2020年12月 **中** **小** **学** **教** **材** **教** **学** 总第72期

**课题研究**

**数学实验：让算理和算法完美融通**

——提升小学生运算能力的尝试与思考 刘正松

摘要：小学阶段是学生运算能力形成的重要时期，良好的运算能力离不开“数 的运算”具体内容的学习，其中，“理解算理”和“掌握算法”是计算教学的两个 核心。基于小学生的认知规律与年龄特征，精选“数的运算”的关键节点内容，设 计数学实验，引导学生“做中学”,融通算理和算法，提升小学生的运算能力。

**关键词：**运算能力；数学实验；算理；算法 DOI:10.19878/j.cnki.zxxjcjx.2020.12.017

运算是数学学科的重要内容，它是数学活动 的基本形式，也是演绎推理的一种形式，是解决 数学问题的基本手段。在义务教育阶段的数学课 程内容中，运算占有很大的比重，它不仅是“数 与代数”领域的重要内容，“图形与几何”“统计 与概率”“综合与实践”等领域也与运算有着密 切的联系。学生在学习数学的过程中，会花费较 多的时间与精力去学习和掌握各种运算知识与技 能，从而逐步发展运算能力。

**一、小学生运算能力的内涵特征**

小学阶段是学生运算能力形成的重要时期， 伴随着学生知识结构和年龄特征的不断变化，正 整数、自然数、整数、分数数系的不断扩充， “掌握必要的运算技能”作为重要的知识技能目 标贯穿于义务教育三个学段。

《义务教育数学课程标准(2011年版)》将 “运算能力”作为十个核心概念之一，认为“运算 能力主要是指能够根据法则和运算律正确地进行 运算的能力。培养运算能力有助于学生理解运算 的算理，寻求合理简洁的运算途径解决问题”。

《普通高中数学课程标准(2017年版)》将

“数学运算”作为数学学科六大核心素养之一， 明确指出：数学运算是指在明晰运算对象的基础 上，依据运算法则解决数学问题的素养。主要表 现为：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算 思路，求得运算结果。

笔者以为，就小学生而言，良好的运算能力 是指在理解算理的基础上，根据法则、公式等正 确熟练地进行运算，并能根据解决问题的需要寻 求合理简洁的运算途径和方法。自然，“正确熟 练”和“合理简洁”是良好运算能力的外显特 征。这里，“正确熟练”是运算能力的基本要求， 指向学生能按照一定的程序和步骤进行运算，并 在适度训练的基础上，不断提高运算的熟练程 度，力求运算顺畅，减少失误。“合理简洁”则 是运算能力的高阶要求，指向学生清晰理解运算 的算理，并能在多种运算路径与方法中主动选择 最优化的算法。

**二、小学数学运算教学的关键节点**

良好运算能力的形成不是一蹴而就的，其发 展离不开具体的计算教学，且整体呈现从简单到 复杂、从具体到抽象、从低级到高级的基本趋

**基金项目：**2019年江苏省基础教育前瞻性教学改革实验重大项目“数学实验：义务教育数学学科育人的创新实践”。

势。为理清学生运算能力发展的层次性与阶段 性，我们对小学不同学段“数的运算”学习内容 及其关键节点进行了梳理(见表1)。

**表1** **小学“数的运算”学习内容关键节点**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **学段** | **第一学段** | **第二学段** |
| **关键节点** | **1.进位加法** **2.退位减法****3.两、三位数乘一** **位数****4.两、三位数除以** **一位数** | **1.小数乘整数****2.除数是整数的小** **数除法****3.乘法分配律****4.异分母分数加** **减法****5.分数乘分数****6.分数除以整数** |

无疑，上表中列出的小学“数的运算”学习 内容的关键节点是学生运算能力的“生长点”与 “延伸点”,自然也是学习的重、难点，瞄准这些 关键节点内容逐一突破，学生运算能力将得以有 效提升。

**三、基于数学实验的教学尝试**

传统意义上，不少教师将计算当作获取结果 的工具，认为计算的过程是一种人为规定，简单 地告诉学生怎么写、怎么算就行，如此教学，使 得学生只知其然，不知其所以然，无形中淡化了 计算教学的育人价值，给学生学习带来诸多不必 要的困扰。

其实，“理解算理”和“掌握算法”是“数 的运算”相关内容教学的两个核心。算理是计算 过程中的道理，解决“为什么这样算”的问题， 算法是计算的方法，解决“怎样算”的问题，两 者不能偏颇。实践表明，直观与具体是理解算 理、提炼算法的重要方法和手段。对此，数学实 验具有先天的优势，它借助学生身边简单的工 具，侧重于引导学生动手“做”数学，并在这一 过程中实现“算理”与“算法”的融通，使得学 生的运算能力稳步提升。我们选取几个关键节点 内容进行了尝试。

(一)退位减法(隔位退位减法)

学情分析：20以内退位减法是学生学习减 法计算的一个难点，但在退位减法中，隔位退位 减法无疑是最难的。学生先前的计算经验中，算 到某一位不够减时，向前一位借1即可。而隔位

退位减法计算时，当学生遇到某一位不够减时， 向前一位借1,前一位是0,需要再向前一位借 1,进而展开后续计算。很明显，这样的减法思 维程序复杂许多，学生需在脑海中储存一系列信 息，在清晰每一步退位的来龙去脉之后才能正确 计算，对学生的思维要求极高。

教学关键：借助计数器操作实验理解算理， 进而提炼算法。

实验工具：计数器。 教学设计：

1.计数器计算204—108。

(1)出示主题图，学生根据情境提出问题并 列式：204—108。

(2)学生尝试用计数器计算204—108。

(3)指名演示并介绍计算过程：①在计数器 上拨出204;②个位4减8不够，向十位借1, 十位是0,再向百位借1,因为1个百=10个 十，百位拨去1颗珠，退到十位上变为10颗珠；

③再从十位上拨去1颗珠，退到个位上变为10 颗珠，这样个位上共14颗珠；④个位上14颗珠 减去8颗珠，还剩6颗珠；⑤此时十位上剩9颗 珠，减数十位上是0,因此减完差的十位上仍为 9;⑥百位剩1颗珠，减数百位是1,减完得0, 这样算出最后结果为96。

(4)学生根据演示再次用计数器计算一遍。 2.回顾计数器计算204—108的过程。

(1)出示204—108计数器计算示意图(见图1)。

个

**图1204—108计数器计算示意图**

(2)指名学生复述计数器操作计算的过程。 3.竖式计算204—108。

(1)学生尝试竖式计算(略)。

(2)集体交流方法：关键明确被减数十位上 “0上打点看作9”。

(二)两、三位数除以一位数

学情分析：学生学习两、三位数除以一位数 的基础是加、减法、表内除法，以及两、三位数 乘一位数，而先前的竖式计算都是从最低位算 起，列竖式时都是从上往下逐步计算。这些经验

对于两、三位数除以一位数的计算并没有实质性 的借鉴意义，两、三位数除以一位数的算理、算 法是全新的，学生理解算理、掌握算法都有一定 难度。教学中，以两位数除以一位数为突破口， 学生一旦领悟其算理和算法，将自然类推到三位 数除以一位数。

教学关键：整合单元教学内容，通过小棒操 作实验理清算理，形成算法。

实验工具：小棒或小方块。 教学设计：

1.小棒计算46÷2。

(1)出示主题图，学生列式：46÷2。

(2)学生尝试口算结果并分小棒验证。

(3)方法一，先分十位的4捆小棒，每份2 捆，再分个位的6根小棒，每份3根，把两次分 的结果合起来是23;方法二，先分个位的6根 小棒，每份3根，再分十位的4捆小棒，每份2 捆，把两次分的结果合起来是23。

2.小棒计算52÷2。

(1)学生尝试分小棒计算。

(2)方法一，先分十位的5捆小棒，每份2 捆，剩下1捆，把剩下的1捆拆开和个位的2根 小棒合成12根分，每份6根，把两次分的结果 合起来是26;方法二，先分个位的2根小棒， 每份1根，再分十位的5捆小棒，每份2捆，剩 余1捆，把这1捆拆开继续分，每份5根，把三 次分的结果合起来是26。

(3)引导比较：哪种分法更方便?

通过交流明确：分两步分更方便，先分十 位，再分个位。

3.小棒计算52÷4。

(1)学生尝试分小棒计算。

(2)指名演示并介绍操作过程：先分十位的 5捆小棒，每份1捆，剩下1捆，把剩下的1捆 拆开和个位的2根小棒合成12根继续分，每份 3根，把两次分的结果合起来是13。

4.回顾小棒计算46÷2的过程。

(1)出示小棒计算示意图(见图2)。

(2)指名学生复述小棒操作计算的过程。 5.竖式计算46÷2。

(1)学生尝试竖式计算(略)。

(2)集体交流方法：关键明确用小棒计算时

II /IIl

 *BBIIl* **BIIl**

**图246÷2小棒计算示意图**

从高位起，分两步算，列竖式计算同样从高位 起，分两步算。

(三)乘法分配律

学情分析：在小学数学学习中，乘法分配律 是学生所学运算律中运用最为广泛的，它适用于 整数、小数、分数四则运算。但学生学习乘法分 配律更多的是从表面上记住乘法分配律的形式， 而不是从本质上理解乘法分配律的实质，因此在 应用乘法分配律解决问题时便会出现各种错误。

教学关键：运用多种方式进行表征，建构乘 法分配律基本模型。

实验工具：三种规格的长方形彩纸。

教学设计：

1.拼长方形。

出示：红色、黄色、蓝色三张长方形纸片， 从中选择两张拼成一个大的长方形。

学生动手操作，集体展示。 2.计算面积。

列式计算拼成的大长方形的面积。

(1)学生测量。

红色长方形：长64毫米，宽46毫米； 黄色长方形：长46毫米，宽36毫米； 蓝色长方形：长54毫米，宽36毫米。

(2)学生计算并交流方法。

红十黄：(64+36)×46或64×46+46×36; 黄十蓝：(46+54)×36或46×36+54×36。 3.观察特征。

(1)观察两种不同方法算式的特征。

(2)指名交流：

相同点：两种不同方法结果相同。(用等号 连接两道算式。)

不同点：第一种方法先算两个长方形长的 和，再与宽相乘；第二种方法先分别算每个长方 形长与宽的积，再相加。

4.猜测验证。

(1)学生根据上述等式的特征，提出猜想： 两个数的和与第三个数相乘，等于这两个数分别 与第三个数相乘，再把积相加。

(2)自行举例验证。

(3)集体交流。

(4)揭示乘法分配律。 5.表征规律。

逐步出示图3:



图 3 乘法分配律面积模型图

(1)学生用不同的方法表示面积：(a+b)×c 或 a×c+b×c;

(2)用乘法分配律进行解释。 6. 回顾旧知。

逐步出示图4:

12×3 10×3 十 2×3

图412×3计算点子图

指名学生用乘法分配律解释算法。

(四)分数乘分数

学情分析：分数乘分数的计算是在分数乘整 数的计算基础上学习的，但分数乘整数的算理、 算法比分数乘分数的算理、算法好理解，学生可 以直接借助整数乘法的意义进行迁移，但分数乘 分数的算理较为抽象，学生理解较为困难。

教学关键：通过折纸或画示意图理解算理， 形成算法。

实验工具：长方形白纸。 教学设计：

(1)理解意义。

出示：收割机每小时收割公顷， 小时收

割多少公顷?

尝试列式，说明列式依据。

结合具体情境理的意义即“求 的

是多少”。

(2)折纸计算 

学生尝试折纸表示出计算结果。

指名交流方法：把一张长方形纸看作1公



顷，先对折，画斜线表示出公顷，接着扎 公

顷平均分成4份，在其中1份上画上不同方向的

斜线。这里斜线交叉的部分就是 公顷的, 也 就是 公顷。

(3)画图计算

学生尝试画图计算(见图5)。

公颂的4

公 顷

1公顷

1公顷

1公顷

公顷

2 1 8

图 5 画图计算图

集体核对。

(4)总结算法。

学生观察算式，总结算法。

四 、算理与算法在数学实验中融通

算理是算法的理论依据，为计算提供正确的 思维方式，保证计算的合理与灵活；算法是算理 的提炼概括，为计算提供规范的操作方法，保证 计算的正确与速度。基于数学实验的计算教学通 过对具体实物的操作、观察和思考，引领感性的 认识向理性飞跃，自然融通算理与算法。

(一)数学实验是数学学习的基本样态

数学实验的研究起源于大学，近年来，随着 基础教育课程改革的逐步深入，学生学习方式发 生了深刻的变革，数学实验也走进了中小学数学 课堂。不过，中小学课堂中的数学实验明显区别 于大学数学实验，它是学生借助一定的工具，在 数学思维的指导下，通过实际操作解决问题的数 学实践探索活动。但它不同于一般的动手操作， 是以操作为主要特征的数学验证或探究活动。

就计算教学而言，由于内容的枯燥必然会给 学生学习带来乏味的感觉，那么,改变计算教学 的课堂生态便迫在眉睫。走进不同版本的小学数 学教材，编写者在编写教材时也关注到了这一 点，以“两位数除以一位数”为例，人教版、苏 教版和北师大版小学数学教材例题选择的情境不

尽相同，安排的年级略有差异，但都不约而同地 选择了小棒作为学具，帮助学生积累感性经验。

作为一线教师，我们要读懂教材的编排意 图，将静态的教材还原成学生学习的学材，精心 设计数学实验，引导学生先动手分一分，在操作 中厘清计算的道理，并进一步根据操作的过程总 结算法，使算理和算法相互交融。在上述四节关 键节点内容的教学中，我们不难发现，教学时用 的都是学生身边司空见惯的学具：计数器、小 棒、小方块、拼图、彩纸……但课堂上学生边操 作、边观察、边思考，这些学生喜闻乐见的学习 方式一旦融入课堂，他们好玩、好动的天性得以 满足，自然会主动参与到学习活动中。因此，数 学实验这一“做”中学数学的方式，有效拉长知 识的体验过程，调动学生感官全面参与，理应成 为小学生数学学习的基本样态。

(二)数学实验契合小学生的思维特点

人的思维是由动作思维开始逐步发展为抽象 逻辑思维的。小学生由于生理、心理和知识发展 水平的局限，数学学习中思维活动水平的层次不 高。主要表现在他们对具体、形象的问题思维比 较活跃，对笼统、抽象的问题思维比较模糊。但 传统的教育教学活动中，学生大多“听”中学， 即先由教师讲授知识，再通过练习强化使学生记 住这些知识，而不是让学生直面现实的问题情 境，在探索的过程中理解知识，解决问题。这就 难怪学生会对数学产生一种神化意识，或对教师 教学的数学知识产生厌倦。

因此，“数学实验”在小学阶段具有极其重 要的意义。以“分数乘分数”教学为例，若直接 告知学生“分数与分数相乘，用分子相乘的积作 分子，分母相乘的积作分母”,相信通过练习， 学生根据这一既定的方法也能正确熟练地计算相 应式题，但学生对“为什么要这样算”这一问题 没有深入的思考。其实，运算能力是运算技能与 逻辑思维的有机整合，它不仅是一种数学的操作 能力，也是一种数学的思维能力，它是数学思考 的重要内涵。为此，我们设计数学实验，引领学 生从“分数的意义”以及“分数乘法的意义”出 发，尝试折纸或画图，将抽象的思考过程直观外 显在纸上，学生凭借操作的结果，通过观察、比

较，不难推算结果的来历，进而提炼出“用分子 相乘的积作分子，分母相乘的积作分母”的算 法。如此教学，算理在学生操作的过程中逐步清 晰，算法也在这一过程中自然生成。

(三)数学实验遵循小学生的认知规律

美国教育心理学家、教育家布鲁纳认为，在 人类智慧生长期间经历三个表征系统阶段：一是 动作表征，主要依靠动作去应对世界；二是表象 表征，在头脑中利用视觉和听觉的表象或映象代 表外界事物并尝试借助映象解决问题；三是符号 表征，个体运用语言、文字等符号代表经验，同 时应用这些符号来学习和获得经验。其实，具体 到某一个知识的学习，总体仍是经历这样的三个 表征阶段，它们相互依存，缺一不可。

回顾上述四节基于数学实验的教学尝试，首 先，借助工具进行的数学实验是动作性表征阶 段，这是学生获取直接经验的重要渠道，从中学 生可以积累显性的行为操作经验，同时帮助他们 积累归纳、比较、推理等思维活动经验。其次， 在学生充分经历数学实验的基础上，抛开工具， 引导学生回顾数学实验的过程，这是映象性表征 阶段，这一过程看似多余，实则不可或缺，它沟 通着动作性表征阶段和符号性表征阶段，是数学 基本活动经验内化的过程。最后，引导学生尝试 归纳或总结，用数字、图形或文字等记录计算或 思考的过程，这是符号性表征阶段，将先前零碎 的感性认识逐步整合，回归理性。不难发现，如 此教学与布鲁纳所描述的认知表征发展的三个阶 段完全吻合。

这样看来，计算教学不妨沿着这样一条路径 展开：创设情境，引出教学内容—数学实验，探 究算理算法—回顾实验，提炼算理算法—数学运 算，内化算理算法。如此安排，学生经历了从直 观的动手操作到虚拟的表象操作，再到理性的符 号操作，最终实现三种操作在头脑中的高度统 一，融通算理和算法。有了这样的根基，学生运 算能力自然会提升。

(作者系南京师范大学附属中学新城小学高级教师。) (责任编辑：李冰)

【学习反思】

运算是数学学科的重要内容，它是数学活动的基本形式，也是演绎推理的一种形式，是解决数学问题的基本手段。学生在学习数学的过程中，会花费较多的时间与精力去学习和掌握各种运算知识与技能，从而逐步发展运算能力。

小学阶段是学生运算能力形成的重要时期，良好的运算能力离不开 “数的运算”具体内容的学习，其中，“理解算理”和 “掌握算法”是计算教学的两个核心。基于小学生的认知规律与年龄特征，精选 “数的运算”的关键节点内容，设 计数学实验，引导学生 “做中学”，融通算理和算法，提升小学生的运算能力。

良好运算能力的形成不是一蹴而就的，其发展离不开具体的计算教学，且整体呈现从简单到复杂、从具体到抽象、从低级到高级的基本趋势。传统意义上，不少教师将计算当作获取结果的工具，认为计算的过程是一种人为规定，简单地告诉学生怎么写、怎么算就行，如此教学，使得学生只知其然，不知其所以然，无形中淡化了计算教学的育人价值，给学生学习带来诸多不必要的困扰。其实，“理解算理”和 “掌握算法”是 “数的运算”相关内容教学的两个核心。算理是计算过程中的道理，解决“为什么这样算”的问题，算法是计算的方法，解决“怎样算”的问题，两者不能偏颇。实践表明，直观与具体是理解算理、提炼算法的重要方法和手段。对此，数学实验具有先天的优势，它借助学生身边简单的工具，侧重于引导学生动手 “做”数学，并在这一过程中实现 “算理”与 “算法”的融通，使得学生的运算能力稳步提升。计算教学沿着这样一条路径展开：创设情境，引出教学内容——数学实验，探究算理算法——回顾实验，提炼算理算法——数学运算，内化算理算法。如此安排，学生经历了从直观的动手操作到虚拟的表象操作，再到理性的符号操作，最终实现三种操作在头脑中的高度统一，融通算理和算法。有了这样的根基，学生运算能力自然会提升。