**8.1.1　函数的零点**

思考**1▶▶▶**

前面我们学习过，使二次函数y＝ax2＋bx＋c(a≠0)的值为0的实数x称为二次函数y＝ax2＋bx＋c的零点，那么你能给函数y＝f(x)的零点下个定义吗？

思考**2▶▶▶**

二次函数y＝ax2＋bx＋c的零点就是关于x的一元二次方程ax2＋bx＋c＝0的实数解，也是二次函数y＝ax2＋bx＋c的图象与x轴交点的横坐标．那么，函数y＝f(x)有零点可等价于哪些说法？

思考**3▶▶▶**

你能说出函数①y＝lgx；②y＝lg(x＋1)；③y＝2x；④y＝2x－2的零点吗？

**反思与感悟**

例**1**　判断函数f(x)＝x2－2x－1在区间(2，3)上是否存在零点．

思考**4▶▶▶**

你能归纳出判断函数y＝f(x)在区间(a，b)上存在零点的一般方法吗？

思考**5▶▶▶**

如果函数y＝f(x)在区间[a，b]上的图象是一条不间断的曲线，函数y＝f(x)在区间(a，b)上存在零点，f(a)·f(b)<0是否一定成立？

思考**6▶▶▶**

如果函数y＝f(x)在区间[a，b]上的图象是一条不间断的曲线，并且有f(a)·f(b)<0，满足了上述两个条件后，函数的零点是唯一的吗？还要添加什么条件可以保证函数有唯一零点？



例**2**　求证：函数f(x)＝x3＋x2＋1在区间(－2，－1)上存在零点．

例**3**　求证：函数f(x)＝2x＋2x－3有零点．



函数f(x)＝3x－x2在区间[－1，0]上是否存在零点？为什么？

例**4**　求函数f(x)＝lnx＋2x－6的零点的个数．

**反思与感悟**



根据表格中的数据，可以判断方程ex－(x＋2)＝0(e≈2.72)的一个根所在的区间是 (　　)

A. (－1，0) B. (0，1) C. (1，2) D. (2，3)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | －1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| ex | 0.37 | 1 | 2.72 | 7.40 | 20.12 |
| x＋2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

例**5**　求函数f(x)＝2x＋lg(x＋1)－2的零点个数．



判断函数f(x)＝x－3＋lnx的零点个数．



**8．1.2　用二分法求方程的近似解**

思考**1▶▶▶**

我们已经知道函数f(x)＝x2－2x－1在区间(2，3)上存在零点，那么方程x2－2x－1＝0在区间(2，3)上的实数解唯一吗？

思考**2▶▶▶**

如何缩小零点所在区间(2，3)的范围？

思考**3▶▶▶**

区间分成两段后，又怎样确定零点在哪一个小的区间内呢？

思考**4▶▶▶**

假设f(2.5)＝0说明什么？

思考**5▶▶▶**

如何进一步地缩小零点所在的区间？

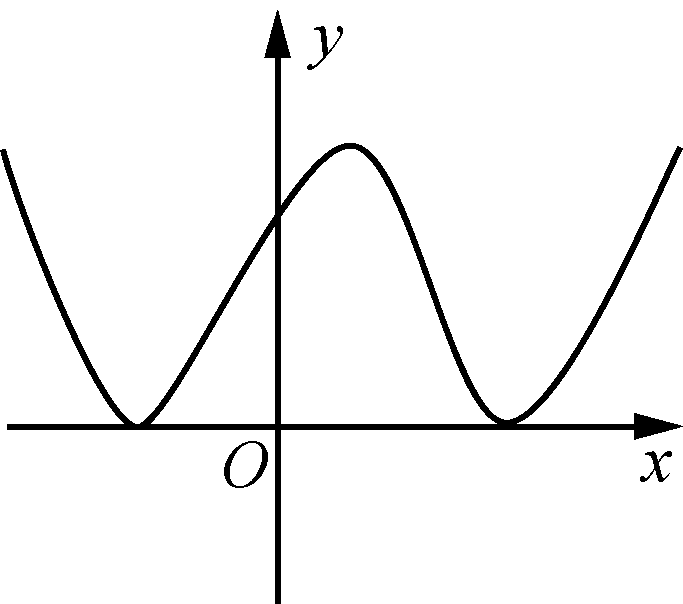
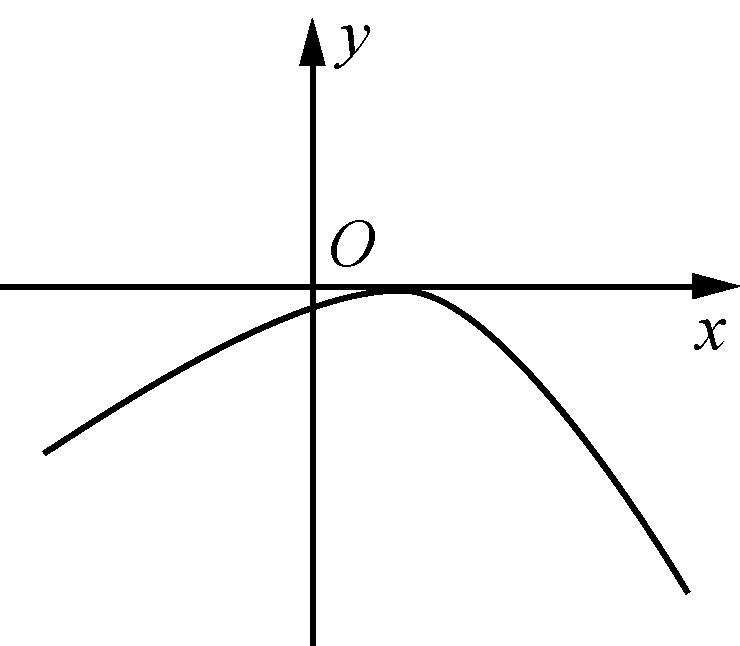
思考**6▶▶▶**

若给定精确度0.1，如何选取近似值？



思考**7▶▶▶**

下列图象中的函数，能否用二分法求函数零点的近似值？为什么？



思考**8▶▶▶**

如何把求方程的近似解化归为求函数的零点？

例**1**　利用计算器，求方程lgx＝3－x的近似解(精确到0.1)．

**反思与感悟**



借助计算器用二分法求方程2x＋3x＝7的近似解(精确到0.1)．

例**2**　利用计算器，求方程sinx＝1－x的近似解(精确到0.1)．

思考**9▶▶▶**

用二分法求方程的一个近似解的操作流程是怎样的？

反思与感悟

“

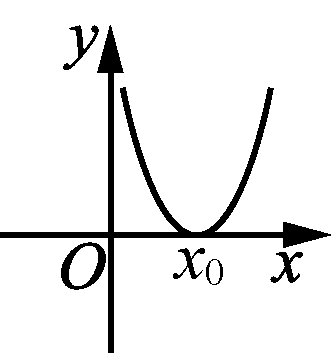
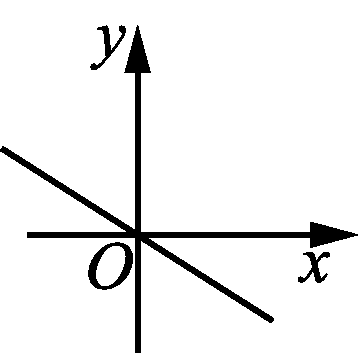
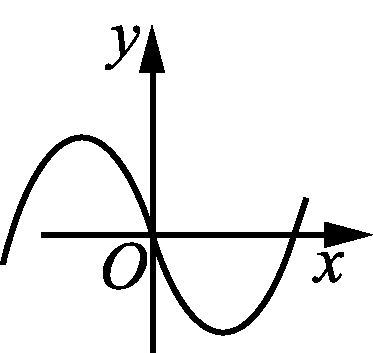
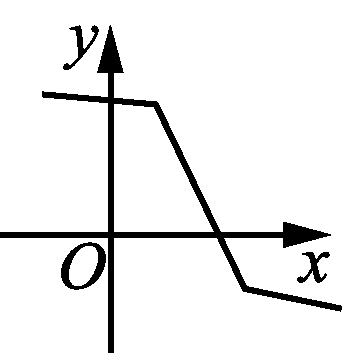
用二分法求函数f(x)＝3x－x－4的一个近似零点，其参考数据如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| f(1.600 0)＝0.200 | f(1.587 5)＝0.133 | f(1.575 0)＝0.067 |
| f(1.562 5)＝0.003 | f(1.556 2)＝－0.029 | f(1.550 0)＝－0.060 |

　　根据此数据，求方程3x－x－4＝0的一个近似解(精解到0.01)．



**1.** 如图，下列函数的图象与x轴均有交点，但不能用二分法求交点横坐标的是(　　)

ABCD

**2.** 用二分法求函数f(x)的一个正实数零点时，经计算f(0.64)<0，f(0.72)>0，f(0.68)<0，则函数的一个精确到0.1的正实数零点的近似值为(　　)

A. 0.9 B. 0.7 C. 0.5 D. 0.4

**8．2　函数与数学模型**

**8.2.1　几个函数模型的比较**

例**1**　(1) 用计算器或计算机计算下列各值：1.012，1.013，1.014，0.992，0.993，0.994.猜测一下，1.01365大概是多少？0.99365大概是多少？

(2) 用计算器或计算机计算下列各值：1.12，1.13，1.14，0.92，0.93，0.94.猜测一下，1.1100大概是多少？1.1260大概是多少？0.9100大概是多少？0.91 000大概是多少？

(3) 用计算器或计算机计算一下(1)(2)中的结果，与你的猜测进行比较，谈谈你对“指数爆炸”的理解．



四个变量y1，y2，y3，y4随变量x变化的数据如下表：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| y1 | 5 | 130 | 505 | 1 130 | 2 005 | 3 130 | 4 505 |
| y2 | 5 | 94.478 | 1 785.2 | 33 733 | 6.37×105 | 1.2×107 | 2.28×108 |
| y3 | 5 | 30 | 55 | 80 | 105 | 130 | 155 |
| y4 | 5 | 2.310 7 | 1.429 5 | 1.140 7 | 1.046 1 | 1.015 1 | 1.005 |

　　关于x呈指数型函数变化的变量是\_\_\_\_\_\_\_\_．

例**2**　(1) 在同一个直角坐标系中画出下列4个函数在区间(0，＋∞)上的图象： y＝2x，y＝x2，y＝x0.5，y＝log2x.结合这4个函数的图象，比较它们随着x的增大函数值增长的快慢，并指出：当x的值足够大(x＞16)的时候，这4个函数的值的大小关系；

(2) 先想象下列两组函数图象之间的关系，再用数值验算，提出更一般的猜想．

①y＝1.01x与 y＝x10；②y＝x0.1与 y＝lgx.

(3) 借助图形计算器或计算机，作出下列两组函数的图象，验证你在(2)中的猜想．

①y＝2x与 y＝x100；②y＝x0.25与 y＝log2x.





三个变量y1，y2，y3随着变量x的变化情况如下表：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |
| y1 | 5 | 135 | 625 | 1 715 | 3 645 | 6 655 |
| y2 | 5 | 29 | 245 | 2 189 | 19 685 | 177 149 |
| y3 | 5 | 6.10 | 6.61 | 6.95 | 7.2 | 7.4 |

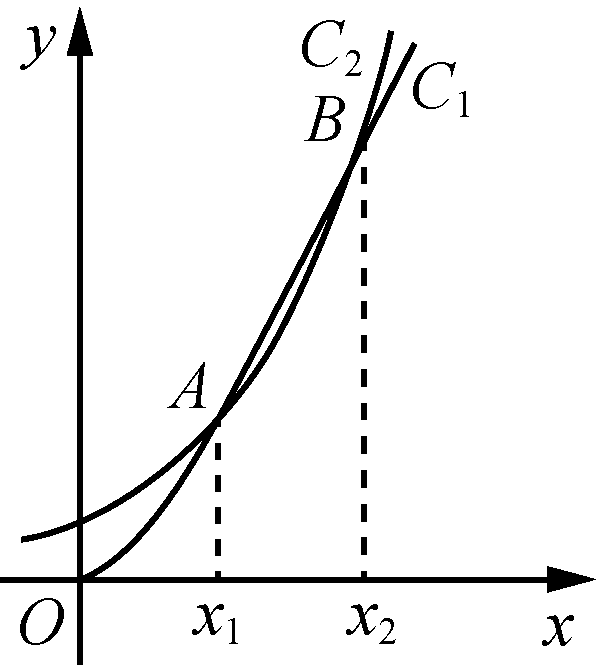
则关于x分别呈对数型函数、指数型函数、幂函数型函数变化的变量依次为(　　)

A. y1，y2，y3 B. y2，y1，y3 C. y3，y2，y1 D. y1，y3，y2

例**3**　函数f(x)＝2x和g(x)＝x3的图象如图所示．设两函数的图象交于点A(x1，y1)，B(x2，y2)，且x1<x2.

(1) 请指出示意图中曲线C1，C2分别对应哪一个函数；

(2) 结合函数图象示意图，判断f(6)，g(6)，f(2 020)，g(2 020)的大小．



探究　本例中若x1∈[a，a＋1]，x2∈[b，b＋1]，且a，b∈{1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12}，指出a，b的值，并说明理由．

**反思与感悟**



**1.** 下列函数中，随x的增大而增大且增长速度最快的是(　　)

A. y＝ex B. y＝lnx C. y＝2x D. y＝e－x

**2.** 已知函数y1＝2x，y2＝x2，y3＝log2x，则当2<x<4时，y1，y2，y3的大小关系为(　　) A. y1>y2>y3 B. y2>y1>y3 C. y1>y3>y2 D. y2>y3>y1

**3.** (多选)下列结论正确的是(　　)

A. 当0＜x＜1时，2x＞x0.5＞log2x

B. 当x＞4时，2x＞log2x＞x0.5

C. 存在 x0＞1，当x＞x0时，恒有2x＞x0.5＞log2x

D. 存在x0∈**R**，x0.5＞2x＞log2x

**8．2.2　函数的实际应用**

例**1**　某计算机集团公司生产某种型号计算机的固定成本为200万元，生产每台计算机的可变成本为3 000元，每台计算机的售价为5 000元．分别写出总成本C(万元)、单位成本P(万元)、销售收入R(万元)以及利润L(万元)关于总产量x(台)的函数关系式．



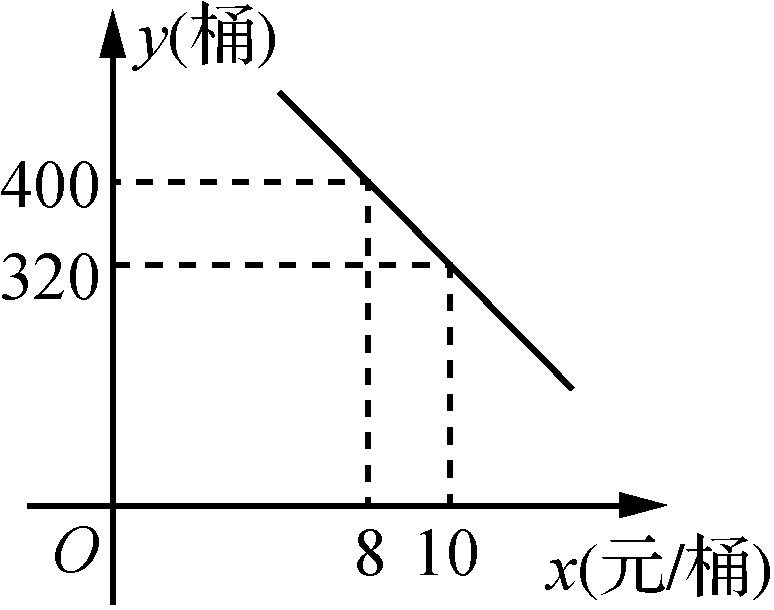


某校高一(2)班共有学生51人，据统计原来每人每年用于购买饮料的平均支出是a元，若该班全体学生改饮某品牌的桶装纯净水，经测算和市场调查，其年总费用由两部分组成，一部分是购买纯净水的费用，另一部分是其他费用228元．其中，纯净水的销售价x(元/桶)与年购买总量y(桶)之间满足如图所示的关系．

(1) 求y关于x的函数关系式；

(2) 当a＝120时，若该班每年需要纯净水380桶，请你根据提供的信息比较，该班全体学生改饮桶装纯净水的年总费用与该班全体学生购买饮料的年总费用，哪一种更少？说明你的理由；

(3) 当a至少为多少时，该班学生集体改饮桶装纯净水的年总费用一定比该班全体学生购买饮料的年总费用少？



例**2**　物体在常温下的温度变化可以用牛顿冷却规律来描述：设物体的初始温度是T0，经过一定时间t后的温度是T，则T－Tα＝(T0－Tα)·，其中Tα表示环境温度，h称为半衰期．现有一杯用88 ℃热水冲的速溶咖啡，放在24 ℃的房间中，如果咖啡降温到40 ℃需要20 min，那么降温到35 ℃时，需要多长时间(结果精确到0.1)?



某海滨城市现有人口100万人，如果年平均自然增长率为1.2%.解答下面的问题：(1) 写出该城市人口数y(万人)与年份x(年)的函数关系；

(2) 计算10年后该城市人口总数(精确到0.1万人)；

(3) 计算大约多少年后该城市人口将达到120万人(精确到1年)?

例**3**　在经济学中，函数f(x)的边际函数Mf(x)定义为Mf(x)＝f(x＋1)－f(x)．某公司每月最多生产100台报警系统装置，生产x台(x∈**N**\*)的收入函数为R(x)＝

3 000x－20x2(单位：元)，其成本函数为C(x)＝500x＋4 000(单位：元)，利润是收入与成本之差．(1) 求利润函数P(x)及边际利润函数MP(x)；

(2) 利润函数P(x)与边际利润函数MP(x)是否具有相同的最大值？





某地预计明年从年初开始的前x个月内，某种商品的需求总量f(x)(万件)与月份x的近似关系为f(x)＝x(x＋1)(35－2x)(x∈**N**，且x≤12)．

(1) 写出明年第x个月的需求量g(x)(万件)与月份x的函数关系式．

(2) 求哪个月份的需求量最大？最大值为多少？

例**4**　大西洋鲑鱼每年都要逆流而上，游回产地产卵．记鲑鱼的游速为v(m/s)，鲑鱼的耗氧量的单位数为Q，研究中发现v与log3成正比，且当Q＝900时，v＝1.(1) 求出v关于Q的函数解析式；

(2) 计算一条鲑鱼的游速是1.5m/s时耗氧量的单位数；

(3) 一条鲑鱼要想把游速提高1m/s，其耗氧量的单位数应怎样变化？



尽管目前人类还无法准确预报地震，但科学家通过研究，已经对地震有所了解．例如，地震时释放出的能量E(单位：焦耳)与地震里氏震级M之间的关系为lgE＝4.8＋1.5M.2008年5月汶川发生里氏8.0级地震，它释放出来的能量是2019年6月四川长宁发生里氏6.0级地震释放出来能量的\_\_\_\_\_\_\_\_倍．

**本章复习**

例**1**　已知函数f(x)＝x3－x2＋＋.证明：存在x0∈，使f(x0)＝x0.



函数f(x)＝|x－2|－lnx的零点的个数为\_\_\_\_\_\_\_\_.

例**2**　已知函数f(x)＝x－1＋x2－2，试判断f(x)有几个零点？并确定各零点所在的范围(各区间长度不超过1)．



函数f(x)＝x3＋2x－4的零点所在的大致区间是(　　)

A. (0，1) B. (1，2) C. (2，3) D. (3，4)

1. 几类函数模型

|  |  |
| --- | --- |
| 函数模型 | 函数解析式 |
| 一次函数模型 | f(x)＝ax＋b(a，b为常数，a≠0) |
| 反比例函数模型 | f(x)＝＋b(k，b为常数，k≠0) |
| 二次函数模型 | f(x)＝ax2＋bx＋c(a，b，c为常数，a≠0) |
| 指数函数模型 | f(x)＝bax＋c(a，b，c为常数，b≠0，a＞0且a≠1) |
| 对数函数模型 | f(x)＝blogax＋c(a，b，c为常数，b≠0，a＞0且a≠1) |
| 幂函数模型 | f(x)＝axn＋b(a，b为常数，a≠0) |

2. 三种函数模型的性质

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 函数  性质 | y＝ax(a＞1) | y＝logax  (a＞1) | y＝xn  (n＞0) |
| 在(0，＋∞)上的增减性 | 单调递增 | 单调递增 | 单调递增 |
| 增长速度 | 越来越快 | 越来越慢 | 相对平稳 |
| 图象的变化 | 随x的增大逐渐表现为与y轴平行 | 随x的增大逐渐表现为与x轴平行 | 随n值变化而各有不同 |
| 值的比较 | 存在一个x0，当x＞x0时，有logax＜xn＜ax | | |

3. 解函数应用问题的步骤：

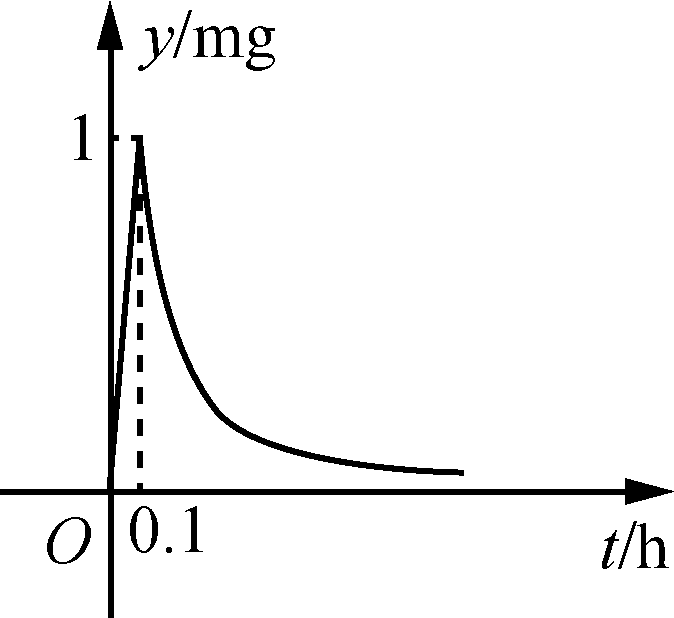
例**3**　在固定压力差(压力差为常数)下，当气体通过圆形管道时，其流量速率R与管道半径r的函数关系为R＝kr4(k>0，k是常数)．

(1) 假设气体在半径为3 cm的管道中，流量速率为400 cm3/s，求该气体通过半径为r cm的管道时，其流量速率R的表达式；

(2) 已知(1)中的气体通过的管道半径为5 cm，求该气体的流量速率(结果精确到个位)．



为了预防流感，某学校对教室用药熏消毒法进行消毒．已知药物在释放过程中，室内每立方米空气中的含药量y(mg)与时间t(h)成正比，药物释放完毕后，y与t的函数关系式为y＝(a为常数)，如图，根据图中所提供的信息，回答下列问题：

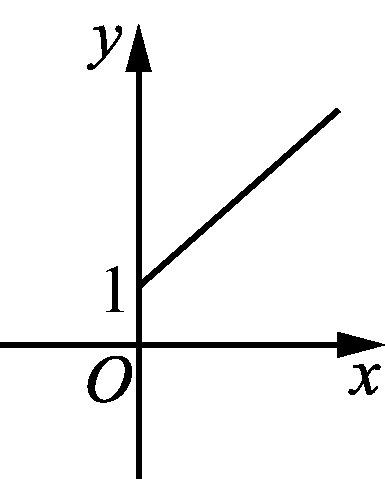
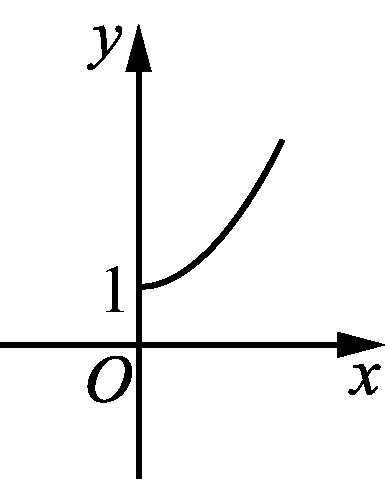
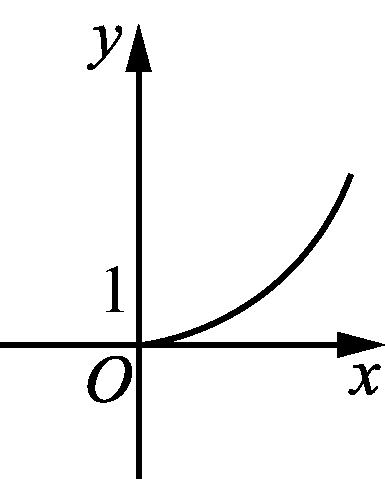
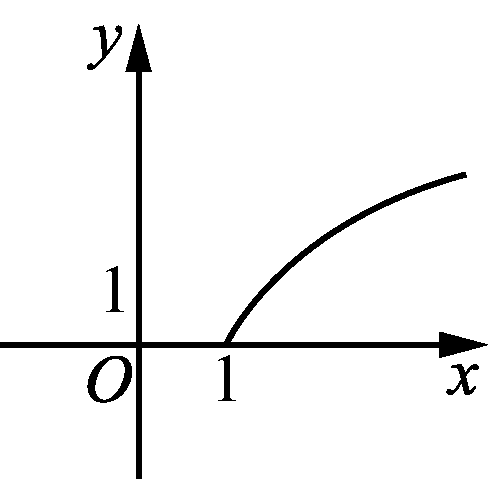


(1) 从药物释放开始，每立方米空气中的含药量y(mg)与时间t(h)之间的函数关系式为\_\_\_\_\_\_\_\_；

(2) 据测定，当空气中每立方米的含药量降低到0.25 mg以下时，学生方可进教室，那么从药物释放开始，至少需要经过\_\_\_\_\_\_\_\_h后，学生才能回到教室．



**1.** 某林区的森林蓄积量每年比上一年平均增长10.4%，要增长到原来的x倍，需经过y年，则函数y＝f(x)的图象大致为(　　)

ABCD

**3.** (多选)给出下列命题，其中正确的是(　　)

A. 函数f(x)＝x2－1的零点是(－1，0)和(1，0)

B. 函数y＝f(x)在区间(a，b)内有零点(函数图象连续不断)，则一定有f(a)·f(b)＜0 C. 二次函数y＝ax2＋bx＋c(a≠0)在b2－4ac＜0时没有零点

D. 若函数f(x)在[a，b]上单调且f(a)·f(b)＜0，则函数f(x)在(a，b)上有且只有一个零点