2024 年普通高等学校招生全国统一考试

上海 数学试卷

（考试时间 120 分钟，满分 150 分） （试卷共 4 页 ， 答题 纸共 2 页）

一、填空题（本大题共 12 题。第 1‒6 题每题 4 分，第7‒12 题每题 5 分，共 54 分。）

1 ．已知全集*U* = {1, 2, 3, 4, 5} ， *A* = {2, 4} ，则 *A* = .

2 ．已知函数*y* = *f* (*x*) 的表达式为 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .

3 ．设*x*∈ **R** ，则不等式*x*2 − 2*x* − 3 < 0 的解集为 .

4 ．设*a*∈ **R** ，且 *f* (*x*) = *x*3 + *a* 是奇函数，则*a* = .

5 ．已知向量*a* = (2,5) ,*b* = (6, *k*) ,若*a* // *b* ，则 *k* = .

6 ．若二项式(*x* +1)*n* 的展开式中，各项系数和为32 ，则 *x*2 项的系数为 .

7 ．若抛物线*y*2 = 4*x* 上一点*P* 到准线的距离为9 ，则 *P* 到*x* 轴的距离为 .

8 ．小王参加知识竞赛，题库中 A 组题有 5000 道，B 组题有 4000 道，C 组题有 3000 道， 已知小王做对这 3 组题的概率依次为 0.92、0.86 、0.72，则随机从题库中抽取一道题，小王做对的概率为 .

9 ．设*m*∈ **R** ，已知虚数*z* 的实部为 1 且满足  = *m* ，则*m* 的值为 .

10 ．某集合中的元素为不重复的数字组成的三位正整数，若该集合中任意两个数的积均为

偶数，则该集合中元素数量的最大值为 .

11 ．海上有灯塔*O* 、 *A* 、*B* 和船只*T* ，*A* 在 *O* 的正东方向，*B* 在*O* 的正北方向，

*A* 、*B* 到*O* 的距离相同， *O* 、 *A* 、*T* 、*B* 按逆时针排列．若*∠OTA* = 37.0°，

∠ *OTB* = 16.5°，则 ∠*BOT* = ．（精确到0.1°）

12 ．等比数列{*an* } 的首项*a*1 > 0 ，公比*q* >1 ，*In* = {*x* − *y* |*x*、*y*∈[*a*1, *a*2 ] [*an*, *an*+1]} ．

若对任意正整数*n* ，*In* 都是闭区间，则*q* 的取值范围为 .

二、选择题（本大题共 4 题。第 13‒14 题每题 4 分，第 15‒16 题每题 5 分，共 18 分。）

13 ．已知气温（单位：℃)与海水表层温度（单位：摄氏度）的相关系数为正数，则下列有关两者关系的说法正确的是( ).

A ．随着气温由低变高，海水表层温度由低变高

B ．随着气温由低变高，海水表层温度由高变低

C ．随着气温由低变高，海水表层温度有由低变高的趋势

D ．随着气温由低变高，海水表层温度有由高变低的趋势

14 ．下列函数中，最小正周期*T* = 2τ 的是( ).

A ．*y* = sin *x*+ cos *x* B ．*y* = sin *x*cos *x*

C ．*y* = sin2 *x* + cos2 *x* D ．*y* = sin2 *x* − cos2 *x*

15 ．已知空间直角坐标系*Oxyz* 中的点集 Ω , 对任意*P*1 、*P*2 、*P*3 ∈Ω , 均存在不全为零的实



数*λ*1 、 *λ*2 、 *λ*3 满足λ1 *OP*1 + λ2 *OP*2 + λ3 *OP*3 = 0 ．已知 (1,0,0) ∈Ω ,则 (0,0,1) Ω 的一个充分条件是

( ).

A ． (0,0,0) ∈Ω B ．(−1,0,0) ∈Ω

C ． (0, 1,0) ∈Ω D ．(0,0, −1) ∈Ω

16 ．已知定义在**R** 上的函数*y* = *f* (*x*) ，*M* = {*x*0 | 对于任意*x*∈(−∞, *x*0 ),*f* (*x*) < *f* (*x*0 )}。对于所有*M* = [−1,1] 的函数*y* = *f* (*x*) ，以下说法正确的是( ) .

A ．存在*y* = *f* (*x*) 是偶函数 B ．存在*y* = *f* (*x*) 在*x* = 2 处取到最大值

C ．存在*y* = *f* (*x*) 是严格增函数 D ．存在*y* = *f* (*x*) 在*x* =-1 处取到极小值

三、解答题（本大题共 5 题。第 17‒19 题每题 14 分，第 20 、21 题每题 18 分，共 78 分。）

17 ．第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

如图，*P* − *ABCD* 是正四棱锥，*O* 为底面中心.

(1) 设*AD* = 3 ，*PA* = 5 ，将 *POA* 绕*PO* 旋转一周，求所得旋转体的体积；

(2) 设*PA* = *AD* ，*E* 为棱*PD* 中点，求直线*BD* 与平面*AEC* 所成角的大小.

*P*



*A*

*D*

*O*

*B*

*C*

18 ．第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

已知*f* (*x*) = log*a x* (*a* > 0 ，*a* ≠ 1 ).

(1) 若*y* = *f* (*x*) 的图像过(4, 2) ，求 *f* (2*x*− 2) < *f* (*x*) 的解集；

(2) 若存在*x* 使*f* (*x* +1) 、*f* (*ax*) 、*f* (*x*+ 2) 依次成等差数列，求*a* 的取值范围.

19 ．第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 4 分，第 3 小题满分 6 分.

某地区为调查初中生体育锻炼时长与学业成绩的关系，从该地区 29000 名初中生中抽 取 580 人，得到日均体育锻炼时长（表中简称“时长”）与学业成绩的数据如下表所示：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 时长 | [0, 0.5) | [0.5,1) | [1,1.5) | [1.5, 2) | [2, 2.5) | 合计 |
| 优秀 | 5 | 44 | 42 | 3 | 1 | 95 |
| 不优秀 | 134 | 147 | 137 | 40 | 27 | 485 |
| 合计 | 139 | 191 | 179 | 43 | 28 | 580 |

(1) 估计该地区 29000 名学生中日均锻炼时长不少于1小时的人数；

(2) 估计该地区初中生的平均日均锻炼时长（精确到 0.1 小时）；

(3) 判断是否有 95%的把握认为该地区初中生学业成绩优秀与日均锻炼时长不少于 1 小时 但少于 2 小时有关？

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | [1, 2) | 其他 | 合计 |
| 优秀 | *a* | *b* | *a* + *b* |
| 不优秀 | *c* | *d* | *c* + *d* |
| 合计 | *a* + *c* | *b* + *d* | *a* + *b* + *c* + *d* |

 , 其中*n* = *a* + *b* + *c*+*d ，*

20 ．第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分.

已知双曲线 Γ: *x*2 −  左、右顶点分别为*A*1 、*A*2 ，过*M*(−2,0) 的直线交双曲线

与*P* 、*Q*两点且*P*在第一象限.

(1) 若离心率*e* = 2 ，求 *b* 的值；

(2) 若  *MA*2*P* 是等腰三角形，求 *P* 的坐标；

(3) 连接*QO* 并延长交双曲线于*R* ，若 *A*1*R*.*A*2*P* = 1 ，求 *b* 的取值范围.

21 ．第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分.

已知*D* 是**R** 的一个非空子集，*y* = *f* (*x*) 是定义在**R** 上的函数．对于点*M*(*a*, *b*) ，函数

*S*(*x*) = (*x* − *a*)2 + (*f* (*x*) − *b*)2 ．若对于*P*(*x*0, *f* (*x*0 )) ，满足 *S*(*x*) 在*x* = *x*0 处取得最小值，则称*P*是*M* 的*f*最近点.

(1)  ，求证：存在*M* 的*f* 最近点；

(2) *D* = **R** ，*f* (*x*) = e*x* ，*M*(1, 0) ，若 *y* = *f* (*x*) 上一点*P* 满足*MP* 垂直于*y* = *f* (*x*) 在*P* 处的 切线，则*P* 是否是*M* 的*f* 最近点？

(3) *D* = **R** ，已知 *y* = *f* (*x*) 是可导的，*y* = *g*(*x*) 定义在**R** 上且函数值恒正．已知*t* ∈ **R** ，

*M*1 (*t* −1, *f* (*t*) − *g*(*t*)) ，*M*2 (*t* +1, *f* (*t*) + *g*(*t*)) ．若对于任意*t* ∈ **R** ，都存在*y* = *f* (*x*) 上的一点 *P* ，使得 *P* 既是*M*1 的*f* 最近点，又是*M*2 的*f* 最近点．试求*y* = *f* (*x*) 的单调性.