

数学素养导向下问题解决的意涵与视界

姬梁飞

(华中科技大学 教育研究院 湖北 武汉 430074)

摘要: 问题解决是基于现实意义和数学意义的双重建构过程。长期以来,人们沉浸于数学解题的经验与方法,忽视了数学问题的系统性。问题解决应以数学素养系统为导向,不仅要关注数学问题的分析与解决,还要关乎数学问题的发现与提出,更要关照个体在问题解决过程中形成的个性品质。文章采用主题分析法,从心理认知结构和数学素养系统的双重视角,建构了问题解决素养的理论意蕴与生长机制。探讨问题解决素养的理论意蕴,有助于升华问题解决素养的内涵意蕴,拓宽问题解决素养的培育视界。

关键词: 数学素养; 问题解决; 意涵; 视界

中图分类号: G633.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-1491(2021)02-0001-06

20世纪80年代,由美国教师协会(NCTM)发布了一份关于中学教学建议的纲领性文件,其中着重强调了数学问题解决的重要性。自此拉起了数学问题解决研究的全球性序幕。从英国 COCKCROFT (1982年)到日本《学习指导要领》(1989年),从新加坡数学课程框架(2006年)到德国六大核心能力(2012年)。许多国家数学课程框架都以数学问题解决为中心,把问题解决能力作为数学教育的中心目标,问题解决活动作为学生数学学习活动的重心。从某种程度上说,数学学习的最终目的便是让学生形成自主解决各类数学问题的素质能力。我国最新数学课程标准(2017年版2020年修订)提出了发展学生问题解决素养的具体要求(“四能”)^[1]。它既关注数学问题的识别与表征,又强调数学问题的审视与解答。这不同于以往只强调数学问题的分析与解决,而是意识到了问题解决的系统性,认识到了发现问题、提炼问题、表征问题对分析问题、解答问题具有先决性与前瞻性的作用。然而,长期以来,由于

我国数学教育中的数学问题仅限于纯粹练习式的习题(问题明确、条件充分、结论清晰),既非出自于现实世界中开放性数学问题,又非导源于数学内部的探索之谜,这就扭曲了人们对真实数学问题的正确认知,也造成了对数学知识的产生和发展真实过程的一种误解,更不利于培养学生的创新精神和探索精神。在现实教学中,既存在着一些数学问题设计结构不良的问题(斯海霞^[2] 2012; 马淑杰、张景斌、陈福印^[3] 2020),也存在着一些研究者过度沉醉于波利亚式的解题方法(熟识题目—寻求思路—执行方案—检验回顾^[4]),无法超越既有的、常规化、经验式的解题思维,就解题而解题,忽视了问题解决的多维影响因素和多元意涵。鉴于此,本研究系统化地厘清数学问题解决素养的内涵与畛域,探索数学问题解决素养的理论内蕴与建构视界。

1 数学素养导向下的问题解决素养

以数学素养为导向,以数学活动为载体,深度挖掘问题解决的内涵特质与学理基础。立足于数学素

收稿日期: 2020-08-31

基金项目: 广东省深圳市教育科学“十三五”规划资助课题(ybzz18016); 广东省教育科学中小学数学教学研究专项课题(GDJY2020AS106)

作者简介: 姬梁飞,男,华中科技大学博士生,从事数学教育研究。

养内涵特质,采用文本分析方法,从数学素养结构向度入手,提出了问题解决素养的三个核心特征。

1.1 数学素养的时代诉求与发展导向

随着云时代的到来,“互联网+”、人工智能、机器学习、大数据以及云计算等新时代信息技术手段迅速渗入到现代社会生活的各个领域,并以一股强劲的驱动力推动着时代发展。迎接并适应这些时代信息技术的变革,这是新时代教育发展的迫切需要,它要求现代公民具备适应新时代发展的必备品质,而这些综合品质形成,其背后需要一个共同的智力品质支撑系统,那就是数学素养。目前,许多国家都将数学素养培育与发展上升到国家教育发展的战略地位,它象征着一种核心竞争力,数学素养也将成为21世纪人才的必备素养。在新时代背景下,数学素养的内涵聚焦于个体在各种情节下能够从数学视角去描述与理解世界,应用数学思维分析、判断、解决问题,并在数学思考与问题解决过程中体验生活。

作为国际知名度较高、规模较大的两个国际教育比较研究项目 PISA 和 TIMSS,它们在过程领域维度或认知方面都非常重视数学问题解决,尤其是在实际情境下的问题解决过程。PISA 和 TIMSS 两个项目融合了数学问题解决评价模型和数学核心素养评价模型,其中 PISA 项目更是在问题解决的主题框架下,并结合数学核心素养(Mathematical Key Competencies)测评学生的数学素养^[5]。王鼎、李宝敏强调国内数学素养测评应重视问题解决过程中对核心素养的体现过程。他们认为国际测评项目把问题解决和核心素养相整合的评价框架是值得我国数学教育工作者去深入的思考与研究,特别是针对当前数学核心素养测评与呈现方式方面,需要考虑到数学素养评价与课程改革的匹配性和内在一致性^[6]。TIMSS2015 数学测评项目在认知领域中的“应用”区域设置了学生对现实问题和数学内部问题的理解、表征、应用能力,考查学生应用数学知识解决实际问题的认知水平,并由此划分了三个不同的国际基准^[7]。NAEP 评估项目是一项美国针对本土基础教育阶段学生的教育质量评估项目,它不仅在美国国内鼎鼎有名,极具分量,而且在国际上也是风行草从,影响独特而深远。自2014年后,NAEP开始逐渐关注学生在现实情境中解决繁杂问题的能力^[8]。随着国际社会对数学素养的不断重视,这也是进一

步强化“问题解决”的功用,促进学生在问题解决过程中形成数学素养,积累鲜活的数学活动经验,这就是本研究的时代背景。

1.2 数学问题解决素养的意涵建构

问题解决素养是数学素养的重要构成要素,是形成学生良好数学综合素质的纽带与载体。在数学领域,何为“数学问题”?数学问题是指具有问题情境、具有跟数学相关的知识或原理依托,因人而异的“障碍性困难”,指向性或预设性目标状态等要素组成的一种结构体系,它涉及了人们在面临现实情境中需要处理认知矛盾或冲突的心理活动过程,是对障碍性困难的克服与超越,是对认知矛盾的处理与化解。从数学问题的提炼与表征方式出发,可以对数学问题进行一定程度的解构与重构^[9]。此外,人们经常会听到“解决问题”和“问题解决”两种说法,容易引起混用。前者是一个动宾词组,强调支配(关涉)与被支配(关涉)的关系,后者是一个主谓词组,强调陈述(表征)与被陈述(表征)的关系。基于问题解决素养的探讨,本研究主要针对问题解决方面的探讨。

在非数学领域,问题解决作为个体面临问题情境却无既有的办法可以直接利用时,将已知情境转换为目标情境的认知过程^[10]。在数学领域中的“问题解决”又指的是什么?曹一鸣教授认为问题解决是具有一定指向性的、系列的认知操作过程,具体地说,它是运用已有数学知识与方法对现实问题和数学内部问题的一种综合性以及创造性的解决过程^[11]。问题解决素养具有三个核心特征,即创造性、综合性及独特性。首先,问题解决是一种创造性活动,思考孕育于问题,且导向于创造。从曹一鸣教授给数学问题解决所下的定义中,可以看出问题解决绝非是指机械式的重复训练,而是涉及了个体的抽象、概括、推理、分析、想象、运算等多元智力活动,特别是个体的创新思维能力。刘咏梅认为问题解决和学生的创造力相互联系与制约,问题解决能够促进创造力的发展,经过一定程度的问题解决训练可以锻炼学生的创造力^[12]。由于数学问题解决具有突变性、探索性以及开放性等特征,通过问题解决的活动过程,能够训练学生的求异思维和发散思维,培养学生的探索精神和创新精神。其次,问题解决具有综合性特征。问题解决是一个系统化过程,包涵了多元

化智力活动和心理活动。问题解决素养的生成与建构并非是单独进行的,它需要跟数学思维、数学方法、数学交流、情感观念等要素有机结合起来(图1)。

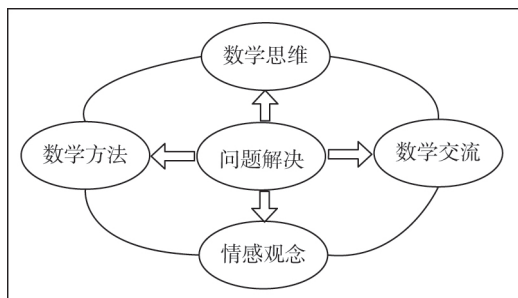


图1 数学素养成分的交织与联结

再次,问题解决素养是在先天生理基础和已有知识经验的基础上,通过学习活动而培育和建构起来的,它具有独特性。问题解决素养的培育因人而异,有别于其他能力品质,它在数学素养成分中有着独特的作用,它的形成与发展又遵循着自身发展的内在逻辑与机理。已有知识经验水平和先天素质是学生解决问题的逻辑起点,每个学生解决问题的方式方法以及心理活动过程也是存在着巨大差异,这就需要学生根据自身偏好和能力水平,构思与设计属于“自己”的问题解决办法,并创造新的知识经验。在这个过程中,学生经历着独特的、动态的、创新性的丰富体验过程。

2 问题解决素养的生长机制

从问题解决的逻辑关系和思维规律的视角来

看,心理认知结构和数学素养系统是问题解决素养生成的客观逻辑基础。心理认知结构关照下的问题解决素养涉及了个体对数学问题的基本认识、看法以及心理活动过程,包括个体对数学本体的认识、信念系统(动机、兴趣、意志、情感以及个性品质等)的构建与维系。数学素养系统导向下的问题解决素养涉及个体解决问题所具备的基本数学素质和问题解决相关的方法及策略。

2.1 基于认知心理结构的素养生长机制

首先,问题启动阶段。个体在问题解决过程中,需要恰当地捕捉情境中有意义的信息,并产生感知问题的心理倾向。这个阶段的认知心理活动依赖于个体生命经验、个性品质以及问题意识。它不同于解答数学题,数学试题中的问题已经明确列出,不需要个体去发现和提出。其次,问题解决阶段。此时,个体的认知心理结构在面临问题情境,已自觉地启动信念系统,通过信念系统调控与问题情境关联的认知资源储备以及数学素养积淀成分,合理地利用认知资源储备和数学素养积淀成分做出相关抉择,并执行问题提炼、表征、分析及处理等策略方案。最后,问题反馈阶段。个体经历了对问题解决过程中的实施与操作过程,对相关的认知策略、行动方案、技术路线等进行评判以及反思内省,并及时更新现有的问题解决观念方法,将问题解决过程中的学习行为经验内化为自身素养品质(图2)。

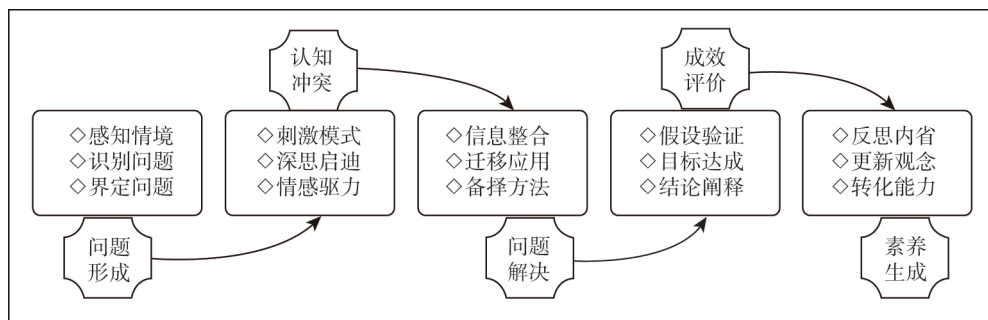


图2 问题解决的认知心理机制

认知心理结构系统调控个体在问题解决过程的意志、兴趣、动机等因素,这些因素又支配和制约着个体对困难障碍的克服、对问题解决策略的选择、执行问题解决方案的信念、对问题解决的内省程度等。在解决真实问题情境中,个体需要处理实践中遇到的矛盾问题,这既是一种复杂的心理活动,又是一项具有挑战性的思维活动。它需要个体对活动过程进

行自我调控、自我评价。在问题解决活动过程中,个体需要保持清醒认识,这样才能有助于他突破实践过程中的思维障碍,自觉地调控自身思考方向与进程,优化问题解决策略。心理认知机制有助于数学知识技能得以迁移应用,而迁移应用又促进问题解决素养的生成与建构。

2.2 基于数学素养系统的生长机制

问题解决素养的内涵高于问题解决能力,素养不仅包涵了能力,还有情感、品质、价值观等成分。有时候,有些学者未加区分,也粗略地将素养和能力并列使用。新统编教材(2017年版)是在数学素养系统导向下编写而成的,所以采用“问题解决素养”的提法会更贴切些。例如,学界公认的数学建模素养、数学抽象素养、数据分析素养等提法。数学素养系统包涵了数学思维、数学方法、数学交流、问题解决以及情

感观念等五维向度^[13],它赋予了问题解决特有的内涵属性。数学素养导向下的问题解决和非数学素养导向下的问题解决有着重要区别,前者的特殊性就是有机融合了情感观念,将认知领域中的能力品质和情感领域中的个性品质进行系统化的交互与融合,它对数学素养系统的创建和维系具有重要功能。基于数学素养系统,从学习结构与范式的视角,探讨数学素养导向下问题解决的生长机制(图3)。

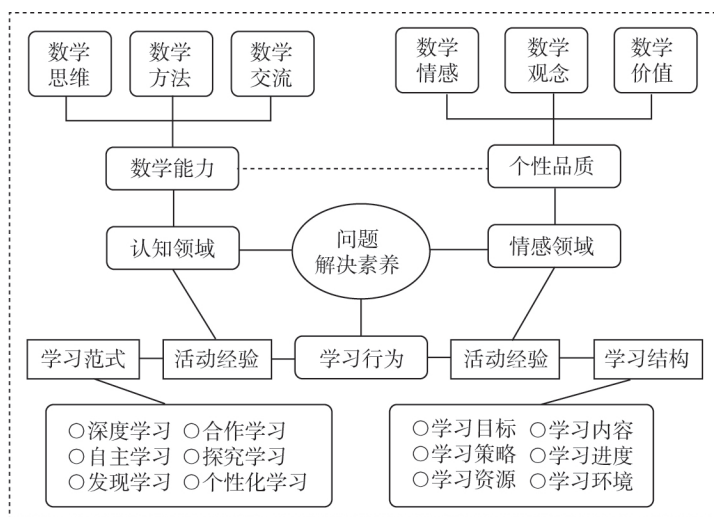


图3 基于数学素养的问题解决素养生长机制

问题解决素养生成与建构的一个重要生长机制就是数学学习活动。通过数学学习活动过程,将问题解决内化为一种学习建构过程。通过发挥深度学习、探究学习、发现学习、合作学习、个性化学习等学习范式的各自优势,结合问题解决素养特有的内涵特质,优化问题解决活动中的学习目标、学习内容,学习进度、学习资源、学习环境等关键要素。这种生长机制围绕问题解决素养的内涵特质,从目标导向和学习结构的交汇处,合力促进问题解决素养的生成与建构。数学问题解决过程具有数学素养导向和学习结构属性,且可迁移的一种数学活动。这种活动有助于促进个体行为能力、心理倾向发生持久的、内在的变化,它是问题解决素养生长的重要机制。

3 数学问题解决素养的建构视界

如何培育学生数学问题解决素养,这是当前各国数学教育家和心理学家探究的一个重要课题。基于问题解决素养生长机制的探讨,从数学素养论、认知心理理论两重视角,聚焦于问题解决的认知规律和素养生长机制的理论探索,这些探索可以为建构

数学问题素养培养路径提供理论视界。

3.1 问题解决素养建构的心理认知视界

数学素养导向下的问题解决,在本质上就是一种个体心理活动的体验过程,这也是理解问题解决素养的生成机制和逻辑基础的一个重要视角。日本学者米山国藏认为,在解决实际问题活动中蕴涵了数学精神,问题解决培育并锤炼人类的精神活动。他用“哥尼斯堡七桥问题”作为案例,从问题的简化、问题的解决办法、研究的推进等方面展开阐释,鼓励学生的研究心理活动,培育学生的数学兴趣,从而促进数学精神活动的培养^[14]。从认知心理活动的视角看,问题解决素养是融合了个体数学观、数学学习观以及数学情感价值等系列观念的聚合体,它包括情感、信念、气质、认同感以及个性品质等要素。这些要素对问题解决素养的形成具有不可估量的影响,同时也为描述和分析问题解决素养的培育路径提供了重要抓手。

问题解决素养生成的逻辑起点源于问题解决的成长需要。一方面,唤醒个体对数学问题解决的成长

需要,激发解决问题的求知欲望。另一方面,创建融洽的数学问题解决的需求系统,建构个体问题解决自我实现过程。事实上,马斯洛需求层次理论的“塔尖”就是一种自我实现的需要。班杜拉较早地提出自我效能感(1982年),个体自我效能感且对其参与特定的行为活动有着重要影响,具有较高自我效能感的个体更愿意选择困难任务,应用恰当的问题解决策略,作更大的努力和持续性的思索^[15]。李晓文认为个体对自身解决问题的一种清晰认识是自我意识的表现,包含了元认知、自我反思、自我评价、自我理解等,而自我需要是自我调节的驱力与导向^[16]。培育学生问题解决素养,让学生体验问题解决的活动过程,唤醒个体对问题解决的成长需要,满足学生在问题解决过程中的自我实现需要,创建学生问题解决的信念系统,形成良好的问题解决的个性心理品质。

3.2 问题解决素养建构的学习范式视界

问题解决素养培育的视界主要来自两类,一类是以心理认知结构作为导向自我实现需要,另一类是以数学素养结构作为导向的学习范式的革新与融合。基于问题解决素养的数学学习,一方面是对数学研究对象的认知思维意识,另一方面又是大脑调节、监控问题解决过程中的心理活动。从丁伯根提出的“工具—目标法”的视角看,问题解决过程中需要有指向性的分析策略、解决策略等要素,这就涉及了问题解决的学习范式,作为培养解决问题素养的必要基础。若没有扎实的与问题解决相关的学习活动,问题解决素养的培育就很难建构。

从学习范式的视域入手,通过对学习范式的有机整合和学习结构的优化设计,从而推进问题解决素养的培育过程。深度学习注重高阶思维(深层次的批判性与创造性思维)和问题解决能力的发展。数学思维相对于其他的学科思维,具有高度的抽象性、严谨性以及灵活性。它不是孤立地、片面地看问题,而是超越点状、线状、面状的动态思维与立体思维。它不是感性的、碎片化的思维形式,而是透过具象把握本质的理性思维。合作学习关注个体差异和同伴学习,有利于问题解决过程中的数学交流。它主要体现在问题解决过程中的表达能力、交往能力以及自我反思能力。发现学习则注重认知结构的形成,关注学习者的知识结构和内在动机。自主学习强调学习者的主动性、自律性及有效性。探究学习

强调主动建构知识体系,且有利于发展个体实践能力。研究性学习强调个体主动应用知识、解决问题,是一种社会实践性学习范式。个性化学习强调学习者的主体性,依据个体独特性,培养其创造性,在问题解决过程中具有重要的促进作用。通过对学习范式的综合运用,发挥问题解决活动中学习张力的作用,提升问题解决活动的进度与效果。

4 结语

在数学内部,由德国数学家希尔伯特所提出的23个数学问题,影响了数学界多达一个世纪之久。此外,诸如四色问题、一笔画问题以及各类数学猜想问题,在数学界都产生了巨大影响。在现实生活中,数学问题是启发人类思考,推进人类文明进程的重要力量。问题解决素养在新课程标准和数学素养结构中具有重要地位与作用。徐斌艳认为,近20年来世界各国数学课程发展聚焦于培育问题解决能力^[17]。如果说数学知识是贯穿整个新数学课程的一条明线,那么问题解决活动则是一条暗线。

问题解决素养是数学意义与现实意义的双重建构,是数学能力与数学情感的聚合体。情感与智力并非两条平行跑道。德国的柳纳较早提出“情绪智力”,加德纳的多元智能也关注了情绪智力,其中自知智力涉及了自我内心与情感,理解自身并以此指导自己的行为能力^[18]。关于问题解决的现代研究,一些学者比较关注问题空间的探讨。根据解题者的内部心理表征,提出了“问题空间(Problem Space)”的概念^[19],还有学者认为问题空间是问题解决过程的一个基本范畴^[20]。事实上,许多数学知识都是通过问题解决的方式,在数学内部世界和外部世界是互动过程中再造出来的。

问题解决素养引导着个体对认知冲突中存在的数学问题进行审视、互动以及反思。同时,问题解决素养的理论意涵也是随着时代的发展而发生着变化。人们生活在充满问题的世界里,数学问题是发展变化与相对静止的统一,它既是变化的,又是时段性的永恒。今天,某个数学问题成了被解决了的答案;而明天,这个答案又衍生出了新的问题。问题解决的策略方法也不是一成不变的,在这里,或许是一副灵丹妙药,而在另外一个地方可能是寸步难行。在问题解决过程中,个体的素养形成机制往往受到智力因素(问题的观察能力和问题思考能力等)和非智力

因素(数学情感及数学观)的交互影响。所以,问题解决素养唯有通过个体与环境之间的行动以及互动,体验问题解决的真实过程,培育问题解决的兴趣情感,创建问题解决的信念系统,并将问题解决素养内化为一种数学智慧,或许才能得到持久性的发展。

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S]. 北京:人民教育出版社,2020:1-12.
- [2] 斯海霞. 基于结构不良问题解决的数学学习环境设计[J]. 外国中小学教育,2012(10):46-53.
- [3] 马淑杰,张景斌,陈福印. 数学结构不良问题的育人价值:以高中结构不良数学问题专题复习课为例[J]. 数学通报,2020,59(10):40-45+52.
- [4] 波利亚. 怎样解题:数学思维的新方法[M]. 涂泓,冯承天,译. 上海:上海科技教育出版社,2011:27-30.
- [5] OECD. PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science Reading, Mathematic and Financial Literacy [EB/OL]. PISA, OECD Publishing, Paris. <http://www.oecd-ilibrary.org/docserver/download/9816021e.pdf?expires=1496976180&id=id&accname=guest&checksum=6F3AEF0FB3315D4D5DCDB6E1AD8708E4>,2016-04-19/2017-01-09.
- [6] 王鼎,李宝敏. TIMSS 和 PISA 数学测评分析框架比较分析[J]. 全球教育展望,2017,46(6):20-34.
- [7] IEA. TIMSS 2015 Mathematics Framework [EB/OL]. <http://timss2015.org/download-center>.
- [8] RANDY E. B. Educational Assessment: What to Watch in a Rapidly Changing World [J]. Educational Measurement: Issues and Practice,2018,37(4):7-15.
- [9] 姬梁飞. 解构与重构数学问题的五分法[J]. 衡阳师范学院学报,2020,41(3):29-32.
- [10] 皮连生. 智育心理学[M]. 北京:人民教育出版社,1996:204.
- [11] 曹一鸣. 数学教学论[M]. 北京:高等教育出版社,2008:244-245.
- [12] 刘咏梅. 数学教学论[M]. 北京:高等教育出版社,2008:230.
- [13] 姬梁飞. 深度学习:指向数学素养生成空间的向度寻绎[J]. 教育导刊,2020(12):19-24.
- [14] 米山国藏. 数学的精神、思想和方法[M]. 毛正中,吴素华,译. 上海:华东师范大学出版社,2019:3-13.
- [15] 皮连生. 学与教的心理学[M]. 上海:华东师范大学出版社,1997:295.
- [16] 李晓文. 学生自我发展之心理学探究[M]. 北京:教育科学出版社,2001:6-7.
- [17] 徐斌艳. 中学数学课程发展研究[M]. 上海:上海教育出版社,2018:251.
- [18] 刘希平. 心理学关键词[M]. 北京:北京师范大学出版社,2007:67.
- [19] 郑毓信. 新数学教育哲学[M]. 上海:华东师范大学出版社,2015:253.
- [20] 王甦,汪安圣. 认知心理学[M]. 北京:北京大学出版社,1992:281.

Implication and Horizon of Problem – solving Under the Guidance of Mathematical Competencies

JI Liangfei

(Institute of Educational Science, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: Problem – solving is a dual construction process based on practical meaning and mathematical meaning. For a long time people have been immersed in the experience and methods of solving mathematical problems, and neglected the systematization of mathematical problems. Problem – solving should be oriented by mathematical competencies system, which not only pays attention to the analysis and solution of mathematical problems, but also relates to the discovery and proposal of mathematical problems, and pays more attention to the individual personality qualities formed in the process of problem solving. This paper constructs the theoretical implication and growth mechanism of problem – solving competency from the perspective of psychological cognitive structure and mathematical competencies system by using thematic analysis. Exploring the theoretical implication of problem – solving competency is helpful to subliminate the connotation implication of problem – solving competency and broaden the cultivation horizon of problem – solving competency.

Key words: mathematical competencies; problem – solving; implication; horizon

(编辑:李树伟)