

从“算法”到“算理”的升华

——以苏教版小学数学五年级上册“小数加法和减法”为例

文 | 吴厚天

【摘要】理解算理是算法探究的前提，是提升运算能力的重要保证，教师往往忽视了三者之间的紧密联系。小数加减法是小学数学教学的重点与难点之一，传统教学偏重技能训练，过于关注“算法”，学生的错误不易纠正，分析各种错误，其根本原因在于忽视了对“算理”的教学。本文认为可以从“实物情境”“几何情境”“数理情境”三个层面，循序渐进地提升学生对小数加减法的“算理”的理解；可以从“集中思维”“逆向思维”“发散思维”几个维度，逐步强化学生的“算理”思维。

【关键词】运算能力 算法与算理 强化算理思维 小数加减法

计算教学应注重发展学生的运算能力。培养运算能力有助于学生理解算理，从而探究出合适的算法。理解算理是算法探究的前提，是提升运算能力的重要保证。教师的视角往往过于片面，多独立看待算理、算法和运算能力，却忽视了这三者之间的联系。

“小数加法和减法”是小学数学高年级的教学内容。由于学生此前已经掌握了整数的加减法，因此很容易迁移到一位小数的加减法计算。整数加减法的竖式只要把末位对齐，就能做到相同数位对齐；而一位小数加减法的竖式，末位对齐也能做到小数点对齐。但是，在进入多位小数加减法教学后，学生却经常会出现错误，开展多轮练习也难以解决这个问题。

一、算法练习掩盖了“算理”教学的缺失

教师对学生进

小数加减法新授课的教学后，学生貌似“理解”了算法，但是简单测试就会发现问题。测试内容分为两个部分：第一部分是两道小数加减法的笔算“ $6.98 + 9.3$ ”“ $13.8 -$

8.3 ”，正确率达87.5%；第二部分是对第一部分计算正确的学生进行口头访谈——“笔算小数加减法时，为什么要小数点对齐？”学生的回答差异很大，正确率为22.9%。也就是说，大部分学生已经会小数加减法的笔算“算法”了，但是他们中的很多人并不明白其中的“算理”。由于对算理的不理解，学生貌似明白的算法会错误百出，主要集中在“小数点没有对齐”“计算出错”“抄错数字”和“计算结果没有及时化简”这几个方面。当然，通过一定量的巩固训练可以适当纠正。巩固训练示例如下：

用竖式计算。

$$8 + 3.02 =$$

☐①小数点未对齐

☐②计算错误

☐③抄错数字

☐④计算结果未化简

$$5.46 - 0.6 =$$

☐①小数点未对齐

☐②计算错误

☐③抄错数字

☐④计算结果未化简

$$17.5 - 4.5 =$$

☐①小数点未对齐

☐②计算错误

☐③抄错数字

☐④计算结果未化简

巩固训练后，通过集体反馈的形式让学生发现错误，自主勾选错误原因，可以帮助学生与教师及时进行反思，以达到查漏补缺的目的。奇怪的是过了一段

时间,学生的错误依然会发生。算理和算法是密不可分的整体,算理是支撑算法的依据,两者是显性层面和理性层面的有效结合。很显然,此时学生的学习还停留在“算法”层面,他们对其中内在的“算理”仍然没有深度的理解。

二、循序渐进,转向“算理”教学

基于这样的学情,教师可改变原本的以算法训练为主的教学思路,转向剖析算理的深度思维教学,让学生充分体验由直观算理到抽象算法的过渡和演变。怎样才能让学生关注算理、自主探究以厘清算理呢?我们在学生尝试独立笔算并呈现算法后安排了小组合作,提供可选择性素材(人民币学具、百格图、计数器图),通过“集体评议”来论证算法的合理性,让学生在相互建构中共同厘清算理、明晰算法。

1. 依据日常生活设计“实物化”的算理分析场景

以现实情境为依据,选择学生熟悉的生活情境,一方面能自然引入需要探究的内容,另一方面能有效激活学生已有的知识经验,驱动学生主动思考,以实现学习的迁移。同时,把计算教学与现实生活相结合,有利于学生感受运算的价值,引发探究的兴趣。例如,某小组选择的是借助货币单位换算进行论证,集体评议中汇报为:讲义夹4.75元是4元7角5分,笔记本3.4元是3元4角。元加元,4元加3元是7元;角加角,7角加4角是1元1角;分加分,5分加0分等于5分。7元、1元1角和5分合起来就是8元1角5分,也就是8.15,所以 $4.75+3.4=8.15$ 。

2. 借助几何图形(百格图),构建“半实物化”的算理学习情境

有形的素材可以为学生提供一个表述和理解算理的支撑点,在思维的转变处使算理逐步延伸、有效迁移,最终使算理变得直观可视,使算法的抽象也能顺理成章。例如,某小组选择的是借助百格图进行论证,集体评议中汇报为:4.75在百格图中涂色为4个块7个

条5个格,3.4在百格图中涂色为3个块4个条。块加块,4个块加3个块共涂色7个块;条加条,7个条加4个条共涂色11个条,也就是1个块1个条;格加格,5个格加0个格共涂色5个格。7个块、1个块1个条和5个格合起来就是8个块1个条5个格,也就是8.15,所以 $4.75+3.4=8.15$ 。

3. 借助计数器图,构建“去实物化”的抽象算理学习情境

在本节课中运用计数器图可以让学生明白小数加减法与整数加减法的相同处——都是把相同计数单位的数相加、相减,并帮助学生理解加法中的满十进一、减法中的退一当十的算理。例如,某小组选择的是借助计数器图画数珠进行论证,集体评议中汇报为:先在计数器图上画白色数珠表示4.75,个位上4颗,十分位上7颗,百分位上5颗;再在计数器图上画黑色数珠表示3.4,个位上3颗,十分位上4颗。合起来百分位上共5颗数珠,十分位上共11颗数珠,满十向个位进一,十分位上保留1颗数珠,个位上是 $3+4+1=8$,所以 $4.75+3.4=8.15$ 。

以上是学生小组合作后汇报的论证方法,在此基础上,教师引导比较:这三种方法有什么相同点?进一步明确它们都是把相同计数单位的数加在一起,进而明晰小数点对齐实质上就是为了保证把相同计数单位上的数加在一起。数学运算中没有脱离算理的算法,算理需要通过算法外显出来。教师在教学中要重视学生对算理的深度理解,引导学生经历这样的论证过程,从而促使学生在理性分析中更好地沟通算理和算法之间的联系,提升运算能力,同时也促使学生的探究意识和数学思维得到相应的发展。

三、持续内化,形成“算理”思维

通过循序渐进的算理教学,教师会发现仍有为数不少的学生容易出错。具体表现在练习时,他们不想按部就班地去列竖式计算小数加减法。他们对算理的

理解,还没有在对复杂问题的解决过程中“固化”下来,对于算理、算法的掌握只是浮于表面,问题情境一旦发生变化,他们就很容易机械地去计算,然后出错。教师可以设计一些有效的、有挑战性的学习任务,让学生在观察、提问、比较、辨析中全身心投入,从而引发积极思考,建立牢固的“算理”思维。

1. 设计集中性思维问题

集中性思维是创造思维的必要前提,是发散性思维的基础,主要强调思维活动中的记忆的作用,设计此类练习有助于推动学生自主建构出“算理”规律。例如:计算下面各题。 $3.33 + 4 = ()$, $3.33 + 0.4 = ()$, $3.33 + 0.04 = ()$ 。在学生计算出正确答案后,教师可提问:“这几道算式出现的数字差不多,为什么算出的结果不同?”再以针对性问题引领学生自主梳理算理的规律——4表示4个1,加在个位;0.4表示4个0.1(十分之一),加在十分位;0.04表示4个0.01(百分之一),加在百分位,促使学生进一步提升对于算理、算法内涵的掌握。教师要善于引导学生,使其在运算过程中边做边思,理解算理本质,促进运算能力的提高。

2. 设计逆向思维问题

逆向思维是从相反方面(或是从结果导向)出发进行逆转推理的一种思维方式,能够提升学生的思维活跃度。例如:果果在计算14.56减一个一位小数时,由于错误地把数的末位对齐,算出结果是13.39。这个一位小数是(),正确的结果是()。学生在解决这样的问题过程中,需要在独立思考的基础上展开小组讨论,提出各自的观点:“把数的末位对齐,就相当于把一位小数变成了两位小数”“错误方法导致十分位上的数与百分位相减、个位上的数与十分位相减”“先根据被减数和差算出错误的减数,再推理出原来的减数”等。在交流中形成思维的碰撞,在互动中实现与学习内容新的相遇与对话,从而促使学生雕琢自己的思想,形成对算理、算法新的认知,最终完

全掌握算法。

3. 设计发散思维问题

有效地设计发散思维问题,能避免学生陷入单一、定向的思维模式,提升学生思维的变通性、创造性和联想性,进而提升学习效果。例如:

$$\begin{array}{rcl} A = 0.00\cdots0125 & B = 0.00\cdots08, \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{1995\text{个}0} & \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{1999\text{个}0} \end{array}$$

那A+B的结果是多少?

这类问题的解决,需要学生对算理有比较深刻的理解。学生需要思考“1995个0和1999个0这两个条件有何作用”“B的8到底与A的哪一个数字对齐”“如何才能保证相同计算单位上的数相加”等,而对具体问题的透彻理解,又为进一步牢固算理思维提供了丰富的感性经验,并且自然迁移到如何保证两个小数数位对齐的算法固化中,从而引领运算能力的有效提升。

总之,数的运算是数学课程的重要组成部分,处理好算理与算法的关系,引领学生对算理和算法进行深入理解,是发展运算能力的关键所在。算法的形成需要经历由具体到抽象的过程,过于注重算法的练习,往往会掩盖算理教学的缺失,继而出现所谓的学生“粗心”而导致的计算频频出错,殊不知出错是因为对算理、算法的掌握浮于表面。只有循序渐进推进算理教学、扎实有效强化算理思维,才能真正落实运算能力的有效提升。与此同时,也能培养学生在学习过程中的独立思考、主动探索与合作交流意识,获得基本的数学活动经验,提高学生解决现实问题的能力。

本文系江苏省扬州市教育科学“十三五”规划课题“差异教学理念下‘数学运算’核心素养培养的实践研究”(课题编号:2020/P/067)的阶段性研究成果之一。

(作者单位:南京师范大学附属邗江实验小学)

责任编辑:赵继莹