2024年普通高等学校招生全国统一考试

数 学 试 题

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）

本试卷为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分.

注意事项： 1．作答前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号填写在试卷的规定位置上.

2．作答时，务必将答案写在答题卡上，写在试卷及草稿纸上无效.

3．考试结束后，答题卡、试卷、草稿纸一并收回.

第Ⅰ卷（选择题）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1． 已知$z=-1-\mathrm{i}$，则$|z|=$

A．0　　B．1　　C．$\sqrt{2}$　　D．2

2．已知命题：p：$\forall x\in\mathbb{R}$，$|x+1|>1$；命题 q：$\exists x>0$，$x^3=x$，则

A．p 和 q 都是真命题　　B．$\neg p$ 和 q 都是真命题

C．p 和$\neg q$ 都是真命题　　D．$\neg p$ 和$\neg q$ 都是真命题

3．已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2$，且$(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{b}$，则$|\boldsymbol{b}|=$

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D．1

4．某农业研究部门在面积相等的 100 块稻田上种植一种新型水稻，得到各块稻田的亩产量（单位：kg）并整理下表：

亩产量	[900,950)	[950,1000)	[1000,1050)	[1050,1100)	[1100,1150)	[1150,1200]
生产数	6	12	18	30	24	10

据表中数据，结论正确的是

A．100 块稻田亩产量的中位数小于 1050 kg

B．100 块稻田中的亩产量低于 1100 kg 的稻田所占比例超过 40％

C．100 块稻田亩产量的极差介于 200 kg 到 300 kg 之间

D．100 块稻田亩产量的平均值介于 900 kg 到 1000 kg 之间

5．已知曲线 C：$x^2+y^2=16(y>0)$，从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线 PP'，P'为垂足，则线段 PP'的中点 M 的轨迹方程为

A．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(y>0)$　B．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1(y>0)$　C．$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1(y>0)$　D．$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{8}=1(y>0)$

6．设函数$f(x)=a(x+1)^2-1$，$g(x)=\cos x+2ax$（a 为常数），当 $x\in(-1,1)$时，曲线 $y=f(x)$与 $y=g(x)$恰有一个交点，则 $a=$

A．-1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．1　　D．2

7．已知正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$的体积为$\frac{52}{3}$，$AB=6$，$A_1B_1=2$，则 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为

A．$\frac{1}{2}$　　　　B．1　　　　C．2　　　　D．3

8．设函数 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)$，若 $f(x)\geqslant 0$，则 a^2+b^2 的最小值为

A．$\frac{1}{8}$　　　　B．$\frac{1}{4}$　　　　C．$\frac{1}{2}$　　　　D．1

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对得部分分，有选错的得 0 分．

9．对于函数 $f(x)=\sin 2x$ 和 $g(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，下列正确的有

A．$f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同零点　　　　B．$f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同最大值

C．$f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期　　　　D．$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有相同的对称轴

10．抛物线 C：$y^2=4x$ 的准线为 l，P 为 C 上的动点，过 P 作⊙A：$x^2+(y-4)^2=1$ 的一条切线，Q 为切点，过 P 作 l 的垂线，垂足为 B，则

A．l 与⊙A 相切　　　　B．当 P，A，B 三点共线时，$|PQ|=\sqrt{15}$

C．当 $|PB|=2$ 时，$PA\perp AB$　　　　D．满足 $|PA|=|PB|$ 的点 A 有且仅有 2 个

11．设函数 $f(x)=2x^3-3ax^2+1$，则

A．当 $a>1$ 时，$f(x)$ 有三个零点

B．当 $a<0$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C．存在 a，b，使得 $x=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

D．存在 a，使得点 $(1, f(1))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

第Ⅱ卷（非选择题）

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12．记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_3+a_4=7$，$3a_2+a_5=5$，则 $S_{10}=$__________．

13．已知 α 为第一象限角，β 为第三象限角，$\tan\alpha+\tan\beta=4$，$\tan\alpha\tan\beta=\sqrt{2}+1$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$__________．

14．在右图的 4×4 方格表中选 4 个方格，要求每行和每列恰有一个方格被选中，则共有__________种选法；在所有符合上述要求的选法中，选中方格的 4 个数之和的最大值是__________．

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

15．（13 分）

记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$．

（1）求 A；

（2）若 $a=2$，$\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$，求△ABC 的周长．

16．（15 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax-a^3$.

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1，f(1))$ 处的切线方程；

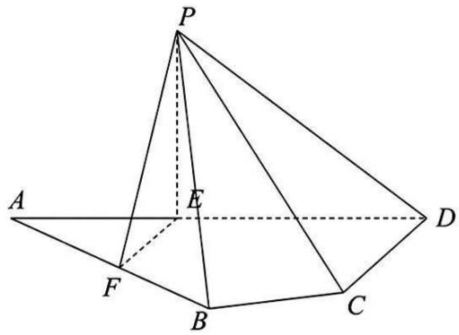
（2）若 $f(x)$ 有极小值，且极小值小于 0，求 a 的取值范围．

17．（15 分）

如图，平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$CD=3$，$AD=5\sqrt{3}$，$\angle ADC=90°$，$\angle BAD=30°$，点 E，F 满足 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，将△$AEF$ 沿 EF 对折至△PEF，使得 $PC=4\sqrt{3}$.

（1）证明：$EF\perp PD$；

（2）求平面 PCD 与平面 PBF 所成的二面角的正弦值．



18．（17 分）

某投篮比赛分为两个阶段，每个参赛除由两名队员组成，比赛具体规则如下：第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次，若 3 次都未投中，则该队被淘汰，比赛成员为 0 分；若至少被投中一次，则该队进入第二阶段，由该队的另一名队员投篮 3 次，每次投中得 5 分，未投中得 0 分．该队的比赛成绩为为第二阶段的得分总和．

某参赛队由甲、乙两名队员组成，设甲每次投中的概率为 p，乙每次投中的概率为 q，各次投中与否相互独立．

（1）若 $p=0.4$，$q=0.5$，甲参加第一阶段比赛，求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率；

（2）假设 $0<p<q$.

（i）为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大，应该由谁参加第一阶段的比赛？

（ii）为使得甲、乙所在队的比赛成绩的数学期望最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

19．（17 分）

已知双曲线 C：$x^2-y^2=m(m>0)$，点 $P_1(5,4)$ 在 C 上，k 为常数，$0<k<1$，按照如下方式依次构造点 $P_n(n=2,3,\cdots)$，过 P_{n-1} 斜率为 k 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1}，令 P_n 为 Q_{n-1} 关于 y 轴的对称点，记 P_n 的坐标为 (x_n,y_n)．

（1）若 $k=\dfrac{1}{2}$，求 x_2，y_2；

（2）证明：数列 $\{x_n-y_n\}$ 是公比为 $\dfrac{1+k}{1-k}$ 的等比数列；

（3）设 S_n 为 $\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ 的面积，证明：对任意的正整数 n，$S_n=S_{n+1}$．

命题人：xxx

审题人：xxx