

数学推理研究三十年载文分析 ——以《数学教育学报》《数学通报》载文为例

濮安山, 刘兰茵

(扬州大学 数学科学学院, 江苏 扬州 225002)

摘要:为了更好地开展数学教育领域数学推理相关理论与实践探索,有必要分析近30年《数学教育学报》和《数学通报》两个期刊中数学推理研究的文章,主要分析期刊发文量、载文被引、载文主题、研究内容、研究方法、研究对象和作者来源。得到以下结论:近30年来,数学推理研究的期刊发文量整体呈上升趋势;两个期刊中关于数学推理研究的论文质量水平比较高,对于该领域的研究深度有待进一步提升;合情推理、几何推理和数学核心素养为数学推理研究的重点和热点,对数与代数、概率与统计、数学活动等内容研究不足;关于数学推理的相关概念及其关系没有统一的界定;研究方法逐步呈现多元化,混合研究逐步成为该领域研究方法的新特点和趋势;研究对象主要为初、高中学生,对学前、小学生、大学生、教师等关注不够;作者主要来自高等院校,一线教师较少,高校研究者与一线教师之间的合作性不强。

关键词:数学推理;载文;合情推理;演绎推理;逻辑推理

中图分类号:G40-03 **文献标识码:**A **文章编号:**1004-9894(2022)04-0091-07

引用格式:濮安山,刘兰茵.数学推理研究三十年载文分析——以《数学教育学报》《数学通报》载文为例[J].数学教育学报,2022,31(4):91-97.

1 问题提出

推理是由一个或几个已知判断做出新判断的思维过程,是一种重要的思维形式。而数学推理是学生思维的基本形式,是数学证明的基础。推理在中国中小学数学课程标准中的表述虽有不同,但一直都是课程目标的重要内容。2001年版的《义务教育数学课程标准》实验稿表述为“推理能力”,2011年版《义务教育数学课程标准》课程目标中表述为“发展合情推理与演绎推理能力”^[1]。2003年版《普通高中数学课程标准(实验)》课程目标中表述为“推理论证”,是学生的基本能力之一。2017年版的《普通高中数学课程标准》课程目标中表述为“逻辑推理”,是6个数学核心素养之一,并定义为:“逻辑推理是指从一些事实和命题出发,依据规则推出其它命题的素养。”^[2]

国际数学教育领域也很重视数学推理研究。国际数学与科学趋势研究(TIMMS)测评框架中自2003年起加入了认知维度,推理能力一直作为认知领域3个子维度之一^[3]。2019年经济合作与发展组织(OECD)发布的PISA2018数学素养测评框架中也突出“数学推理”在数学学习过程中的核心地位,它包括6个要素:(1)理解数字系统和它们的代数性质,(2)领会抽象和符号表征的力量,(3)理解数学结构及其规律,(4)识别数量之间的函数关系,(5)使用数学模型理解现实世界,(6)理解变化是统计学的核心^[4]。由此可见,数学推理是国内外数学教育研究的热点之一。

《数学教育学报》和《数学通报》是国内数学教育方向的顶级期刊,是北大核心期刊目录中仅有的两本数学教育期刊,刊载的论文是数学教育领域研究水平最高的。探讨两本期刊近30年关于数学推理研究发表的论文,有助于了解数

学推理研究的现状、特点和趋势,明确数学推理研究的发展方向。由于国内外组织与刊物发表的论文关于推理的表述不尽相同,这里分析的论文包括主题为合情推理、逻辑推理等词语的文章。

2 研究设计

2.1 研究对象

以《数学教育学报》和《数学通报》为主要文献来源,在中国知网资源总库的高级检索界面“主题”一栏输入“推理”,在“文献来源”一栏分别输入“数学教育学报”或“数学通报”,在“发表时间”一栏设定为“19900101—20200901”,共检索到相关期刊论文180篇,剔除无关文献后得到113篇。

2.2 研究方法

从期刊发文量、载文被引、载文主题、研究内容、研究方法、研究对象和作者来源7个维度对近30年的期刊论文进行计量分析,其中载文被引、研究对象和作者来源3个维度主要采用量化分析;期刊发文量、研究方法2个维度主要采用比较分析;载文主题主要借助CiteSpace软件进行可视化分析;研究内容主要采用质性分析。载文分析模型如图1所示。

3 研究结果及分析

3.1 期刊发文量

中国教育大约每十年进行一次课改,将近30年关于数学推理的期刊论文发文量划分为1990—2000、2001—2010、2011—2020三个阶段进行统计比较,以便更好地把握数学推理研究的期刊发文变化趋势,包括研究阶段、研究现状及对未来研究发展的预测^[5-6]。由图2可知,1990—2000年共发

收稿日期:2022-02-10

基金项目:2022年扬州大学教学改革重点项目——一流专业建设的理论与实践研究:数学与应用数学专业教师教育课程的视角(YZUJX2021-B2);2021年江苏省研究生实践创新计划基金资助项目——中学生数学素养评价的研究(SJCX21_1537)

作者简介:濮安山(1964—),男,黑龙江安达人,教授,博士,硕士生导师,主要从事数学课程与教学论、数学教育评价研究。

表论文 27 篇, 2001—2010 年共发表 37 篇, 2011—2020 年 11 月 6 日共发表 49 篇, 整体呈现逐步上升的趋势; 1992 年、2003 年、2017 年之后出现迅速增长趋势, 2019 年期刊发文量达到顶峰 16 篇。

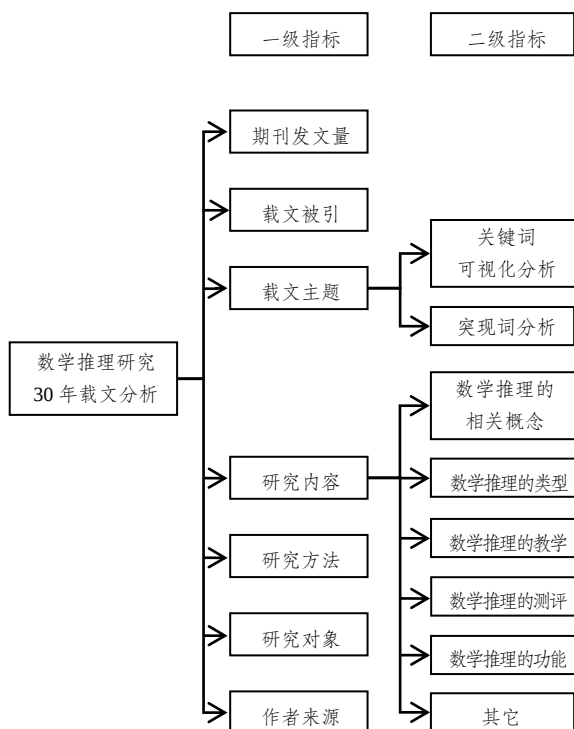


图1 数学推理研究 30 年载文分析模型

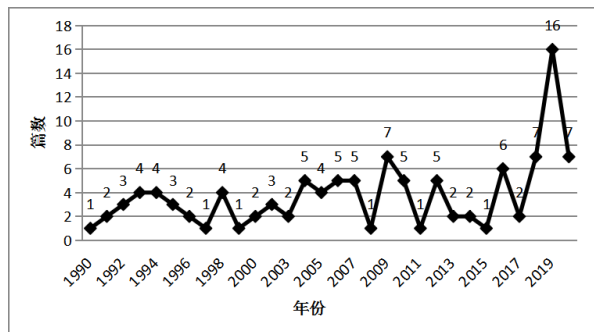


图2 期刊发文量统计

上述统计结果表明, 数学推理的研究逐步受到人们的重视。1992 年颁布的《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲》、2003 年和 2017 年版的《普通高中数学课程标准》对于数学推理的研究起到了较大的推动作用。特别是, 2017 年版“课标”中将逻辑推理作为六大数学核心素养以后, 关于推理的文章明显增多。

3.2 载文被引

分析期刊论文被引用情况, 特别是被 CSSCI、北大核心期刊引用和人大复印转载情况, 可以反映出数学教育两大期刊《数学教育学报》和《数学通报》对于数学推理研究的贡献, 更能反映出这两个期刊关于数学推理研究的论文水平。由表 1 可知, 截止到 2020 年 11 月 1 日, 被 CSSCI 期刊论文共引用 122 次, 平均每篇被引 1.31 次; 被北大核心期刊论文共引用 180 次, 平均每篇被引 1.59 次; 被其它期

刊论文引用次数总计 1 779 次, 平均每篇被引 15.74 次, 被人大复印转载的期刊论文有 11 篇, 占总发文量的 9.73%。

《数学教育学报》和《数学通报》2020 年平均复合影响因子为 1.91。由上述统计可知, 平均每篇期刊论文被引 15.74 次。这说明, 两个期刊中关于数学推理研究的论文质量远远超过期刊整体水平, 也可以看出研究者对数学推理的关注度比较高。被 CSSCI 和北大核心期刊引用频次反映出两大期刊关于数学推理论文的质量水平是比较高的。同时, 也必须指出, 对数学教育领域两大核心期刊关于数学推理研究的统计, 不能代表所有关于数学推理研究的论文水平。事实上, 此类文章被人大复印平均转载率不到 10%, 表明数学推理研究的深度有待进一步提升。

表 1 载文被引统计

期刊	CSSCI 期刊	北大核心期刊	其它期刊
被引频次	122	180	1 779
篇均被引频次	1.31	1.59	15.74

注: 因为 CSSCI 自 1998 年创立, 考虑到被 CSSCI 期刊引用次数可能会受 CSSCI 期刊创立年限影响, 所以平均被 CSSCI 引用频次 (1.31) 为 1998—2020 年《数学教育学报》和《数学通报》内关于数学推理研究论文总被引频次 (122 次) 除以 1998—2020 年《数学教育学报》和《数学通报》内关于数学推理研究论文总篇数 (93 篇)。

3.3 载文主题

3.3.1 关键词可视化分析

关键词反映了论文的中心和主要内容, 通过对期刊论文关键词进行可视化分析可以了解近 30 年关于数学推理论文研究的主题及重点^[7]。运用 CiteSpace 软件绘制关键词知识图谱, 如图 3 所示, 并将频次为 3 及以上的关键词进行统计, 如表 2 所示。



图3 数学推理研究 30 年载文关键词知识图谱

在图 3 中, 字体越大, 关键词词频越高。结合表 2 可知, 合情推理、演绎推理、类比推理、归纳推理、推理能力、数学推理、平面几何等是高频词汇。如果把类比推理、归纳推理、似真推理的研究都纳入合情推理的研究范围, 那么关于合情推理研究的词频高达 49 次, 是演绎推理词频的 3 倍以上。关于几何推理研究的关键词有平面几何、圆锥曲线、双曲线、抛物线、几何图形、几何推理, 词频合计为 25 次, 远高于概率与统计、数与代数等其它教学内容。另外, 关于数学核心素养推理研究的关键词有逻辑推理、数学抽象等,

词频合计为 16 次。可以看出,合情推理、几何推理和数学核心素养是近些年来数学推理研究的重点主题。

表 2 数学推理研究 30 年载文关键词

序号	关键词	词频	序号	关键词	词频
1	合情推理	23	14	圆锥曲线	4
2	演绎推理	14	15	双曲线	4
3	类比推理	13	16	数学归纳法	4
4	归纳推理	9	17	似真推理	4
5	推理能力	9	18	数学学习	3
6	数学推理	8	19	数学课程	3
7	平面几何	8	20	抛物线	3
8	数学核心素养	6	21	教学中	3
9	逻辑推理	5	22	推理过程	3
10	数学抽象	5	23	数学家	3
11	教学设计	5	24	几何图形	3
12	数学教育	5	25	推理论证能力	3
13	教学发现	4	26	几何推理	3

3.3.2 突现词分析

突现词为在短时期内词频大量增加的主题词,研究突现词有助于分析研究热点及其演变趋势。利用 CiteSpace 的 Burstness 功能得到 18 个突现词,如图 4 所示。

Top 18 Keywords with the Strongest Citation Bursts



图 4 数学推理研究 30 年载文突现词统计

由图 4 可知,平面几何、数学教育、似真推理、数学推理、合情推理、圆锥曲线等是近 30 年来不同阶段数学推理研究的研究热点。其中似真推理、合情推理、归纳推理和类比推理分别为 1993—1998、1996—2005、2010—2011 和 2010—2015 年的研究热点;平面几何、圆锥曲线、几何推理、抛物线与双曲线分别为 1991—1995、2006—2012、2007—2009、2009—2012 年的研究热点。由此可以得出:合情推理和平面几何一直是近些年来的研究热点。数学核心素养、逻辑推理、数学抽象分别是 2016—2020、2017—2018、2019—2020 年的研究热点,自《普通高中数学课程标准》(2017 年版)颁布以来,数学核心素养是近几年的研究热点。

3.4 研究内容

基于载文主题和内容的分析,将每篇文献的研究内容主要划分为数学推理的相关概念、数学推理的类型、数学推理的教学、数学推理的测评和数学推理的功能 5 类。如表 3

所示,数学推理的教学研究最多,78 篇论文都涉及到了数学推理的教学,占比为 69.03%。

3.4.1 数学推理的相关概念

将涉及数学推理相关概念的 36 篇论文进行进一步统计分析,如图 5 所示。研究者们主要对合情推理、逻辑推理、类比推理、推理能力、推理、数学证明、归纳推理、推理论证和演绎推理 9 个名词进行了概念界定。

表 3 研究内容统计

研究内容	篇数	百分比 (%)
数学推理的相关概念	36	31.86
数学推理的类型	41	36.28
数学推理的教学	73	64.60
数学推理的测评	17	15.04
数学推理的功能	10	8.85
其它	13	11.50

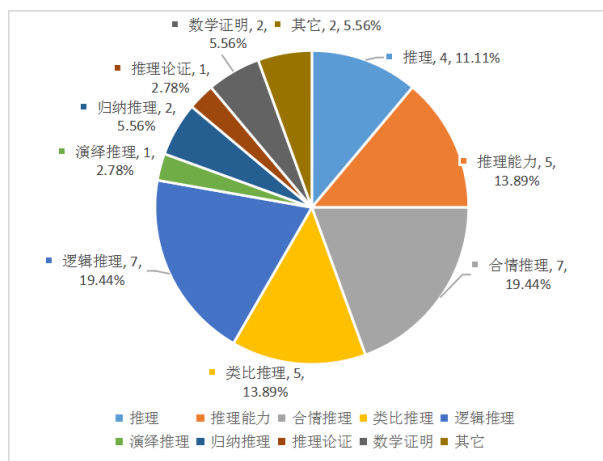


图 5 数学推理的相关概念统计

由图 5 知,对逻辑推理和合情推理进行概念界定的论文最多,均有 7 篇,均占比 19.44%。对于逻辑推理的概念,7 篇论文都是引用《普通高中数学课程标准》(2017 年版)中的逻辑推理概念即“逻辑推理是指从一些事物和命题出发,依据规则推出其它命题的素养”[2]。合情推理又称似真推理,是根据已有的事实以及个人的经验、情感,运用观察、实验、归纳、类比、联想、推广、限定、直觉等推测某些结果的推理过程[8-10]。其次是类比推理和推理能力,均有 5 篇论文给出具体概念,占比 13.89%。关于类比推理的概念,有两种说法:一种认为是从具体到具体的推理形式,一种认为是从特殊到特殊的推理形式。但都认同“类比推理是建立在两个对象或两类事物间存在着的相同或相似属性,联想到另类事物也可能是具有某种属性的思维方法”[11-13]。关于推理能力的界定,被认为“数学推理能力,就是在数学活动中,通过想象、类比、归纳等方法寻求思路、提出猜想等,并对其进行严谨逻辑证明的心理特征”[14]。对论文内容分析发现,逻辑推理、合情推理、演绎推理在中国课标中是给出明确定义的,而类比推理、归纳推理、推理能力、数学推理、数学证明、推理论证等名词还没有给出统一的定义。

3.4.2 数学推理的类型

对涉及数学推理结构及分类的 41 篇论文作进一步统计分析,如图 6 所示.研究者们主要给出了合情推理与演绎推理、合情推理与逻辑推理、合情推理与论证推理 3 种分类方式.由图 6 可知,有 25 篇论文将推理分为合情推理与演绎推理,占比为 60.98%;其次分别有 7 篇和 6 篇给出合情推理与逻辑推理、合情推理与论证推理的分类方式,分别占比 17.09%和 14.63%;其它 3 篇论文中,宁连华在《数学推理的本质和功能及能力培养》中提到心理学家、数学教育家斯滕伯格将数学推理分为分析性推理、创造性推理和实践性推理 3 个方面^[15],郭玉峰提出美国《发展 K-12 年级数学推理》一书中将数学推理分为传统的分析性数学推理能力、创造性的数学推理能力、解决实际问题的推理力^[16],张伟平和杨玉东将数学推理分为原创性推理和模仿性推理^[17].

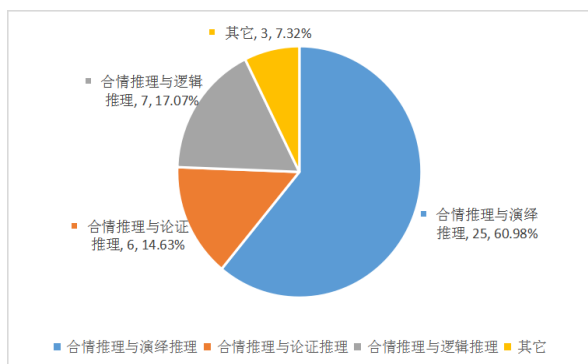


图 6 数学推理的类型统计

由上述统计结果表明,中国大部分研究者比较认同波利亚关于数学推理的分类方式,即合情推理与演绎推理.其它两种分类方式的形成,可能是不同课标给出的推理名词不一致造成的,比如《普通高中数学课程标准(2003 年版)》中用词为“推理论证”,而《普通高中数学课程标准(2017 年版)》用词为“逻辑推理”.另外,演绎推理、逻辑推理和论证推理之间的关系至今没有明确的界定.

3.4.3 数学推理的教学

将涉及数学推理教学的 78 篇期刊论文作进一步统计分析,如图 7 所示.将推理教学按照数学教材内容主要划分为几何教学、数与代数教学、概率与统计教学以及数学活动教学 4 类.另外,在统计时发现解题教学和合情推理教学所占比重较大,也将其纳入划分范围.由图 7 可知,在数学教学 4 类内容中,关于几何教学的期刊论文最多,有 19 篇,占比为 24.36%;其次是数与代数、概率与统计,均有 6 篇,占比为 7.69%;数学活动教学仅有 1 篇,占比为 1.28%.合情推理教学和解题教学的期刊论文分别有 16 篇和 10 篇,占比分别为 20.51%和 12.82%.其它中包括推理教学建议、推理教学设计、课程等.

由上述统计结果表明,在数学内容教学中,几何推理教学研究远超过其它内容,数与代数、概率与统计推理教学研究较少,数学活动推理教学的研究不足.

3.4.4 数学推理的测评

数学推理测评研究的论文有 17 篇,主要内容包括以下几个方面.(1)推理能力与数学成绩之间的相关性.唐举、

黄智华研究表明:高一学生逻辑推理能力与数学成绩有显著相关性,且对数学成绩具有预测作用;不同的推理类型与成绩相关性不同,类比推理与数学成绩的相关性最大,演绎推理与数学成绩的相关性最小^[14].(2)男生和女生之间推理能力的差异性.端木彦、孔德鹏研究表明,高三男女生之间逻辑推理能力无显著性差异^[18];田中和徐龙炳的研究表明,初三男女生推理能力无显著性差异^[19].(3)年级之间推理能力的差异性.黄智华、渠东的研究表明,高中不同年级学生的逻辑推理能力没有显著差异性^[20].(4)影响学生推理能力的因素.胡海霞和汪晓勤的研究表明,教学和组合运算对高中生的组合推理能力有显著影响^[21].

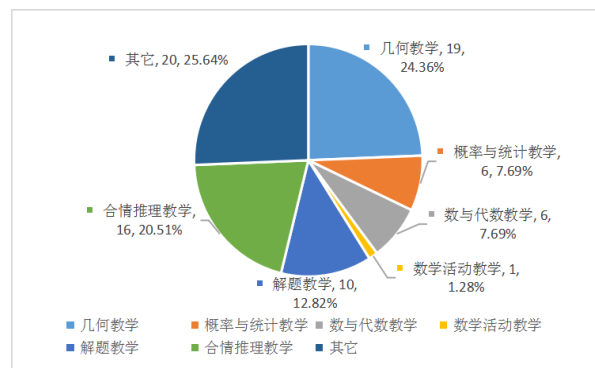


图 7 数学推理的教学统计

由此可知,学生的推理能力尤其是类比推理能力与学生的学业成绩有很大相关性,教学过程应注重对学生类比推理能力的培养.另外,教学方式也是发展学生推理能力的一个重要因素.

3.4.5 数学推理的功能

涉及数学推理功能的论文有 10 篇.关于推理的功能,主要有以下几个方面:(1)有利于开发学生的智力;(2)有利于迅速提高学生的观察力、想象力和理解力^[22];(3)有利于培养学生创造性思维能力;(4)易于唤起相似性的探索,进而促进数学理解,培养学生的主动迁移意识^[15, 23];(5)有利于激发学生的内在学习动机;(6)有助于养成数学思考的习惯^[24].因此,培养学生的推理能力对学生的成长和发展具有重要意义.

3.5 研究方法

研究方法的统计,一方面可以反映出期刊论文的质量和水平;另一方面,也反映出推理研究方法的发展及趋势.根据李士铨等^[25]和叶立军^[26]对数学教育研究方法分类,最终确定课堂观察、访谈调查、问卷调查、个案研究、行动研究、比较研究、实验研究、文本分析、测验法和经验总结 10 种研究方法,对论文研究运用的方法进行统计,如图 8、图 9 所示.由图 8 可知,1990—2000 年间发表的论文,研究方法主要有经验总结法、文本分析法、测验法、比较研究法,其中经验总结法使用得最多,占比为 74.19%;使用混合研究的论文仅有 2 篇,占比为 6.45%.如图 9,与 1990—2000 相比,1990—2020 年研究方法种类明显增多,其中经验总结法仍然占比最多,为 27.59%;混合研究有 27 篇,占比为 15.52%.

通过对图8和图9的比较,从整体上看,推理的研究方法种类逐渐增多.从局部来看,经验总结一直是主要研究方法,但是占比大幅度下降.测验法和混合研究占比明显上升,表明定性研究与定量研究的有机结合受到研究者的认同,并逐步成为该领域研究方法的特点和趋势.而推理研究的实验方法占比几乎为零,这可能与推理本身高度抽象性有关.

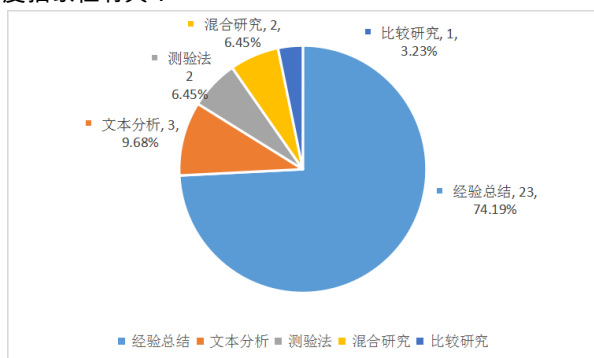


图8 1990—2000年研究方法统计

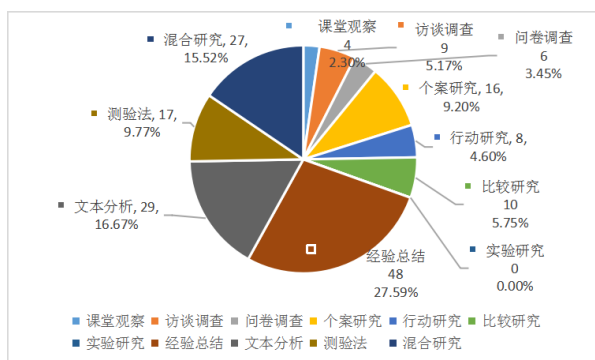


图9 1990—2020年研究方法统计

3.6 研究对象

对于研究对象的统计可以反映出研究者关注的群体范围,如图10所示.由图10可知,研究对象为高中生和初中生的期刊论文分别有41篇和39篇,分别占比为38.68%和36.79%;研究对象为小学生的论文有16篇,占比为15.10%;对大学生、研究生和教师的推理研究论文共计12篇,占比为11.32%;研究对象为学前、中专和高专学生的论文数量几乎为0(7篇论文未表明研究对象,通过对内容分析仍未确定研究对象的期刊论文不做统计).

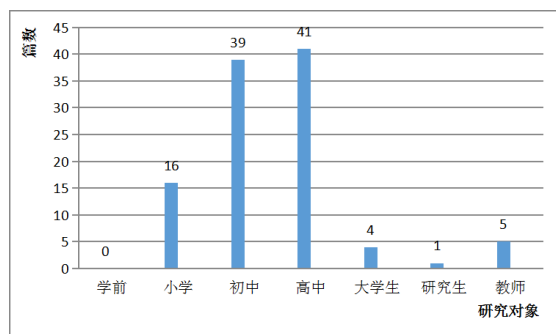


图10 研究对象统计

上述统计结果表明,研究对象主要以初中生和高中生为

主.进一步分析发现,有16篇文章的研究对象为8年级学生,研究对象为初中生的论文占41.02%.由此可知,初中8年级学生是研究者重点关注的对象,同时也反映出8年级是学生推理能力发展的特殊时期^[27].虽然研究范围逐步扩大^[28-31],但是对于学前、中专、高专学生的推理研究有待进一步突破.

3.7 作者来源

作者来源是影响论文水平的一个重要因素.通过对作者来源的统计,可以了解该研究领域的主要群体及科研状况,如图11所示.由图11可知,高校师生占比为46.49%;中学教师占比为19.30%;高校合作研究占比为13.16%;高校与中学合作仅占比为8.77%;教研室、出版社等其它机构共计占比为12.28%.

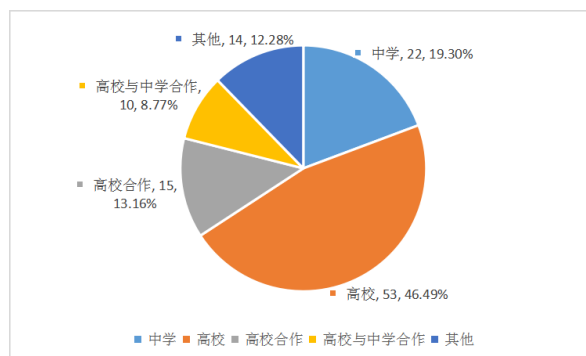


图11 作者来源统计

上述统计结果表明,作者主要是高等院校的研究人员,中小学教师所占比重很少,高校与中小学教师的合作比较匮乏.其中的原因,可能是中小学教师教学任务繁重、精力有限,也有可能是他们的积极性不高.

4 结论与启示

通过对《数学教育学报》和《数学通报》两种期刊近30年关于数学推理研究的论文进行期刊发文量、载文被引、载文主题、研究内容、研究方法、研究对象和作者来源7个维度的计量分析,得到以下结论,并获得一些有益的启示.

第一,通过对期刊发文量的统计分析可知,近30年来,期刊有关数学推理的发文量呈上升趋势.特别是在教学大纲或课程标准颁布之后,短时间内该领域的研究文章迅速增加.这表明,教育者很注重课标的发展趋势,能够及时得到正确方向的引导.逻辑推理作为2017年版“课标”数学核心素养之一,未来会受到研究者的重视.

第二,通过对载文被引的统计分析可知,两个期刊关于数学推理研究的论文水平是比较高的,研究深度上还有待进一步地提高和突破,进而更好地促进数学推理理论与实践的发展.

第三,通过对载文主题的可视化分析可知,合情推理一直为近些年来的研究重点和热点.这表明,自1986年《义务教育法》颁布以来,“数学的非形式化”观念及合情推理的作用逐步得到研究者的关注和认可^[32].未来,在继续发展学生合情推理能力研究的同时,应注意合情推理与演绎推理研究之间的平衡,防止偏向.

第四,通过对研究内容的统计分析可知,一些与数学推理相关的概念,“课标”中没有给出统一的定义,它们之间的关系也有待进一步厘清.关于数学推理的类型,绝大部分研究者认同波利亚的观点:“推理分为合情推理和演绎推理.”关于数学推理的教学,几何推理教学的研究远远超过其它数学内容,占主要的地位.

第五,通过对研究方法的统计分析可知,该领域的研究方法逐渐呈现多元化发展趋势.虽然经验总结所占比重最大,但相比 2000 年之前占比已大幅度下降,测验法占比在增大.定性研究与定量研究相结合的混合研究占比明显上升,并逐步成为该领域研究方法的新特点和趋势.

第六,通过对研究对象的统计分析可知,研究对象主要是初、高中学生,对于大学生、教师及课程、课堂、教材的关注很少,对于学前、中专、高专学生的研究几乎为零,因此研究范围和研究对象需要进一步扩大.

第七,通过对作者来源的统计分析可知,作者主要是高等院校的研究人员,一线教师较少,一线教师与高校研究者的合作性不强.高校师生科研水平较高,实践性不强,而一线教师的实践性较强,科研水平有待提高.所以,要加强一线教师与高校研究者的合作,扬长补短,发挥各自优势,提高该领域的研究质量与水平^[6].

[参 考 文 献]

- [1] 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2011年版)[M].北京:北京师范大学出版社,2012:1.
- [2] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018:2.
- [3] 郑超超,杨涛.TIMSS 课程模型及测评框架的演变及启示[J].外国中小学教育,2019(6):25-32.
- [4] 董连春,吴立宝,王立东.PISA2021 数学素养测评框架评介[J].数学教育学报,2019,28(4):6-11.
- [5] 吕世虎,彭燕伟.近二十年中国中小学数学教科书研究综述——基于 CiteSpace 知识图谱分析[J].数学教育学报,2019,28(4):48-54.
- [6] 王志玲,王建馨.中国数学逻辑推理研究的回顾与反思——基于“中国知网”文献的计量分析[J].数学教育学报,2018,27(4):88-94.
- [7] 辛节之.科技期刊题名、摘要、关键词和参考文献的编辑加工[J].科技报刊研究,2001(3):25-34.
- [8] 陈水平.合情推理在数学学习建构中的作用[J].数学教育学报,1998,7(3):47-49.
- [9] 杨慧娟,杜鹏.新课标下重析波利亚的合情推理思想[J].数学通报,2006,45(2):4-6.
- [10] 徐光考.数学探究性课堂教学的探索[J].数学通报,2005,44(10):24-27.
- [11] 李俊秀.类比——获得发现的源泉[J].数学通报,1991,30(4):11-14.
- [12] 傅佑珊,古永喜.类比推理与立体几何教学[J].数学通报,1991,30(11):22-24.
- [13] 连四清,余岩.类比推理及其教学探索[J].数学通报,2015,54(10):16-18.
- [14] 唐举,黄智华.高一年级学生逻辑推理能力与数学学业成绩的关系研究[J].数学通报,2019,58(7):11-13.
- [15] 宁连华.数学推理的本质和功能及其能力培养[J].数学教育学报,2003,12(3):42-45.
- [16] 郭玉峰.如何启发学生创见性的思考——美国《发展 K-12 年级数学推理》一书的启示[J].数学通报,2000,39(12):38-40.
- [17] 张伟平,杨玉东.数学的原创性推理和模仿性推理之差异比较[J].数学教育学报,2010,19(1):74-77.
- [18] 端木彦,孔德鹏,黄智华.高三年级学生逻辑推理能力与数学学业成绩的关系研究[J].数学通报,2019,58(6):30-34.
- [19] 田中,徐龙炳.数学基本技能测试结果的性别差异分析[J].数学通报,1999,38(7):41-44.
- [20] 黄智华,渠东剑.高中生逻辑推理能力的调查研究——以南京市为例[J].数学通报,2018,57(6):28-33.
- [21] 胡海霞,汪晓勤.影响高中生组合推理的因素[J].数学教育学报,2009,18(6):26-29.
- [22] 傅世球.让我们教猜想[J].数学教育学报,1996,5(4):30-32.
- [23] 梁志更,杨莉.浅谈类比、归纳与主动迁移意识[J].数学通报,1990,29(12):4-6.
- [24] 伍春兰,丁明怡,王肖.在“推知”活动中涵养逻辑推理素养——以“线面垂直”的概念和判定为例[J].数学通报,2020,59(4):24-27.
- [25] 李士琦,黄兴丰,吴颖康,等.数学教育研究方法论[M].北京:科学出版社,2015:1.
- [26] 叶立军.数学教育研究方法[M].北京:科学出版社,2017:1.
- [27] 曾小平,刘效丽,涂荣豹,等.教师数学修养对数学教学的影响研究——以“直线与平面平行的判定定理”为例[J].数学教育学报,2010,19(2):42-46.
- [28] 陈美英.地方师范院校数学“准教师”合情推理状况的初步调查[J].数学教育学报,2011,20(4):20-23.
- [29] 喻平.数学学科核心素养要素析取的实证研究[J].数学教育学报,2016,25(6):1-6.
- [30] 朱立明.义务教育阶段学生数学符号意识分析层次的构建[J].数学教育学报,2019,28(2):81-86.
- [31] 武小鹏,张怡.基于 TAP 的数学概念教学论证过程量化研究设计[J].数学教育学报,2019,28(6):76-80.
- [32] 郑欣,程靖.20 世纪以来中国初中数学课程标准中推理论证能力的变化及启示[J].数学教育学报,2019,28(3):24-29.

Analysis of 30 Years of Mathematical Reasoning Research

——Based on Bibliometrics Analysis of Papers Published in *Journal of Mathematics Education* and *Journal of Mathematics*

PU An-shan, LIU Lan-yin

(School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Jiangsu Yangzhou 225002, China)

Abstract: In order to better carry out theoretical research and practical exploration of mathematical reasoning in the field of mathematics education, it is necessary to analyze the papers on mathematical reasoning research in the two journals of the *Journal of Mathematics Education* and *Journal of Mathematics* in the past 30 years, mainly analyzing the number of papers published in the two journals, the citations and the topics of the papers, the research contents, the research methods, the research objects and the source of the authors. The analysis gets the following conclusions: (1) In the past 30 years, the overall number of journal publications in mathematical reasoning research has shown an upward trend; (2) the quality level of papers on mathematical reasoning research in the two journals is relatively high and the depth of research in this field needs to be further improved; (3) reasonable reasoning, geometric reasoning and mathematical core literacy are the focus and hot spots of mathematical reasoning research, but the research on logarithm and algebra, probability and statistics, mathematical activities and other contents is insufficient; (4) there is no uniform definition of relevant concepts and their relationships regarding mathematical reasoning; (5) research methods are gradually diversified, and mixed research has gradually become a new feature and trend of research methods in this field; (6) the research objects are mainly junior and senior high school students, but there is not enough attention to preschool, primary school students, college students, teachers, etc; (7) the authors are mainly from colleges and universities; there are few practical teachers, and the cooperation between university researchers and practical teachers is not strong.

Key words: mathematical reasoning; papers; reasonable reasoning; deductive reasoning; logical reasoning

[责任编辑: 陈汉君、张楠]

(上接第 37 页)

[14] NORTON A, WILKINS J L M, XU C Z. Brief report: A progression of fraction schemes common to Chinese and U.S. students [J]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2018 (49): 210–226.

[15] NORTON A. Developing fraction knowledge [M]. Ashford Colour Press Ltd, 2016: 80–137.

Verification of Fractional Schema Progression Model and Analysis of Chinese Primary School Students' Performance

SUN Wen-juan, DING Rui

(Faculty of Education, Northeast Normal University, Jilin Changchun, 130024 China)

Abstract: Fraction has always been a difficult point in primary school students' mathematics learning. Based on the advanced theory of fractional schema, a testing tool of students' learning progression on fractional schema is developed. The results of RASCH modeling shows that this tool has good reliability and validity, and the investigation of 402 primary school students of Year 6, who are using the mathematics textbooks of Beijing Normal University and the People's Education Edition, reveals that Chinese students' actual development of fraction is basically the same as the learning progression model of fractional schema, but there are some differences between actual and expected development on two stages: iterative fractional schema and distributing fractional schema. And students using PEP mathematics textbooks perform better than those using BNUP textbooks in some fractional schema stages. According to the above conclusions, two suggestions are proposed to help students to deeply understand the measurement meaning of fraction. The first is to design the operational game activities to promote students' development of fractional schema. The second is to use suitable representations to express the measurement meaning of fraction and computational process.

Key words: fractional schemes; learning progression; RASCH modeling

[责任编辑: 陈隼、张楠]

(上接第 73 页)

The Division of the Level of Mathematical Understanding

LI Chun-lei^{1,2}, YU Feng-lai³

(1. Faculty of Education, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;

2. Liang Xiang High School Affiliated to Beijing Normal University, Beijing 102488, China;

3. Yanzhuang Street Central Junior Middle School of Ju County, Shandong Rizhao 276535, China)

Abstract: Based on the interpretation of the connotation of classical mathematical understanding and the division of existing understanding levels, students' mathematical understanding is divided into four levels: instrumental understanding, relational understanding, creative understanding and cultural understanding. Taking the mean value inequality as a typical case, this paper interprets the connotation and manifestation of students' various levels of mathematical understanding in detail. The value of the level of instrumental understanding cannot be ignored. The level of students' individual mathematical understanding is developing and changing, and the level of students' mutual mathematical understanding is different. Within the scope of the ability, students are encourage to pursue in-depth learning, to achieve the level of "relational understanding". Students are encouraged to self-construct knowledge and to achieve the "creative understanding" level; they are encouraged to be nurtured in history and culture, aesthetic taste and humanistic care, so as to reach the level of "cultural understanding".

Key words: mathematical understanding; instrumental understanding; relational understanding; creative understanding; cultural understanding

[责任编辑: 陈隼、陈汉君]