*HPM* 视角下的函数单调性教学案例研究

 函数这个词则是由李善兰翻译⽽来，李善兰在翻译《代数学》（1859年）⼀时，

把“function”译成“函数”的。中国古代“函”字与“含”字通⽤，都有着“包含”的意思。李善兰给出的定义是：“凡式中含天，为天之函数。”中国古代⽤天、地、⼈、物4个字来表⽰4个不同的未知数或变量。这个定义的含义是：“凡是公式中含有变量*x*，则该式⼦叫做*x*的函数。函数即是变化，研究函数因变量随着自变量的变化而变化就很有必要。

## （一）问题情境

下图是常州市1月份某天24小时内的气温变化图．观察这张气温变化图：



问题1：气温在哪些时段内是逐步升高的或逐渐下降的？

设计意图：借助生活中的气温变化图来感受温度的上升和下降，培养学生图形语言与代数语言相互转化的能力，学会用数学的眼光来观察世界，用数学语言来表达世界。

## （二）学生活动

问题2：4点到14点，图象呈上升趋势，气温在逐步升高，如何用数学语言刻画呢？

教学预设：大多数同学能够回答出温度$θ$随着t的增大而增大。

问题3：更为一般地，函数的图象在区间I上逐渐上升如何描述呢？

问题4：增大这个词，在数学中涉及到数量的不等关系，能不能从数学语言上再深度刻画一下呢？

教师预设：取两个数，时

问题5：反过来成立吗？

问题6：取3个数呢？

问题7：那你觉得需要多少个？

教师预设：学生经过思考，可能会得出无数和任意个。由此得出三个方案

方案一：当，则

方案二：当，则

方案三：任意的，则

经讨论，最终确定方案三。

设计意图：初中阶段学生对上升的描述即为增大，通过教师与学生的交流，将文字语言逐步转化为更为抽象的数学语言，在对话中提升文字语言转化为符号语言的能力，发展数学抽象核心素养。

## （三）建构数学

问题8：一般地，如何描述增函数的概念？

教学预设：通过上述的抽象过程，学生能基本描述出函数的单调性的概念，但容易忽略研究区间，需要老师进一步提醒。

问题9：类比增函数与增区间，如何定义减函数与减区间?

问题10：概念辨析

①若定义在R上的函数满足，则函数是R上的增函数；

②若定义在R上的函数满足，则函数在R上不是减函数.

设计意图：在建构完概念后，反思辨析对进一步理解和同化函数单调性概念很有帮助。

## （四）数学应用

例1 画出下列函数图象，并写出单调区间：



问题11：你能找出气温变化图中的单调区间吗？

设计意图：例1（1）是利用学生熟悉的函数图象判断函数的单调性，写出单调区间。（2）函数帮助学生理解函数的单调性是对定义域内某个区间而言的，它反映的是函数的局部性质。同时设置问题11帮助学生将所学的理论知识再应用到生活情境，由生活情境提炼出数学知识，再将数学知识应用到生活实际，体现数学的实用价值。

例2 证明：函数 在区间 上是减函数．

设计意图：借助例2指出函数单调性证明的关键步骤。作差比较大小是常用方法，他的基本步骤是“取值→作差→变形→定号→结论”，其中取值是起点，变形是过程。

问题12：记，那么函数的单调性与的符号有什么关系？

设计意图：为后续函数的单调性与导数的关系作铺垫，同时引导一些思维水平较高的学生自主探究，获得相应的发展。

## 回顾反思

问题13：我们是如何研究函数的单调性的？

设计意图：引导学生回顾整节课的研究历程，经历图形语言、文字语言、数学语言的相互转化，积累了基本的活动经验，为后续学习函数的其它性质提供认知准备与思维范式，体现大单元的教学理念。

参考文献:

[1]中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）[M].北京：人民教育出版社，2020：8