

借助多元表征 丰富数学概念的认识

刘贤虎

- 摘要 随着认知心理学的发展，概念教学有了新的变化，从单一表征到多元表征，从突出强调概念本质，到与寻求意义并重。不同的表征形式是为了对概念或者问题进行不同的解释，即从不同的角度不同的视角阐述其本质。为此，应该关注数学概念教学中的多元表征学习问题。
- 关键词 多元表征；数学概念；教学
- 作者简介 刘贤虎，广东省东莞市松山湖中心小学教师

数学概念是客观现实中的数量关系和空间形式的本质属性在人脑中的反映，它是数学教材结构与学生数学认识结构中最基本的组成因素。因此，概念教学是小学数学教学的重要内容，历来也是认知心理学研究的热点。研究表明，概念的外部表征反映学生心理的内在表征，而且这种认识一直在不断发展完善。

一、以往概念教学的做法

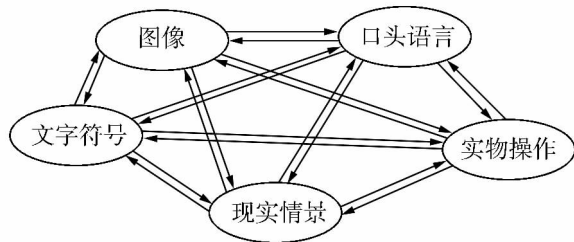
美国教育心理学家布鲁纳认为学生学习概念的思维活动有三个不同的层次，动作表征，图像表征，符号表征。这三个层次层层深入，逐层递进。越往后，抽象水平越高。如果在后面的学习中，学生还用前一层次表征，就会认为学生的认知水平还停留在比较低的阶段，抽象程度不高。布鲁纳的理论由于突出强调概念的本质，认为学生学习概念的过程就是“具体—表象—抽象”的数学化的过程，成为广大教师实施概念教学的基本途径。长期以来这种认识深入人心，即使当前，在很多公开课或公开的教学设计中，这样的认识也屡见不鲜。

例如“角的认识”的教学，首先创设情境，直观认识角。让学生观察情景图，指一指、说一说它们的角在哪里。学生指出剪刀上的角，钟面上的角……接着电脑演示，由实物抽象出角。剪刀叉开的地方，钟面上时针和分针组成的图形，三角尺上的图形抽象出角。最后揭示角各部分的名称。

这样线性关系的教学遵循（从）感知—（经）表象—（到）概念这一认知顺序，通过找一找、看一看、摸一摸、说一说等数学活动，在引导学生体验的基础上加以抽象概括，呈现概念的形成过程。教学中突出了概念的本质属性，却缺乏寻求意义的过程。

二、目前概念教学的共识

基于数学外在表征在数学学习中的交流和认知的作用，美国学者莱许提出：“实物操作只是数学概念发展的一个方面，其他的表述方式——如图像、书面语言、符号语言、现实情景等——同样也发挥了十分重要的作用。”它们之间不一定存在先后的发展顺序，主要应重视它们之间的转换与相互影响。因为这种转换与影响对于学生的概念形成和理解有重要的意义（如下图）。在概念教学中，不仅要重视从更高的抽象水平去重新认识原有的知识和经验，还要重视如何利用学生已有的知识和经验丰富和生动相应概念的严格意义。



美国、台湾地区等已将“同一概念不同心理表征之间的‘联系’”列为其数学课程标准的关键词。

人教版的《义务教育教科书数学（一至二年级）》教材及《教师教学用书》也对概念的教学建议做了相应的修改。例如关于“平均分”概念的教学建议是这样叙述的，“重视动作表征或图形表征到语言表征的转化”，“加强语言表征到图形表征转化的练习，为运用画图策略解决问题做准备”，“教师利用教材提供的或自己设计的习题，了解学生对平均分概念的理解，以及在动作表征、图形表征和语言表征三种表征方式中，从哪种表征到哪种表征的转化最容易，哪种转化最困难，针对学生的困难进行指导和训练。多种表征方式之间的转化越顺畅，学生对概念的理解越深刻”。而之前与实验教材配套的《教师教学用书》的教学要求是“教学时，由分物品的具体情境引入‘平均分’之后，要让学生动手操作，在摆摆、分分、看看、圈圈等平均分物的实践活动中，建立‘平均分’的概念。学生充分经历平均分物的过程，明确‘平均分’的含义，并在头脑中初步形成‘平均分’的表象，就为认识‘除法’积累了丰富的感性知识”。可见，这种变化非常明显，导向也非常清晰，逐步与国际教育接轨。

三、利用多元表征，丰富数学概念的认识

在数学学习中，学生如果要深刻理解数学概念，一方面需要学习多个表征，因为单个表征仅仅反映数学对象的某个侧面。另一方面学习表征系统内的相互作用，系统内表征形式之间的精致与系统间的转换。

1. 多元并重

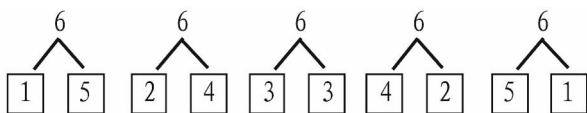
实物操作表征必须借助实物或具体事物的实际操作进行思维；图像表征在实物消失后能依据实物的影像构造的心像进行内在的思维活动；符号表征能直接对数学符号进行思维操作；语言表征是心理表征的语言实现，能用相关的词、词组、句子等描述思维活动；情境表征是能找到并理解与思维活动密切相关的学习情景，不仅仅依赖于教师提供的现实情景。

例如“平均分”的教学。

师：同学们，我给大家带来了一些小礼物。你

能将这6颗糖分成2份吗？请你说一说。

学生回答，得出答案。



教师提问：这里哪些分法实际上是一样的？

生：6颗糖分成1颗糖和5颗糖，与6颗糖分成5颗糖和1颗糖实际上是一样的，表示的意思都是6颗糖分成两份，一份是1颗糖，另一份是5颗糖。

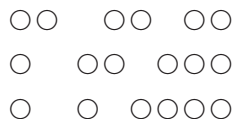
师：还有哪些分法也是一样的？

生：6颗糖分成2颗糖和4颗糖，与6颗糖分成4颗糖和2颗糖也是一样的。

师：你能将这些糖分成3份吗？用圆片代替糖摆一摆。

学生独立操作学具完成。

全班交流，展示学生汇报的不同情况。



师：（观察同学们分的结果）你喜欢哪种？为什么？

生1：我喜欢第一种，每份都是2颗糖。

生2：第一种都是一样多。这样分比较公平。

师：看样子，我们班的孩子都喜欢公平，公正。像这样每份都是2颗糖，也就是每份——同样多。我们就把每份分得同样多，叫“平均分”。今天我们一起学习“平均分”。

师：前面6颗糖分成两份里，哪一种平均分呢？

生：6颗糖分成3颗糖和3颗糖是平均分。

师：为什么？

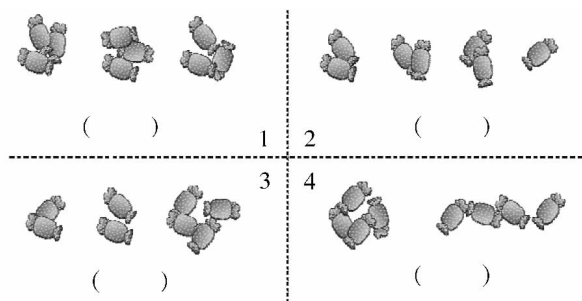
生：因为每份分得同样多，所以是平均分。

师：前面每份2颗和每份3颗为什么都是平均分呢？

生：只要每份分得同样多就是平均分。

师：不管每份是2颗还是3颗，只要每份分得同样多，都是平均分。

师：下面哪些分法是平均分？在括号里画“√”。



重点提问第2、第4幅图。

师：第2幅图，前面3份都是2颗，为什么不是平均分呢？

生：前面都是2颗，但是最后只有1颗，不一样多，就不是平均分。

师：第4幅图，左边的糖堆在一块，右边的糖却是摆开的，为什么也是平均分呢？

生：摆得不一样，但是它们都是4颗，同样多，也是平均分。

师：在这里，平均分与摆的形状没有关系，只要它们的个数相同，就是平均分。在生活中，你还见过哪些平均分？

生答略。

借助分糖，提供现实情景，让学生经历动手摆一摆——实物操作表征、用圆片代替糖——图像表征、自己的话叙述——语言表征“平均分”概念，最后找生活中的平均分，情境表征平均分。这样，通过不同的外在表征形式，丰富了学生对概念的认识和理解。当然，多元并重并不是忽视符号表征、语言表征等抽象的思维能力，只是不使其作为教学的终极目标，无需过分强调。如同人体的骨架、血和肉等，都有着不同的作用，不可或缺。

对于一个数学概念或者数学问题，往往可以通过多元的形式来表征它。不同的表征形式是为了对概念或者问题进行不同的解释，即从不同的角度不同的视角对其本质进行可视化或体验化的阐述，使学生获得更深刻的体验，从而达到对数学本质的感悟。

2. 加强转换

概念教学不仅要帮助学生建立概念的多元表征，而且要根据需要与情境在外在表征的不同成分之间做出灵活的转换。将抽象概念与学生已有知识经验建立有层次的联系，引导学生在概念的抽象意义、表象模型（或操作）、具体原型（或活动）之间寻找意义与数学化的过程。换句话说，学习者需

要通过内化概念的多种表达形式并与已有的内在表象发生相互作用，以此促进或影响学习者的数学理解。

例如“有余数的除法”。

师：我们班准备布置教室，搬来15盆花。如果由你来摆放，你想用几盆花摆一组呢？

学生思考片刻。

师：大家有想法了吗？请大家用圆片代替花盆摆一摆，也可以把自己的想法在作业纸上画一画。完成后把你的想法和同桌互相交流一下。

生边摆边汇报：2盆一组，可以摆7组，还剩1盆；3盆一组，可以摆5组，刚好摆完；4盆一组，可以摆3组，还剩3盆；5盆一组，可以摆3组；6盆一组，可以摆2组，还剩3盆……

师：这些分法中为什么有的还有剩余呢？

生：剩下的不够摆一组。

师：你能用一个除法算式表示你摆的结果吗？我们先从第一组开始吧，2盆一组，可以摆7组，还剩1盆；这个结果你会表示吗，在作业纸上试着写一写。

学生尝试写算式。（展示学生的写法）

师： $15 \div 2 = 7$ （组）……1（盆），在数学上我们把这“剩下”、“多的”这些词换成一个符号，用6个小圆点来表示。这个除法算式与我们以前学过的有什么不一样？

生：多了1盆。

师：这个“1”叫……

生1：余数。

生2：剩数。

师：我们把不够再分而剩下的数叫做余数。这节课我们一起来研究——有余数的除法。

师：这个算式是什么意思？

生1：15盆花可以分成7组，还多出1盆。

生2：15表示花盆的总数，2表示每组2个花盆，7表示可以分7组，1是余数，表示多出来的1盆。

在教学活动中，借助问题解决，通过动手摆圆片、同桌互相说一说，完成从情境表征到实物操作、图像表征的转换。接着学生汇报时，边摆边说，实现了实物操作表征到语言表征的转换。然后，把摆的结果用算式表示出来，逐步引导学生从语言表征转换到符号表征。而叙述算式的意义时，

完成了从符号表征到语言表征、情境表征以及图像表征之间的转换。不仅体现了“有余数除法算式”数学化的过程，而且也反映了寻求“有余数除法算式”意义的过程。

在概念的不同表征之间灵活地转换，帮助学生自身所具有的概念意象建立比较清醒的自我意识，实现从更高的抽象水平重新认识原有的知识和经验。

3. 尊重个性

学生作为一个独立的个体，在自己的学习活动中完全可能倾向于多元表征中的某一方面。他对新学习的概念作出表述、或者作出定义也会具有独特的想法。教师更多的应该尊重不同个体的个性表达。

首先，不同的个体对概念定义有个性化的理解或表述。

前面“有余数的除法”教学中，当学生用除法算式表示摆放花盆有剩余的结果时，出现了很多情况。

$$15 \div 7 =$$

$$15 \div 7 = 2 \text{ 还余 } 1$$

$$15 \div 7 = 2 \text{ (1)}$$

$$(15-1) \div 7 = 2$$



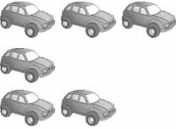

$$15 \div 7 = 2 \cdots \cdots 1$$

有的学生没有想出表示结果的方法，有部分学生的想法是正确的，表示的方法不太规范。但这些理解，反映出学生头脑中对这一信息的表征，独具个性，十分有利于他们通过反思或改进来实现新的发展。

其次，不同个体倾向多元表征的不同方面。有的学生倾向于用图像表征来描述，有的学生可能倾向于语言表征，有的倾向于符号表征，等等。

例如，“平均分”巩固练习中的判断题。

哪些分法是平均分？在括号里画“√”。

	1		2
()		()	
	3		4
()		()	

师：哪些是平均分？说说你的想法。

生1：第1题是平均分，因为每份分得同样多。

生2补充：第1题每一份都是5根胡萝卜，所以是平均分。

生3：第2题不是平均分，因为每个图形不一样。

生4：因为每份不是同样多，不是平均分。

生5：第3题不是平均分，因为每份不是同样多。

生6：第4题是平均分，因为每组都是3个人。

……

学生在回答理由时，有的直接用概念的定义叙述，这样的学生倾向于语言表征。有的学生从每一份的数量是否相同来判断，他倾向于图像表征等。教师不能简单以表征形式的优劣加以区分评价，应该积极肯定每一种表征形式。

总之，借助多元表征，在关注表征发展层次的同时，要加强表征之间的转换，帮助学生建立并丰富真正反映概念本质的内在表征。

参考文献：

- [1] 李士琦. PME: 数学教育心理[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2001.
- [2] 唐剑岚. 数学多元表征学习及教学[M]. 南京: 南京师范大学出版社, 2009.
- [3] 郑毓信. 多元表征理论与概念教学[J]. 小学数学教育, 2011 (10): 3-7.