**巩子坤，史宁中，张丹《义务教育数学课程标准修订的新视角：数的概念与运算的一致性》**

**义务教育数学课程标准修订的新视角：数的概念与运算的一致性**

**巩子坤，史宁中，张丹**

**一、缘起：体现课程内容的一致性、整体性是新课标的基本要求**

《义务教育数学课程标准（2022年版）》指出：数学课程内容的一大特点就是整体性。教材编写与教学设计应当突出核心内容，呈现不同数学知识之间的实质性关联，展现内容与观念之间的融合，体现课程内容的整体性。在小学“数与代数”领域，要让学生初步体会数是对数量的抽象，感悟数的概念的一致性，形成数感和符号意识；感悟数的运算以及运算之间的关系，体会数的运算的一致性，形成运算能力和初步的推理意识。教学中，也要沟通数的概念与数的运算之间的关联，突出“数”与“运算”的一致性。但从当前的教材和教学来看：关于数的认识，整数（本文特指自然数）、分数、小数有其独特的认识方法；关于数的运算，加减乘除有各自的算理，整数、分数、小数运算有各自的算法。这些知识似乎是支离破碎、缺乏内在一致性的。

事实上，整数、分数、小数本质上是一个整体：从数形成与发展的角度而言，整数除法运算出现不够除的情形，产生了分数，分数运算不方便，产生了小数；从数组成的角度而言，整数、分数、小数均是基于“计数单位”建构的。加减乘除本质上也是一个整体：从运算意义的角度而言，所有运算都可以还原成加法，加法是所有运算的基础；从运算算理的角度而言，分配律、交换律、结合律（下文均简称“运算律”）与等式的基本性质是所有算理的基础；从运算算法的角度而言，所有运算都可以还原成计数单位与计数单位运算（个别运算，计数单位不参与运算）、计数单位上的数字（本质上是计数单位的个数）与计数单位上的数字运算，加法口诀、乘法口诀是所有算法的基础。

明白了“数”与“运算”的一致性，抓住了统领性概念，就可以拨开笼罩在数及其运算表面的层层面纱，设计合理的教学案例，带领学生经历知识的发生发展过程，建立知识之间的联系，体会知识的本源性、一致性与整体性。在《程序性知识课程设计的新视角：算理贯通，算法统整》一文中，我们初涉了上述观点，接下来进行详述。

**二、建构：何以实现数的概念与运算的一致性**

**（一）数的概念的一致性：计数单位是建构数的基础**

认识数的关键是理解数的建构方法。事实上，所有数都是基于计数单位来建构的。“计数单位”是针对个数与顺序的计量单位，如同长度计量单位1m、1dm，二者均是“度量单位”，前者通过抽象得到，后者借助工具得到。有了计数单位，就克服了逐个计数的烦琐与低效，提供了一个组（本质上是一个标准量、单位量），一组一组地计数，这个“一组”就是计数单位。数的发展过程就是计数单位的发展过程。整数和小数的计数单位就是十、个、十分之一等，即通常所说的数位；分数的计数单位就是分数单位。建构整数、分数与小数的关键是计数单位，“数的认识”应当强调计数单位。

**1.整数的认识**

（1）记数活动的本质是创造计数单位

人类记数活动的发展有两条主线：其一是记数符号的产生及发展，即从实物符号，到象形符号，再到抽象符号；其二是记数方法的发展，即从“一个一个”地数（非进位制）到“一组一组”地数（进位制），从同一个记数符号在不同位置代表相同的值（非位值制）到代表不同的值（位值制）的过程。

其中，“一组一组”地数是记数活动发展的关键。表面上，它只是把刻痕记数中的一道道刻痕分组、聚合了；本质上，这就实现了对信息的压缩与抽象，使复杂、庞大的记数成为可能。这个“一组”，就是进位，就是计数单位。然而，如果要表示特别大的数量，有限的计数单位就显得捉襟见肘了。于是，人类创造了位值制。位值制解决了非位值制的问题，但保留了进位制的核心——计数单位。因而，记数制的发展过程，就是计数单位的创造过程，计数单位的产生对记数活动的发展具有决定性意义。

了解记数制的发展历程，理解计数单位创生的必要性，是认识数、理解数及其运算的关键。遗憾的是，现行的大多数教材，在介绍了整数及四则运算后，直至四年级才带领学生感悟记数制的发展历程。

（2）如何认识整数

认识整数要先认识1—9，再认识0和10。其中1—9的认识比较容易，10的认识就比较困难了。后者与前者的本质区别是“进位”，即从“个”凝聚与飞跃到“十”。9个“1”再加1个“1”，不称为10个“1”，而称为1个“十”。突破了“十”这个计数单位，其他的计数单位，就容易学习了。例如，认识“万”就是通过9999多1来认识的。

那么，如何表示1个“十”呢？这涉及位值制和“0”。教师要带领学生慢慢体会：我们已经知道1—9这9个记数符号，“十”如何表示呢？如果直接写成1个“十”，就太不方便了；如果简单地写成“1”，就会与我们已经学过的“1”相混淆；如果创造新的符号，符号太多，使用也不方便。因此，人类创造了位值制。例如，我国古人把1个“十”表示成“1□”，印度人将其表示成“10”，这就与“1”区别开来。这里的“□”和“0”均具有两重性——占位符与记数符，对应两个作用：一是“占位”，占了个位，于是“1”就被推到十位；二是表明“个位上什么都没有，是空的”。

这样学习，与历史上位值制、“0”的发展是一致的，因为“0”是位值制的产物；这样学习，就可以体会到位值制以及“0”产生的必要性与优越性，也渗透了数学文化，融入了课程思政。

**2.分数的认识**

（1）分数的计数单位

分数的计数单位（也就是分数单位）不似整数明显，一个原因似乎是：分数的计数单位虽然可以按大小从左至右排成一列，但这些计数单位之间没有明确的倍数关系。这给分数大小比较以及分数运算（尤其是加减运算）带来了不便。于是，要把不同的计数单位转化成相同的计数单位，这样才能比较大小、进行加减运算。可见，分数对计数单位的依赖程度一点也不比整数低。另一个原因则是：教材中对分数计数单位的强调不够，导致很多学生甚至认识不到分数有计数单位。这既不利于认识分数的本质，也不利于推演分数运算的算理、推导算法。从文化的角度而言，这也许与我们传统的分数命名有关。从《九章算术》开始，我们就把分数2/5读作五分之二，这个命名强调了“分”与“取”的过程（平均分成5份，取其中的2份），而并没有强调每份是整体的1/5。不同的是，在英文中，2/5表示为two fifths，fifth是1/5，two fifths就是2个1/5，对分数单位的强调是很明显的。

（2）如何认识分数

概念只是一个称谓，其蕴含的性质和关系才是最重要的。因此，引入一个概念时，应当涉及这个概念的性质或者关系。分数是一种有大小的新数，其目的是帮助我们度量小于1的量。因此，在强调分数计数单位的同时，也要重视分数的大小比较。分数的认识可以分为三个阶段：第一阶段，举例讲分数，初步感悟“在相同的计数单位上才能比较大小”，同时渗透“分子和分母同乘以一个数，分数大小不变”；第二阶段，借助通分，将分数转换为相同的计数单位，进行加减运算；第三阶段，建立分数与整数除法的关系，完整认识分数。当然，也可以从概念认识的一般过程，即感性具体、感性一般、理性具体与理性一般来认识分数。

**3.小数的认识**

（1）小数的计数单位

小数0.1的计数单位是1/10，0.01的计数单位是1/100。小数是基于十进位值制来建构的，认识小数的关键是认识基于十进制的小数计数单位。如果把整数、小数的计数单位有序排列在一起，如“”，我们会发现：小数计数单位是整数计数单位的自然延伸，小数的产生是自然而然的。

（2）如何认识小数

小数是“十进分数”，这里的“分数”只是一个描述计数单位的工具，“十进”（或“十分”）才是本质。可以这样引导学生思考：在认识整数时，个位满十向十位进一，十位满十向百位进一……反过来，把计数单位“百”平均分成十份，一份就是计数单位“十”；把计数单位“十”平均分成十份，一份就是计数单位“个”。以此类推，把计数单位“个”平均分成十份，一份就是“个”的十分之一，称其为十分位……这样看来，小数作为十进分数，所蕴含的分数意义是非常弱的。

小数意义的教学重点在于位值制。按照“逢十进一”和“退一作十”的规则建构出来的小数，可以和整数一起构成完整的位值制系统，这正是小数的意义和核心所在。其中，按同样的规则（十进制）来建构小数非常重要，凸显了知识的本质。

综上所述，数的概念的一致性体现为：“计数单位”是建构数的基础。因而，认识数的关键是认识“计数单位”。

**（二）运算意义的一致性：加法是运算意义的基础**

人类首先明晰了加法，然后基于加法衍生出了其他运算：减法是加法的逆运算，乘法是加法的简便运算，除法是减法的简便运算。这样就得到了四则运算。因此，所有运算都可以化归为加法运算，加法是所有运算的基础与核心。加法的意义可以用以下两种方法来解释。

一是借助定义。例如，我们定义2=1＋1，3=2＋1（皮亚诺算术公理系统），于是，得到1＋1=2，2＋1=3，这利用了“=”的对称性。但这样的解释脱离了现实背景，没有涉及“等于”的本质。二是利用对应的方法来解释加法，从而体现“等于”的本质。例如，3＋1=4。过去讲3＋1是三个物品再加一个物品，就是四个物品，所以3＋1=4，但等号的含义没有体现出来。可以这样讲：左边有三个物品，右边有四个物品，哪边的物品多？右边多，3＜4；如果在三个物品里再加一个物品，哪边多呢？一样多；所以3＋1=4。在此过程中理解等号和加法的意义，建立数感和符号意识，感悟数学思想。基于加法，可以将四则运算合理地联系起来。加减乘除四则运算的关系概括如图1所示。



**图1 四则运算关系图**

因此，在探究数的运算意义的一致性过程中，要明晰减法、乘法、除法都是在加法的基础上衍生而来的，加法是所有运算的基础与核心。

**（三）运算算理、算法的一致性：计数单位、运算律与等式的基本性质是算理、算法的基础**

数学是一个统一体，数学运算也是一个统一体。数的建构与数的运算都是基于计数单位进行的，却是两个互逆的过程：一个是经历了很长的历史锤炼组装起来的，一个是慢慢拆解开来的。数的概念是数的运算的基础，数的运算是对数的概念的再应用。

推演数的运算算理，既要基于计数单位，也要基于运算律、等式的基本性质。推导数的运算算法，主要基于计数单位：对于加减运算而言，只有相同计数单位上的数字才能进行运算；对于乘除运算而言（整数除法除外），计数单位与计数单位运算，计数单位上的数字与计数单位上的数字进行运算。

**1.加减法运算的一致性**

（1）整数加减法运算

整数加减运算，就是将每一个数按照计数单位进行分解，然后相同计数单位上的数字相加减。例如：123＋45=100＋20＋3＋40＋5=1（百）＋（2＋4）（十）＋（3＋5）（个）=168。可以发现，计数单位上的数字均小于等于9，因而，加法口诀表是所有加减法运算的基础。

（2）分数加减法运算

分数相加减时，需要先统一分数单位：同分母分数相加减，分母不变，分子相加减；异分母分数相加减，先化成同分母的分数，再相加减。可见，分数相加减，均是“相同计数单位上的数字相加减”，这与整数运算保持了一致。

（3）小数加减法运算

小数四则运算的算理、算法既可以基于整数的算理、算法，也可以基于分数的算理、算法，这充分显示了小数的“两栖性”。无论基于整数加减，还是基于分数加减，均是“相同计数单位上的数字相加减”。

综上所述，加减法运算的一致性体现为：相同计数单位上的数字相加减，计数单位不变。

**2.乘法运算的一致性**

探寻乘法运算的算理与算法，当然可以简单地还原成加法，这样做，乘法就找到了源头。但如果一直这样，乘法就永远是攀附在加法上的藤蔓。因而，乘法要建构自己独立的算理与算法。

（1）整数乘法运算

在进行整数乘法运算时，就开始使用运算律了。例如：25×3=20×3＋5×3=（2×3）×（10×1）＋（5×3）×（1×1）=75。首先，将25基于计数单位进行分解并利用分配律进行拆解；其次，将每一个数都基于计数单位进行分解，利用交换律、结合律，将计数单位上的数字与计数单位上的数字相乘、计数单位与计数单位相乘，得到新的数字与新的计数单位；再次，新的计数单位与新的数字相乘，得到部分积；最后，将两个部分积相加即为最终的运算结果。可见，横式将算理展示得淋漓尽致、清清楚楚。当然，就算法而言，竖式更加清晰一些。

可以发现，整数乘法运算要进行两类运算：计数单位与计数单位相乘（这两个计数单位可以一样、可以不一样），从而得到新的计数单位；计数单位上的数字与计数单位上的数字相乘，得到新的计数单位上的新的数字。计数单位上的数字均小于等于9，因而，乘法口诀表是所有乘法运算的基础。

（2）分数乘法运算

基于演绎推理推演分数乘法的算理与算法，涵盖两个方面：证明单位分数相乘，本质上是计数单位相乘得到新的计数单位；证明非单位分数相乘，本质上是计数单位与计数单位相乘，计数单位上的数字与计数单位上的数字相乘。证明过程中要用到等式的基本性质。于是分数乘法运算与整数乘法运算保持了一致。

（3）小数乘法运算

基于整数乘法、分数乘法分别推演小数乘法运算的算理与算法：基于整数乘法，推演小数乘法的算理遇到困难。例如，0.34×0.2=（0.3＋0.04）×0.2=0.3×0.2＋0.04×0.2=（3×2）×（0.1×0.1）＋（4×2）×（0.01×0.1）=0.068。可以发现，小数乘法的算法与整数乘法几乎完全一致。但为什么0.1×0.1=0.01？简单解释就是，在十进制下，0.1=1/10，1/10×1/10=1/100=0.01，还是要回到分数才能够说明白算理。基于分数乘法，推演算理就很清晰了，同样是“计数单位与计数单位相乘，计数单位上的数字与计数单位上的数字相乘”。

综上所述，乘法运算的一致性体现为：计数单位与计数单位相乘，计数单位上的数字与计数单位上的数字相乘。

**3.除法运算的一致性**

乘除法互为逆运算，除法运算的意义依赖乘法，乘法口诀就自然地成为了除法口诀，因而，除法算理与算法的探求要还原为乘法。

（1）整数除法运算

例如，1500÷4按照以下步骤进行运算：15（百）÷4=3（百）……3（百）；30（十）÷4=7（十）……2（十）；20（个）÷4=5（个）。最后将所有的商3（百）、7（十）与5（个）组合起来，得到结果375。被除数被分解成以不同计数单位为单位的若干个部分，上例是15（百）、30（十）、20（个）三个部分，这些部分分别参与运算，而除数整体参与运算。然后，这些部分分别除以除数，进行试商。每一次的商总是小于等于9个计数单位，这又将除法运算还原成了乘法口诀表中的乘法运算。上述运算过程还可以表示为：1500÷4=［12（百）＋28（十）＋ 20（个）］÷4=［12（百）＋28（十）＋20（个）］×1/4=12（百）×1/4＋28（十）×1/4＋20（个）×1/4=3（百）＋7（十）＋5（个）=375。这就是整数除法的算理。当然，这个过程为了使用乘法分配律，还要使用“除以一个不为0的数等于乘这个数的倒数”。

（2）分数除法运算

①建立整数除法与分数的关系。“整数除法可以表示成分数的形式”，这等价于“除以一个不为0的整数等于乘这个数的倒数”，即a÷b=a×1/b=a/b。这个结论可以类比分数乘法算理的推导，采用演绎推理来证明。这事实上推演了分数除法的算理、推导了分数除法的算法，也建立了整数除法与分数的关系、贯通了整数与分数的运算。

②除以一个不为0的数等于乘上它的倒数。基于演绎推理，同理可证







这个等式之所以写得如此复杂，是想说明：其一，对于分数除法而言，其算理同样是借助演绎推理来推演的，其算法转化为了分数乘法，而分数乘法运算与整数、小数乘法运算保持了一致性；其二，，这是计数单位与计数单位相除  ，计数单位上的数字与计数单位上的数字相除（c÷d），再把所得到的两个商相乘。这再次体现出运算的一致性。

（3）小数除法运算

同小数乘法一样，可以分别基于整数除法、分数除法来推演小数除法运算的算理与算法。小数除法运算可以概括为“披着小数外衣的整数除法运算”，例如，对于1.5÷0.04，可以利用“商不变规律”将其转化成整数除法，即1.5÷0.04=150÷4，于是就可以按照整数除法的运算方法来进行小数除法运算了。

综上所述，除法运算的一致性体现为：计数单位与计数单位相除，计数单位上的数字与计数单位上的数字相除。当然，整数除法只有计数单位上的数字参与运算。通过分析可以发现，运算算理、算法的一致性体现为：计数单位、运算律与等式的基本性质是算理、算法的基础。

**三、结论与建议：基于计数单位、运算律等实现数的概念与运算的一致性**

**（一）结论**

通过分析，可建构数的概念与运算的一致性框架（见图2）：一个核心概念，即计数单位；一些基本规律，即运算律与等式的基本性质；一些基本运算，即计数单位与计数单位运算，计数单位上的数字与计数单位上的数字运算；一些基本事实，即加法口诀、乘法口诀。



**图2 数的概念与运算的一致性**

**（二）建议**

**1.基于计数单位，建立数之间的联系，感悟数的概念的一致性，培养数感和符号意识**

建立数之间的联系，就要以计数单位为核心要素来统领数的概念。感悟数概念的本质，就要带领学生经历由数量到数、由整数到分数再到小数的形成过程。这个过程是知识的发生发展过程，也是数学化的过程。学生经历了这个过程，才能够体会知识的本源性与一致性。

具体来说，就是要带领学生体验计数单位在数的建构中的统领作用，理解数是计数单位多少的表达，感悟“十进位值制”的意义。为了简洁、有效地记数，人类经历了漫长的过程：从非进位制到进位制，从非位值制到位值制，这说的是记数的原则；从实物记数到刻痕记数，从许多个符号到十个符号，这说的是记数的符号。在记数过程中，运算律被自然而然地使用着，计数单位发挥着统领作用，这些很容易迁移、推广到分数与小数，这就建立了整数、分数与小数的一致性。正是在这样的过程中，培养了学生的数感与符号意识。

**2.基于运算律、等式的基本性质与计数单位，建立数与运算之间的联系，体会数的运算的一致性，提高运算能力和推理能力**

建立数与运算之间的联系、体会数的运算的本质，就要带领学生体会计数单位在数的运算中的统领作用，经历运算意义、算理和算法的探索过程。具体说来包括以下几点。其一，要建立“数”与“运算”之间的联系，理解“数的概念是数的运算的基础，数的运算是数的概念的再应用”，体会数的表达与运算方法的一致性。正如前文所说，数的概念是基于计数单位把数组装起来，数的运算是基于计数单位把数拆解开来。其二，要引导学生探索、理解加、减、乘、除运算意义之间的联系，体会所有运算都可以还原为加法，加法运算是所有运算的基础。其三，要引导学生探索、理解所有运算的算理均来自运算律与等式的基本性质，算理的推演既可以通过一个一个算式归纳得到，也可以通过演绎推理得到，而这恰恰是培养学生演绎推理能力的好素材、好机会。其四，要带领学生体会、感悟所有运算的算法均基于计数单位。与此同时，还要引导学生明白，算理是算法的因，算法是算理的果。通过以上过程，培养学生的运算能力和推理能力。

当然，引导学生体会到上述两个一致性，不可急于求成，而要静待花开。我们要整体设计教学，在数的认识、数的运算的每一节课中贯彻上述思想，更要在单元学习结束的时候，在所有数的概念与运算学习结束的时候，进行融会贯通的复习，实现算理贯通、算法统整。

**3.学会用整体的、联系的、发展的眼光看问题，形成科学的思维习惯，发展数学核心素养**

在感悟数的概念的一致性的过程中，培养学生的数感和符号意识，这两者均直接指向学生抽象素养的培养：数感是形成抽象能力的经验基础，符号意识是形成抽象能力和推理能力的经验基础。在体会数的运算的一致性的过程中，在推演算理、推导算法的过程中，提高学生的运算能力和推理能力（尤其是演绎推理能力），这些能力均是重要的数学核心素养。

也正是在感悟上述两个一致性的过程中，学生学会了用整体的、联系的、发展的眼光看数学、想问题，形成了理性思维、科学精神。

为了达成上述目标，教师要重视对教学内容的整体分析，深化对数学知识本质的理解，提炼能建立数学知识间的结构与联系、发挥核心作用的数学概念，由此建构数学单元学习主题统整下的脉络清晰、条理分明、相互联系的数学知识体系，进而引导学生体会不同数学知识之间数学学习方法的一致性和可迁移性，帮助学生学会用整体的、联系的、发展的眼光看问题，形成科学的思维习惯，发展数学核心素养。