

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

上海 数学试卷 2023. 06. 07

考生注意：

1. 本试卷共 5 页，21 道试题，满分 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 本考试分设试卷和答题纸。试卷包括试题与答题要求。作答必须涂（选择题）或写（非选择题）在答题纸上，在试卷上作答一律不得分。
3. 答卷前，务必用钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚地填写姓名、准考证号，并将核对后的条形码贴在指定位置上，在答题纸反面清楚地填写姓名。

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 54 分，第 1~6 题每题 4 分，第 7~12 题每题 5 分）

考生应在答题纸的相应位置填写结果。

1. 不等式 $|x-2| < 1$ 的解集为_____；

2. 已知 $\vec{a} = (-2, 3)$, $\vec{b} = (1, 2)$, 求 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____；

3. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_1 = 3, q = 2$, 求 $s_6 =$ _____；

4. 已知 $\tan \alpha = 3$, 求 $\tan 2\alpha =$ _____；

5. 已知 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的值域是_____；

6. 已知当 $z = 1+i$, 则 $|1-i \cdot z| =$ _____；

7. 已知 $x^2 + y^2 - 4y - m = 0$ 的面积为 π , 求 $m =$ _____；

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 4, b = 5, c = 6$, 求 $\sin A =$ _____；

9. 国内生产总值 (GDP) 是衡量地区经济状况的最佳指标, 根据统计数据显示, 某市在 2020 年间经济高质量增长, GDP 稳步增长, 第一季度和第四季度的 GDP 分别为 231 和 242, 且四个季度 GDP 的中位数与平均数相等, 则 2020 年 GDP 总额为

10. 已知 $(1+2023x)^{100} + (2023-x)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{100}x^{100}$, 其中 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{100} \in \mathbb{R}$,

若 $0 \leq k \leq 100$ 且 $k \in \mathbb{N}$, 当 $a_k < 0$ 时, k 的最大值是_____.

11. 公园修建斜坡，假设斜坡起点在水平面上，斜坡与水平面的夹角为 θ ，斜坡终点距离水平面的垂直高度为 4 米，游客每走一米消耗的体能为 $(1.025 - \cos \theta)$ ，要使游客从斜坡底走到斜坡顶端所消耗的总体能最少，则 $\theta =$ _____.

12. 空间内存在三点 A 、 B 、 C , 满足 $AB = AC = BC = 1$, 在空间内取不同两点 (不计顺序), 使得这两点与 A 、 B 、 C 可以组成正四棱锥, 求方案数为_____.

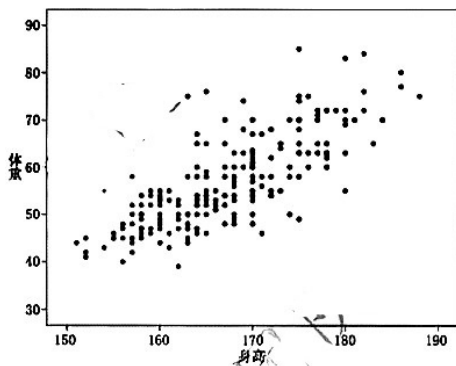
二、选择题（本题共有 4 题，满分 18 分，13、14 每题 4 分，15、16 题每题 5 分）每题有且只有一个正确选项，考生应在答题纸的相应位置，将代表正确选项的小方格涂黑。

13. 已知 $P = \{1, 2\}$, $Q = \{2, 3\}$, 若 $M = \{x | x \in P \text{ 且 } x \notin Q\}$, 则 $M =$ ().

- A. {1} B. {2}
- C. {1, 2} D. {1, 2, 3}

14. 根据身高和体重散点图, 下列说法正确的是().

- A. 身高越高，体重越重
B. 身高越高，体重越轻
C. 身高与体重成正相关
D. 身高与体重成负相关



15. 设 $a > 0$ ，函数 $y = \sin x$ 在区间 $[a, 2a]$ 上的最小值为 s_a ，在 $[2a, 3a]$ 上的最小值为 t_a ，当 a 变化时，以下不可能的情形是().

- A. $s_a > 0$ 且 $t_a > 0$ B. $s_a < 0$ 且 $t_a < 0$ C. $s_a > 0$ 且 $t_a < 0$ D. $s_a < 0$ 且 $t_a > 0$

16. 在平面上, 若曲线 Γ 具有如下性质: 存在点 M , 使得对于任意点 $P \in \Gamma$, 都有 $Q \in \Gamma$ 使得 $|PM| \cdot |QM| = 1$. 则称这条曲线为 "自相关曲线".

判断下列两个命题的真假().

- ②存在是“自相关曲线”的双曲线.

- A. ①假命题；②真命题 B. ①真命题；②假命题
C. ①真命题；②真命题 D. ①假命题；②假命题

三、解答题（本大题共有 5 题，满分 78 分）解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.

17.（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

直四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, $AB \parallel DC$, $AB \perp AD$, $AB = 2$, $AD = 3$, $DC = 4$.

(1) 求证: $A_1B \perp$ 面 DCC_1D_1

(2) 若四棱柱体积为 36, 求二面角 $A_1 - BD - A$ 的大小

18.（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

函数 $f(x) = \frac{x^2 + (3a+1)x + c}{x+a} (a, c \in R)$

① 当 $a = 0$ 是, 是否存在实数 c , 使得 $f(x)$ 为奇函数

② 函数 $f(x)$ 的图像过点 $(1, 3)$, 且 $f(x)$ 的图像 x 轴负半轴有两个交点

求实数 a 的取值范围

19. (本题满分 14 分) 本题共有 2 个小题, 第 1 小题满分 2 分, 第 2 小题满分 6 分, 第 3 小题满分 8 分.

21 世纪汽车博览会在上海 2023 年 6 月 7 日在上海举行, 下表为某汽车模型公司共有 25 个汽车模型, 其外观和内饰的颜色分布如下表所示:

	红色外观	蓝色外观
棕色内饰	12	8
米色内饰	2	3

(1) 若小明从这些模型中随机拿一个模型, 记事件 A 为小明取到的模型为红色外观, 事件 B 取到模型有棕色内饰

求 $P(B)$ 、 $P(B/A)$, 并据此判断事件 A 和事件 B 是否独立

(2) 该公司举行了一个抽奖活动, 规定在一次抽奖中, 每人可以一次性从这些模型中拿两个汽车模型, 给出以下假设: 1、拿到的两个模型会出现三种结果, 即外观和内饰均为同色、外观内饰都异色、以及仅外观或仅内饰同色; 2、按结果的可能性大小, 概率越小奖项越高;

(3) 奖金额为一等奖 600 元, 二等奖 300 元, 三等奖 150 元, 请你分析奖项对应的结果, 设 X 为奖金额, 写出 X 的分布列并求出 X 的数学期望

20. (本题满分 16 分) 本题共有 3 个小题, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 6 分, 第 3 小题满分 6 分.

曲线 $\Gamma: y^2 = 4x$, 第一象限内点 A 在 Γ 上, A 的纵坐标是 a .

(1) 若 A 到准线距离为 3, 求 a ;

(2) 若 $a = 4$, B 在 x 轴上, AB 中点在 Γ 上, 求点 B 坐标和坐标原点 O 到 AB 距离;

(3) 直线 $l: x = -3$, 令 P 是第一象限 Γ 上异于 A 的一点, 直线 PA 交 l 于 Q , H 是 P 在 l 上的投影, 若点 A 满足 “对于任意 P 都有 $|HQ| > 4$ ” 求 a 的取值范围.

21. (本题满分 18 分) 本题共有 3 个小题, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 6 分, 第 3 小题满分 8 分.

令 $f(x) = \ln x$, 取点 $(a_1, f(a_1))$ 过其曲线 $y = f(x)$ 做切线交 y 轴于 $(0, a_2)$, 取点 $(a_2, f(a_2))$ 过其做切线交 y 轴于 $(0, a_3)$, 若 $a_3 < 0$ 则停止, 以此类推, 得到数列 $\{a_n\}$.

(1) 若正整数 $m \geq 2$, 证明 $a_m = \ln a_{m-1} - 1$;

(2) 若正整数 $m \geq 2$, 试比较 a_m 与 $a_{m-1} - 2$ 大小;

(3) 若正整数 $k \geq 3$, 是否存在 k 使得 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 依次成等差数列? 若存在, 求出 k 的所有取值, 若不存在, 试说明理由.