

后,不仅要弄清楚重要信息之间的关系,还要能用自己喜欢的方式表示出来,让学生的思维可视化。

有的学生把重要信息的位置进行了新的调整,从一维空间到二维空间,观察的视角有了新的维度,还可以从上到下观察;而且把“照这样”这个词的数学含义凸显出来,每件衣服钉6个珠子是不变的,数量是相等的,4件衣服这样钉,12件衣服同样如此,“1”是不变的,“每份数”是不变的。有了“1”就有“多”,“1”和“多”是相互依存的。

在此基础上,吴老师紧紧抓住时机,引导学生:除了竖着观察,还可以怎样观察?

学生受到启发:还能横着看,12件是4件的几倍,那么求出的72个也应当是24个的几倍。把数量之间的关系进一步深化理解,拓展了学生对“1”和“多”的新认识,函数思想也渗透其中。从一维到二维,丰富了对数量关系的感知,而且也从多个角度理解数量关系,并能对自己的想法从多个角度互相印证。

吴老师的课堂总能深入浅出,纵横联通。其原因就在于吴老师始终把学生放在心里,站在学生立场,尊重和对接学生的经验,把他们“熟悉的数学”“有意思的数学”搬到课堂上,从多个视角观察和解读;同时把数学本质蕴含在活动中、对话中,从而实现知识间的前有孕伏、后有照应,数学思想方法的无痕渗透,以及透过现象看本质的融会贯通。

纵观整堂课,吴老师重视了两次转化。第一次转化是在丰富的、具体的、多样的生活情境中,提取重要的信息,把故事转化成数学问题。第二次转化是在解决问题过程中,引发学生的认知冲突,在分析、比较、抽象、概括、交流、反思中把问题解决转化为数学思考。在各种方法的对比中学生们从具体的到半抽象的,再到抽象的模型的提升,经历了模型建立的过程。好教师就像一粒种子,种下方法收获能力,种下情感收获美好,种下思想收获人生。在学习中不仅学会知识而且习得了方法和用数学思考问题的方式,而这正是儿童数学教育追求的传递知识、启迪智慧、完善人格的目标。

(作者单位:北京市顺义区教育研究和教师研修中心,北京市房山区教师进修学校)

H

抽屉原理,也称鸽巢原理,是组合数学中的一个重要原理。在2001年前,抽屉原理只是作为数学竞赛的内容,学生在课外兴趣小组中学习。课程改革后,人教版教材将其纳入“数学广角”的内容,安排在六年级下册。

抽屉原理的结论表述简洁、抽象,对六年级学生而言,要真正理解并不容易,因此这节课不好教。在很长一段时间内,无论是随堂听课,还是参加教学观摩活动,每次听抽屉原理,总觉得教师没有教清楚,学生没有学明白。我也一直在思考、琢磨,但苦于找不到教学改进的突破口,不敢轻易尝试。

教学现状与问题思考

1.例1教学现状与问题思考。

(1)教学现状。

对于教材中的例1,大多数教师是这样教的:先呈现“把4支铅笔放进3个笔筒中,不管怎么放,总有1个笔筒里至少有2支铅笔”这句话,让学生初读理解后,教师提出问题:“总有1个笔筒里至少有2支铅笔”这种说法对吗?

然后要求学生摆一摆(或画一画),呈现四种不同放法(如图1),引导学生观察、思考、讨论,确认每一种放法都符合“总有1个笔筒里至少有2支铅笔”。

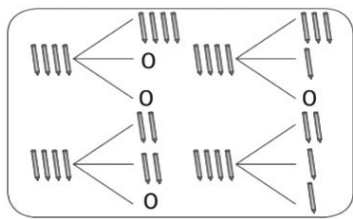


图1

而后,再追问:“‘总有’和‘至少’是什么意思?”通过交流学生明白“总有1个笔筒”是指一定存在1个笔筒或至少有1个笔筒,“至少有2支铅笔”是指有2支或2支以上。

最后,教师向学生介绍(或启发学生提出)教材给出的第二种思考方法,采用“假设”的思路进行推理:先放3支,在每个笔筒中放1支,剩下的1支就要放进其中的1个笔筒,所以至

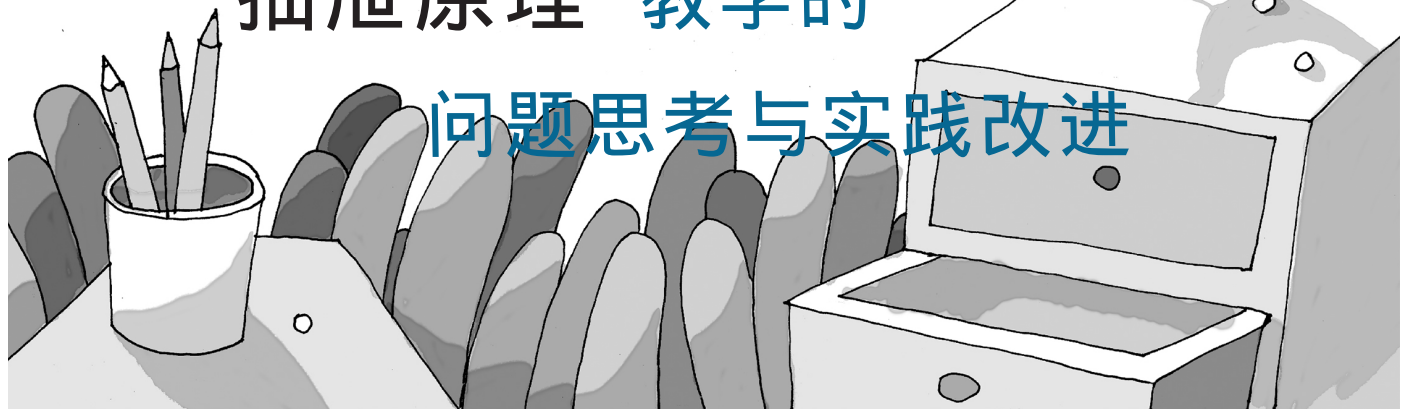
问

题

解

决

“抽屉原理”教学的问题思考与实践改进



至少有1个笔筒中有2支铅笔。

(2)问题思考。

“把4支铅笔放进3个笔筒中，不管怎么放，总有1个笔筒里至少有2支铅笔”这句话可分为两部分：①“把4支铅笔放进3个笔筒中”这是情境描述，所蕴含的问题是“你能发现什么规律”；②“不管怎么放，总有1个笔筒里至少有2支铅笔”是结论。

通常的设计都是教师创设问题情境，学生探索发现规律，而不是直接给出结论，让学生去证明结论是否正确。上述教学过程，学生缺失了观察发现、抽象概括规律的过程，学习方式过于理性化、成人化，影响学生对规律的深度理解。

我曾听过有教师尝试这么教学：先创设问题情境“把4支铅笔放进3个笔筒中”，然后提出问题：“有几种不同的放法？”在组织学生通过操作罗列出4种放法后，让学生观察、思考发现的规律。结果遭遇尴尬：没有学生能自主发现规律！

细想之后，不难发现期望学生自己概括出“总有1个笔筒里至少有2支铅笔”这个规律要求高了！主要的原因是“把4支铅笔放进3个笔筒中”这个情境过于数学化，无法有效驱动学生

思考和表达其中蕴含的规律。

那能否设计出可以有效驱动学生思考和表达“抽屉原理”的问题情境呢？这是研究例1教学过程中困扰我的最大问题。

2.“做一做”教学现状与问题思考。

(1)教学现状。

接着来分析“做一做”第1题的教学：5只鸽子飞进3个鸽笼，总有1个鸽笼至少飞进了2只鸽子。为什么呢？

教学时，因为罗列出所有可能结果比较烦琐，所以很多教师不再要求学生采用枚举法，而是鼓励学生采用“假设”的思路进行推理。学生一般会这样表达：5只鸽子飞进3个鸽笼，先每个鸽笼飞进1只鸽子，再让剩下的2只鸽子分别飞进其中的2个鸽笼。所以，总有1个鸽笼至少飞进了2只鸽子。

(2)问题思考。

以上教学过程，值得商榷。

其一，延续例题编写方式，本单元所有习题全部采用“问题情境+规律表述+要求证明”的方式。我认为这是需要改变的，教师应该在给出问题情境后，鼓励学生自己思考发现、抽象概括规律。实践证明，这完全可行。

其二，过早抛弃枚举法，要求学生只采用

“假设”的思路进行推理,抽象过快、要求太高。

过早抛弃枚举法,会带来什么问题呢?下面结合一个培训案例进行说明。

在一次暑期新教师培训时,我让近百位新入职教师写出下面问题的结果:把10个苹果放进9个抽屉里,总有1个抽屉里至少放了()个苹果。结果颇让人惊讶,也令人担忧,竟然有11位教师填错了答案,而且错误的答案都是“1”。

随后的访谈让我明白了问题所在,这11位教师的想法如出一辙,他们都采用“假设”的思路进行推理(如图2)。

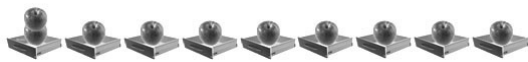


图2

显然,他们也已经抛弃了枚举法,直接想“最不利”的这一种情况。但在填写答案时,他们比较的是“2”和“1”,当然“1”是更少的了。

我再让教师来分析:为什么括号里不能填“1”,而要填“2”呢?结果发现,很少有教师能把用“假设”的思路进行推理的过程讲清楚。

那么,怎样才能把这个问题分析清楚呢?有下面三种分析方法可供选择:

方法一:枚举法。先罗列出“把10个苹果放进9个抽屉里”这一事件发生的所有可能结果。但因为可能的结果太多,可以简化,想明白“每一种放法中,最多的那个抽屉可能放了几个苹果”,有“2~10个”共9种可能,其中最少是“2个”。再从“最不利”的角度,用平均分的方法,进一步说明“不可能比‘2个’再少了”。

方法二:假设法。直接想“最不利”的情况,采用“假设”的思路进行推理。假设先把9个苹果放进9个抽屉里,每个抽屉里放进1个,剩下的1个苹果要放进其中1个抽屉里。但这时,还不能直接推理得出“总有1个抽屉里至少放了2个苹果”这个结论,只能得出“一定有1个抽屉里放了2个苹果”。

教学时,需要引导学生经历完整的推理过程:

①假设先放9个苹果,在每个抽屉里放1

个,剩下的1个还要放进其中的1个抽屉。所以一定有1个抽屉里放了2个苹果。

②如果不是这样尽可能平均地放,那么,总有一个抽屉里有2个或2个以上的苹果。

③因此,不管怎么放,总有1个抽屉里至少有2个苹果。

如果缺失了上述第二步,学生就会一知半解,似懂非懂。上述培训案例中,填错答案的教师就是因为采用“假设”的思路进行推理时,过程不完整产生了错误。

方法三:反证法。即先假设“总有1个抽屉里至少有2个苹果”这个结论不成立,那就是说“所有抽屉里都不到2个苹果”。然后分析“哪怕在每个抽屉里都放1个苹果,总共才放了9个苹果”,说明假设不成立,从而反过来证明“总有1个抽屉里至少有2个苹果”这个结论是正确的。

比较以上三种方法,枚举法具体形象,最有利于学生理解“总有”和“至少”的含义;缺点是比较烦琐,在数据变大时,罗列出所有可能的结果较为困难。假设法和反证法简洁有力,普遍适用;缺点是比较抽象,对学生推理能力的要求比较高。结合第一课时教学目标和六年级学生的思维水平,我认为本节课教学主要采用枚举法分析问题。如在“做一做”教学时,还是需要让学生先罗列出所有可能的结果(数据较大时可以简化),再观察、发现和概括出规律。如果有学生提出假设法,教师则需要引导学生经历完整的推理过程。

◆ 教学设计与实践思考

教学过程:

(一)谈话导入。

引导学生说一说是什么是抽屉原理。

(二)探究新知。

1.问题情境一。

(1)呈现问题情境:小明上课发言积极,老师要奖励他,奖品共有4支铅笔。小明有以下两个选择:

①直接拿2支笔,开心地走了。

问

题

解

决

②老师会把这4支笔放入3个抽屉里(抽屉是敞开的)。等老师放好后,选择其中1个抽屉里的笔作奖品。

(2)组织讨论:如果小明想得到尽可能多的铅笔,你建议小明怎样选择?请说明理由。

设计意图:问题情境中,小明是三年级的学生,让本节课的教学对象——六年级学生给小明选择建议,这是一个比较好的驱动探索的任务,也是一个富有挑战性的问题。把例1的“把4支铅笔放进3个笔筒中”改成“把4支笔放入3个抽屉里”,是为了让抽屉原理更符合学生思考的逻辑。

实践思考:一开始选择,学生的意见就产生了分歧:有的学生选择①,多数学生选择②,还有学生认为选择①、②均可。有分歧说明学生对问题的认知有差异,有分歧、有差异就有讨论、分析的必要,这是引导学生卷入探究的强大动力。

在交流、讨论过程中,学生需要罗列出所有可能的放法,并给出选择的理由。学生选择①的理由是:小明能拿到2支笔;选择②的想法是小明还是只能拿到2支笔,因为老师会按照(2,1,1)的数量放笔。

这时,需要引导学生走出理解抽屉原理的一个重要误区,即不能把“把4支笔放入3个抽屉里”这个事件看成一个确定性事件!

学生需要结合情境理解:在小明作出选择前,老师还没有“把4支笔放入3个抽屉里”。老师的放法不唯一(如果只考虑铅笔的数量,不考虑抽屉的顺序,共有4种不同放法),在小明作出选择前,他并不能确定老师会按照哪种方法放笔。

这也是选择②的学生所表达的理由:老师共有(4,0,0)(3,1,0)(2,2,0)(2,1,1)这4种放法,如果选择②,小明可能得到2支笔,也可能得到3支笔或者4支笔。进而引导学生更加简洁地表述为“至少有2支笔”,从而完成抽屉原理最为重要的一次抽象概括,初步理解“至少”的含义。

接着,教师结合4种放法追问:“不是还有1支和0支吗,为什么说至少有2支笔?”从而让学

生理解“至少有2支笔”并不是要求每一种放法中所有抽屉里都要有2支笔,而只要“存在”至少1个抽屉就可以了。这样,学生对抽屉原理的第二个关键词“总有”也达成了初步理解。

教学至此,“把4支笔放入3个抽屉里,不管怎么放,总有1个抽屉里至少有2支笔”这个规律自然抽象概括出来了(如图3)。在这一过程中,学生不但初步理解了抽屉原理,掌握了两个关键词“总有”和“至少”的含义,还增强了对“变与不变思想”的体验感悟。

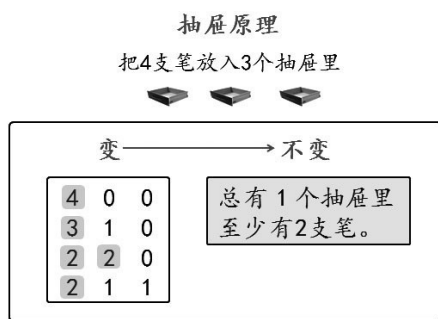


图3

2.问题情境二。

(1)呈现问题情境:小玲作业正确率高,老师也要奖励她,奖品共有5支铅笔。小玲有以下两个选择:

①直接拿3支铅笔,开心地走了。

②老师会把这5支铅笔放入3个抽屉里(抽屉是敞开的)。等老师放好后,选择其中1个抽屉里的铅笔作奖品。

(2)组织讨论:如果小玲想得到尽可能多的铅笔,你建议小玲怎样选择?请说明选择理由。

设计意图:采用问题情境串的设计形式,让教学更有整体性。“把5支铅笔放入3个抽屉里”,变化的是放法:(5,0,0)(4,1,0)(3,2,0)(3,1,1)(2,2,1)。不变的规律依然是“不管怎么放,总有1个抽屉里至少有2支铅笔”。

实践思考:因为情境一的思维惯性,几乎所有学生都不假思索地选择②。这时,教师要求学生想一想老师所有可能的放法,并有序写下来。再次交流时,几乎所有学生又都改变了主意,建议小玲选择①,理由是:如果选择②,小玲会有只

能得 2 支铅笔的风险。

这时,教师再次追问:如果建议小玲选择②,有理由吗?让学生进一步明白选择②,虽然有只能得 2 支铅笔的风险,但也有得 4 支或 5 支铅笔的希望。从而更加全面、深刻地理解“至少”的含义,进一步增强对“变与不变思想”的体验感悟。教学可谓一波三折,充满悬念。

通过深度讨论,让学生逐步体悟到,有时候,数学能帮助我们作出唯一确定的选择,但更多时候,数学只能帮助我们分析、厘清解决问题的思路,每个人还需要根据自己的意愿,决定选择“稳妥”,还是愿意“冒险”。

3. 介绍数学家狄里克雷发现抽屉原理的历史。

4. 解答抽屉原理的两个经典问题。

(1) 把 10 个苹果放入 9 个抽屉,总有 1 个抽屉里至少放了()个苹果。

教学时,通过追问“至少”的含义,引导学生不但完整经历用“假设”的思路进行推理的思维过程,而且清晰理解“最多中的最少”这一层意思。

(2) 9 只鸽子飞进 5 个鸽巢,总有 1 个鸽巢至少飞进()只鸽子。

教学时,先追问“至少”的含义,强化对“最多中的最少”的理解。再追问“把什么看作抽屉”,从而告知抽屉原理又叫鸽巢原理。最后追问“如果有 10、11、12、13、14、15、16 只鸽子呢”,让学生初步掌握从“最不利”的角度,用“假设”的思路进行推理,快速找到答案的思维过程。

(三) 应用巩固。

1. 引导学生举例。

2. 玩一玩,扑克牌游戏中的抽屉原理。

先明确一副完整的扑克牌去掉大、小王后,还剩下 52 张,黑、红、梅、方各 13 张。指名让 5 个学生每人任意抽一张牌,反扣在桌面上,引导学生思考:你能得出什么结论?讨论后呈现规律:至少有 2 张牌是同一花色的。在学生表达思考过程后,揭开这 5 张牌,让学生进一步理解“至少”的

含义,感悟随机思想。

3. 想一想,手机号码中的抽屉原理。

让学生将自己或爸爸、妈妈的手机号码写下来,思考:你能得出什么结论?讨论后呈现规律:至少有 2 个数字重复出现。在学生说明思考过程后,统计“2 个、3 个、4 个数字重复……”的情况,进一步加深学生对“至少”含义的理解。

4. 议一议,班级学生中的抽屉原理。

(1) 任选 3 位同学,你想到了什么规律?

思考、讨论后呈现规律:至少有 2 位同学性别相同。

(2) 任选 13 位同学,你又想到了什么规律?

思考、讨论后呈现:至少有 2 位同学出生的月份相同。教学时,还有学生表达为:至少有 2 位同学的星座相同,这也是正确的。但有学生表达为:至少有 2 位同学的属相相同,这是不正确的(全班只有两种不同的属相)。

上述练习,采用“只给情境,让学生自己发现和表达规律”的方式,这与教材采用的“问题情境+规律表述+要求证明”的方式不同。初看起来,似乎拔高了教学要求,其实不然,这样的方式给了学生更大的思维空间和表达自由,更加有利于学生思考。

多次实践后的教学改进建议

在教学“抽屉原理”时,教师要努力做到以下几点。

1. 需要创设更加贴近学生实际、具有问题驱动力的教学情境。2. 鼓励学生自己观察发现和抽象概括出规律。新课教学和巩固练习时,教师都应在创设情境、提出问题后,要求学生自己完整表述规律。3. 不要轻言放弃“枚举法”,建议以此作为第一课时的主要分析方法。在用“假设”的思路进行推理时,要引导学生经历完整的推理过程。而用有余数除法解决问题,这是教材例 2 的教学要求,需要建立在清晰理解“枚举法”和“假设法”的基础之上,第一课时可以不教。

(作者单位:浙江嘉兴教育学院)

WJ

问

题

解

决