

关于上海九年级学生“相似”概念 表征与转译的调查研究

周芳芳 (上海市曹杨中学 200333)

孙虎 (上海市嘉定区震川中学 201805)

陈志辉 (华南师范大学 510631)

1 引言

“表征”作为认知过程中的基本单位,其在数学学习心理与数学问题解决研究领域中有不可替代的地位,同时也是人们进行复杂数学学习活动和理解概念建构过程的必经途径.相关研究表明,数学表征在学生理解概念、关系或关联以及解决问题过程所使用的数学知识方面有着至关重要的作用.

通过文献检索发现,国内外关于数学表征的研究在主题与方法上有许多共同之处,也存在着不少差异.总体来说,这类研究都非常关注几何表征的教学实践及其意义;同时,国外研究比较侧重于对表征认知过程的描述刻画,试图建立媒介(如计算机等)与表征转换的联系,并对影响表征的因素进行探索,进行改善教学的任务设计,研究学生的学习困难等;国内研究则较多从整体上去关注学生表征以及其他核心能力上存在的差异,而在微观层面上,对学生在具体概念进行表征时呈现的特点或遇到的困难的关注较少.

表征作为一个非常复杂而微妙的概念,是教

育研究者认识和理解学生在参与学习活动、概念学习与掌握过程中的关键变量,关乎学生表征能力的测试,在为人才培养目标的设置提供参考依据方面具有十分积极的意义.本研究以几何中的“相似”概念为例,对学生对其理解及表征形式转换的表现进行测试,试图获得某一地域学习群体对此概念进行表征时呈现的特点,为理解学生在相似概念的构建及进行学习困难指导方面提供策略依据.

2 研究设计

2.1 研究问题及方法

在核心素养内涵构建的背景下,有研究者类拟 PISA 所提出的数学素养,以情景、内容、能力为测评框架,对八年级学生的数学表征能力展开大规模的施测.表征转换能力分为系统间表征和系统内表征.系统间表征是指在书面符号、几何图形(表)、语言文字(口头)以及操作性表征四个数学表征系统之间进行的表征转换.系统内表征包括变量替换、初等几何变换、恒等变形、映射变换四种.并将数学表征与转换能力划分为再现、联系和反思三个水平.

表1 数学表征与转换能力的水平划分^[1]

能力成分	水平层次		
	水平 1: 记忆与再现	水平 2: 联系与变换	水平 3: 反思与拓展
数学表征 与转换	能够在标准化的情境下直接处理较为熟悉的表征并加以利用,如将熟悉的文字表达转化为符号、图形或图表等	在较为熟悉的情境中能够清楚地解释和转化两种以上不同的表征形式; 针对问题情境设计出某种表征形式	能够理解和应用非标准形式的表征;能够在较为复杂的问题情境中,为问题的关键步骤设计特定的表征;能够比较和权衡不同的表征形式

宏观能力测试对学生培养目标的设置有着重要的参考价值.然而,深入探究某一群体在特定概念进行表征时的微观呈现及其表现与概念理解之间能够建立什么样的对应关系,对于在数学活动

中通过学生的表现判断学生对概念理解程度的教育工作者来说,有着更为现实的应用意义.

结合施测操作的客观性,研究选取叙述性表征与描述性表征的转换作为测试目标,分别以正

逆两个方向的转换进行测试题设计.最后,结合表征与转换能力的水平划分过程中涉及关于情景的标准化与非标准化的区别,研究设计了一系列关于“相似”概念的表征,包括标准化与非标准化的表达方式.借鉴相关研究^[1]中采用的方法,呈现不同画法标准下的“相似”概念,用开放题的形式测试学生对不同标准下“表征”的识别和论证.具体研究问题如下:

(1)九年级学生如何对“相似”概念进行操作性的表征?

(2)九年级学生在对“相似”概念进行表征转换时表现如何?是否存在转译困难?

(3)该群体如何对标准化和非标准化的“相似”概念表征进行识别的?

根据以上问题,本研究进行测试题设计与编制,最终确定包括五道大题,共7小题,均以开放题和半开放题为主,施测前通过教师和学生的访谈并对测试问题进行了部分调整.确保测量的有效性之后,便开始对样本学生进行施测.

2.2 正式测试实施过程

2017年10月23日下午,测试问卷投放于上海市嘉定区震川中学进行施测,在九年级普通班中抽取了两个班共66名学生(学生的年龄及性别信息如图1所示),进行了长约40分钟的测试.在此次测试的一周以前,学生已经学习了相似形的概念判断、相似的基本依据以及相似形相关的基本特征.

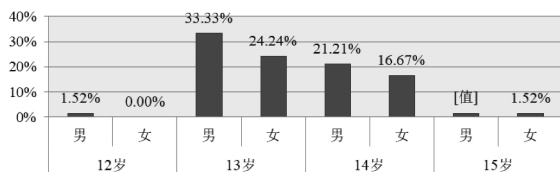


图1 测试学生样本的性别年龄比例分布

3 研究结果

对测试卷进行回收并对所测结果编码分类,得到的结果如下:

(1)九年级学生基本能根据概念特征描述“相似”,并写出相应的思维过程

为了观测学生对“相似”概念的直接表征,本研究设计了相似图象的辨析,并要求学生简要表述理由,试图通过学生对相似形的判定,寻找处于该年龄段学生对“相似”概念的表达与其认知思维

之间的关系.

测试题样例1 如图2,方格纸上各方格的边长为1个单位, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 是两个格点三角形.请你判断这两个格点三角形是否相似?并写出你的理由.

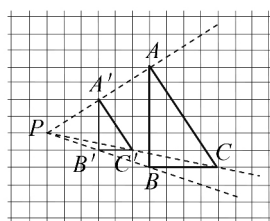


图2

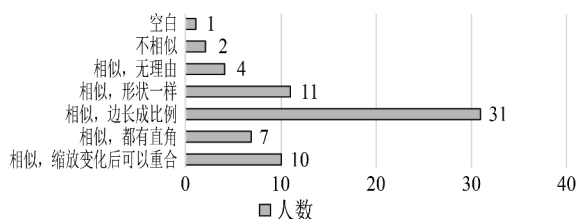


图3 九年级学生在相似形判断测试的表现

样本学生的表现如图3所示.通过对数据分析发现:1)样本中近95%的学生能够正确判断图中两个三角形是否相似.他们基本能通过已学过的相似三角形的判定方法进行判定,并且能够利用文字表达自己的理由,比如通过角的关系、通过边的关系进行判断.2)在表达相似的样本中,有些学生只是通过观察而非通过严谨的逻辑语言来做出判断,感觉“看起来”相似就认为是相似.也有部分学生在叙述理由时论证不完善,比如只表达出了相似判定中的部分内容.从数据中可以看到,部分学生不能很好地进行数学概念描述方面的话语交流(话语表征),不能很好地描述对应的思维过程.

(2)九年级学生能够较好地相似图形进行图象表征,但是对相似概念进行叙述性表征与描述性表征存在困难

为了观测学生对相似图形的表征,以及相关概念的叙述性表征和描述性表征,研究设计了一道作图并描述的测试题,也即图形表征向图形表征转译和文字转译,重点分别关注学生表征过程中对图形的变换以及关系的描述.

测试题样例2 请在图4的方格图中画出一个与 $\triangle ABC$ 相似的三角形,并写出你认为你画出的三角形与原三角形相似的理由.

样本学生的表现如图5所示.经对测试数据分析,发现样本中将近82%的学生都能根据题干要求描画出符合要求的相似图形.这表明上

海市该年龄段的学生能理解关于“相似”概念的叙述表征,并能够转译成符合条件的图象,即能准确地将叙述性表征转化为描述性表征,得到所需图形.约 18%

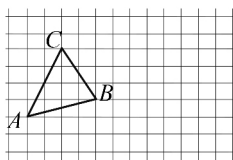


图 4

的学生不能很好地根据文字与图象的含义明确和定位其中所涉及的几何元素,无法完整地相似概念的转译工作.在正确描画出图形的学生中,也有大部分学生无法正确或者完整地叙述相似的理由,说明相似概念的叙述性表征能力还有待提高.

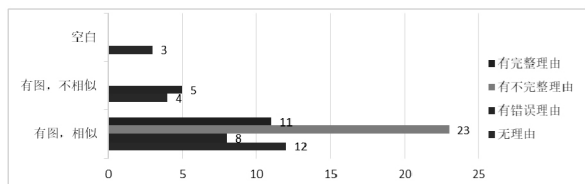


图 5 九年级学生在图形表征与描述测试的表现

可见,九年级学生对相似概念的多种表征方式进行转译时,存在着不平衡的能力发展表现.总体上,由叙述性表征(如文字)向描述性表征(图形)的转换表现良好,而由描述性表征向叙述性表征反方向转译时存在较大的困难.

(3)九年级学生对平面内标准形式的“相似”概念表征识别表现良好,但对非标准形式下的相似结论的转译与辨识仍存在认知困难

《义务教育数学课程标准(2011年版)》在培养目标中提到^[2],数学课程应当注重发展学生的符号意识、空间观念、几何直观等能力和模型思想.其中“几何直观”被描述为“主要是指利用图形描述和分析问题.借助几何直观可以把复杂的数学问题变得简明、形象,有助于探索解决问题的思路,预测结果.几何直观可以帮助学生直观地理解数学,在整个数学学习过程中都发挥着重要作用.”由此可见,我国在课程目标上对几何概念在培养学生的数学观念和能力上给出了具有针对性的论述.这对于本研究所关注的“相似”概念表征的“标准”的解读有着重要的参考价值.

为了观测学生对于不同标准下由“相似”概念所得到的结论,研究结合课程标准中对空间观念的培养目标要求,设计了一道对非标准形态下求解图形面积的问题.此题与被测样本在七年级时

完成的一次关于“平行”概念的表征相联系,用以检测通过实验是否在相关概念的表征与转译中有所转变.以开放题的形式让学生进行作答,重点关注学生是否能识别基于不同标准下的“相似”表征,以及标准下的表征方式对学生思维存在何种程度的定势影响.

测试题样例 3 如图 6,方格纸上各方格的边长为 1 个单位,直线 l_1, l_2 是两条相互平行的直线, A, B 两点位于直线 l_1 上,点 C 位于直线 l_2 上,且 $\triangle ABC$

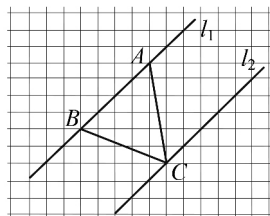


图 6

为格点三角形.请你用合适的方法算出 $\triangle ABC$ 的面积.

如上所示,非标准形态下的三角形面积的求解可以借鉴平行线之间的距离处处相等来解决.本问卷中设计这一问题的目的是考查参与实验的学生在通过教师一年以来的电子白板实验过程中是否内化了“等积变化”的思想.在这一题目的解答过程中,相当一部分学生表现得不尽如人意,仅有少部分学生用了平移点 C 到与点 B 在同一水平线上的方法解决这一问题.

对于“相似”在非标准形式下的概念表征,九年级学生对其的真实识别率非常低.如图 7 所示,对于平行线间距离处处相等这一概念大部分学生都能接受,但是在植入三角形的面积以后,很多学生受到思维定势的影响,将线段 AB 作为底边,从而作出 AB 边上的高.只有约 14% 的学生能将三角形的面积进行等积转换,即移动 C 点.研究发现:标准形式下“相似”概念的特征及其结论,对进行非标准下的概念表征有着较大的影响.学生也很难对其结论进行有效的迁移,这一结论在其他的测试题中也表现明显.

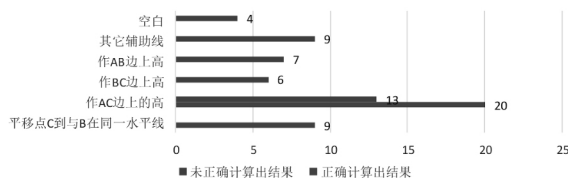


图 7 九年级学生在对相似概念的不同标准形式的表征识别表现

测试题样例 4 如图 8, BF, AE 分别是

$\triangle ABC$ 的边 AC , BC 上的高, BF 与 AE 相交于点 D .

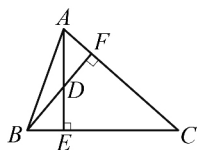


图 8

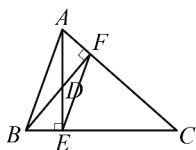


图 9

(1) 请你尽可能多地找出图中相似的三角形;

(2) 如图 9, 若联结 EF 两点, 则图中是否产生新的相似三角形? 若有, 请指出并证明, 若没有, 请说明理由.

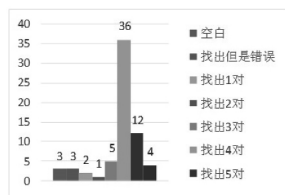


图 10 第 1 题答题情况

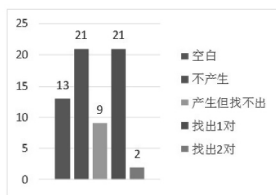


图 11 第 2 题答题情况

经测试, 九年级学生在对相似三角形概念及其判定的掌握上已经达到要求, 但是在对其进行表征的过程中存在着无法遍历的特点. 这表明九年级学生在初步学习掌握“相似”概念后, 大部分学生基本能理解并识别标准形式下“相似”的概念表征, 能依据概念的基本特征对图形进行判别. 测试的结果表明, 九年级学生在对相似概念的理解和表征表现与数学表征与转换的核心能力划分的中低能力水平(水平 1、水平 2)存在一定程度上的吻合, 即对标准化情境下的概念表征能进行较好的判断, 也能进行一些不同表征形式的转换, 但未能达到较高能力水平(反思与拓展)的要求.

4 结论与建议

通过以上结果分析, 本研究得到的基本结论及对应的教学建议如下:

首先, 九年级学生对“相似”概念操作性定义的理解表现良好, 但运用数学话语表达的能力仍有待提升. 从测试结果来看, 大部分学生基本能正确地进行概念的作图操作, 但不能很好地运用语言表征描述其判断依据及过程, 说明九年级学生对“相似”的操作性定义有着较好的理解. 因此, 在

“相似”概念的教学中, 建议教师在鼓励学生动手操作的同时, 注意培养学生的数学话语表达能力, 加强课堂师生对话交流, 引导学生正确使用书面语言对数学思维活动进行描述.

其次, 九年级学生在对概念及其判定依据进行不同表征形式的转译时存在单向性的困难, 特别在描述性图形表征转化为叙述性文字表征的过程中尤为明显. 前文的论述中也提到, 学生的表现差异或许与文化有关, 但总得来说, 还是与学生在解题过程中养成的习惯有着密不可分的关联. 有研究者认为, 学生的表征能力能够通过教学得到提高, 具体的策略有: (1) 鼓励有目的的表征选择; (2) 鼓励通过对话明确表征之间的关联; (3) 对表征之间的联系作交替性的指导. 国内许多研究也认同^[3], 多元表征方式的呈现无论对问题本身的理解还是促进学生的思维发展, 均有重要意义. 因此, 建议在几何概念教学的过程中采用多元的表征方式, 尤其应注意多鼓励学生进行例如画图等描述性表征方式的学习, 这将有助于提升学生在数学表征与转换方面的核心素养.

最后, 九年级学生对标准形式下的相似表征基本能很好地判别, 对非标准形式下的“相似”仍未能很好地辨别. 对于该群体学生的测试表现, 可能的原因是什么? 是这个年龄阶段学生的认知思维能力所限, 还是课程体制下学生较少接触课程之外的概念表征形式, 抑或是其他因素? 具体的缘由仍有待于进一步的研究. 而数学概念大多来源于现实, 其存在的表征形式存在着多样性, 如何在理解“教育数学”视角中的概念的同时又不割裂对“数学”与“现实”的联系, 同样值得广大教育者更多的深思熟虑.

参考文献

- [1] 徐斌艳, 朱雁, 鲍建生, 孔企平. 我国八年级学生数学学科核心能力水平调查与分析[J]. 全球教育展望, 2015, 44(11).
- [2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2011年版)[M]. 北京: 北京师范大学, 2011.
- [3] 唐剑岚. 概念多元表征的教学设计对概念学习的影响[J]. 数学教育学报, 2010(2).