的轴截面图局部放大，得到图3（以椭圆为例），显然有$\angle VUA_1=\alpha$，$\angle UVA_1=\beta$，又设$\triangle VA_1A_2$的外接圆半径为r、周长为$2p$。则$A_1A_2=2r\sin2\alpha$，$VA_1=2r\sin(\beta-\alpha)$，$VA_2=2r\sin(\beta+\alpha)$；又$VQ_1+VQ_2=VA_1+A_1Q_1+VA_2+A_2Q_2=VA_1+A_1F_2+VA_2+A_2F_2=VA_1+VA_2+A_1A_2=2p$，则$VQ_1=VQ_2=p$，所以$A_2F_2=A_2Q_2=p-VA_2$，$A_1F_1=A_1P_1=p-VA_2$；$F_1F_2=A_1A_2-2A_2F_2=A_1A_2-2p+2VA_2=VA_2-VA_1$。

从而，有 $F_1F_2=2r\sin(\beta+\alpha)-2r\sin(\beta-\alpha)=4r\cos\beta\sin\alpha$。

得到椭圆的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{F_1F_2}{A_1A_2}=\dfrac{4r\cos\beta\sin\alpha}{2r\sin 2\alpha}=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$。

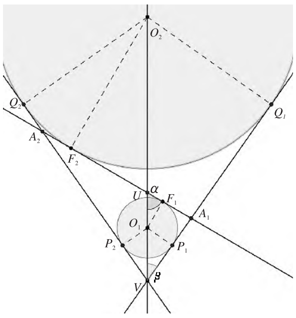

图3　双球模型下的轴截面图

抛物线是椭圆、双曲线的中间状态，与椭圆、双曲线关系密不可分，却又独具特色，它只有一个焦点。那么怎样理解抛物线的离心率呢？显然上述推导过程无法自圆其说，我们得另起炉灶重新思考。可以构造圆周 π_1 所在平面与截面的交线 l_1（准线），过椭圆上一点 M 作 l_1 的垂线（垂足为点 N_1），作面 π_1 的垂线（垂足为点 K_1）（如图4）。为了方便说明，类似地，将图4中的3D绘图区局部放大，得到图5。

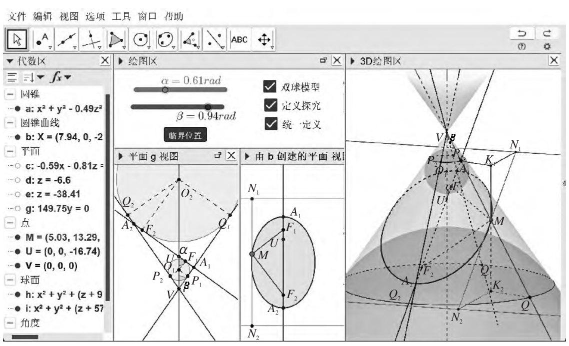

图4　夹角模型以寻求统一定义

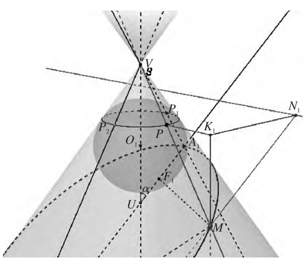

图5　夹角模型的局部放大图

因为 MK_1 平行于圆锥轴线 VU，所以 $\angle PMK_1=\alpha$，$\angle N_1MK_1=\beta$；于是 $MK_1=MP\cos\alpha$，$MN_1=\dfrac{MK_1}{\cos\beta}$，从而 $\dfrac{MF_1}{MN_1}=\dfrac{MP}{MN_1}=\dfrac{\dfrac{MK_1}{\cos\alpha}}{\dfrac{MK_1}{\cos\beta}}=\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}=e$。

这样，便得到了圆锥曲线的统一定义——平面内到一个定点和到一条定直线的距离之比等于常数的点的轨迹。因此，教师不仅要看到教的困惑，更要关注学的问题。事实上，早在公元前3世纪前后，古希腊学者便发现了圆锥曲线，但直到1822年旦德林发明双球模型，才填平了截线定义到轨迹定义的鸿沟。数学史与数学教育的“历史相似性”告诉我们，学生数学理解的过程也遵循数学思想的历史发展顺序。因此，圆锥曲线的概念教学很难一教了之、一蹴而就。教师不仅要讲述其中的道理，让学生“知其然，也知其所以然”，更要适当留白，让学生有机会操作实验，在动态关联情境中深度思考。如在教学中，教师仅以椭圆为例讲解其中的轨迹定义和离心率计算，而双曲线和抛物线中的类似结论由学生类比发现、自主论证。

教学研究中的“看见不可见”，就是将隐性的教学问题显性化。首先要有问题意识，“看见”就是要明察秋毫、初见端倪，在习以为常的场景中发现问题，在面临困境时反思问题，在事出意外时查找问题，正如“处处留心皆学问”。其次要解决问题，“看见”就是要植根现场寻找答案，以研究的态度审视自己的教学，以推理的要求查找可能的缘由，以实验的方式收集变化的数据，以循证的姿态探讨教学的改进。“看见不可见”不仅是一种教学研究策略，更是一种教师成为研究者的行动指南。如何帮助学生理解数学本质，积累活动经验，促进高水平思维参与？关键在教研，重点在课堂。教师需要看到更多的教学可能，并通过实实在在的行动来改进教与学，将本真的教育追问融通于日常教学中，以教研促教学，用科研带教研，在成就学生中发展自我。

三、自觉担当，在教学创新中推动学科育人

面对教育高质量发展的时代需求，如何以核心素养统领课程，以学科实践提升学习效果，以

学业质量标准引导学习水平？重要的是以“质”致远、向“新”而行。教师通过脚踏实地、持之以恒的教学研究，将课程专家眼中有确定内涵的概念构想落实到课堂中，从案例到模式，从资源到课程，做出看得见的实践案例和可操作的方法策略。

聚焦核心素养的单元教学是实现高质量课堂教学的关键，做好单元教学设计是实现数学单元教学的基础，也是搭建学生核心素养培育与教师专业发展的桥梁。[2] 如何从知识、技能或方法学习的整体出发，综合考虑学生核心素养长远发展，开展完整的单元教学规划？笔者认为，以数字化资源为联系纽带，恰恰可以构建一线贯通的问题情境、一脉相承的知识体系和一如既往的思想方法。

对于“圆锥曲线与方程”一章的学习，苏教版高中数学新教材（2021年版选择性必修第一册）从平面截圆锥出发[3]，引发椭圆、双曲线和抛物线的学习需求，然后从平面解析几何的视角具体探讨三类曲线的概念、标准方程、几何性质和应用。新教材虽有研究方法的类比探讨，也有“圆锥曲线的统一定义”的阅读链接，但单元教学设计的系统性与整体性却难见踪影。以新教材的“圆锥曲线与方程”内容为基础，融合苏教版高中数学旧教材（2005年版选修4-1）“圆锥的截线”中的实验探究元素[4]，贯穿三种模型的可视化资源，可以构建出“圆锥曲线”单元教学案例，实现流畅自然、环环相扣的“起承转合”教学样态（如图6）。“起”是开始，从呈现平面截圆锥模型入手，创设学习情境帮助学生理解截线含义。“承”是过程，引入双球模型探讨轨迹定义，再由立体到平面，从解析几何的视角具体探讨椭圆和双曲线的概念、标准方程、简单几何性质及应用（即“圆锥曲线与方程”一章的相应内容）。“转”是变化，从抛物线的特殊性看到轨迹定义的局限性，构造夹角模型以寻求内在统一。在初步建构统一定义的基础上，具体探究抛物线的概念、标准方程、简单几何性质及应用。“合”是收尾，从挖掘三种曲线、三类定义之间的系统关联入手，通过进一步的推理论证构建完整的知识结构图。在这样的单元教学中，可视化的教学资源得到反复应用，提供了递进与并列交织的学习研究线索。更重要的是，核心素养的导向贯穿教学始终，如对应截线定义、轨迹定义、统一定义的三种模型更迭，体现了数学建模的周期性。

数学学科育人中的“看见不可见”，就是将肩负的教育责任行动化。在教育大变革的当下，面对现实的牵拉与扯拽，矛盾的纠结与纷扰，教师需要看见自己的责任使命，跳出“内卷”，化解“短视”，坚守教育的初心与良知，要基于现实情境开展专业探索，弥合教育理论与教育实践“两张皮”的落差，将新一轮课程改革真正落实在课堂中。因此，“看见不可见”是一种思想更是一种自觉，是道阻且长、行则将至的躬耕自觉，更是向着地平线出发的教育情怀。

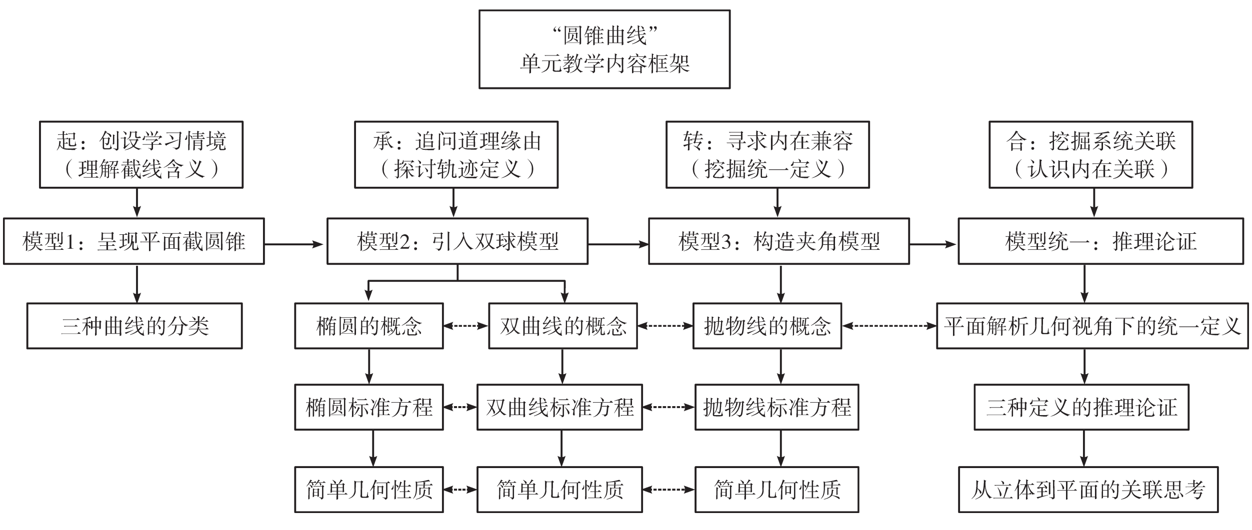

图6 “起承转合”的单元教学框架

教育的答案在现场，“看见不可见”的教学主张正是在迭代更新中不断找寻着自己的“概念话语”（如图7）。在表层的时间维度上，从技术应用走向融合赋能，是一种方法和路径；在中层的空间维度上，从策略行动走向教研相长，是一种成长和发展；在深层的核心维度上，从学科教学走向学科育人，是一种精神和态度；最终的目标指向是“平易近人的数学教育”。“平”是平实，侧重于“教什么”的思考，让数学概念平实易懂、运算推理简洁明了、方法模型普通高效，这就需要我们进行数学的再创造。“易”是简易，侧重于“如何教”的考量，重在“化易”，教师通过教学法加工，在学生头脑中寻找概念，在概念关联中产生方法，在方法梳理中形成模式。“近人”是贴近学生实际，侧重于“为什么教”的探讨，从学科教学到学科育人，重点是在“人—知”互动中推动学科核心素养的培育，让学生学会用数学思维分析世界，用数学眼光观察世界，用数学语言表达世界。

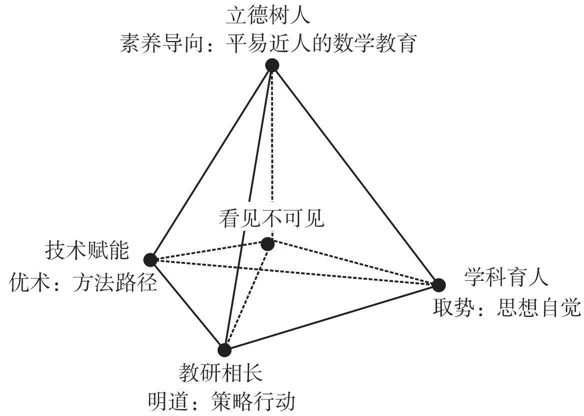

图7 “看见不可见”的三个维度

“看见不可见”如同一盏明灯，让教师在照亮经验、“看见”自己的同时，抬头瞩目前方，向着地平线前行。

参考文献：

［1］张志勇. 高中数学可视化教学：原则、途径与策略：基于GeoGebra平台［J］. 数学通报，2018（6）：21-24，28.

［2］曹一鸣，孙彬博，苏明宇，等. 促进学生核心素养发展的高中数学单元教学设计：以“导数及其应用”为例［J］. 基础教育课程，2023（6）：34-43.

［3］苏教版高中数学教材编写组. 普通高中教科书 数学（选择性必修第一册）［M］. 南京：江苏凤凰教育出版社，2021.

［4］单墫. 普通高中课程标准实验教科书·数学几何证明选讲（选修4-1）［M］. 南京：江苏教育出版社，2005.

（责任编辑：罗小荧）

（上接第16页）

价值并关注二者的平衡。研究者发现，开放性问题的运用能影响学生回答问题的复杂性和深广度，最终能加深学生对问题的理解。尽管取得了许多重要研究成果，但已有研究仍在提醒人们：课堂教学中，开放性问题并不是绝对优于封闭性问题。不同性质的问题要求不同的思维方式，因而教学中不同的问题也就具有不同的思维教学价值。科学性问题有助于培养学生的理性思维，人文性问题则有益于学生的形象思维；科学性问题有利于培养学生的探究、实证精神，人文性问题则有利于培养学生同情理解、体验反思的能力。值得一提的是，科学的思维方式和人文的思维方式不是截然分开、互不相容的，而是时常交叉整合、融会贯通的。作为教学就更是如此，因为任何学科课程的教学都既有科学性，也有人文性。课堂如何设计与建构问题，设计和建构什么样的问题，实质上反映了教师对学科本质理解的深度和广度。一个深刻、全面地理解所教学科本质的教师，他在与学生展开对话的时候就会掌握住问题特性以及针对问题所运用的思维方法，进而用问题去启发学生相应的思维，并有效地促进学生的学科思维发展。

参考文献：

［1］TABA H，ELZEY F F. Teaching strategies and thought processes［J］. Teachers college record，1964（3）：327-361.

［2］黄伟. 试论科学提问、哲学提问对课堂教学的启示［J］. 教学研究，2018（6）：80-85，111.

［3］黄伟. 课堂对话的运作机理：基于话语分析的视角［J］. 教育研究，2014（7）：123-130.

（责任编辑：罗小荧）