2023年普通高等学校招生全国统一考试

新课标Ⅰ卷数学

本试卷共4页，22小题，满分150分. 考试用时120分钟.

注意事项：

1．答题前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用$2B$铅笔将试卷类型(A)填涂在答题卡相应位置上. 将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”.

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用$2B$铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上.

3．非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液. 不按以上要求作答的答案无效.

4．考生必须保持答题卡的整洁. 考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合$M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x|x^2-x-6\geqslant 0\}$，则$M\cap N=$（　　）

$A.\{-2,-1,0,1\}$　　$B.\{0,1,2\}$　　$C.\{-2\}$　　$D.2$

【答案】C

【解析】

【分析】方法一：由一元二次不等式的解法求出集合N，即可根据交集的运算解出.

方法二：将集合M中的元素逐个代入不等式验证，即可解出.

【详解】方法一：因为$N=\{x|x^2-x-6\geqslant 0\}=(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$，而$M=\{-2,-1,0,1,2\}$，

所以$M\cap N=\{-2\}$.

故选：C.

方法二：因为$M=\{-2,-1,0,1,2\}$，将$-2,-1,0,1,2$代入不等式$x^2-x-6\geqslant 0$，只有-2使不等式成立，

所以$M\cap N=\{-2\}$.

故选：C.

2. 已知$z=\dfrac{1-i}{2+2i}$，则$z-\bar{z}=$（　　）

$A.-\mathrm{i}$　　$B.\mathrm{i}$　　$C.0$　　$D.1$

【答案】A

【解析】

【分析】根据复数的除法运算求出z，再由共轭复数的概念得到$\bar{z}$，从而解出.

【详解】因为$z=\dfrac{1-i}{2+2i}=\dfrac{(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{-2i}{4}=-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，所以$\bar{z}=\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$，即$z-\bar{z}=-\mathrm{i}$.

故选：A.

3. 已知向量$\vec{a}=(1,1)$，$\vec{b}=(1,-1)$，若$\left(\vec{a}+\lambda\vec{b}\right)\perp\left(\vec{a}+\mu\vec{b}\right)$，则（　　）

$A.\lambda+\mu=1$　　$B.\lambda+\mu=-1$

$C.\ \lambda\mu=1$ $D.\ \lambda\mu=-1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据向量的坐标运算求出$\vec{a}+\lambda\vec{b}$,$\vec{a}+\mu\vec{b}$,再根据向量垂直的坐标表示即可求出.

【详解】因为$\vec{a}=(1,1)$,$\vec{b}=(1,-1)$,所以$\vec{a}+\lambda\vec{b}=(1+\lambda,1-\lambda)$,$\vec{a}+\mu\vec{b}=(1+\mu,1-\mu)$,

由$\left(\vec{a}+\lambda\vec{b}\right)\perp\left(\vec{a}+\mu\vec{b}\right)$可得,$\left(\vec{a}+\lambda\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\mu\vec{b}\right)=0$,

即$(1+\lambda)(1+\mu)+(1-\lambda)(1-\mu)=0$,整理得:$\lambda\mu=-1$.

故选:D.

4. 设函数$f(x)=2^{x(x-a)}$在区间$(0,1)$上单调递减,则a的取值范围是(　　)

$A.\ (-\infty,-2]$ $B.\ [-2,0)$

$C.\ (0,2]$ $D.\ [2,+\infty)$

【答案】D

【解析】

【分析】利用指数型复合函数单调性,判断列式计算作答.

【详解】函数$y=2^x$在R上单调递增,而函数$f(x)=2^{x(x-a)}$在区间$(0,1)$上单调递减,

则有函数$y=x(x-a)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$在区间$(0,1)$上单调递减,因此$\frac{a}{2}\geqslant1$,解得$a\geqslant2$,

所以a的取值范围是$[2,+\infty)$.

故选:D

5. 设椭圆$C_1:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$,$C_2:\frac{x^2}{4}+y^2=1$的离心率分别为$e_1,e_2$. 若$e_2=\sqrt{3}e_1$,则$a=$(　　)

$A.\ \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $B.\ \sqrt{2}$ $C.\ \sqrt{3}$ $D.\ \sqrt{6}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据给定的椭圆方程,结合离心率的意义列式计算作答.

【详解】由$e_2=\sqrt{3}e_1$,得$e_2^2=3e_1^2$,因此$\frac{4-1}{4}=3\times\frac{a^2-1}{a^2}$,而$a>1$,所以$a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故选:A

6. 过点$(0,-2)$与圆$x^2+y^2-4x-1=0$相切的两条直线的夹角为α,则$\sin\alpha=$(　　)

$A.\ 1$ $B.\ \frac{\sqrt{15}}{4}$ $C.\ \frac{\sqrt{10}}{4}$ $D.\ \frac{\sqrt{6}}{4}$

【答案】B

【解析】

【分析】方法一:根据切线的性质求切线长,结合倍角公式运算求解;方法二:根据切线的性质求切线长,结合余弦定理运算求解;方法三:根据切线结合点到直线的距离公式可得$k^2+8k+1=0$,利用韦达定理结合夹角公式运算求解.

【详解】方法一:因为$x^2+y^2-4x-1=0$,即$(x-2)^2+y^2=5$,可得圆心$C(2,0)$,半径$r=\sqrt{5}$,

过点$P(0,-2)$作圆C的切线,切点为A,B,

因为$|PC|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$,则$|PA|=\sqrt{|PC|^2-r^2}=\sqrt{3}$,

可得 $\sin\angle APC=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4},\cos\angle APC=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$，

则 $\sin\angle APB=\sin2\angle APC=2\sin\angle APC\cos\angle APC=2\times\dfrac{\sqrt{10}}{4}\times\dfrac{\sqrt{6}}{4}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

$\cos\angle APB=\cos2\angle APC=\cos^2\angle APC-\sin^2\angle APC=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{10}}{4}\right)^2=-\dfrac{1}{4}<0$，

即 $\angle APB$ 为钝角，

所以 $\sin\alpha=\sin(\pi-\angle APB)=\sin\angle APB=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$；

法二：圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 的圆心 $C(2,0)$，半径 $r=\sqrt{5}$，

过点 $P(0,-2)$ 作圆 C 的切线，切点为 A,B，连接 AB，

可得 $|PC|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$，则 $|PA|=|PB|=\sqrt{|PC|^2-r^2}=\sqrt{3}$，

因为 $|PA|^2+|PB|^2-2|PA|\cdot|PB|\cos\angle APB=|CA|^2+|CB|^2-2|CA|\cdot|CB|\cos\angle ACB$

且 $\angle ACB=\pi-\angle APB$，则 $3+3-6\cos\angle APB=5+5-10\cos(\pi-\angle APB)$，

即 $3-\cos\angle APB=5+5\cos\angle APB$，解得 $\cos\angle APB=-\dfrac{1}{4}<0$，

即 $\angle APB$ 为钝角，则 $\cos\alpha=\cos(\pi-\angle APB)=-\cos\angle APB=\dfrac{1}{4}$，

且 α 为锐角，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$；

方法三：圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 的圆心 $C(2,0)$，半径 $r=\sqrt{5}$，

若切线斜率不存在，则切线方程为 $y=0$，则圆心到切点的距离 $d=2>r$，不合题意；

若切线斜率存在，设切线方程为 $y=kx-2$，即 $kx-y-2=0$，

则 $\dfrac{|2k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5}$，整理得 $k^2+8k+1=0$，且 $\Delta=64-4=60>0$

设两切线斜率分别为 k_1,k_2，则 $k_1+k_2=-8,k_1k_2=1$，

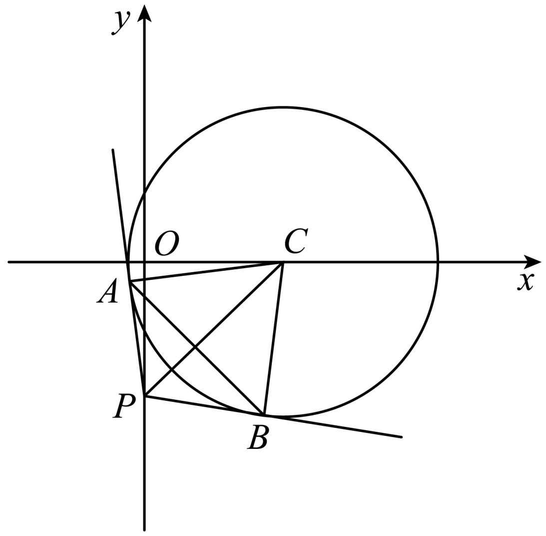
可得 $|k_1-k_2|=\sqrt{(k_1+k_2)^2-4k_1k_2}=2\sqrt{15}$，

所以 $\tan\alpha=\dfrac{|k_1-k_2|}{1+k_1k_2}=\sqrt{15}$，即 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{15}$，可得 $\cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{15}}$，

则 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\dfrac{\sin^2\alpha}{15}=1$，

且 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin\alpha>0$，解得 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

故选：B.



7. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，设甲：$\{a_n\}$ 为等差数列；乙：$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，则（　　）

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

【答案】C

【解析】

【分析】利用充分条件、必要条件的定义及等差数列的定义，再结合数列前 n 项和与第 n 项的关系推理判断作答.，

【详解】方法 1，甲：$\{a_n\}$ 为等差数列，设其首项为 a_1，公差为 d，

则 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d, \frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d=\frac{d}{2}n+a_1-\frac{d}{2}, \frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{d}{2}$，

因此 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，则甲是乙的充分条件；

反之，乙：$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，即 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{nS_{n+1}-(n+1)S_n}{n(n+1)}=\frac{na_{n+1}-S_n}{n(n+1)}$ 为常数，设为 t，

即 $\frac{na_{n+1}-S_n}{n(n+1)}=t$，则 $S_n=na_{n+1}-t\cdot n(n+1)$，有 $S_{n-1}=(n-1)a_n-t\cdot n(n-1), n\geqslant 2$，

两式相减得：$a_n=na_{n+1}-(n-1)a_n-2tn$，即 $a_{n+1}-a_n=2t$，对 $n=1$ 也成立，

因此 $\{a_n\}$ 为等差数列，则甲是乙的必要条件，

所以甲是乙的充要条件，C 正确.

方法 2，甲：$\{a_n\}$ 为等差数列，设数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1，公差为 d，即 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，

则 $\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n+a_1-\frac{d}{2}$，因此 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，即甲是乙的充分条件；

反之，乙：$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为 等差数列，即 $\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=D, \frac{S_n}{n}=S_1+(n-1)D$，

即 $S_n=nS_1+n(n-1)D, S_{n-1}=(n-1)S_1+(n-1)(n-2)D$，

当 $n\geqslant 2$ 时，上两式相减得：$S_n-S_{n-1}=S_1+2(n-1)D$，当 $n=1$ 时，上式成立，

于是 $a_n=a_1+2(n-1)D$，又 $a_{n+1}-a_n=a_1+2nD-[a_1+2(n-1)D]=2D$ 为常数，

因此 $\{a_n\}$ 为等差数列，则甲是乙　的　必要条件，

所以甲是乙的充要条件.

故选：C

8. 已知 $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{3}$，$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{6}$，则 $\cos(2\alpha+2\beta)=$（　　）.

A. $\dfrac{7}{9}$　　B. $\dfrac{1}{9}$　　C. $-\dfrac{1}{9}$　　D. $-\dfrac{7}{9}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据给定条件，利用和角、差角的正弦公式求出 $\sin(\alpha+\beta)$，再利用二倍角的余弦公式计算作答.

【详解】因为 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{3}$，而 $\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{6}$，因此 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$，

则 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{2}{3}$，

所以 $\cos(2\alpha+2\beta)=\cos2(\alpha+\beta)=1-2\sin^2(\alpha+\beta)=1-2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$.

故选：B

【点睛】方法点睛：三角函数求值的类型及方法

(1)“给角求值”：一般所给出的角都是非特殊角，从表面来看较难，但非特殊角与特殊角总有一定关系．解题时，要利用观察得到的关系，结合三角函数公式转化为特殊角的三角函数.

(2)“给值求值”：给出某些角的三角函数值，求另外一些角的三角函数值，解题关键在于“变角”，使其角相同或具有某种关系.

(3)“给值求角”：实质上也转化为“给值求值”，关键也是变角，把所求角用含已知角的式子表示，由所得的函数值结合该函数的单调区间求得角，有时要压缩角的取值范围.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 有一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_6$，其中 x_1 是最小值，x_6 是最大值，则（　　）

A. x_2,x_3,x_4,x_5 的平均数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的平均数

B. x_2,x_3,x_4,x_5 的中位数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的中位数

C. x_2,x_3,x_4,x_5 的标准差不小于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的标准差

D. x_2,x_3,x_4,x_5 的极差不大于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的极差

【答案】BD

【解析】

【分析】根据题意结合平均数、中位数、标准差以及极差的概念逐项分析判断.

【详解】对于选项 A：设 x_2,x_3,x_4,x_5 的平均数为 m，$x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的平均数为 n，

则 $n-m=\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6}-\dfrac{x_2+x_3+x_4+x_5}{4}=\dfrac{2(x_1+x_6)-(x_5+x_2+x_3+x_4)}{12}$，

因为没有确定 $2(x_1+x_6)$，$x_5+x_2+x_3+x_4$ 的大小关系，所以无法判断 m,n 的大小，

例如：1,2,3,4,5,6，可得 $m=n=3.5$；

例如 1,1,1,1,1,7，可得 $m=1,n=2$；

例如1,2,2,2,2,2,可得$m=2,n=\frac{11}{6}$;故A错误;

对于选项B:不妨设$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant x_5\leqslant x_6$,

可知x_2,x_3,x_4,x_5的中位数等于$x_1,x_2,\cdots,x_6$的中位数均为$\frac{x_3+x_4}{2}$,故B正确;

对于选项C:因为x_1是最小值,x_6是最大值,

则x_2,x_3,x_4,x_5的波动性不大于$x_1,x_2,\cdots,x_6$的波动性,即x_2,x_3,x_4,x_5的标准差不大于$x_1,x_2,\cdots,x_6$的标准差,

例如:2,4,6,8,10,12,则平均数$n=\frac{1}{6}(2+4+6+8+10+12)=7$,

标准差$s_1=\sqrt{\frac{1}{6}[(2-7)^2+(4-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2+(10-7)^2+(12-7)^2]}=\frac{\sqrt{105}}{3}$,

4,6,8,10,则平均数$m=\frac{1}{4}(4+6+8+10)=7$,

标准差$s_2=\sqrt{\frac{1}{4}[(4-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2+(10-7)^2]}=\sqrt{5}$,

显然$\frac{\sqrt{105}}{3}>5$,即$s_1>s_2$;故C错误;

对于选项D:不妨设$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant x_5\leqslant x_6$,

则$x_6-x_1\geqslant x_5-x_2$,当且仅当$x_1=x_2,x_5=x_6$时,等号成立,故D正确;

故选:BD.

10. 噪声污染问题越来越受到重视.用声压级来度量声音的强弱,定义声压级$L_p=20\times\lg\frac{p}{p_0}$,其中常数$p_0(p_0>0)$是听觉下限阈值,$p$是实际声压.下表为不同声源的声压级:

声源	与声源的距离/m	声压级/dB
燃油汽车	10	60～90
混合动力汽车	10	50～60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车10m处测得实际声压分别为p_1,p_2,p_3,则(　　).

A. $p_1\geqslant p_2$　　　　B. $p_2>10p_3$

C. $p_3=100p_0$　　　　D. $p_1\leqslant 100p_2$

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据题意可知$L_{p_1}\in[60,90],L_{p_2}\in[50,60],L_{p_3}=40$,结合对数运算逐项分析判断.

【详解】由题意可知:$L_{p_1}\in[60,90],L_{p_2}\in[50,60],L_{p_3}=40$,

对于选项A:可得$L_{p_1}-L_{p_2}=20\times\lg\frac{p_1}{p_0}-20\times\lg\frac{p_2}{p_0}=20\times\lg\frac{p_1}{p_2}$,

因为$L_{p_1}\geqslant L_{p_2}$,则$L_{p_1}-L_{p_2}=20\times\lg\frac{p_1}{p_2}\geqslant 0$,即$\lg\frac{p_1}{p_2}\geqslant 0$,

所以$\frac{p_1}{p_2}\geqslant 1$且$p_1,p_2>0$,可得$p_1\geqslant p_2$,故$A$正确;

对于选项B:可得$L_{p_2}-L_{p_3}=20\times\lg\frac{p_2}{p_0}-20\times\lg\frac{p_3}{p_0}=20\times\lg\frac{p_2}{p_3}$,

因为$L_{p_2}-L_{p_3}=L_{p_2}-40\geqslant10$,则$20\times\lg\frac{p_2}{p_3}\geqslant10$,即$\lg\frac{p_2}{p_3}\geqslant\frac{1}{2}$,

所以$\frac{p_2}{p_3}\geqslant\sqrt{e}$且$p_2,p_3>0$,可得$p_2\geqslant\sqrt{e}p_3$,

当且仅当$L_{p_2}=50$时,等号成立,故B错误;

对于选项C:因为$L_{p_3}=20\times\lg\frac{p_3}{p_0}=40$,即$\lg\frac{p_3}{p_0}=2$,

可得$\frac{p_3}{p_0}=100$,即$p_3=100p_0$,故C正确;

对于选项D:由选项A可知:$L_{p_1}-L_{p_2}=20\times\lg\frac{p_1}{p_2}$,

且$L_{p_1}-L_{p_2}\leqslant90-50=40$,则$20\times\lg\frac{p_1}{p_2}\leqslant40$,

即$\lg\frac{p_1}{p_2}\leqslant2$,可得$\frac{p_1}{p_2}\leqslant100$,且$p_1,p_2>0$,所以$p_1\leqslant100p_2$,故$D$正确;

故选:ACD.

11. 已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,$f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$,则(　　).

A. $f(0)=0$

B. $f(1)=0$

C. $f(x)$是偶函数

D. $x=0$为$f(x)$的极小值点

【答案】ABC

【解析】

【分析】方法一:利用赋值法,结合函数奇遇性的判断方法可判断选项ABC,举反例$f(x)=0$即可排除选项D.

方法二:选项ABC的判断与方法一同,对于D,可构造特殊函数$f(x)=\begin{cases}x^2\ln|x|,x\neq0\\0,x=0\end{cases}$进行判断即可.

【详解】方法一:

因为$f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$,

对于A,令$x=y=0$,$f(0)=0f(0)+0f(0)=0$,故A正确.

对于B,令$x=y=1$,$f(1)=1f(1)+1f(1)$,则$f(1)=0$,故B正确.

对于C,令$x=y=-1$,$f(1)=f(-1)+f(-1)=2f(-1)$,则$f(-1)=0$,

令$y=-1$,$f(-x)=f(x)+x^2f(-1)=f(x)$,

又函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,所以$f(x)$为偶函数,故C正确,

对于D,不妨令$f(x)=0$,显然符合题设条件,此时$f(x)$无极值,故D错误　.

方法二:

因为$f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$,

对于A,令$x=y=0$,$f(0)=0f(0)+0f(0)=0$,故A正确.

对于B,令$x=y=1$,$f(1)=1f(1)+1f(1)$,则$f(1)=0$,故B正确.

对于C,令$x=y=-1$,$f(1)=f(-1)+f(-1)=2f(-1)$,则$f(-1)=0$,

令$y=-1$,$f(-x)=f(x)+x^2f(-1)=f(x)$,

又函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,所以$f(x)$为偶函数,故C正确,

对于 D，当 $x^2y^2\neq 0$ 时，对 $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$ 两边同时除以 x^2y^2，得到 $\dfrac{f(xy)}{x^2y^2}=\dfrac{f(x)}{x^2}+\dfrac{f(y)}{y^2}$，

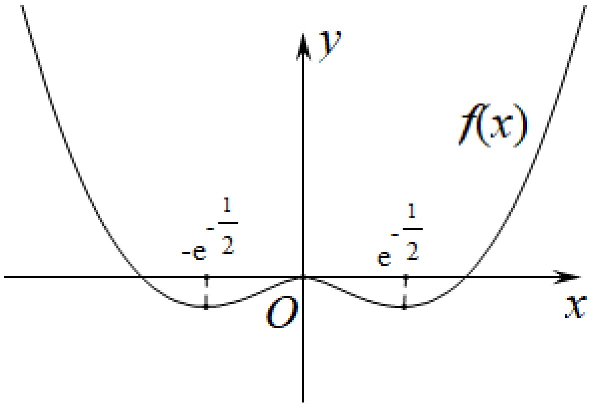
故可以设 $\dfrac{f(x)}{x^2}=\ln|x|(x\neq 0)$，则 $f(x)=\begin{cases}x^2\ln|x|,x\neq 0\\0,x=0\end{cases}$，

当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2\ln x$，则 $f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=x(2\ln x+1)$，

令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$；令 $f'(x)>0$，得 $x>\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$；

故 $f(x)$ 在 $\left(0,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)$ 上单调递增，

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},0\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\infty,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right)$ 上单调递减，



显然，此时 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值，故 D 错误.

故选：ABC.

12. 下列物体中，能够被整体放入棱长为1(单位：m) 的正方体容器 (容器壁厚度忽略不计) 内的有 (　　)

A. 直径为 $0.99m$ 的球体

B. 所有棱长均为 $1.4m$ 的四面体

C. 底面直径为 $0.01m$，高为 $1.8m$ 的圆柱体

D. 底面直径为 $1.2m$，高为 $0.01m$ 的圆柱体

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据题意结合正方体的性质逐项分析判断.

【详解】对于选项 A：因为 $0.99m<1m$，即球体的直径小于正方体的棱长，

所以能够被整体放入正方体内，故 A 正确；

对于选项 B：因为正方体的面对角线长为 $\sqrt{2}m$，且 $\sqrt{2}>1.4$，

所以能够被整体放入正方体内，故 B 正确；

对于选项 C：因为正方体的体对角线长为 $\sqrt{3}m$，且 $\sqrt{3}<1.8$，

所以不能够被整体放入正方体内，故 C 正确；

对于选项 D：因为正方体的体对角线长为 $\sqrt{3}m$，且 $\sqrt{3}>1.2$，

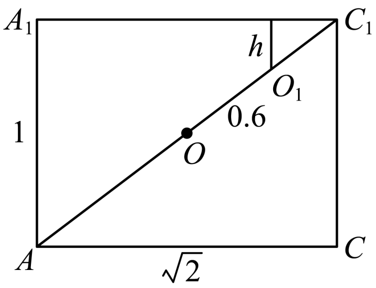
设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的中心为 O，以 AC_1 为轴对称放置圆柱，设圆柱的底面圆心 O_1 到正方体的表面的最近的距离为 hm，

如图，结合对称性可知：$OC_1=\dfrac{1}{2}C_1A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$C_1O_1=OC_1-OO_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-0.6$，

则 $\dfrac{h}{AA_1}=\dfrac{C_1O_1}{C_1A}$，即 $\dfrac{h}{1}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}-0.6}{\sqrt{3}}$，解得 $h=\dfrac{1}{2}-\dfrac{0.6}{\sqrt{3}}>0.34>0.01$，

所以能够被整体放入正方体内，故 D 正确；

故选：ABD.



【点睛】关键点睛：对于 C、D：以正方体的体对角线为圆柱的轴，结合正方体以及圆柱的性质分析判断.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课，学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课，并且每类选修课至少选修 1 门，则不同的选课方案共有____________种（用数字作答）.

【答案】64

【解析】

【分析】分类讨论选修 2 门或 3 门课，对选修 3 门，再讨论具体选修课的分配，结合组合数运算求解.

【详解】(1) 当从 8 门课中选修 2 门，则不同的选课方案共有 $C_4^1C_4^1=16$ 种；

(2) 当从 8 门课中选修 3 门，

①若体育类选修课 1 门，则不同的选课方案共有 $C_4^1C_4^2=24$ 种；

②若体育类选修课 2 门，则不同的选课方案共有 $C_4^2C_4^1=24$ 种；

综上所述：不同的选课方案共有 $16+24+24=64$ 种.

故答案　为　：64.

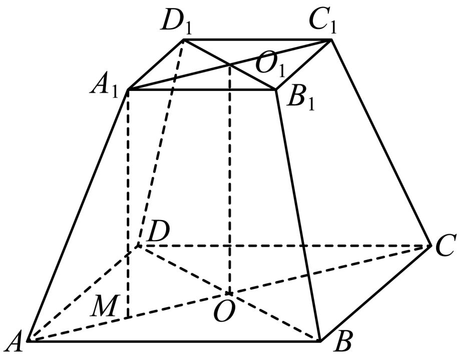
14. 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$A_1B_1=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，则该棱台的体积为____________.

【答案】$\dfrac{7\sqrt{6}}{6}$##$\dfrac{7}{6}\sqrt{6}$

【解析】

【分析】结合图像，依次求得 A_1O_1，AO，A_1M，从而利用棱台的体积公式即可得解.

【详解】如图，过 A_1 作 $A_1M\perp AC$，垂足为 M，易知 A_1M 为四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高，



因为 $AB=2$，$A_1B_1=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，

则 $A_1O_1=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}A_1B_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}AB=\sqrt{2}$，

故 $AM=\frac{1}{2}(AC-A_1C_1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $A_1M=\sqrt{A_1A^2-AM^2}=\sqrt{2-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以所求体积为 $V=\frac{1}{3}\times(4+1+\sqrt{4\times1})\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{7\sqrt{6}}{6}$.

故答案为：$\frac{7\sqrt{6}}{6}$.

15. 已知函数 $f(x)=\cos\omega x-1(\omega>0)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 有且仅有 3 个零点，则 ω 的取值范围是____________.

【答案】$[2,3)$

【解析】

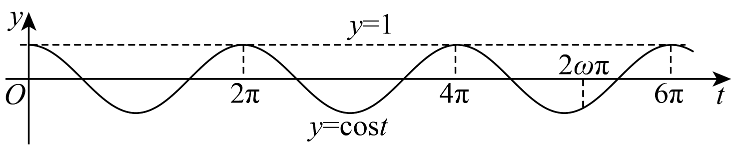
【分析】令 $f(x)=0$，得 $\cos\omega x=1$ 有 3 个根，从而结合余弦函数的图像性质即可得解.

【详解】因为 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$，所以 $0\leqslant\omega x\leqslant 2\omega\pi$，

令 $f(x)=\cos\omega x-1=0$，则 $\cos\omega x=1$ 有 3 个根，

令 $t=\omega x$，则 $\cos t=1$ 有 3 个根，其中 $t\in[0,2\omega\pi]$，

结合余弦函数 $y=\cos t$ 的图像性质可得 $4\pi\leqslant 2\omega\pi<6\pi$，故 $2\leqslant\omega<3$，



故答案为：$[2,3)$.

16. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2. 点 A 在 C 上，点 B 在 y 轴上，$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$，$\overrightarrow{F_2A}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，则 C 的离心率为____________.

【答案】$\frac{3\sqrt{5}}{5}$## $\frac{3}{5}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】方法一：利用双曲线的定义与向量数积的几何意义得到 $|AF_2|,|BF_2|,|BF_1|,|AF_1|$ 关于 a,m 的表达式，从而利用勾股定理求得 $a=m$，进而利用余弦定理得到 a,c 的齐次方程，从而得解.

方法二：依题意设出各点坐标，从而由向量坐标运算求得 $x_0=\frac{5}{3}c,y_0=-\frac{2}{3}t,t^2=4c^2$，将点 A 代入双曲线 C 得到关于 a,b,c 的齐次方程，从而得解；

【详解】方法一：

依题意，设 $|AF_2|=2m$，则 $|BF_2|=3m=|BF_1|,|AF_1|=2a+2m$，

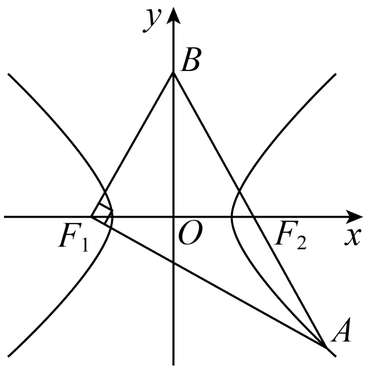
在 $Rt\triangle ABF_1$ 中，$9m^2+(2a+2m)^2=25m^2$，则 $(a+3m)(a-m)=0$，故 $a=m$ 或 $a=-3m$(舍去)，

所以 $|AF_1|=4a,|AF_2|=2a,|BF_2|=|BF_1|=3a$，则 $|AB|=5a$，

故 $\cos\angle F_1AF_2=\frac{|AF_1|}{|AB|}=\frac{4a}{5a}=\frac{4}{5}$，

所以在 $\triangle AF_1F_2$ 中，$\cos\angle F_1AF_2=\frac{16a^2+4a^2-4c^2}{2\times4a\times2a}=\frac{4}{5}$，整理得 $5c^2=9a^2$，

故 $e=\frac{c}{a}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.



方法二:

依题意，得 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，令 $A(x_0,y_0)$，$B(0,t)$，

因为 $\overrightarrow{F_2A}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，所以 $(x_0-c,y_0)=-\dfrac{2}{3}(-c,t)$，则 $x_0=\dfrac{5}{3}c$，$y_0=-\dfrac{2}{3}t$，

又 $\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$，所以 $\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{F_1B}=\left(\dfrac{8}{3}c,-\dfrac{2}{3}t\right)(c,t)=\dfrac{8}{3}c^2-\dfrac{2}{3}t^2=0$，则 $t^2=4c^2$，

又点 A 在 C 上，则 $\dfrac{\frac{25}{9}c^2}{a^2}-\dfrac{\frac{4}{9}t^2}{b^2}=1$，整理得 $\dfrac{25c^2}{9a^2}-\dfrac{4t^2}{9b^2}=1$，则 $\dfrac{25c^2}{9a^2}-\dfrac{16c^2}{9b^2}=1$，

所以 $25c^2b^2-16c^2a^2=9a^2b^2$，即 $25c^2(c^2-a^2)-16a^2c^2=9a^2(c^2-a^2)$，

整理得 $25c^4-50c^2+9a^4=0$，则 $(5c^2-9a^2)(5c^2-a^2)=0$，解得 $5c^2=9a^2$ 或 $5c^2=a^2$，

又 $\mathrm{e}>1$，所以 $\mathrm{e}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ 或 $\mathrm{e}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$（舍去），故 $\mathrm{e}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

故答案为：$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

【点睛】关键点睛：双曲线过焦点的三角形的解决关键是充分利用双曲线的定义，结合勾股定理与余弦定理得到关于 a,b,c 的齐次方程，从而得解.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$A+B=3C$，$2\sin(A-C)=\sin B$.

(1) 求 $\sin A$；

(2) 设 $AB=5$，求 AB 边上的高.

【答案】(1) $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

(2) 6

【解析】

【分析】(1) 根据角的关系及两角和差正弦公式，化简即可得解；

(2) 利用同角之间的三角函数基本关系及两角和的正弦公式求 $\sin B$，再由正弦定理求出 b，根据等面积法求解即可.

【小问 1 详解】

$\because A+B=3C$，

$\therefore \pi-C=3C$，即 $C=\dfrac{\pi}{4}$，

又 $2\sin(A-C)=\sin B=\sin(A+C)$，

$\therefore 2\sin A\cos C-2\cos A\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

$\therefore \sin A\cos C=3\cos A\sin C$，

$\therefore \sin A=3\cos A$,

即 $\tan A=3$,所以 $0<A<\frac{\pi}{2}$,

$\therefore \sin A=\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

【小问 2 详解】

由 (1) 知, $\cos A=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$,

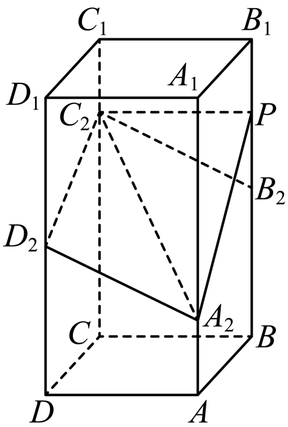
由 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

由正弦定理, $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$,可得 $b=\frac{5\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{10}$,

$\therefore \frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A$,

$\therefore h=b\cdot\sin A=2\sqrt{10}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=6$.

18. 如图,在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2, AA_1=4$. 点 A_2, B_2, C_2, D_2 分别在棱 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 上, $AA_2=1, BB_2=DD_2=2, CC_2=3$.



(1) 证明: $B_2C_2 \parallel A_2D_2$;

(2) 点 P 在棱 BB_1 上,当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150° 时,求 B_2P.

【答案】(1) 证明见解析;

(2)1

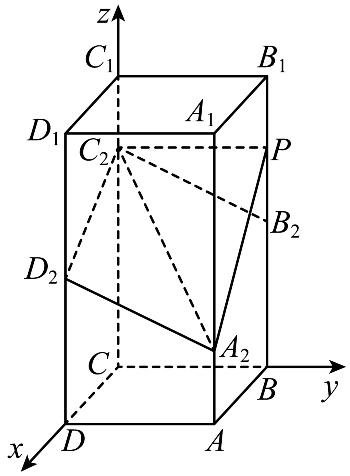
【解析】

【分析】(1) 建立空间直角坐标系,利用向量坐标相等证明;

(2) 设 $P(0,2,\lambda)$ $(0\leqslant\lambda\leqslant4)$,利用向量法求二面角,建立方程求出 λ 即可得解.

【小问 1 详解】

以 C 为坐标原点, CD, CB, CC_1 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,如图,



则 $C(0,0,0), C_2(0,0,3), B_2(0,2,2), D_2(2,0,2), A_2(2,2,1)$，

$\therefore \overrightarrow{B_2C_2}=(0,-2,1), \overrightarrow{A_2D_2}=(0,-2,1)$，

$\therefore \overrightarrow{B_2C_2} /\!/ \overrightarrow{A_2D_2}$，

又 B_2C_2，A_2D_2 不在同一条直线上，

$\therefore B_2C_2 /\!/ A_2D_2$.

【小问 2 详解】

设 $P(0,2,\lambda)\ (0 \leqslant \lambda \leqslant 4)$，

则 $\overrightarrow{A_2C_2}=(-2,-2,2), \overrightarrow{PC_2}=(0,-2,3-\lambda), \overrightarrow{D_2C_2}=(-2,0,1)$，

设平面 PA_2C_2 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_2C_2}=-2x-2y+2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC_2}=-2y+(3-\lambda)z=0\end{cases}$，

令 $z=2$，得 $y=3-\lambda, x=\lambda-1$，

$\therefore \vec{n}=(\lambda-1,3-\lambda,2)$，

设平面 $A_2C_2D_2$ 的法向量 $\vec{m}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_2C_2}=-2a-2b+2c=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{D_2C_2}=-2a+c=0\end{cases}$，

令 $a=1$，得 $b=1, c=2$，

$\therefore \vec{m}=(1,1,2)$，

$\therefore \left|\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\vec{m}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{m}\right|}=\dfrac{6}{\sqrt{6}\sqrt{4+(\lambda-1)^2+(3-\lambda)^2}}=|\cos150^\circ|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

化简可得，$\lambda^2-4\lambda+3=0$，

解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=3$，

$\therefore P(0,2,1)$ 或 $P(0,2,3)$，

$\therefore B_2P=1$.

19. 已知函数 $f(x)=a(\mathrm{e}^x+a)-x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 证明：当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$.

【答案】(1) 答案见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 先求导，再分类讨论 $a\leqslant 0$ 与 $a>0$ 两种情况，结合导数与函数单调性的关系即可得解；

(2) 方法一：结合 (1) 中结论，将问题转化为 $a^2-\frac{1}{2}-\ln a>0$ 的恒成立问题，构造函数 $g(a)=a^2-\frac{1}{2}-\ln a(a>0)$，利用导数证得 $g(a)>0$ 即可.

方法二：构造函数 $h(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，证得 $\mathrm{e}^x\geqslant x+1$，从而得到 $f(x)\geqslant x+\ln a+1+a^2-x$，进而将问题转化为 $a^2-\frac{1}{2}-\ln a>0$ 的恒成立问题，由此得证.

【小问 1 详解】

因为 $f(x)=a(\mathrm{e}^x+a)-x$，定义域为 R，所以 $f'(x)=ae^x-1$，

当 $a\leqslant 0$ 时，由于 $\mathrm{e}^x>0$，则 $ae^x\leqslant 0$，故 $f'(x)=ae^x-1<0$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在 R 上单调递减；

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=ae^x-1=0$，解得 $x=-\ln a$，

当 $x<-\ln a$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减；

当 $x>-\ln a$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增；

综上：当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递减；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，$f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

【小问 2 详解】

方法一：

由 (1) 得，$f(x)_{\min}=f(-\ln a)=a(\mathrm{e}^{-\ln a}+a)+\ln a=1+a^2+\ln a$，

要证 $f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$，即证 $1+a^2+\ln a>2\ln a+\frac{3}{2}$，即证 $a^2-\frac{1}{2}-\ln a>0$ 恒成立，

令 $g(a)=a^2-\frac{1}{2}-\ln a(a>0)$，则 $g'(a)=2a-\frac{1}{a}=\frac{2a^2-1}{a}$，

令 $g'(a)<0$，则 $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$；令 $g'(a)>0$，则 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$；

所以 $g(a)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $g(a)_{\min}=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\ln\sqrt{2}>0$，则 $g(a)>0$ 恒成立，

所以当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$ 恒成立，证毕.

方法二：

令 $h(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^x-1$，

由于 $y=\mathrm{e}^x$ 在 R 上单调递增，所以 $h'(x)=\mathrm{e}^x-1$ 在 R 上单调递增，

又 $h'(0)=\mathrm{e}^0-1=0$，

所以当 $x<0$ 时，$h'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$；

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $h(x)\geqslant h(0)=0$，则 $\mathrm{e}^x\geqslant x+1$，当且仅当 $x=0$ 时，等号成立，

因为 $f(x)=a(\mathrm{e}^x+a)-x=ae^x+a^2-x=\mathrm{e}^{x+\ln a}+a^2-x\geqslant x+\ln a+1+a^2-x$，

当且仅当$x+\ln a=0$,即$x=-\ln a$时,等号成立,

所以要证$f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$,即证$x+\ln a+1+a^2-x>2\ln a+\dfrac{3}{2}$,即证$a^2-\dfrac{1}{2}-\ln a>0$,

令$g(a)=a^2-\dfrac{1}{2}-\ln a(a>0)$,则$g'(a)=2a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{2a^2-1}{a}$,

令$g'(a)<0$,则$0<a<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;令$g'(a)>0$,则$a>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

所以$g(a)$在$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$上单调递减,在$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$上单调递增,

所以$g(a)_{\min}=g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\ln\sqrt{2}>0$,则$g(a)>0$恒成立,

所以当$a>0$时,$f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$恒成立,证毕.

20. 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,且$d>1$. 令$b_n=\dfrac{n^2+n}{a_n}$,记S_n,T_n分别为数列$\{a_n\},\{b_n\}$的前n项和.

(1) 若$3a_2=3a_1+a_3,S_3+T_3=21$,求$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 若$\{b_n\}$为等差数列,且$S_{99}-T_{99}=99$,求d.

【答案】(1)$a_n=3n$

(2)$d=\dfrac{51}{50}$

【解析】

【分析】(1) 根据等差数列的通项公式建立方程求解即可;

(2) 由$\{b_n\}$为等差数列得出$a_1=d$或$a_1=2d$,再由等差数列的性质可得$a_{50}-b_{50}=1$,分类讨论即可得解.

【小问1详解】

$\because 3a_2=3a_1+a_3$, $\therefore 3d=a_1+2d$,解得$a_1=d$,

$\therefore S_3=3a_2=3(a_1+d)=6d$,

又$T_3=b_1+b_2+b_3=\dfrac{2}{d}+\dfrac{6}{2d}+\dfrac{12}{3d}=\dfrac{9}{d}$,

$\therefore S_3+T_3=6d+\dfrac{9}{d}=21$,

即$2d^2-7d+3=0$,解得$d=3$或$d=\dfrac{1}{2}$(舍去),

$\therefore a_n=a_1+(n-1)\cdot d=3n$.

【小问2详解】

$\because \{b_n\}$为等差数列,

$\therefore 2b_2=b_1+b_3$,即$\dfrac{12}{a_2}=\dfrac{2}{a_1}+\dfrac{12}{a_3}$,

$\therefore 6\left(\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_3}\right)=\dfrac{6d}{a_2a_3}=\dfrac{1}{a_1}$,即$a_1^2-3a_1d+2d^2=0$,解得$a_1=d$或$a_1=2d$,

$\because d>1$, $\therefore a_n>0$,

又$S_{99}-T_{99}=99$,由等差数列性质知,$99a_{50}-99b_{50}=99$,即$a_{50}-b_{50}=1$,

$\therefore a_{50}-\dfrac{2550}{a_{50}}=1$,即$a_{50}^2-a_{50}-2550=0$,解得$a_{50}=51$或$a_{50}=-50$(舍去)

当$a_1=2d$时,$a_{50}=a_1+49d=51d=51$,解得$d=1$,与$d>1$矛盾,无解;

当$a_1=d$时,$a_{50}=a_1+49d=50d=51$,解得$d=\dfrac{51}{50}$.

综上，$d=\frac{51}{50}$.

21. 甲、乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若末命中则换为对方投篮．无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为0.6，乙每次投篮的命中率均为0.8．由抽签确定第1次投篮的人选，第1次投篮的人是甲、乙的概率各为0.5.

(1) 求第2次投篮的人是乙的概率；

(2) 求第i次投篮的人是甲的概率；

(3) 已知：若随机变量 X_i 服从两点分布，且 $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=q_i$, $\mathrm{i}=1,2,\cdots,n$，则 $E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}q_i$．记前 n 次(即从第1次到第 n 次投篮)中甲投篮的次数为 Y，求 $E(Y)$.

【答案】(1)0.6

(2)$\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}+\frac{1}{3}$

(3)$E(Y)=\frac{5}{18}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right]+\frac{n}{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据全概率公式即可求出；

(2) 设 $P(A_i)=p_i$，由题意可得 $p_{i+1}=0.4p_i+0.2$，根据数列知识，构造等比数列即可解出；

(3) 先求出两点分布的期望，再根据题中的结论以及等比数列的求和公式即可求出.

【小问1详解】

记“第i次投篮的人是甲”为事件 A_i，“第i次投篮的人是乙”为事件 B_i，

所以，$P(B_2)=P(A_1B_2)+P(B_1B_2)=P(A_1)P(B_2|A_1)+P(B_1)P(B_2|B_1)$

$=0.5\times(1-0.6)+0.5\times0.8=0.6$.

【小问2详解】

设 $P(A_i)=p_i$，依题可知，$P(B_i)=1-p_i$，则

$P(A_{i+1})=P(A_iA_{i+1})+P(B_iA_{i+1})=P(A_i)P(A_{i+1}|A_i)+P(B_i)P(A_{i+1}|B_i)$，

即 $p_{i+1}=0.6p_i+(1-0.8)\times(1-p_i)=0.4p_i+0.2$，

构造等比数列 $\{p_i+\lambda\}$，

设 $p_{i+1}+\lambda=\frac{2}{5}(p_i+\lambda)$，解得 $\lambda=-\frac{1}{3}$，则 $p_{i+1}-\frac{1}{3}=\frac{2}{5}\left(p_i-\frac{1}{3}\right)$，

又 $p_1=\frac{1}{2}$，$p_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，所以 $\left\{p_i-\frac{1}{3}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{6}$，公比为 $\frac{2}{5}$ 的等比数列，

即 $p_i-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}$，$p_i=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}+\frac{1}{3}$.

【小问3详解】

因为 $p_i=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}+\frac{1}{3}$，$\mathrm{i}=1,2,\cdots,n$，

所以当 $n\in N^*$ 时，$E(Y)=p_1+p_2+\cdots+p_n=\frac{1}{6}\times\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n}}{1-\frac{2}{5}}+\frac{n}{3}=\frac{5}{18}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right]+\frac{n}{3}$，

故 $E(Y)=\frac{5}{18}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right]+\frac{n}{3}$.

【点睛】本题第一问直接考查全概率公式的应用，后两问的解题关键是根据题意找到递推式，然后根据数列的

基本知识求解.

22. 在直角坐标系 xOy 中，点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 的距离，记动点 P 的轨迹为 W.

(1) 求 W 的方程；

(2) 已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上，证明：矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

【答案】(1)$y=x^2+\frac{1}{4}$

(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 设 $P(x,y)$，根据题意列出方程 $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=y^2$，化简即可；

(2) 法一：设矩形的三个顶点 $A\left(a,a^2+\frac{1}{4}\right)$，$B\left(b,b^2+\frac{1}{4}\right)$，$C\left(c,c^2+\frac{1}{4}\right)$，且 $a<b<c$，分别令 $k_{AB}=a+b=m<0$，$k_{BC}=b+c=n>0$，且 $mn=-1$，利用放缩法得 $\frac{1}{2}C\geqslant\left(n+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+n^2}$，设函数 $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2(1+x^2)$，利用导数求出其最小值，则得 C 的最小值，再排除边界值即可.

法二：设直线 AB 的方程为 $y=k(x-a)+a^2+\frac{1}{4}$，将其与抛物线方程联立，再利用弦长公式和放缩法得 $|AB|+|AD|\geqslant\sqrt{\frac{(1+k^2)^3}{k^2}}$，利用换元法和求导即可求出周长最值，再排除边界值即可.

法三：利用平移坐标系法，再设点，利用三角换元再对角度分类讨论，结合基本不等式即可证明.

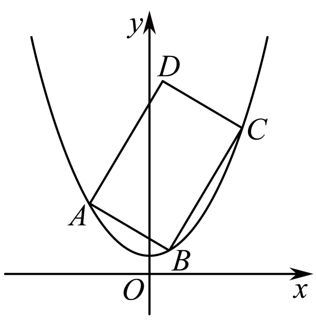
【小问 1 详解】

设 $P(x,y)$，则 $|y|=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}$，两边同平方化简得 $y=x^2+\frac{1}{4}$，

故 W:$y=x^2+\frac{1}{4}$.

【小问 2 详解】

法一：设矩形的三个顶点 $A\left(a,a^2+\frac{1}{4}\right)$，$B\left(b,b^2+\frac{1}{4}\right)$，$C\left(c,c^2+\frac{1}{4}\right)$ 在 W 上，且 $a<b<c$，易知矩形四条边所在直线的斜率均存在，且不为 0，



则 $k_{AB}\cdot k_{BC}=-1$，$a+b<b+c$，令 $k_{AB}=\frac{b^2+\frac{1}{4}-\left(a^2+\frac{1}{4}\right)}{b-a}=a+b=m<0$，

同理令 $k_{BC}=b+c=n>0$，且 $mn=-1$，则 $m=-\frac{1}{n}$，

设矩形周长为 C，由对称性不妨设 $|m|\geqslant|n|$，$k_{BC}-k_{AB}=c-a=n-m=n+\frac{1}{n}$，

则 $\frac{1}{2}C=|AB|+|BC|=(b-a)\sqrt{1+m^2}+(c-b)\sqrt{1+n^2}\geqslant(c-a)\sqrt{1+n^2}=\left(n+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+n^2}$.

$n>0$，易知$\left(n+\dfrac{1}{n}\right)\sqrt{1+n^2}>0$

则令$f(x)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2(1+x^2)$，$x>0$，$f'(x)=2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)$，

令$f'(x)=0$，解得$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

当$x\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$时，$f'(x)<0$，此时$f(x)$单调递减，

当$x\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$，$f'(x)>0$，此时$f(x)$单调递增，

则$f(x)_{\min}=f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{27}{4}$，

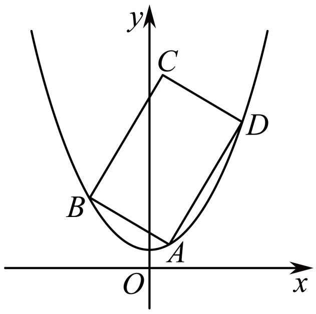
故$\dfrac{1}{2}C\geqslant\sqrt{\dfrac{27}{4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，即$C\geqslant3\sqrt{3}$.

当$C=3\sqrt{3}$时，$n=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$m=-\sqrt{2}$，且$(b-a)\sqrt{1+m^2}=(b-a)\sqrt{1+n^2}$，即$m=n$时等号成立，矛盾，

故$C>3\sqrt{3}$，

得证.

法二：不妨设A,B,D在W上，且$BA\perp DA$，



依题意可设$A\left(a,a^2+\dfrac{1}{4}\right)$，易知直线$BA$，$DA$的斜率均存在且不为0，

则设BA,DA的斜率分别为k和$-\dfrac{1}{k}$，由对称性，不妨设$|k|\leqslant1$，

直线AB的方程为$y=k(x-a)+a^2+\dfrac{1}{4}$，

则联立$\begin{cases}y=x^2+\dfrac{1}{4}\\y=k(x-a)+a^2+\dfrac{1}{4}\end{cases}$得$x^2-kx+ka-a^2=0$，

$\Delta=k^2-4(ka-a^2)=(k-2a)^2>0$，则$k\neq2a$

则$|AB|=\sqrt{1+k^2}|k-2a|$，

同理$|AD|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|$，

$\therefore|AB|+|AD|=\sqrt{1+k^2}|k-2a|+\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|$

$\geqslant\sqrt{1+k^2}\left(|k-2a|+\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|\right)\geqslant\sqrt{1+k^2}\left|k+\dfrac{1}{k}\right|=\sqrt{\dfrac{(1+k^2)^3}{k^2}}$

令$k^2=m$，则$m\in(0,1]$，设$f(m)=\dfrac{(m+1)^3}{m}=m^2+3m+\dfrac{1}{m}+3$，

则$f'(m)=2m+3-\dfrac{1}{m^2}=\dfrac{(2m-1)(m+1)^2}{m^2}$，令$f'(m)=0$，解得$m=\dfrac{1}{2}$，

当$m\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$时，$f'(m)<0$，此时$f(m)$单调递减，

当$m\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，$f'(m)>0$，此时$f(m)$单调递增，

则$f(m)_{\min}=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{27}{4}$，

$\therefore |AB|+|AD|\geqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

但$\sqrt{1+k^2}|k-2a|+\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|\geqslant\sqrt{1+k^2}\left(|k-2a|+\left|\dfrac{1}{k}+2a\right|\right)$，此处取等条件为$k=1$，与最终取等时$k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$不一致，故$|AB|+|AD|>\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

法三：为了计算方便，我们将抛物线向下移动$\dfrac{1}{4}$个单位得抛物线W'：$y=x^2$，

矩形$ABCD$变换为矩形$A'B'C'D'$，则问题等价于矩形$A'B'C'D'$的周长大于$3\sqrt{3}$.

设$B'(t_0,t_0^2)$，$A'(t_1,t_1^2)$，$C'(t_2,t_2^2)$，根据对称性不妨设$t_0\geqslant 0$.

则$k_{A'B'}=t_1+t_0$，$k_{B'C'}=t_2+t_0$，由于$A'B'\perp B'C'$，则$(t_1+t_0)(t_2+t_0)=-1$.

由于$|A'B'|=\sqrt{1+(t_1+t_0)^2}|t_1-t_0|$，$|B'C'|=\sqrt{1+(t_2+t_0)^2}|t_2-t_0|$，且$t_0$介于$t_1,t_2$之间，

则$|A'B'|+|B'C'|=\sqrt{1+(t_1+t_0)^2}|t_1-t_0|+\sqrt{1+(t_2+t_0)^2}|t_2-t_0|$. 令$t_2+t_0=\tan\theta$，

$t_1+t_0=-\cot\theta$，$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则$t_2=\tan\theta-t_0$，$t_1=-\cot\theta-t_0$，从而

$|A'B'|+|B'C'|=\sqrt{1+\cot^2\theta}(2t_0+\cot\theta)+\sqrt{1+\tan^2\theta}(\tan\theta-2t_0)$

故$|A'B'|+|B'C'|=2t_0\left(\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{1}{\cos\theta}\right)+\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{2t_0(\cos\theta-\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}+\dfrac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

①当$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right]$时，

$|A'B'|+|B'C'|\geqslant\dfrac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}}=2\sqrt{\dfrac{2}{\sin 2\theta}}\geqslant 2\sqrt{2}$

②当$\theta\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$时，由于$t_1<t_0<t_2$，从而$-\cot\theta-t_0<t_0<\tan\theta-t_0$，

从而$-\dfrac{\cot\theta}{2}<t_0<\dfrac{\tan\theta}{2}$又$t_0\geqslant 0$，

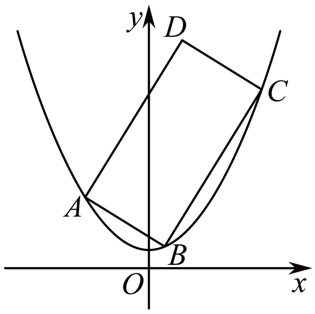
故$0\leqslant t_0<\dfrac{\tan\theta}{2}$，由此$|A'B'|+|B'C'|=\dfrac{2t_0(\cos\theta-\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}+\dfrac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

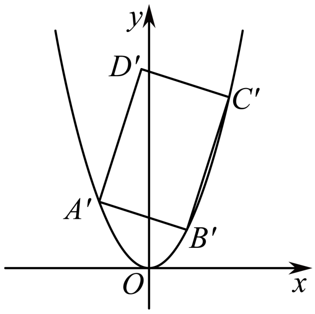
$>\dfrac{\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)(\sin\theta\cos\theta)}{\sin^2\theta\cos^3\theta}+\dfrac{\sin^3\theta+\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$

$=\sqrt{\dfrac{2}{\sin^2\theta\sin^2\theta\cdot 2\cos^2\theta}}=\sqrt{\dfrac{2}{(1-\cos^2\theta)(1-\cos^2\theta)\cdot 2\cos^2\theta}}$

$\geqslant\sqrt{\dfrac{2}{\left(\dfrac{(1-\cos^2\theta)+(1-\cos^2\theta)+2\cos^2\theta}{3}\right)^3}}\geqslant\sqrt{\dfrac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

当且仅当$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时等号成立，故$|A'B'|+|B'C'|>\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，故矩形周长大于$3\sqrt{2}$.





.

【点睛】关键点睛：本题的第二个的关键是通过放缩得 $\frac{1}{2}C=|AB|+|BC|\geqslant\left(n+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+n^2}$，同时为了简便运算，对右边的式子平方后再设新函数求导，最后再排除边界值即可................................