**HPM视角下高中数学教学设计研究**

 **以平面向量第一课时为例**

**一、向量发展的历史：**

向量，最初被应用于物理学。很多物理量如力、速度、位移以及电场强度、磁感应强度等都是向量。大约公元前350年前，古希腊著名学者亚里士多德就知道了力可以表示成向量，两个力的组合作用可用著名的平行四边形法则来得到。“向量”一词来自力学、解析几何中的有向线段。最先使用有向线段表示向量的是英国大科学家牛顿。向量一词始于19世纪20年代，用于复数的几何表现。Caspar Wessel，Jean Robert Argand，Car Friedrich Gauss，还有至少一到两个其他人将复数想象成分布在二维平面中的点，也就是二维向量。数学家和科学家以不同的方式应用这些新的复数，比如高斯主要利用复数来证明基础代数理论。1837年，William Rowan Hamilton展示了任意复数可以被看做实数的有序对(a, b)。这种想法是许多数学家，包括哈密顿自己，寻找一种方式来将二维“数字”扩展到三维空间的研究的一部分，但是没有人能够做到同时保留实数和复数的基本代数性质。

1827年，莫比乌斯出版了一本小书《The Barycentric Calculus》（重心演算），在这本书里他介绍了用英文字母表示的有向线段，除了名字外这就是向量定义的全部内容。莫比乌斯在重心和射影几何的学习中，发展出了这些有向线段的运算，他对它们进行加法运算并且展示了如何用一个实数来与它们相乘。

哈密顿在经历一番挫折后，最终放弃了诸如三维空间"数字"的研究转而创造出了四维系统，他称之为四元数Clifford把两四元数的乘积拆分成两个很不相同的向量乘积，他称之为数量积（现在也称为点乘）和向量积（现在也称为叉乘）。对于向量分析，他断言“我确信它的法则将对数学科学的未来产生广泛的影响。”

**二、教学设计**

教学目标：1.通过对力、速度、位移等分析，了解向量的实际背景，理解平面向量的意义和两个向量相等的含义。掌握向量的模、零向量、单位向量、平行向量、相等向量、共线向量等概念；

2.通过对向量的学习，使学生初步认识现实生活中的向量和数量的本质区别，培养学生数学抽象、逻辑推理、直观想象等数学素养。

**教学重难点：**1.教学重点：向量的概念

2.教学难点：平行向量、相等向量和共线向量的区别和联系.

**教学过程：**

1、情景引入

师：滑雪运动员在平台上准备比赛的时候，请同学们说说此时该运动员的受力情况。

生：运动员受到向上的支持力和向下的重力。

师：请同学们说说该运动员滑下去的过程中的受力情况如何？（忽略空气阻力）

生：该运动员滑下去的时候除了支持力和重力之外，还受到沿斜面向上的摩擦力。师：在下滑的过程中，该运动员速度如何变化？

生：该运动员下滑速度越来越快，并且产生了正的加速度。

师：上面这个问题中，该运动员受到的重力、支持力、摩擦力，产生的加速度这些量有什么共同点？

生：都是矢量，都有大小和方向。

师：我们再来看一个问题，某同学家离学校直线距离是1KM，那是否该同学走1KM就一定能走到家呢？为什么？

生：不一定走到家，1KM是位移，路程和位移不一样。

师：上面这个问题中，位移与路程这两个量有什么区别？

生：位移是矢量，距离是标量，一个有方向一个没有方向。

师：在实际生活中，很多时候考虑一个量不仅需要大小而且需要方向来进行刻画，在物理学中把这样的量叫做矢量，而只有大小没有方向的量叫做标量，在数学中，我们也要来研究具有这样特征的量。

2、探索新知

师：根据刚刚的探究，我们把既有大小，又有方向的量叫做向量（板书）。只有大小，没有方向的量叫做数量。

师：在物理学中，我们是如何表示重力、支持力、加速度等一些矢量的呢？

生：可以通过一条带箭头的线段来表示。

师：在数学中，我们也可以用一条带箭头的线段来表示一个向量。例如向量AB，箭头表示方向，方向是从A指向B，那么这个向量的大小可以用什么来表示？

生：可以用线段的长度来表示向量AB的大小。

师：那么带箭头的线段来表示一个向量我们就把它称为向量的几何表示法。但是在研究问题的过程中，我们用带箭头的线段来表示向量显得不是很方便，所以我们还需要用符号来表示。我们可以用$→$来表示一个向量，方向是从A指向B，同样也可以使用小写字母$→$来表示，一定要注意箭头。那么这种表示方法就称为字母表示法。

A(起点)

 B（终点）



师：刚刚同学们说到，对于$→$，我们可以用线段AB的长度来表示向量的大小，那么我们把向量$→$的大小称为向量$→$的长度（或模），记作$\left|→\right|$或记作$\left|→\right|$。

师：同学们思考一下，向量的模取值范围是什么？

生：向量的模的范围是[0,﹢∞)（强调不是绝对值符号）

师：通过刚刚的探究，我们研究一个向量要从几个角度来进行？

生：需要考虑大小和方向。

师： 我们研究一个新的数学概念，通常需要从特殊的情况入手，推出一般的情况，那么我们分别从向量的大小和方向两个角度，去思考有哪些特殊的向量？

师：先从向量大小的角度来研究，向量的大小对应了什么数？

生：对应了非负数（实数）。

师：那么同学们思考一下，我们在研究非负数（实数）的过程中，研究的比较特殊的数是什么？

生：0和1。

师：类比非负数（实数）中的特殊的两个数，在向量中，也有这样的两个特殊的向量，它们模的大小分别是0和1。我们把长度为0的向量叫零向量，记作$→$ ，

把长度等于1个单位长度的向量，叫做单位向量。（板书）

师：同学们思考一下，零向量和单位向量的方向如何确定？

生：单位向量的方向不一定，零向量的方向无法确定（强调任意）

师：零向量的方向是任意的，单位向量的方向具体而定.

师：平面直角坐标系内，起点在原点的单位向量，它们的终点的轨迹是什么图形？

生：是一个圆。（单位圆）

师：我们需要注意向量是不能比较大小的,但向量的模是可以进行大小比较的.

师：刚刚我们从大小的角度研究了特殊的两个向量，接下来我们从方向的角度来研究又有哪些特殊的情况，请同学们看一个问题，在平行四边形ABDC中，你能写出哪些向量？



生：$→$，$→$，$→$……

师：同学们思考一下，在你写的这些向量当中，有那些具有特殊关系的向量？

生：我发现$→$和$→$方向相同（$→$和$→$）

师：我们发现，$→$和$→$所在直线AB和CD是互相平行的，那么这两个向量也应该互相平行。那么$→$和$→$互相平行吗？他们的方向有什么关系？

生：也互相平行。方向相反

师：请同学们总结一下，向量平行应该如何定义。

生：方向相同或者相反的向量叫作平行向量。

师：我们一般研究的平行向量是非零向量，但是零向量的方向是任意的，所以我们规定零向量和任意向量平行，所以对于同学们总结出来的平行向量的定义，我们需要在这个向量前面加上非零两个字。刚刚同学们写出来的一组平行向量就可以记为$→$∥$→$。

师：$→$和$→$除了方向相同之外，还有什么相同点？

生：它们的大小也相同。

师：我们发现$→$和$→$方向相同大小也相同，我们就称像$→$和$→$长度相等且方向相同的向量叫相等向量，记作$→$=$→$

师：两个单位向量相等吗？为什么？

生：不相等，因为它们的方向可能不同。

师：$→$和$→$是平行向量吗？

生：是平行向量，因为它们方向相同且是非零向量。

师：但是现在这两个向量在一条直线上，为什么能说它们是平行向量呢？

师：在平行四边形ABDC中，$→$和$→$是相等向量，那么$→$可以看作是$→$平移得到的，也就是将$→$向量的起点A移到C得到$→$， 从中我们可以看出，向量是可以平移的，它们是自由的，只与大小和方向有关，与起点是无关的。

师：我们来看一幅图，如图所示,$→$、$→$和$→$这三个非零向量两两平行，根据向量的平移，我们可以发现任一组平行向量都可移到同一直线上，所以平行向量就是

共线向量。



师：类比直线平行，同学们思考一下$→$∥$→$和AB∥CD有什么区别？

生：如果AB∥CD，直线AB和直线CD不共线，但是$→$∥$→$，两者能平移到同一条直线上，是可以共线的。

师：$→$和$→$是平行向量吗？是同一个向量吗？

生：是平行向量，但不是同一个向量，因为它们方向相反。

师：请同学们说说什么样的向量叫作相反向量？

生：方向相反大小相同的向量叫相反向量。（板书）

师：在实数中，相反的两个数我们用什么表示？

生：用负号。

师：所以我们记$→$的相反向量为-$→$，即$→$和-$→$互为相反向量，记作-（-$→$）=$→$那么零向量的相反向量是什么向量？

生：零向量。

师：在平行四边形ABDC中，是不是所有的向量都互相平行？请举例说明。

生：不是所有的向量都不行，例如$→$和$→$。

师：我们来观察$→$和$→$，这两个向量不平行的话，我们如何去刻画这两个向量之间的关系呢？

生：用角来刻画。

师：我们发现$→$和$→$这组向量有一个夹角，那么用哪个角来刻画这两个向量的关系？

生：用∠A0B来刻画。

师：我们来看这个问题，屏幕上的两个向量$→$和$→$，这两个向量的夹角是什么呢？如何去确定？

生：通过平移，将这两个角的起点移到一起，形成了一个夹角，这个夹角就是$→$和$→$的夹角。

师：同学们思考一下$→$和$→$的夹角与$→$和$→$的夹角是否相等？

生：不相等，$→$和$→$的夹角是∠AOD，$→$和$→$的夹角是∠A0B。

师：由此可以看出，我们要确定两个向量的夹角，首先要通过平移将这两个向量的起点放在一起，进而确定夹角是哪个角。（板书）

师：同学们继续思考，向量的夹角范围是什么？

生：夹角的范围是0°≤θ≤180°。（板书）

师：通过对夹角的范围的讨论，同学们思考一下，从夹角的范围中可以看出向量之间的特殊关系？

生：当θ=0°，$→$和$→$同向；θ=180°时，$→$和$→$反向；θ=90°时，$→$⊥$→$。（板书）。

师：这就是我们这节课需要研究的有关向量的内容，接下来我们来看几个例题来巩固一下我们今天所学的知识。

师：首先我们来看例题1。请同学们判断正误，错误的请指出错误的原因。

3、例题讲解

例1、判断正误

（1）平行向量一定方向相同（ ）（方向可以相反）

（2）不相等的向量一定不平行（ ）（方向相同就平行）

（3）与任意向量都平行的向量是零向量（ ）

（4）若两个向量在同一直线上，则这两个向量一定是平行向量（ ）

（5）两个非零向量相等当且仅当长度相等且方向相同（ ）

（6）共线向量一定在同一直线上 （ ）（平行向量也是共线向量）

师：我们来看例题2

****例2、如图，设O是正六边形ABCDEF的中心，

（1）写出图中的共线向量；

（2）分别写出图中与向量、、相等的向量。

（3）分别写出$→$和$→$，$→$和$→$，$→$和$→$的夹角。







（3）60°，120°，180°

师：通过两个例题，想必同学们已经对向量有了初步的认识和理解，请同学们来说说我们这节课学习了哪些内容。

生：叙述向量的概念；叙述向量的表示方法：符号表示、几何表示；叙述零向量和单位向量；叙述平行向量、共线向量、相等向量、相反向量的概念；叙述向量的夹角及其范围。

师：在研究向量概念的过程中，我们用到了哪些研究数学的问题的方法？

生：从特殊到一般，类比，数形结合等。

师：在后续的学习中，我们仍然要通过这些方法去研究向量的其他问题，好，这节课就到这儿，下课。

三、教学反思

本节课让学生在向量历史发生的基础上，从物理学矢量的角度切入，从矢量过渡到数学中的向量，符合HPM教学中的发生教学法的原理，历史上向量的产生也是源于亚里士多德的矢量，学生在已经学习矢量的基础上去理解数学中的向量概念更加简单和自然。而历史上的数学家们也利用了平行四边形来研究向量的有关性质，所以本节课也通过平行四边形让学生去理解向量的有关性质，使得学生有获得成功的成就感。