

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

数学试题

姓名：_____ 准考证号：_____

本试题卷分选择题和非选择题两部分，共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

考生注意：

1. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸规定的位置上。

2. 答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范作答，在本试题卷上的作答一律无效。

3. 非选择题的答案必须使用黑色字迹的签字笔或钢笔写在答题纸上相应区域内，作图时可先使用 2B 铅笔，确定后必须使用黑色字迹的签字笔或钢笔描黑。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -5 < x^3 < 5\}$, $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{-1, 0\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{-3, -1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 2\}$

2. 若 $\frac{z}{z-1} = 1+i$, , 则 $z =$

- A. $-1-i$ B. $-1+i$ C. $1-i$ D. $1+i$

3. 已知向量 $\mathbf{a} = (0, 1)$, $\mathbf{b} = (2, x)$, 若 $\mathbf{b} \perp (\mathbf{b} - 4\mathbf{a})$ 则 $x =$

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

4. 已知 $\cos(\alpha + \beta) = m$, $\tan\alpha \tan\beta = 2$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$

- A. $-3m$ B. $-\frac{m}{3}$ C. $\frac{m}{3}$ D. $3m$

5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为 $\sqrt{3}$ ，则圆锥的体积为

- A. $2\sqrt{3}\pi$ B. $3\sqrt{3}\pi$ C. $6\sqrt{3}\pi$ D. $9\sqrt{3}\pi$

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - a, & x < 0 \\ e^x + \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$ 在 R 上单调递增，则 a 的取范围是

- A. $(-\infty, 0]$ B. $[-1, 0]$ C. $[-1, 1]$ D. $[0, +\infty)$

7. 当 $x \in [0, 2\pi]$ 时，曲线 $y = \sin x$ 与 $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为

- A. 3 B. 4 C. 6 D. 8

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R , $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$, 且当 $x < 3$ 时, $f(x) = x$, 则下列结论中一定正确的是

- A. $f(10) > 100$ B. $f(20) > 1000$
C. $f(10) < 1000$ D. $f(20) < 10000$

二、选择题:本大题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分。在每小题给出的四个选项中,至少有两项是符合题目要求的。若全部选对得 6 分,部分选对得部分分,选错或不选得 0 分。

9. 为了解推动出口后的亩收入(单位:万元)情况,从该种植区抽取样本,得到推动出口后亩收入的样本均值 $\bar{x} = 2.1$, 样本方差 $s^2 = 0.01$, 已知该种植区以往的亩收入 X 服从正态分布 $N(1.8, 0.1^2)$, 假设推动出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $N(\bar{x}, s^2)$, 则

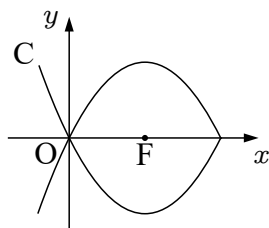
(若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(Z < \mu + \sigma) \approx 0.8413$)

- A. $P(X > 2) > 0.2$ B. $P(X > 2) < 0.5$ C. $P(Y > 2) > 0.5$ D. $P(Y > 2) < 0.8$

10. 设函数 $f(x) = (x-1)^2(x-4)$, 则

- A. $x = 3$ 是 $f(x)$ 的极小值点 B. 当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < f(x^2)$
C. 当 $1 < x < 2$ 时, $-4 < f(2x-1) < 0$ D. 当 $-1 < x < 10$ 时, $f(2-x) > f(x)$

11. 造型 ∞ 可以看作图中的曲线 C 的一部分, 已知 C 过坐标原点 O , 且 C 上的点满足横坐标大于 -2 , 到点 $F(2, 0)$ 的距离与到定直线 $x = a (a < 0)$ 的距离之积为 4, 则



- A. $a = -2$ B. 点 $(2\sqrt{2}, 0)$ 在 C 上
C. C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1
D. 当点 (x_0, y_0) 在 C 上时, $y_0 \leq \frac{4}{x_0 + 2}$

三、填空题:本大题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分。

12. 设双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 作平行于 y 轴的直线交 C 于 A, B 两点, 若 $|F_1A| = 13, |AB| = 10$, 则 C 的离心率为 _____

13. 若曲线 $y = e^x + x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线也是曲线 $y = \ln(x+1) + a$ 的切线, 则 $a =$ _____

14. 甲、乙两人各有四张卡片, 每张卡片上标有一个数字, 甲的卡片上分别标有数字 1, 3, 5, 7, 乙的卡片上分别标有数字 2, 4, 6, 8. 两人进行四轮比赛, 在每轮比赛中, 两人各自从自己持有的卡片中随机选一张, 并比较所选卡片上数字的大小. 数字大的人得 1 分, 数字小的人得 0 分, 然后各自弃置此轮所选的卡片 (弃置的卡片在此后的轮次中不能使用). 则四轮比赛后, 甲的总得分不小于 2 的概率为 _____

四、解答题:本大题共 5 小题,共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本小题满分 13 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin C = \sqrt{2}\cos B$, 且 $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$.

(I) 求 B ;

(II) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3 + \sqrt{3}$, 求 c .

16. (本小题满分 15 分)

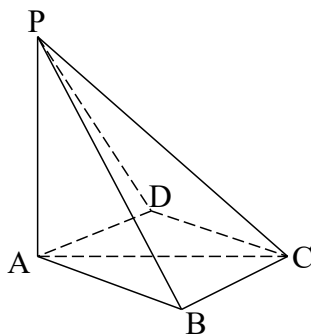
已知点 $A(0, 3)$ 和点 $P(3, \frac{3}{2})$ 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上的两点,

(I) 求 C 的离心率;

(II) 若过点 P 的直线 l 交 C 于另一点 B , 且 $\triangle ABP$ 的面积为 9, 求 l 的方程.

17. (本小题满分 15 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA = AC = 2$, $BC = 1$, $AB = \sqrt{3}$,



(I) 若 $AD \perp PB$, 证明: $AD \parallel$ 平面 PBC ;

(II) 若 $AD \perp DC$, 且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$, 求 AD .

18. (本小题满分17分)

已知函数 $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$

(I) 若 $b=0$, 且 $f'(x) \geq 0$, 求 a 的最小值;

(II) 证明: 曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形;

(III) 若 $f(x) > -2$ 当且仅当 $1 < x < 2$, 求 b 的取值范围.

19. (本小题满分17分)

设 m 为正整数, 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是公差为0的等差数列, 若从中删去两项 a_i 和 $a_j (i < j)$ 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组, 且每组的4个数都能构成等差数列, 则称数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) - 可分数列

(I) 写出所有的 (i, j) , $1 \leq i < j \leq 6$, 使数列 $a_1, a_2, \dots, a_6$ 是 (i, j) - 可分数列;

(II) 当 $m \geq 3$ 时, 证明: 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 $(2, 13)$ - 可分数列

(III) 从 $1, 2, \dots, 4m+2$ 中次任取两个数 i 和 $j (i < j)$, 记数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) - 可分数列的概率为 P_m , 证明: $P_m > \frac{1}{8}$.