

2023年普通高等学校招生全国统一考试(全国甲卷)

文科数学

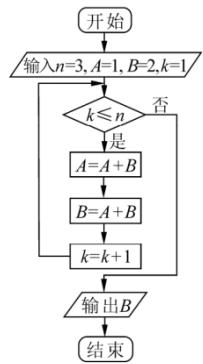
注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 设全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $M = \{1, 4\}$, $N = \{2, 5\}$, 则 $N \cup \complement_U M = (\quad)$
A. $\{2, 3, 5\}$ B. $\{1, 3, 4\}$ C. $\{1, 2, 4, 5\}$ D. $\{2, 3, 4, 5\}$
- $$\frac{5(1+i^3)}{(2+i)(2-i)} = (\quad)$$

A. -1 B. 1 C. $1-i$ D. $1+i$
- 已知向量 $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (2, 2)$, 则 $\cos\langle\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}\rangle = (\quad)$
A. $\frac{1}{17}$ B. $\frac{\sqrt{17}}{17}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
- 某校文艺部有4名学生,其中高一、高二年级各2名。从这4名学生中随机选2名组织校文艺汇演,则这2名学生来自不同年级的概率为()
A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$
- 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。若 $a_2 + a_6 = 10$, $a_4 a_8 = 45$, 则 $S_5 = (\quad)$
A. 25 B. 22 C. 20 D. 15
- 执行下边的程序框图,则输出的 $B = (\quad)$



- A. 21 B. 34 C. 55 D. 89
- 设 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 的两个焦点, 点 P 在 C 上, 若 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$, 则 $|PF_1| \cdot |PF_2| = (\quad)$
A. 1 B. 2 C. 4 D. 5

8. 曲线 $y = \frac{e^x}{x+1}$ 在点 $(1, \frac{e}{2})$ 处的切线方程为 ()
- A. $y = \frac{e}{4}x$ B. $y = \frac{e}{2}x$ C. $y = \frac{e}{4}x + \frac{e}{4}$ D. $y = \frac{e}{2}x + \frac{3e}{4}$
9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$, C 的一条渐近线与圆 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 交于 A, B 两点, 则 $|AB| =$ ()
- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$
10. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, $PA = PB = 2, PC = \sqrt{6}$, 则该棱锥的体积为 ()
- A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3
11. 已知函数 $f(x) = e^{-(x-1)^2}$. 记 $a = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), b = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), c = f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, 则 ()
- A. $b > c > a$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $c > a > b$
12. 函数 $y = f(x)$ 的图象由 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到, 则 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 的交点个数为 ()
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $8S_6 = 7S_3$, 则 $\{a_n\}$ 的公比为 _____.
14. 若 $f(x) = (x-1)^2 + ax + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 为偶函数, 则 $a =$ _____.
15. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 3x - 2y \leq 3, \\ -2x + 3y \leq 3, \\ x + y \geq 1, \end{cases}$, 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值为 _____.
16. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 4, O$ 为 AC_1 的中点, 若该正方体的棱与球 O 的球面有公共点, 则球 O 的半径的取值范围是 _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (12 分)

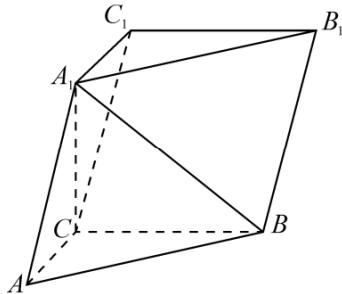
记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{\cos A} = 2$.

(1) 求 bc ;

(2) 若 $\frac{a\cos B - b\cos A}{a\cos B + b\cos A} - \frac{b}{c} = 1$, 求 $\triangle ABC$ 面积.

18. (12分)

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $A_1C \perp$ 平面 ABC , $\angle ACB = 90^\circ$.



(1) 证明: 平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 BB_1C_1C ;

(2) 设 $AB = A_1B$, $AA_1 = 2$, 求四棱锥 $A_1-BB_1C_1C$ 的高.

19. (12分)

一项试验旨在研究臭氧效应, 试验方案如下: 选 40 只小白鼠, 随机地将其中 20 只分配到试验组, 另外 20 只分配到对照组, 试验组的小白鼠饲养在高浓度臭氧环境, 对照组的小白鼠饲养在正常环境, 一段时间后统计每只小白鼠体重的增加量(单位: g). 试验结果如下:

对照组的小白鼠体重的增加量从小到大排序为

15.2 18.8 20.2 21.3 22.5 23.2 25.8 26.5 27.5 30.1
32.6 34.3 34.8 35.6 35.6 35.8 36.2 37.3 40.5 43.2

试验组的小白鼠体重的增加量从小到大排序为

7.8 9.2 11.4 12.4 13.2 15.5 16.5 18.0 18.8 19.2
19.8 20.2 21.6 22.8 23.6 23.9 25.1 28.2 32.3 36.5

(1) 计算试验组的样本平均数;

(2) (i) 求 40 只小白鼠体重的增加量的中位数 m , 再分别统计两样本中小于 m 与不小于 m 的数据的个数, 完成如下列联表

$<$	$< m$	$\geq m$
对照组		
试验组		

(ii) 根据 (i) 中的列联表, 能否有 95% 的把握认为小白鼠在高浓度臭氧环境中与在正常环境中体重的增加量有差异?

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

$P(K^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

20. (12分)

已知函数 $f(x) = ax - \frac{\sin x}{\cos^2 x}, x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

- (1) 当 $a = 1$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;
(2) 若 $f(x) + \sin x < 0$, 求 a 的取值范围.

21. (12分)

已知直线 $x - 2y + 1 = 0$ 与抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 交于 A, B 两点, $|AB| = 4\sqrt{15}$.

- (1) 求 p ;
(2) 设 F 为 C 的焦点, M, N 为 C 上两点, 且 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = 0$, 求 $\triangle MFN$ 面积的最小值.

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

已知点 $P(2, 1)$, 直线 $l: \begin{cases} x = 2 + t \cos \alpha, \\ y = 1 + t \sin \alpha \end{cases} (t \text{ 为参数}), \alpha$ 为 l 的倾斜角, l 与 x 轴正半轴、 y 轴正半轴分别交于 A, B , 且 $|PA| \cdot |PB| = 4$.

- (1) 求 α ;
(2) 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求 l 的极坐标方程.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

设 $a > 0$, 函数 $f(x) = 2|x - a| - a$.

- (1) 求不等式 $f(x) < x$ 的解集;
(2) 若曲线 $y = f(x)$ 与 x 轴所围成的图形的面积为 2, 求 a .