【课堂研究·特设专栏：HPM 课例研究（之二十九）】

HPM 视角下的指数函数概念教学设计研究

张　冰[1]，蔡春梦[2]，雷沛瑶[3]

（1. 上海市通河中学，上海　200431；2. 华东师范大学 教师教育学院，上海　200062；
3. 华东师范大学 数学科学学院，上海　200241）

【摘　要】《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》指出，幂函数、指数函数与对数函数是最基本的、应用最广泛的函数，是进一步学习数学的基础。在双新（即新课标、新教材）课程下，沪教版新教材对函数板块内容的编排顺序进行了调整，对授课教师而言，需在观念以及相关问题的处理上都要做出相应的改变。文章从 HPM 视角设计“指数函数的定义与图像”的教学，旨在立足双新课程，通过重构式教学，结合数学史，帮助学生更好地理解指数函数的概念，并达成多元教育价值。

【关键词】HPM；指数函数；重构式教学

指数函数作为重要的基本初等函数之一，对于培养学生的数学学科核心素养具有独特的价值，其意义不言而喻。《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》指出，幂函数、指数函数与对数函数是最基本的、应用最广泛的函数，是进一步学习数学的基础[1]。在双新（即新课标、新教材）课程下，2020 年沪教版教材对函数板块内容的编排顺序进行了调整，先学习幂函数、指数函数、对数函数等具体函数，再以它们作为具体的实例抽象出一般函数的概念。这样的调整，体现了由具体到抽象、由特殊到一般的原则。对授课教师而言，则需在观念以及相关问题的处理上做出相应改变。

在 2020 年沪教版教材中，指数函数是第 4 章第 2 节的内容，即幂函数之后，对数函数之前。它从具体的折纸问题入手，引出指数函数的概念，指出其“底数固定，幂随着指数的变化而变化”的特征。通过类比幂函数的定义，指数函数的定义随之得出。同时，指数函数图像与性质的研究也借鉴了幂函数图像与性质的学习过程。在教学中，笔者发现利用类比学习指数函数的定义对学生而言并不是很困难，但是指数函数定义的完善和精致化过程，却是本节课的难点。笔者希望通过重构式教学，再现历史的发生和发展，帮助学生更好地理解指数函数的概念。

基于以上分析，笔者从 HPM 视角设计“指数函数的定义与图像”的教学，拟订如下学习目标。

（1）理解指数函数概念及特点，能够作出简单的指数函数图像，观察、了解指数函数图像的基本特征。

（2）经历指数函数概念的发生、发展、完善和应用过程，发展数学抽象、数学建模和数学运算素养，体会从特殊到一般的数学思想。

（3）体会数学的文化内涵，感悟数学的德育价值，提高学生的数学学习兴趣。

一、指数函数概念的历史

历史上，指数函数概念大致经历了四个发展阶段。

第一阶段：正整数指数阶段。自变量（幂指数）只在正整数范围内取值。早在公元前 2700 年左右，两河流域泥版书上就已记录了等比数列问题[2]。莱因德纸草书（公元前 1650 年左右）记载了一个首项和公比均为 7 的等比数列问题[3]。中国古代和古印度数学文献中都记载有许多等比数列问

【作者简介】张冰，高级教师，主要从事高中数学课堂教学研究；蔡春梦，华东师范大学在读硕士研究生，主要从事数学史与数学教育研究；雷沛瑶，华东师范大学在读博士研究生，主要从事数学史与数学教育研究。

【基金项目】上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地研究项目——数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究（A8）

题，如《孙子算经》中的“出门望九堤”问题、摩诃毗罗《计算方法刚要》中的“移城倍金”问题等。意大利数学家斐波那契（L. Fibonacci）在《计算之书》中也提出了多个等比数列问题，其中最著名的是棋盘问题。

第二阶段：实数指数阶段。在解决与幂相关的实际问题时，难免会出现幂指数不是整数的情况。对于这种情况，古人采用线性插值的方式加以解决。例如，古巴比伦泥版书上记载了以下问题：“年息20%，一定数目的钱经过多长时间变成原来的两倍?”[4] 该问题需要利用方程 $1.2^x=2$ 加以解决。泥版书上的做法是在 $x=3$ 和 $x=4$ 之间进行线性插值。中国汉代数学名著《九章算术》“盈不足”章中介绍的“蒲莞同长”“两鼠对穿”问题[5]，也是采用类似的方法来解决的。

指数的扩充促进了指数函数概念的诞生。14世纪，法国数学家奥雷姆（N. Oresme）在《比例算法》中表示了方根与分数指数幂之间的关系。16世纪，德国数学家斯蒂菲尔（M. Stifel）在《整数算术》中，将幂指数从非负整数推广到负整数[6]。17世纪常用对数表的诞生，促进了人们对分数指数幂的认识。1637年，法国数学家笛卡儿（R. Descartes）创用正整数指数符号[7]，随后，英国数学家沃利斯（J. Wallis）、牛顿（I. Newton）等又将负指数、分数指数加到笛卡儿的记数法中。19世纪，欧拉在《代数学基础》中通过类比得出分数指数幂与根式之间的关系[8]。

第三阶段：指数规律的几何研究。1644年，意大利数学家托里拆利（E. Torricelli）发现了用现代符号表示为 $y=ae^{-cx}$（$x\geqslant 0$）的曲线。他经过证明后得到，该曲线上任意点的纵坐标与该点处的斜率之比是一个常数[9]。之后，荷兰数学家惠更斯（C. Huygens）于1661年绘制了新的指数曲线，并重新证明了它的几何性质。然而，对于指数曲线上的点，当时还无法根据给定横坐标计算纵坐标，或根据给定纵坐标计算横坐标。在牛顿将二项式定理推广到有理数指数，从而获得一系列函数的幂级数展开式之后，这一问题得到了解决。之后，牛顿和莱布尼茨（G. W. Leibniz）创立微积分，指数函数的概念得到进一步发展。

第四阶段：指数函数的形成阶段。1748年，欧拉（L. Euler）在《无穷分析引论》中对将“指数为变数的幂”称为指数函数，他指出，这种函数是超越函数而非代数函数。欧拉还对底数做了分类讨论[10]，见表1。

表1

a 的值	a^z 的值		
	$z<0$	$z=0$	$z>0$
$a=1$	1	1	1
$a>1$	小于1，随 z 的增大而增大	1	大于1，随 z 的增大而增大
$0<a<1$	随 z 的增大而增大	1	随 z 的增大而减小
$a=0$	无穷大	1	0
$a<0$	z 取整数时，正负交错；取分数时，有时为实数，有时为虚数；取无理数时，有时为实数，有时为虚数	1	z 取整数时，正负交错；取分数时，有时为实数，有时为虚数；取无理数时，有时为实数，有时为虚数

在今天看来，欧拉的讨论中还存在着一些错误，如认为 $0^0=1$，当 $0<a<1$ 时，z 在 $(-\infty, 0)$ 上 a^z 随 z 的增大而增大（因为欧拉根据绝对值的大小来判断数的大小）。但欧拉鉴于讨论的结果，将指数函数限定在底数为正数且不为1的情形。由此，指数函数概念基本形成。现代数学中，为了保持指数函数图像的连续性而规定底数为正数且不等于1。笔者以上述历史为参照来设计本节课的教学。

二、教学设计与实施

（一）问题驱动，情境引入

问题1　在罗浮宫一张大约是公元前2000年的楔形文字泥版上，记录了这样一个问题“年息20%，一定数目的钱经过多长时间变成原来的两倍?”[4]

师：设初始的钱数目为“1”，那么经过 n 年后，钱数 y 是多少?

生：$y=(1+20\%)^n=\left(\frac{6}{5}\right)^n$。

师：若将由该函数得到的数据点标记在坐标系中，我们会得到怎样的图形?

生：$(0,1)$，$\left(1,\frac{6}{5}\right)$，$\left[2,\left(\frac{6}{5}\right)^2\right]$，$\left[3,\left(\frac{6}{5}\right)^3\right]$，…，$\left[n,\left(\frac{6}{5}\right)^n\right]$这些离散的点。

师：对。根据上面的分析，泥版上的问题实际上是一个什么样的数学问题？

生：实际上就是求解方程 $y=\left(\frac{6}{5}\right)^n=2$。

师：这是一个指数方程。简单估算之后，我们很容易发现 $1.728=\left(\frac{6}{5}\right)^3<\left(\frac{6}{5}\right)^n=2<\left(\frac{6}{5}\right)^4=2.074$，这说明需要的时间 n 在什么范围？

生：$n\in(3,4)$。

师：显然，它不是一个自然数。用我们学过的对数运算，通过计算器还可以计算出更加精确的值，大家算出的值是多少？

生：$\log_{\frac{6}{5}}2\approx3.8$。

师：公元前 2000 年的古巴比伦人并不知道对数。他们在得到这些离散的点之后，利用数量表 $\left(\frac{6}{5}\right)^n$，在 $n=3$ 和 $n=4$ 之间线性插值，得到答案为 3 年又 $9\frac{4}{9}$ 个月。由此可知，在等量关系 $y=\left(\frac{6}{5}\right)^n$ 中，n 的取值不仅可以是自然数，还可以是非自然数。

师：在第 3 章“幂、指数与对数”中，我们了解到，根据幂的运算法则进行代数推理，幂指数可以从初中的正整数一步步拓展到零、负整数、有理数、无理数，进而拓展到全体实数。而从泥版问题的解答过程中，我们又可以发现：幂指数的拓展不仅是代数推理的结果，还是实际问题的需要。结合本题中变量的实际含义（时间），不难得出上面等式中 n 的确切范围是什么？

生：$n\in[0,+\infty)$。

问题 2　在考古界，通过碳 14 来测定一件生物样本的年代已经是一种成熟的技术手段。碳 14 的衰变极有规律，其精确性可以称为自然界的“标准时钟”。当生物死亡后，它机体内原有的碳 14 含量会按确定的比率衰减（称为衰减率）。若年衰减率为 p，你能刻画出死亡生物体内碳 14 含量与死亡年数之间的关系吗？

生：把刚刚死亡的生物体内碳 14 的含量看成“1”，则死亡 n 年后，生物体内的碳 14 含量为 $y=(1-p)^n$。

师：科学家发现，大约每经过 5730 年，死亡的生物体内碳 14 含量会衰减为原来的一半，这个时间称为“半衰期”，根据半衰期的时间，能确定出 p 吗？

生：由 $y=(1-p)^{5730}=\frac{1}{2}$，可求得 $1-p=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}$，从而 $p=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}$。在这个问题中，生物死亡时间 x 与碳 14 含量 y 之间的关系是 $y=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}\right]^x$。

师：这个等式中 x 的范围是什么？

生：根据 x 的实际含义，可知 $x\in[0,+\infty)$。

（二）概念生成，辨析探究

师：通过以上两个问题的分析，我们得到两个等量关系：$y=\left(\frac{6}{5}\right)^x$，$y=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}\right]^x$。它们是函数吗？

生：是函数。等式中的变量 y 随着变量 x 的变化而变化。

师：我们以前见过它们吗？

生：（齐答）没有。

师：它们与幂函数的区别在哪里？

生：幂函数表示的是自变量的幂的形式，这里的等式虽然也是幂的形式，但是自变量在指数位置。

师：底数是确定的还是变化的？

生：（齐答）底数不变。

师：根据它们的特征，我们能否给它们一个恰当的名称？

生：（大部分）指数函数。

师：按照上面的分析，类比幂函数的定义，我们不妨也给出指数函数的一般定义。

生：当底数 a 固定，等式 $y=a^x$ 确定了变量 y 随变量 x 变化的规律，称为底数为 a 的指数函数。

师：很好。其中底数 a 的取值范围是什么？

生 1：一切实数。

生 2：应该是 $a>0$。

师：为什么 $a\leqslant0$ 不可以？

生 3：$a=0$ 时，0^0 没有意义。

生 4：不仅如此，$a=0$ 时，对所有 $x<0$ 都没有意义。

生 5：$a<0$ 时的情况似乎也是这样，当变量 x 变化时，变量 y 的值有时为正数，有时为负数，甚至有的时候式子本身是没有意义的，情况十分复杂，此时作为一个函数来研究是不合适的。

师：有道理。通过刚才的分析，我们可以确定

底数 $a>0$。

例1 若指数函数的图像经过点（3,27），求该指数函数的表达式。

生：设指数函数的表达式为 $y=a^x$，将点（3,27）代入，解得 $y=3^x$。

（三）图像研究，完善定义

师：知道指数函数的一般定义后，接下来我们该研究这个函数的什么呢?

生：函数的图像。

师：函数图像是直观理解函数中变量关系的重要手段。回顾之前学过的知识，作出函数图像的步骤是什么?

生：列表、描点、连线。

师：请同学们根据指数函数的定义，按照以上步骤，作出引例中两个指数函数的图像。为方便大家作图，老师将这两个指数函数的表达式稍加处理为：$y=2^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$。

教师巡视查看学生作的图，发现问题主要集中在以下两个方面。

1. 图像不完整，只有部分图像。引例中的两个指数函数因为自变量的实际含义，定义域均为[0，+∞），但是抛开情境，单纯从这两个函数的表达式来看，自变量的取值范围应为 **R**。

2. 学生能理解图像的连续性，但在连点成线的过程中，部分学生对是否应该画成光滑的曲线存有疑惑。

教师通过几何画板，展示描点、对点加密、最终连线的作图过程，让学生直观感受到指数函数的图像是一条光滑的曲线（如图1）。同时，在学生作图的基础上，教师通过 GeoGebra 软件作出更多的指数函数图像（如图2），引导学生归纳出指数函数图像的类别与特征。

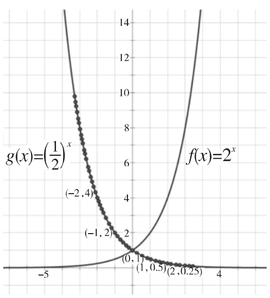

图1

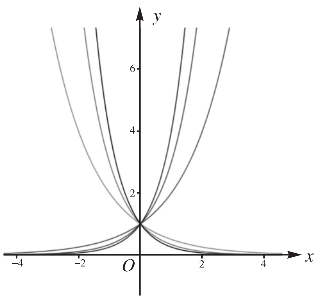

图2

师：根据前面同学们给出的指数函数定义，是不是所有指数函数的图像都是这种形状呢?

生：并不是。当 $a=1$ 时，指数函数的图像显然不符合图中这些指数函数的特点。

师：所以，关于指数函数的定义，对底数 a 的取值，需要进一步修正吗?

生：$a>0$，且 $a\neq1$。

（四）实验探索，升华认知

问题3 一张纸，将之对折，厚度变为原来的2倍，请问对折几次后，与课本的厚度相当?（课本约为70页）

生：对折6次即可。

师：假设一张纸的厚度大约0.1毫米，不断对折后会发生什么?

（教师播放相关视频，呈现以下数据：一张纸对折20次，厚度突破100米；对折35次，厚度100千米；对折42次，厚度44万千米。）

师：在折纸实验中，其实蕴含着一个数学模型，同学们知道是什么吗?

生：可以抽象成一个函数关系，即设对折次数为 x，纸的层数为 y，则有 $y=2^x$。

师：在视频中，我们看到了这个函数的函数值有什么特征?

生：函数值呈现出爆炸式的增长。

师：没错，这正是指数函数的一个显著特点。当底数 $a>1$ 时，随着 x 的增大，函数值呈现出爆炸式的增长。当底数 $a=1$ 时，显然不具备这样的特征，这也许是我们的数学家将 $a=1$ 剔除出指数函数的重要原因吧。

问题4 瑞士数学家欧拉在《无穷分析引论》一书中提到了著名的人口增长问题，将原题稍加改编得到：一场洪水使得某地只剩下6个人，如果洪水幸存者的数量以每年 $\frac{1}{16}$ 的速度增长，那么200年后，6个洪水幸存者将有多少个后代？400年以后呢?

生：200年以后，有 $6\times\left(1+\frac{1}{16}\right)^{200}\approx10^6$ 个后代；400年以后，有 $6\times\left(1+\frac{1}{16}\right)^{400}>2\times10^{11}$ 个后代。

师：仅仅400年，人数就已经超过了地球所能

维持的数量。当然，这也只是欧拉在一种理想状态下的估算，实际情况会更复杂多变，但是这个模型本身是有意义的。

（很多学生对此计算结果表示怀疑，并在课后展开了热烈的讨论。）

（五）归纳提炼，浸润德育

师：本节课我们主要学习了指数函数的定义和指数函数的图像。关于指数函数的定义，我们从两个现实问题出发，通过建立数学模型，得到了两个特殊的指数函数，进而归纳出指数函数的定义。其中，我们对底数 a 的取值范围进行了探讨。对于指数函数的图像，这节课重点讲了描点作图的过程，图像性质我们留在下节课探讨。

最后，借用指数函数所蕴含的积极的教育意义，教师用几句赠言激励学生树立积极向上的价值观和持之以恒的学习信念。

师：勤学如春起之苗，不见其增，日有所长；辍学如磨刀之石，不见其损，日有所亏。我们今天学的知识可以很好地诠释这两句诗的含义。若用指数函数表达，$1.01^{365}\approx 37.8$（如图3），说明每天进步一点点，一年以后，结果会远远大于1；$0.99^{365}\approx 0.03$（如图4），说明每天退步一点点，一年以后，结果会远远小于1。若是你再努力一点点，$1.02^{365}\approx 1377.4$（如图5），那么你会有更多的收获。

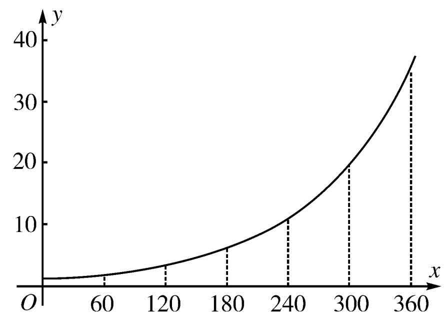

图3　1.01^x（$0\leqslant x\leqslant 365$）的图像

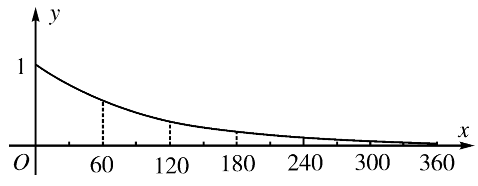

图4　0.99^x（$0\leqslant x\leqslant 365$）的图像

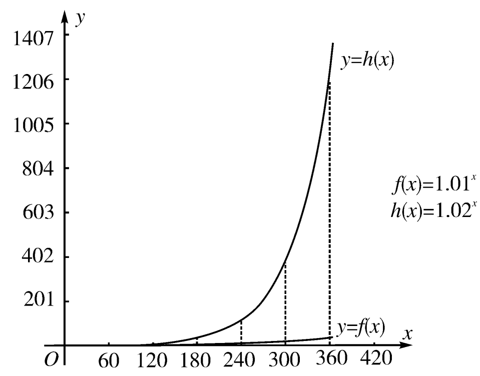

图5　1.01^x 与 1.02^x（$0\leqslant x\leqslant 365$）的对比图

三、学生反馈

在教学中，笔者设置了课前和课后学习单，共收集到全班45名学生的反馈信息。

（一）课前学习单分析

在课前学习单中，对于“提到指数幂，你会想到什么？”的问题，学生的回答主要集中在以下几个方面。

1. 指数幂的定义：82.2%（37名）的学生都能较为准确地表达指数幂的定义，其中有3名学生强调了幂指数的取值范围为全体实数。

2. 幂函数、指数函数以及对数函数的概念、性质等。

3. $a^0=1$（$a\neq 0$）。

4. 指数幂的运算性质。

对于“细胞每10分钟分裂一次（一次分裂成两个），两小时后一个细胞可分裂成多少个？”的问题，38名学生都给出了正确答案，说明该班绝大多数学生能够通过抽象、建模解决特定的数学问题。

（二）课后学习单分析

在课后学习单中，35名学生能够正确求得给定指数函数的定义域，41名学生能够区分指数函数与幂函数，所有学生都能抽象出古文“一尺之棰，日取其半，万世不竭”所蕴含的数学模型，即指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，说明从总体上看，该班学生基本能够理解指数函数的定义；而对于指数函数的作图，只有30名学生能准确描绘 $y=3^x$，$y=4^x$，$y=3^{-x}$ 的图像，学生的错误多为图像未经过点（0，1），这说明他们对于指数函数的图像性质还不是很了解，需要在下节课进一步学习。

在问及对本节课印象深刻的内容时，学生的回

答主要集中在指数函数在实际中的广泛应用、指数函数爆炸式增长的特点、指数函数优美和新颖的图像以及数学史的融入等方面。其中，多名学生表示对“欧拉人口增长问题”印象深刻。

四、结语

本节课借鉴指数函数的发生和发展历史，采用顺应式和重构式的方式融入数学史，以发生的方法引入数学概念，以符合学生认知基础的方式编排教学内容，共分为以下四个阶段（如图6）：底数为具体数值，幂指数为自然数；底数为具体数值，幂指数为任意实数；指数函数的初步构建；指数函数定义的完善。

$$\boxed{\begin{array}{l} y=\left(\frac{6}{5}\right)^n,\ n\in\mathbf{N} \\ y=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}\right]^n,\ n\in\mathbf{N}\end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} y=\left(\frac{6}{5}\right)^x,\ x\in\mathbf{R} \\ y=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}\right]^x,\ x\in\mathbf{R}\end{array}} \Rightarrow \boxed{y=a^x,\ x\in\mathbf{R}} \Rightarrow \boxed{y=a^x(a>0,\text{且}a\neq1),\ x\in\mathbf{R}}$$

图6　本节课教学的四个阶段

笔者通过古巴比伦泥版利息问题以及碳14的衰减问题及其变式，实现了阶段1到阶段2的演变。虽然在第3章中幂指数从代数推理的层面完成了拓展，但是此处从历史的角度和实际问题的层面来分析，更加符合幂指数拓展的需求和学生的认知水平；阶段2到阶段3的演变，体现了从特殊到一般的思想，指数函数完成了初步构建。之后，学生对底数a的取值范围进行探讨，逐步完善了指数函数的定义。此次教学，旨在立足双新课程，结合数学史，达成了多元教育价值。

（1）知识之谐。本节课基于学生的认知心理，重构了指数函数概念的发生与发展过程，符合学生的知识构建过程，揭示了知识之谐。

（2）能力之助。通过对多个数学问题（古巴比伦泥版问题、碳14衰减等）的分析，让学生以特殊的函数形式为逻辑起点，抽象、推理出一般的函数规律和结构，并用数学语言予以表征，培养其数学建模、数学抽象和逻辑推理的核心素养。在建模之后，依据运算法则解决数学问题，提升了学生数学运算的能力。之后，对指数函数图像的学习，建立了数与形的联系，提高了学生直观想象的能力。这五种核心素养的相互渗透，实现了能力之助。

（3）文化之魅。本节课运用的数学史料内容丰富，对利息问题、人口增长问题等的探究能很好地联系到现实生活，课堂从新知到应用，充满文化的气息，体现了文化之魅。

（4）探究之乐。数学实验（对折纸张）结合短视频的直观性，在帮助学生更好地理解指数函数爆炸式增长的特点的同时，营造了探究之乐。

（5）德育之效。教师借用古诗以及几个特殊的指数函数，激励学生树立积极向上的价值观和持之以恒的学习信念，达成了德育之效。

参考文献：

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）[M]. 北京：人民教育出版社，2020.

[2] 汪晓勤. 泥版上的数列问题[J]. 数学教学，2009（12）：封二，1-2，45.

[3] 汪晓勤. 纸草书上的数列问题[J]. 数学教学，2010（1）：29-31.

[4] 汪晓勤. HPM：数学史与数学教育[M]. 北京：科学出版社，2017.

[5] 郭书春. 汇校九章算术[M]. 沈阳：辽宁教育出版社，2004.

[6] 汪晓勤，叶晓娟，顾海萍. “分数指数幂”：从历史发生的视角看规定[J]. 教育研究与评论（中学教育教学），2015（4）：59-63.

[7] 张东年. HPM视角下指数函数及其性质的教学案例研究[J]. 数学通讯，2020（22）：14-17，30.

[8] EULER L. Elements of algebra[M]. New York：Springer，1972.

[9] CURTIS L J. Concept of the exponential law prior to 1900[J]. American Journal of Physics，1978（9）：896-906.

[10] 欧拉. 无穷分析引论[M]. 张延伦，译. 太原：山西教育出版社，1997.

（责任编辑：陆顺演）