

问题

-23-

运算能力有哪些新变化?

运算能力是2011版课标和高中课标都明确强调的数学学习关键能力,在我国数学教学中占有重要地位。2022版课标在运算能力方面主要有三方面变化:负数的引入、方程的调整和韦达定理的明确。

一、运算能力的具体表现及其中的新变化

运算能力是运算技能与逻辑思维等能力的有机整合,它不仅是一种数学操作能力,更是一种数学思维能力。运算能力的具体表现有哪些呢?下面我们具体从2022版课标发生变化的角度进行阐述。

表现一:能够明晰运算的对象和意义,理解算法与算理之间的关系。

数学运算是指在明晰运算对象的基础上,依据运算法则解决数学问题的过程。主要包括:理解运算对象,掌握运算法则,探究运算方向,选择运算方法,设计运算程序,求得运算结果。

变化一:负数在初中阶段正式引入,小学阶段在“综合与实践”中了解负数。

负数在小学中的要求为“在熟悉的情境中了解具有相反意义的量,知道负数在情境中表达的具体意义,感悟这些负数可以表达与正数意义相反的量”,其实这里没有负数也行,比如对零下10摄氏度的“10”用红字表示也可以解决问题,所以负数的引入实际在很大程度上是为了运算。小学阶段从运算封闭性的角度对此是无法解释的,而负数的引入放到初中则会使得知识更加完整。

(1)从减法运算封闭性的角度理解负数的产生。

减法是加法的逆向计算,减法运算的封闭性会产生负数,教材通过多个存在相反意义量的场景引入负数,其背后都对应了一种特殊的减法算式,如:以冰水混合物的温度为标准,比这个温度高10摄氏度记作+10摄氏度,对应算式是 $0+10$,那比这个温度低5摄氏度是多少?对应算式是 $0-5$ 。从计量角度看,“低的5摄氏度”用到的数仍然是原来的自然数5,从实物计量的角度看原先的正数是够用的,但是“低”对应了数学中的减法运算关系,从减法角度看, $0-5$ 的计算结果无法用正数表示,只有扩充到负数域才能实现减法运算的封闭性。

从算术角度看,负数的产生不是计量物体时原来的数不够用了,而是原来正

数范围内的减法无法满足某些数量关系的运算需求，负数的出现完善了减法运算体系。

(2) 引入负数后，可实现加减运算间的统一。

减法是加法的逆运算，两种计算具有相反的过程和意义，负数作为相反意义的量出现后可以实现两种可逆运算的统一。

以 $3-2=3+(-2)$ 为例，“2”转换为其相反意义的量“-2”后，减法即可转换为其相反的运算（逆运算）——加法，即有理数减法法则：减去一个数等于加上它的相反数。这个法则本质上把相反意义的运算过程简化成了求相反意义量的过程，因此负数的引入不仅实现了减法运算的封闭性，而且沟通了加与减这两种可逆运算之间的联系。

在数系及其运算的扩充过程中，核心问题是在添加了一类“新数”后，所引进的新数之间的运算如何归结到原有的数之间的运算而定义新运算法则，进而使原有的运算在新的数系中得以保持。

例如，“负负得正”的教学是众所周知的难题，实际上符号法则 $(-1) \times (-1)=1$ 是一种数学创造，为的是在保持算术运算律的条件下使运算能够一致，它是不能“证明”的，用任何具体例子来解释都有很大的局限性，所以通过归纳推理来得出是更明智的选择。

由此可以看到，我们通过运算的封闭性和一致性等算理的分析，明确了运算对象“负数”引入的必要性。

变化二：小学阶段初步感知方程形式，初中完整学习方程定义。

原来小学高年级有关于方程的最初级的内容——简易方程，可以写成 $5+2x=1$ 这种样子，但是 2022 版课标中小学不再说这个叫方程，也就是完整的方程概念自初中始。过去 20 年都不是这样的，方程的引入和以前小学也讲方程的情形发生了变化，因此方程的引入部分应该重点关注。2022 版课标中要求：能根据现实情境理解方程的意义，能针对具体问题列出方程。所以要使学生经历建立一元一次方程模型并用它解决实际问题的过程，提高分析问题、解决问题的能力，因此，需要通过精心设计问题情境来使学生逐步领会数学模型观念，体会方程的作用，掌握运用方程解决实际问题的方法。

从知识系统性的角度思考问题，让学生在初中经历一个完整的“情境→概念→应用→迁移”的方程知识形成过程。在方程概念的形成过程中，重点在“如何构建等量关系式”这个算理的分析，从而构造“方程”这个运算对象。

变化三：韦达定理正式进入初中必学内容。

韦达定理正式进入初中必学内容是 2022 版课标一个很重要的标志。韦达定理在 2011 版课标中为选学内容，但现在改为必学内容了。之前它为什么是选学内容？因为韦达定理跟求方程的根有关系，所以纯粹从求解的角度引入韦达定理的意义并不大，而且一元二次方程求根的方法很多，没有韦达定理也不影响，所以可以选学。现在把它引进来了，绝不只是求根那么简单。韦达定理主要是向我们的学生揭示了根与系数之间的关系。小学对分数是讲整体与部分之间的关系；初中对方程是讲已知与未知之间的关系，对函数是讲变量和变量之间的关系，讲一个量如何依赖另一个量的变化而变化的关系。也就是说，**关系是数学的主题**。如果问数学是研究什么的，数学实际上就是研究关系的。所以我们现在把数学界定为关系模式的科学，就相当于说数学是关于关系的科学。韦达定理由选学内容变为必学内容，就特别值得关注。

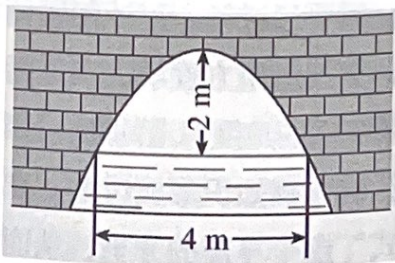
那我们在考虑这部分内容时要着眼于根与系数的关系，韦达是怎么发现的？在这个过程中怎么引入符号？怎么用符号表示？2022 版课标中例 67 “一元二次方程的根与系数的关系”也对此做了解释。其中还有更深层次的含义，就是感悟符号表达对于数学发展的作用，积累用数学符号进行一般性推理的经验。

关系是数学的一个大概念，我们通过研究根与系数关系的算理分析，从而得到根与系数之间数量关系的算法。

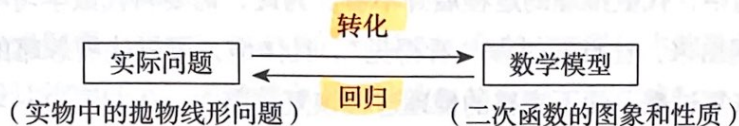
表现二：能够理解运算的问题，选择合理简洁的运算策略解决问题。

在教学过程中，要关注数学知识与实际的结合，让学生在情境中理解数量关系和变化规律，经历从实际问题中建立数学模型、求解模型、验证反思的过程，形成模型观念；要关注基于代数的逻辑推理，能在比较复杂的情境中，提升学生发现、提出、分析和解决问题的能力，以及有逻辑地表达与交流的能力。例如下面这个问题。

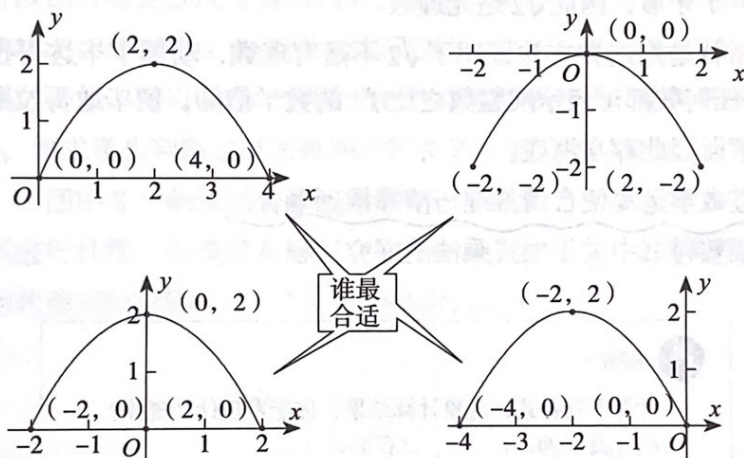
如下图所示，一座拱桥的纵截面是抛物线的一部分，拱桥的跨度是 4.9 米，水面宽是 4 米时，拱顶离水面 2 米。现在想了解水面宽度变化时，拱顶离水面的高度怎样变化。



如何解决这个问题呢？我们需要从实际问题中抽象出二次函数的模型进行求解，通过建立恰当的直角坐标系，寻找到问题的答案。（见下图）



怎样建立直角坐标系比较简单呢？不同的建立直角坐标系的方式，导致的计算难易程度不同，这就需要选择合理简洁的策略来解决问题。（见下图）



解决问题之后，积极反思解题过程，特别要聚焦运算方法中的重点、难点、繁琐点，集中精力、高度关注运算对象的相关联系，从运算重点、难点、繁琐点产生的原因和已有的运算经验中，重新审视运算对象，获得更加优越的运算路径，优化运算思维。

表现三：能够通过运算促进代数推理能力的发展，形成规范化思考问题的品质，养成一丝不苟、严谨求实的科学态度。

代数里面的推理也包括演绎推理、归纳推理和类比推理。例如，从若干运算结果中归纳出有关运算规律，就是归纳；根据运算法则推演出运算的规律或者公式，就是演绎；而根据有理数的运算法则得到无理数的运算法则、实数的运算法则等，就是类比。这是 2022 版课标特别强调的，而且专门给出了案例。

(1) 通过数学运算外显推理过程, 让推理过程“看得见”。

很多师生未能很好地“感受到”代数学习过程中的推理, 部分原因是教材设计和教学实施中, 代数推理的过程展开不够。为此, 需要将代数学习中的推理过程更好地展现出来, 让推理过程“看得见”。具体地, 可以让被忽略的、压缩掉的推理过程恢复过来, 让不完整的推理过程恢复完整。

例如, 如何证明 $\sqrt{2}$ 是无理数?

证明: 奇偶分析法。

假设 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, 其中 $(a, b)=1$, 且 a 与 b 都是正整数, 则 $a^2=2b^2$, 可知 a 是偶数。设 $a=2c$, 则 $4c^2=2b^2$, $b^2=2c^2$, 可知 b 也是偶数, 因此 a, b 都是偶数, 这与 $(a, b)=1$ 矛盾, 因此 $\sqrt{2}$ 是无理数。

希帕索斯就是用这种方法证明了 $\sqrt{2}$ 不是有理数, 动摇了毕达哥拉斯学派的“万物皆数(任何数都可表示成整数之比)”的数学信仰, 使毕达哥拉斯学派大为恐慌, 希帕索斯因此葬身海底。

(2) 通过数学运算使合情推理与演绎推理融合。

下面是某教科书中关于根式乘法的探究过程。

④ 探究

计算下列各式, 观察计算结果, 你能发现什么规律?

$$(1) \sqrt{4} \times \sqrt{9} = \underline{\quad}, \quad \sqrt{4 \times 9} = \underline{\quad};$$

$$(2) \sqrt{16} \times \sqrt{25} = \underline{\quad}, \quad \sqrt{16 \times 25} = \underline{\quad};$$

$$(3) \sqrt{25} \times \sqrt{36} = \underline{\quad}, \quad \sqrt{25 \times 36} = \underline{\quad};$$

一般地, 二次根式的乘法法则是

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a \geq 0, b \geq 0).$$

该设计先从若干具体数的运算引发猜想, 进而借助计算器计算更多的算式验证猜想, 这是一个很充分的归纳推理的过程。当然, 考虑到学习时间等多方面的原因, 教科书没有再进行严格的演绎推理。实际上, 这一演绎推理过程应该能为学生所接受, 教学中可引导学生进行相关推理, 如可引导学生思考: 你能利用实数的运算法则和运算律(交换律、结合律等)说明 $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ 吗?(提示: 如何说明带根号的两个正数相等?) 相信学生借助乘法的交换律、结合律可以说明这两个正数的平方相等, 因而它们相等。这样, 就很好地实现了从合情推理到演

绎推理的完整过程。一般地,在学生学力许可的情况下,应尽力补全合情推理之后的演绎推理过程,让学生经历从合情推理到演绎推理的闭环,养成严谨的思维习惯。即使学力不允许进行严格证明,也应注意通过举例等方式对合情推理的结论予以进一步解释,通过其他知识的适度类比等方式加深学生的理解。

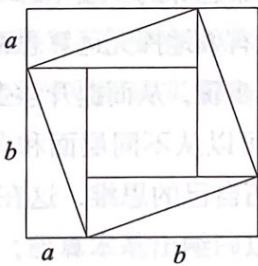
(3) 设计推理任务,通过数学运算让推理的目标“能达成”。

推理不仅是学习的手段、工具,更是学生发展的目标。代数学习中,学生在运用推理的过程中,顺带发展了推理能力,但仍需要进行专门的推理训练,通过更为丰富的推理活动发展学生的推理能力。建议设计更有针对性的推理任务,确保推理目标的达成。这样的任务是多样的,可以是明确要求的归纳、类比或证明活动,也可以是对有关推理过程的判断、辨析、完善与改进,等等。例如,设计一个具体的活动,要求学生在活动中经历归纳、猜想与证明的过程,切实感受推理的全过程。再如,可以呈现一些推理的过程(如解方程、解不等式或者其他运算的过程),要求学生判断这样的推理过程是否正确并加以改进、完善。

例如,下图中 8 个相同的直角三角形和一个小正方形组成了一个正方形。

(1) 不进行计算,仅观察图形,说说 $(a+b)^2 - (a-b)^2$ 的结果和理由。

(2) 用代数方法证明(1)中发现的结论。



总之,推理能力的发展,同样是初中代数学习的重要目标。为此,应认真梳理代数学习中发展学生推理能力的着力点,审视代数教学中发展学生推理能力的薄弱环节,通过外显推理过程和明确的推理任务等,切实发展学生的推理能力。

二、如何培养运算能力?

1. 创设问题情境,明晰运算对象

教师在问题情境的创设上应当充分考虑学生的认知水平和活动经验,尽量创

设来源于生活现实、数学现实、其他学科现实的多层次或开放性问题情境,让学生在现实情境中充分认识运算对象,提升其将一般问题转化为数学运算问题的能力和意识。

故事引入,激发兴趣。学生喜欢听故事,在教学过程中教师可以根据教学实际讲述一些生动有趣的故事,引发他们的兴趣,使他们积极主动地学习。

例如,教学“相似三角形的应用”时,教师可这样引导:“同学们,你们都看过电视剧《亮剑》吗?里面有一处桥段是李云龙用大拇指和双眼就估测出了敌人的大致距离,你知道他是怎么做到的吗?这节课我们就来学习如何用不同的方法测量远处物体的距离。”学生听到“抗战和测距”,求知心切,因为生活中也经常會用到这些知识,这样他们愿意全身心地投入学习,学习积极性得到了调动。

2. 强化对算法与算理之间关系的理解

首先,通过基本概念、公式与定理的教学,理解算理。概念反映着客观事物的本质属性以及事物之间的联系,在不同的数学情境中,学生要理解跟运算相关的基本概念、法则、性质、公式和定理产生的背景,经历它们形成的过程,才能掌握正确的数学内涵,在计算时明确“为什么这样算”,体会计算过程的合理性,从而深刻理解算理。其次,通过算理的综合应用,归纳概括算法。掌握了正确的算理后,经过计算实践,积累运算的一般化思考方法、规律和活动经验,从而形成算法。掌握算法后,可以有效地探究运算思路、选择运算方法、确定运算顺序、厘清运算逻辑、减少运算步骤,从而提升学生运算的准确性、严谨性和发散性。在运算的过程中,学生可以从不同层面和角度分析、研究、描述算理,自主构建多种多样的算法,开拓自己的思维,这在一定程度上培养了自己的创新思维,掌握了多种算法又可以归纳出基本算理,二者相辅相成。算理是算法的理论依据,算法是算理的实践策略,只要两者深度融合,就能有效提升运算能力。

3. 准确运算优于运算速度

运算能力的发展离不开运算技能的形成。在运算的教学传统中,有一个不太好的倾向,就是过于关注运算速度,不论是小学阶段还是初中阶段,这样的情况都具有一定的普遍性。学生在实施运算过程中容易出现的不自察的错误大多是由于开始学习运算时,因为过于关注速度而忽视了运算程序的依序进行,在对程序没有达到内化时,盲目求快,就会在运算的演练中形成习惯性的错误运算,而且一旦形成,要花数倍的努力加以改变。所以在运算教学中“按部就班”执行程序

序非常重要，内化运算程序对于不同的学生时间是不一样的，在开始学运算时，教师要刻意回避速度的评价维度，因为学生在内化了运算程序后，在以后的反复运算操作中自然会提升速度，那是水到渠成的事情，千万急不得。

4. 帮助学生学会“理解需要解决的问题，选择合理简洁的运算策略”

运算正确、有据、合理、简洁是运算能力的主要特征，运算能力并非一种单一的、孤立的数学能力，而是运算技能与逻辑思维等的有机整合。在实施运算分析和解决问题的过程中，要力求基于任务去分析运算条件、探究运算方向、选择运算方法、设计运算程序，使运算符合算理，合理简洁。换言之，运算能力不仅是一种数学操作能力，更是一种数学思维能力。在培养学生的运算能力时，要遵循以下原则：由具体到抽象，由法则到算理，由常量到变量，由正向思维到逆向、多向思维。运算法则是依据、是基础，解决问题的思路是目标。

5. 要帮助学生建构运算的意义来克服运算的不良情绪

引导学生建构运算的意义来克服不良情绪，这是非常容易被忽视的一个要素。很多学生所表现出的运算能力水平较低，问题并不是不清楚运算规则、不懂算理，而是缺乏面对运算的勇气和耐心，遇到稍显复杂的运算任务，不由自主地就会涌出烦躁的情绪。这种烦躁的主要来源就是没有发现运算的价值与意义，从而产生抵触情绪，对简单些的运算还能忍受，对复杂些的就难以耐着性子去实施运算了。所以，教师在运算教学中不仅要有意识地渗透运算在数学以及在我们的现实生活中的价值与意义，也要渗透踏踏实实地实施运算对于我们做事品格培养的价值。

问题

-24-

几何直观就是画图吗？

2022 版课标将几何直观作为数学课程要培养的学生核心素养“数学眼光”的重要组成，“主要指运用图表描述和分析问题的意识与习惯”。“几何直观”不再是一种行为，而是“意识与习惯”，是核心素养的一种具体表现。因此，与 2011 版课标相比，几何直观有所加强。