



基于审美教育的高中数学 课堂教学的实践研究 ——GGB 助力课堂教学探索

孙 青

(常州市第五中学, 江苏常州, 213000)

摘 要:随着数学新课程改革的不断推进,数学审美教育的研究受到越来越多的关注.如何在数学课堂教学中渗透数学审美教育,引导学生去感悟、体会、传递数学之美,成为迫切需要解决的问题.研究基于“椭圆及其标准方程”的教学,探究数学审美教育的实施路径,以“传递美”为目标,以“图形”为载体,通过 GeoGebra 动态图形助力课堂教学,让学生在直观的、动态的、充满新意的课堂学习中去感悟、体会、传递数学之美,进而把数学教学由知识的传授、思维的培养推向一个更高的平台.

关键词:高中数学;审美教育;课堂教学;椭圆标准方程

苏霍姆林斯基曾经说过:“没有审美教育,就没有任何教育.”审美教育是素质教育的重要组成部分.随着数学新课程改革的不断推进,数学审美教育的研究受到越来越多的关注.数学审美教育又称“数学美学教育”,它是以培养学生的数学审美能力、激发学生的审美情趣、树立学生的审美理想为目标的教育.那么如何在数学课堂教学中渗透数学审美教育,引导学生去感悟、欣赏数学之美呢?本文以“椭圆及其标准方程”的教学为研究对象,探究数学审美教育的实施路径,通过 GeoGebra(下文简称 GGB)动态图形助力课堂教学,让学生在直观的、动态的、充满新意的课堂学习中掌握椭圆的概念及其标准方程,感悟数学美的本质,欣赏数学之美.

1 教材的地位和作用

本节内容选自苏教版普通高中教科书选择性必修第一册第3章第1节,它以“展示背景、建立曲线概念;建立方程,利用方程研究曲线”为主线,让学生经历从具体问题情境中抽象出椭圆的过程为教学目标,进而掌握椭圆的定义及其标准方程.不仅突出了解析几何里曲线方程与方程曲线相联系、函数与图形相结合的重要思想,同时还与前面章节的圆及后面章节的双曲线、抛物线等知识的研究有很多相似之处,所以,从教材结构上来说,它起到了承上启下的作用,从研究方法上来说,反映了数学和谐的统一美.

2 挖掘教材,把握数学美的特征

“一般认为,数学美分为生活中的美和思维领域

的美,包括数学的表现形式、应用形式、文化价值,以及思维领域的统一、和谐、简洁、奇异、逻辑、严谨等诸多方面.”数学美在形成人类的理性思维和促进个人智力发展的过程中发挥着独特的、别的学科不可替代的作用,这正是数学的魅力所在.而“椭圆及其标准方程”的教学则是体现数学美的有效载体,具体表现为奇异美、对称美、简洁美、统一美和严谨美.

2.1 奇异美

奇异美指的是数学中存在着许多“奇异”的现象,它们会在令人“惊异”之余,给我们带来无限遐想.如:在立体几何中,用一个平面(不经过圆锥的顶点)去截一个圆锥面,当平面与圆锥面的轴垂直时,平面与圆锥面的交线是一个圆.若改变平面的位置时,平面与圆锥面的交线则会是椭圆、抛物线或双曲线.这是一个非常奇妙的现象.

2.2 对称美

世间万物都蕴含着丰富的数学关系,有着丰富的对称美.对称美是为人们比较容易感知的,它是一种形式上的美,能给人们一种匀称的美感.数学中的对称美不仅体现在图形上,还体现在代数上.几何学中的轴对称图形、中心对称图形都能给人以舒适美观之感,而椭圆标准方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的奇妙之处就在于它在图形上既是轴对称图形,又是中心对称图形,在代数上也能给人以对称美之感受.

2.3 简洁美

简洁美表现在数学的符号、公式、概念、推理过

程以及思想方法等各个方面.而它在高中数学新教材中则主要体现在结构、形式和方法上,将复杂的实际问题或者图形划归为简单的数学表达式.如:椭圆定义的奇妙之处就在于它不仅能用数学的语言进行文字表述,即:平面内到两个定点 F_1, F_2 的距离之和等于常数(大于 F_1F_2)的点的轨迹叫做椭圆,两个定点 F_1, F_2 叫做椭圆的焦点,两个焦点间的距离叫做椭圆的焦距.还能用数学的语言进行符号表示,即: $PF_1 + PF_2 = 2a (2a > F_1F_2)$, 其中, PF_1 表示动点 P 到定点 F_1 的距离, PF_2 表示动点 P 到定点 F_2 的距离, $2a$ 表示距离之和, F_1F_2 表示焦距.这样,用符号语言表示椭圆的定义,它表达的既简洁,又方便学生去记忆.

2.4 统一美

毕达哥拉斯曾经说过:“凡是美的东西都具有一个共同特征,这就是部分与部分之间,以及整体之间固有的协调一致.”这说的就是统一美,其通常表现为概念、规律、方法的统一,数学理论的统一、数学与其它科学的统一.如:在研究椭圆的方程时,可以类比圆的研究过程,按照“建立平面直角坐标系→设动点的坐标→找限定条件→代入点的坐标→化简”这五个步骤去推导椭圆的方程,这说明椭圆与圆在研究方法上具有统一性,反映了数学的和谐统一之美.

3 基于审美教育的高中数学课堂教学的实践

3.1 创设动态直观的数学问题情境,激发学生的审美兴趣,感悟数学之美

问题情境 1 生活中有很多形状的物品,同学们能列举出哪些是椭圆形状的物品吗?太阳系中行星的运行轨迹又是什么样的呢?

学生说出生活中常见的椭圆形物品,并且描述太阳系中行星的运行轨迹后,教师利用多媒体展示天体运行的动态图形,通过生活中常见的椭圆物品和行星运行的动态图形,引导学生对椭圆产生直观的感知.

设计意图: 观察生活中的椭圆和行星的运行轨迹,引导学生发现生活中的数学美,能够激发学生研究椭圆的审美兴趣.

问题情境 2 在生活中有很多椭圆形状的物品,那么在数学中有没有呢?在苏教版普通高中教科书必修第二册专题“数学建模与数学探究”中,用一个平面(不经过圆锥的顶点)去截一个圆锥面,当平面与圆锥面的轴垂直时,平面与圆锥面的交线是一个圆.改变平面的位置时,那么平面与圆锥面的交线是

什么形状呢?

学生思考平面与圆锥面的交线可能是哪些形状,并发表自己的观点.教师利用 GGB 动态演示平面与圆锥面交线的形状,学生通过观察发现,改变平面的位置时,平面与圆锥面的交线可能是椭圆、抛物线和双曲线(如图 1).

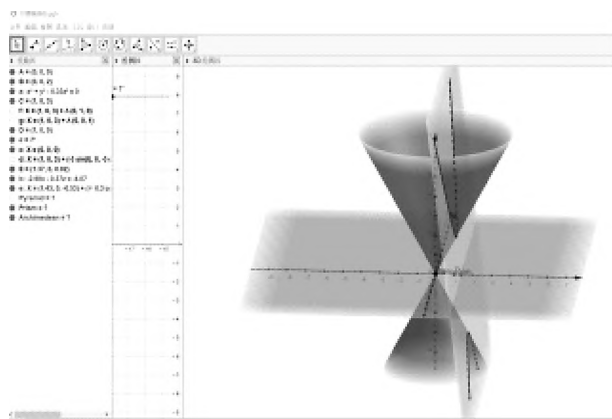


图 1

设计意图: 通过旧知识,引出新问题,让学生去回忆苏教版普通高中教科书必修第二册专题“数学建模与数学探究”的内容,引导学生发现数学中的美,并借助 GGB 立体动态图形演示平面与圆锥面交线的不同情形,能够直观的、动态的帮助学生了解交线的三种情况,进一步激发学生的审美情趣,进而感悟数学的奇异之美.

问题情境 3 改变平面的位置时,平面与圆锥面的交线什么时候是椭圆?什么时候是抛物线?什么时候是双曲线?

教师运用 GGB 立体动态图形再次演示平面与圆锥面交线的变化情况,设圆锥母线与轴所成的夹角为 θ ,平面与圆锥轴所成角为 $\alpha (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$. 学生进行观察,教师进行适当的引导,得出结果有以下三种情形:

第一种情形,当 $\theta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时,平面与下圆锥的所有母线都相交,与上圆锥不相交,平面与圆锥面的交线是一条封闭的曲线,我们称之为椭圆.

第二种情形,当 $\theta = \alpha$ 时,平面与下圆锥一条母线不相交,其余母线都相交,与上圆锥不相交,平面与圆锥面的交线是一条不封闭的曲线,我们称之为抛物线.

第三种情形,当 $\theta > \alpha$ 时,平面与上、下圆锥都相交,且上、下圆锥都有无数条母线与平面不相交,平

面与圆锥面的交线是两条不封闭的曲线,我们称之为双曲线.

椭圆、抛物线、双曲线,统称为圆锥曲线.

设计意图:利用 GGB 立体动态图形,让学生观察平面与圆锥面交线的变化规律,寻找圆锥母线与轴所成的夹角 θ 和平面与圆锥轴所成角 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) 之间的关系,让学生感悟数学的和谐统一之美和思维严谨之美.

问题情境 4 联想生活中的经验,当我们把一个有水的杯子放在桌面上时,它的正截面是一个圆;当我们把水杯倾斜时,它的斜截面则不是圆,而是一个椭圆.圆的几何特征是圆上各点到圆心的距离相等,那么由斜截圆锥面所得的图形是否具有类似的几何特征呢?

在斜截面的两侧分别放置一个球,使它们都与截面相切(切点分别为 F_1, F_2),且与圆锥面相切,两球与圆柱面的公共点分别构成圆 O_1 和圆 O_2 (如图 2).

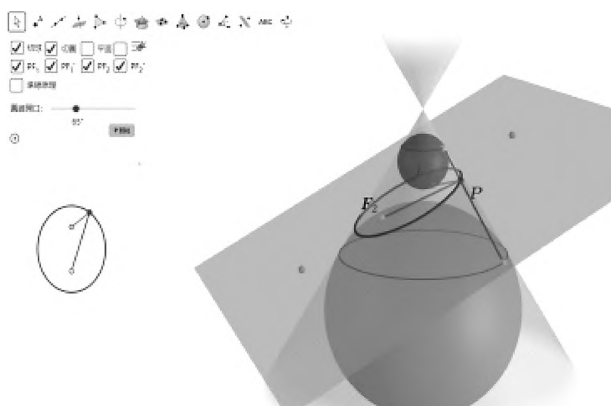


图 2

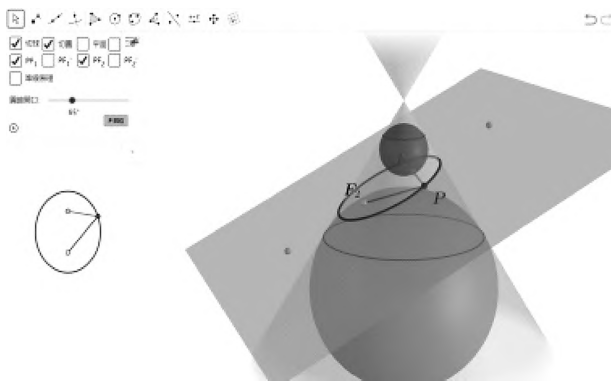


图 3

设点 P 是斜截面与圆柱面的截线上任一点,过点 P 作圆锥面的一条母线分别交圆 O_1 和圆 O_2 于

M, N 两点,则 PM 和 PF_1, PN 和 PF_2 分别是圆 O_1 和圆 O_2 的切线.因为过球外一点作球的切线,则切线长相等,所以

$$PF_1 = PM, PF_2 = PN,$$

$$\text{故 } PF_1 + PF_2 = PM + PN = MN.$$

因为 MN 为圆锥的母线,所以线段 MN 是一个常数.也就是说,截面上任意一点到两个定点 F_1, F_2 的距离的和等于一个常数(如图 3).

学生通过观察图形和推理过程得到椭圆的几何特征:一个椭圆具有两个定点 F_1, F_2 ,使得椭圆上任意一点到这两个焦点的距离之和等于常数.

设计意图:联想生活中的经验,类比圆的几何特征,来猜想椭圆是否具有类似的几何特征,这反映了圆与椭圆之间具有统一之美;再通过 GGB 立体动态图形,用数学的语言来推理论证交线与椭圆几何特征之间的联系,能够让学生感悟到数学的严谨之美.

问题情境 5 平面内到两个定点 F_1, F_2 的距离之和等于常数的点的轨迹一定是椭圆吗?如果是椭圆,是否还需满足别的条件?

3.2 开展数学实验,探索椭圆定义的形成过程,体会数学之美

实验 1 老师让学生拿出课前事先准备好的一块图版、一根定长的细绳和两枚图钉,按要求进行动手画图.

第一步:将两图钉固定在同一点,拉紧绳子,移动笔尖,这时候发现笔尖(动点)画出的图形(轨迹)是一个圆;

第二步:将两枚图钉分别固定在两点(两点间的距离要小于绳子的长度),拉紧绳子,移动笔尖,这时候发现笔尖画出的图形是一个椭圆;改变两定点间的距离,多尝试几次(两点间的距离始终要小于绳子的长度),这时候发现笔尖画出的图形是扁平程度不同的椭圆;

第三步:拉紧绳子,将绳子的两端分别固定在图钉上,使得两图钉间的距离等于绳子的长度,这时候发现笔尖画出的图形是一条线段.

设计意图:引导学生按 4 人一小组开展数学实验,通过探索实验,能够让学生初步对椭圆所要满足的条件有一定的了解,同时也能体会到学习椭圆知识的乐趣,在实验中体会数学的奇异之美.

实验 2 教师借助 GGB 动态模拟演示椭圆的绘制过程,让学生再一次体会两定点间的距离与定长之间的关系.

设计意图:应用 GGB 的动态轨迹跟踪功能,能够帮助学生直观地、动态地观察椭圆上动点 P 的运动规律,使学生感受椭圆定义的发展过程,加深学生对椭圆定义的理解,体会数学之美.

问题情境 6 通过上述两个实验,同学们能否归纳出椭圆上动点 P 需要满足什么样的几何条件?

学生根据自己的实验,并且结合观察老师用 GGB 演示的椭圆形成的动态图形,比较容易发现:

① 当动点 P 到两个定点 F_1, F_2 的距离之和大于两个定点间的距离时,动点 P 的轨迹是一个椭圆(如图 4);

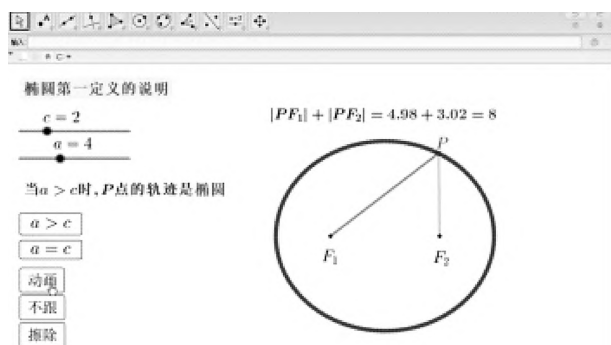


图 4

② 当动点 P 到两个定点 F_1, F_2 的距离之和等于两个定点间的距离时,动点 P 的轨迹是一条线段(如图 5);

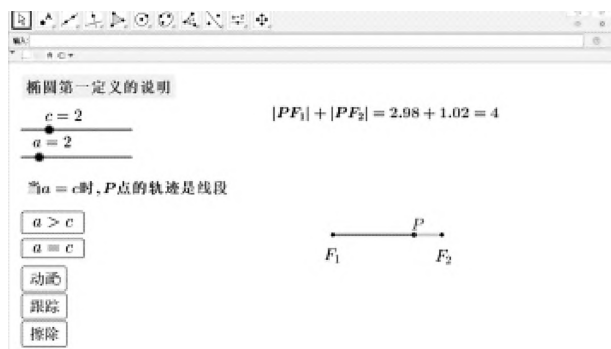


图 5

③ 当动点 P 到两个定点 F_1, F_2 的距离之和小于两个定点间的距离时,动点 P 的轨迹不存在(如图 6).

进而引导学生归纳出椭圆的定义:平面内到两个定点 F_1, F_2 的距离之和等于常数(大于 F_1F_2)的点的轨迹叫做椭圆,两个定点 F_1, F_2 叫做椭圆的焦点,两个焦点间的距离叫做椭圆的焦距即 $F_1F_2 = 2c$. 而 $PF_1 + PF_2 = 2a (2a > F_1F_2)$, 其中, PF_1 表示动点 P 到定点 F_1 的距离, PF_2 表示动点 P 到定点 F_2 的距

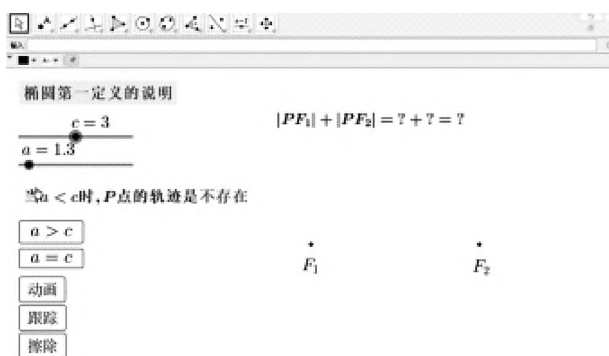


图 6

离, $2a$ 表示距离之和.

设计意图:学生通过归纳总结得出椭圆的定义,将实验结论归纳抽象成为数学问题,揭示椭圆定义的数形关系,有利于培养学生的逻辑思维能力,让学生体会到数学的逻辑严谨之美.

3.3 自主探究,化繁为简推导椭圆的方程,传递数学之美

问题情境 7 同学们,现在我们已经学习了椭圆的定义,前面我们知道圆是在平面直角坐标系中建立方程的基础上来研究的,圆锥曲线都有其对应的方程,椭圆也不例外,那么,你认为怎样去给椭圆建立平面直角坐标系最合理? 才能使所得方程更简洁、更美观呢?

引领学生一起回顾圆的方程在平面直角坐标系中的探究过程,类比这一过程,寻找最合理的给椭圆建立平面直角坐标系的方法,大部分学生以两焦点 F_1, F_2 的连线作为 x 轴,线段 F_1F_2 的中垂线作为 y 轴,建立平面直角坐标系 xOy ;但也有少数几个学生以 F_1, F_2 所在直线作为 y 轴,线段 F_1F_2 的垂直平分线作为 x 轴,建立平面直角坐标系 xOy ,或者以椭圆的某一个焦点为原点来建立平面直角坐标系 xOy .

设计意图:引导学生对圆的方程探究过程的回顾,既能够让学生合理选择建立平面直角坐标系的方法,又能够为学生按正确步骤来推导,为用简洁、合理的代数式来表示椭圆的方程作铺垫;通过学生自己动手选择建系方案,能够让他们感受到数学图形的对称美、形式美和统一美,很好地提升了学生的数学学习兴趣.

问题情境 8 类比圆的标准方程的推导过程,我们如何去推导椭圆的标准方程呢?

学生先回忆圆的标准方程推导的步骤:建立平面直角坐标系→设动点的坐标→找限定条件→代入

点的坐标→化简,简称“建、设、限、代、化”.然后按照这五个步骤来推导椭圆的标准方程.其过程如下:

以 F_1, F_2 所在直线作为 x 轴,线段 F_1F_2 的垂直平分线作为 y 轴,建立平面直角坐标系 xOy .

设动点 $P(x, y)$ 为椭圆上任意一点, $F_1F_2 = 2c$, 则 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$,

根据椭圆的定义可知 $PF_1 + PF_2 = 2a (2a > 2c)$,

即 $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a (2a > 2c)$,

将这个方程移项后两边平方,得

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 (2a > 2c),$$

整理得 $cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} (2a > 2c)$,

两边再平方,得

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2,$$

因为 $a^2 - c^2 > 0$, 所以可设 $a^2 - c^2 = b^2 (b > 0)$, 于是得 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 (a > b > 0)$,

两边同除以 a^2b^2 , 得 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

由上述过程可知,椭圆上的任意一点 $P(x, y)$ 都满足上面的这个方程,反过来,也可以证明上面这个方程的解 (x, y) 都在已知椭圆上.

这样,焦点为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ 的椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0).$$

类似地,焦点为 $F_1(0, -c), F_2(0, c)$ 的椭圆的方程

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0).$$

以上这两种方程我们都叫做椭圆的标准方程,其中 $b^2 = a^2 - c^2$.

设计意图: 通过类比圆的研究让学生来推导椭圆的标准方程,说明圆与椭圆之间的探究方法具有一定的统一性与和谐性,能够让学生感悟到数学方法的统一、和谐之美.通过“建、设、限、代、化”这五个步骤把椭圆的方程用一个简洁、合理的代数式表达出来,能够让学生体会到数学符号语言的简洁之美.

4 基于审美教育课堂教学的一点思考

普罗克洛斯认为:“哪里有事,哪里就有美”.一个符号、一个公式、一个概念、一条曲线、一个图形、一种思想、一个方法,无不蕴含着数学美.由于高中生容易受到知识水平和生理、心理等因素的影响,在学习过程中很容易忽视数学美的存在,更不要说数学审美了.因此激发学生的审美情趣、培养学生的数学审美能力、树立健康的审美理念刻不容缓.为此可以开设了“椭圆及其标准方程”这节研究课.

在本节课的教学中,笔者首先通过生活中椭圆形状的物体,并利用多媒体展示太阳系中天体运行的动态图形,让学生对椭圆产生了一定的直观感知,激发学生的审美兴趣,感悟生活中的数学之美.然后以知识回顾为导向, GGB 动态演示平面与圆锥面交线之间的变化规律,进一步激发学生的审美兴趣,让学生感悟数学中的奇异美.紧接着,让学生经历动手实践操作, GGB 动态演示椭圆生成的过程,探索椭圆定义的形成过程,体会数学之美.最后,类比圆的方程探究过程,按照“建立平面直角坐标系→设动点的坐标→找限定条件→代入点的坐标→化简”这五个步骤,在老师的引导下,让学生自己去推导椭圆的方程,传递数学之美.通过这样一个过程,将数学美的特征贯穿于“椭圆的定义及标准方程”的课堂教学中,为学生练就一双发现数学美的“慧眼”,更是为学生提供历经“感悟美”“体会美”“传递美”的平台,体会数学知识的“活力”与“魅力”,深刻领悟数学的真谛,从而提高学生专研数学的精神,有效培养学生的数学思维,把数学教学由知识的传授、思维的培养推向一个更高的平台.

参考文献:

- [1] 张国棟. 谈中学数学的审美教育[J]. 数学通报, 2010(7):9.
- [2] 吴莺. 高中数学教学中美育的渗透问题分析[J]. 中学数学, 2020(17):71.
- [3] 陈建权. 基于核心素养的高中数学美育教学实践研究——以“三角函数的图像与性质”为例.[J]. 天津师范大学学报(基础教育版), 2022(23):6.
- [4] 周建锋. 挖掘横向联系, 构建研究型课堂——以“椭圆及其标准方程”教学为例[J]. 中学数学研究, 2022(8):20.
- [5] 吴启霞. GeoGebra 助力高中数学问题解决课堂教学的实践研究——以“椭圆及其标准方程”一课的教学为例[J]. 数学之友, 2022(15):76.