2010 年全国高中数学联合竞赛一试
试题参考答案及评分标准（A 卷）

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设 **8** 分和 **0** 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 **9** 小题 **4** 分为一个档次，第 **10**、**11** 小题 **5** 分为一个档次，不要增加其他中间档次。

一、填空题（本题满分 64 分，每小题 8 分）

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x-5}-\sqrt{24-3x}$ 的值域是 $\underline{[-3,\sqrt{3}]}$.

解：易知 $f(x)$ 的定义域是 $\left[5,8\right]$，且 $f(x)$ 在 $\left[5,8\right]$ 上是增函数，从而可知 $f(x)$ 的值域为 $[-3,\sqrt{3}]$.

2. 已知函数 $y=(a\cos^2 x-3)\sin x$ 的最小值为 -3，则实数 a 的取值范围是 $\underline{-\frac{3}{2}\le a\le 12}$.

解：令 $\sin x=t$，则原函数化为 $g(t)=(-at^2+a-3)t$，即

$$g(t)=-at^3+(a-3)t.$$

由 $\quad -at^3+(a-3)t\ge -3$，

$$-at(t^2-1)-3(t-1)\ge 0,$$

$(t-1)(-at(t+1)-3)\ge 0$ 及 $t-1\le 0$ 知

$-at(t+1)-3\le 0$ 即 $a(t^2+t)\ge -3$. （1）

当 $t=0,-1$ 时（1）总成立；

对 $0<t\le 1, 0<t^2+t\le 2$；

对 $-1<t<0, -\frac{1}{4}\le t^2+t<0$.

从而可知 $\quad -\frac{3}{2}\le a\le 12$.

3. 双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右半支与直线 $x=100$ 围成的区域内部（不含边界）整点（纵横坐标均为整数的点）的个数是 $\underline{\ 1790\ }$.

解：由对称性知，只要先考虑 x 轴上方的情况，设 $y=k(k=1,2,\cdots,9)$ 与双曲线右半支于 A_k，交直

线 $x=100$ 于 B_k，则线段 A_kB_k 内部的整点的个数为 $99-k$，从而在 x 轴上方区域内部整点的个数为

$$\sum_{k=1}^{9}(99-k)=99\times 9-45=846.$$

又 x 轴上有 98 个整点，所以所求整点的个数为

$2\times 846+98=1790$.

4. 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为 0 的等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，其中 $a_1=3,b_1=1,a_2=b_2,3a_5=b_3$，且存在常数 α,β 使得对每一个正整数 n 都有 $a_n=\log_\alpha b_n+\beta$，则 $\alpha+\beta=$ $\underline{\sqrt[3]{3}+3}$.

解：设 $\{a_n\}$ 的公差为 $d,\{b_n\}$ 的公比为 q，则

$3+d=q,$　　（1）

$3(3+4d)=q^2$，　　（2）

（1）代入（2）得

$9+12d=d^2+6d+9$，求得 $d=6,q=9$.

从而有　$3+6(n-1)=\log_\alpha 9^{n-1}+\beta$　对一切正整数 n 都成立，

即　$6n-3=(n-1)\log_\alpha 9+\beta$　对一切正整数 n 都成立.

从而　$\log_\alpha 9=6,-3=-\log_\alpha 9+\beta$，

求得　$\alpha=\sqrt[3]{3},\beta=3$，　$\alpha+\beta=\sqrt[3]{3}+3$.

5. 函数 $f(x)=a^{2x}+3a^x-2(a>0,a\neq 1)$ 在区间 $x\in[-1,1]$ 上的最大值为 8，则它在这个区间上的最小值是 $\underline{-\frac{1}{4}}$.

解：令 $a^x=y,$ 则原函数化为 $g(y)=y^2+3y-2$，$g(y)$ 在 $(-\frac{3}{2},+\infty)$ 上是递增的.

当 $0<a<1$ 时，$y\in[a,a^{-1}]$，

$$g(y)_{\max}=a^{-2}+3a^{-1}-2=8\Rightarrow a^{-1}=2\Rightarrow a=\frac{1}{2},$$

所以 $g(y)_{\min}=(\frac{1}{2})^2+3\times\frac{1}{2}-2=-\frac{1}{4}$；

当　$a>1$ 时，$y\in[a^{-1},a]$，

$g(y)_{\max}=a^2+3a-2=8\Rightarrow a=2$，

所以 $g(y)_{\min}=2^{-2}+3\times 2^{-1}-2=-\frac{1}{4}$.

综上 $f(x)$ 在 $x\in[-1,1]$ 上的最小值为 $-\frac{1}{4}$.

6. 两人轮流投掷骰子，每人每次投掷两颗，第一个使两颗骰子点数和大于 6 者为胜，否则轮由另一人投掷. 先投掷人的获胜概率是 $\underline{\frac{84}{119}}$.

解：同时投掷两颗骰子点数和大于 6 的概率为 $\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$，从而先投掷人的获胜概率为

$$\frac{7}{12}+(\frac{5}{12})^2\times\frac{7}{12}+(\frac{5}{12})^4\times\frac{7}{12}+\cdots$$
$$=\frac{7}{12}\times\frac{1}{1-\frac{25}{144}}=\frac{84}{119}.$$

7. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的 9 条棱长都相等，P 是 CC_1 的中点，二面角 $B-A_1P-B_1=\alpha$，则 $\sin\alpha=\underline{\frac{\sqrt{10}}{4}}$.

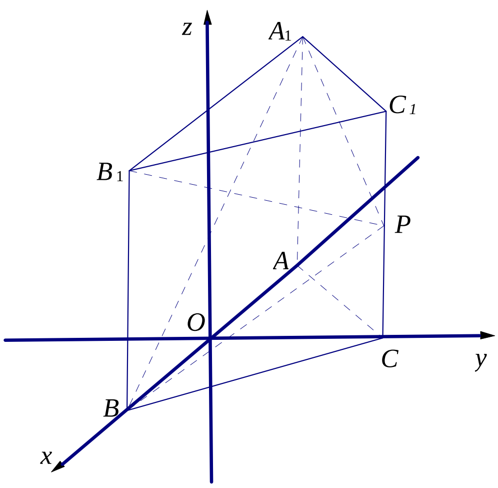
解一：如图，以 AB 所在直线为 x 轴，线段 AB 中点 O 为原点，OC 所在直线为 y 轴，建立空间直角坐标系. 设正三棱柱的棱长为 2，则 $B(1,0,0),B_1(1,0,2),A_1(-1,0,2),P(0,\sqrt{3},1)$，从而，

$$\overrightarrow{BA_1}=(-2,0,2),\overrightarrow{BP}=(-1,\sqrt{3},1),\overrightarrow{B_1A_1}=(-2,0,0),\overrightarrow{B_1P}=(-1,\sqrt{3},-1).$$

设分别与平面 BA_1P 、平面 B_1A_1P 垂直的向量是 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 、$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BA_1}=-2x_1+2z_1=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BP}=-x_1+\sqrt{3}y_1+z_1=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1A_1}=-2x_2=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1P}=-x_2+\sqrt{3}y_2-z_2=0,\end{cases}$$

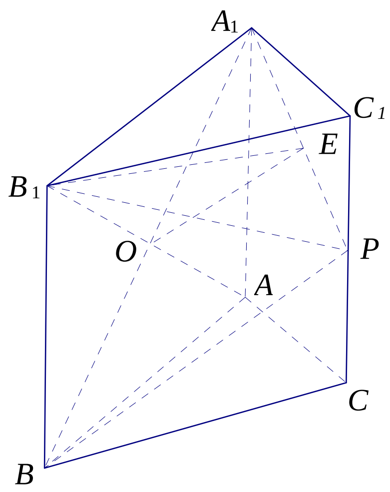


由此可设 $\vec{m}=(1,0,1),\vec{n}=(0,1,\sqrt{3})$，

所以 $|\vec{m}\cdot\vec{n}|=|\vec{m}|\cdot|\vec{n}||\cos\alpha|$，

即 $\sqrt{3}=\sqrt{2}\cdot 2|\cos\alpha|\Rightarrow|\cos\alpha|=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

所以 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.



解二：如图，$PC=PC_1, PA_1=PB$.

设 A_1B 与 AB_1 交于点 O, 则

$OA_1=OB, OA=OB_1, A_1B\perp AB_1$.

因为 $PA=PB_1$,所以 $PO\perp AB_1$,

从而 $AB_1\perp$平面 PA_1B .

过 O 在平面 PA_1B 上作 $OE\perp A_1P$，垂足为 E.

连结 B_1E，则 $\angle B_1EO$ 为二面角 $B-A_1P-B_1$ 的平面角.

设 $AA_1=2$，则易求得

$PB=PA_1=\sqrt{5}, A_1O=B_1O=\sqrt{2}, PO=\sqrt{3}$.

在直角 ΔPA_1O 中， $A_1O\cdot PO=A_1P\cdot OE$，

即 $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{5}\cdot OE, \therefore OE=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

又 $B_1O=\sqrt{2}, \therefore B_1E=\sqrt{B_1O^2+OE^2}=\sqrt{2+\dfrac{6}{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

$$\sin\alpha=\sin\angle B_1EO=\frac{B_1O}{B_1E}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

8. 方程 $x+y+z=2010$ 满足 $x\le y\le z$ 的正整数解（x, y, z）的个数是_336675_.

解：首先易知 $x+y+z=2010$ 的正整数解的个数为 $C_{2009}^2=2009\times 1004$.

把 $x+y+z=2010$ 满足 $x\le y\le z$ 的正整数解分为三类：

（1） x,y,z 均相等的正整数解的个数显然为 1；
（2） x,y,z 中有且仅有 2 个相等的正整数解的个数，易知为 1003；

(3) 设 x,y,z 两两均不相等的正整数解为 k.

易知 $1+3\times 1003+6k=2009\times 1004$，

$$6k = 2009\times1004 - 3\times1003 - 1$$
$$= 2006\times1005 - 2009 + 3\times2 - 1 = 2006\times1005 - 2004,$$
$$k = 1003\times335 - 334 = 335671.$$

从而满足 $x \le y \le z$ 的正整数解的个数为

$$1 + 1003 + 335671 = 336675.$$

二、解答题（本题满分 56 分）

9. （本小题满分 16 分）已知函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d(a \ne 0)$，当 $0 \le x \le 1$ 时，$|f'(x)| \le 1$，试求 a 的最大值.

解一：$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,$

由 $\begin{cases} f'(0) = c, \\ f'(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}a + b + c, \\ f'(1) = 3a + 2b + c \end{cases}$ 得 （4 分）

$$3a = 2f'(0) + 2f'(1) - 4f'(\frac{1}{2}).$$ （8 分）

所以 $3|a| = \left|2f'(0) + 2f'(1) - 4f'(\frac{1}{2})\right|$

$$\le 2|f'(0)| + 2|f'(1)| + 4\left|f'(\frac{1}{2})\right|$$

$$\le 8,$$

$$a \le \frac{8}{3}.$$ （12 分）

又易知当 $f(x) = \frac{8}{3}x^3 - 4x^2 + x + m$（$m$ 为常数）满足题设条件，所以 a 最大值为 $\frac{8}{3}$.（16 分）

解二：$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

设 $g(x) = f'(x) + 1$，则当 $0 \le x \le 1$ 时，$0 \le g(x) \le 2$.

设 $z = 2x - 1$，则 $x = \frac{z+1}{2}, -1 \le z \le 1$.

$$h(z) = g(\frac{z+1}{2}) = \frac{3a}{4}z^2 + \frac{3a+2b}{2}z + \frac{3a}{4} + b + c + 1.$$ （4 分）

容易知道当 $-1 \le z \le 1$ 时，$0 \le h(z) \le 2, 0 \le h(-z) \le 2$. （8 分）

从而当 $-1 \le z \le 1$ 时，$0 \le \frac{h(z) + h(-z)}{2} \le 2$，

即 $0 \le \frac{3a}{4}z^2 + \frac{3a}{4} + b + c + 1 \le 2$，

从而 $\dfrac{3a}{4}+b+c+1\ge 0$，$\dfrac{3a}{4}z^2\le 2$，

由 $0\le z^2\le 1$ 知 $a\le\dfrac{8}{3}$. （12 分）

又易知当 $f(x)=\dfrac{8}{3}x^3-4x^2+x+m$（$m$ 为常数）满足题设条件，所以 a 最大值为 $\dfrac{8}{3}$.（16 分）

10.（本小题满分 20 分）已知抛物线 $y^2=6x$ 上的两个动点 $A(x_1,y_1)$和$B(x_2,y_2)$，其中 $x_1\ne x_2$ 且 $x_1+x_2=4$. 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点 C，求 ΔABC 面积的最大值.

解一：设线段 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=2, y_0=\frac{y_1+y_2}{2},$$

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{6}-\frac{y_1^2}{6}}=\frac{6}{y_2+y_1}=\frac{3}{y_0}.$$

线段 AB 的垂直平分线的方程是

$$y-y_0=-\frac{y_0}{3}(x-2). \qquad (1)$$

易知 $x=5, y=0$ 是（1）的一个解，所以线段 AB 的垂直平分线与 x 轴的交点 C 为定点，且点 C 坐标为 $(5,0)$. （5 分）

由（1）知直线 AB 的方程为

$$y-y_0=\frac{3}{y_0}(x-2)，即\ x=\frac{y_0}{3}(y-y_0)+2. \qquad (2)$$

（2）代入 $y^2=6x$ 得

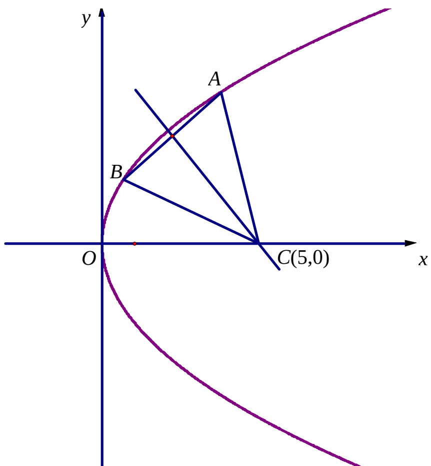
$$y^2=2y_0(y-y_0)+12，即\ y^2-2y_0y+2y_0^2-12=0. \qquad (3)$$

依题意，y_1,y_2 是方程（3）的两个实根，且 $y_1\ne y_2$，所以

$$\Delta=4y_0^2-4(2y_0^2-12)=-4y_0^2+48>0,$$

$$-2\sqrt{3}<y_0<2\sqrt{3}.$$

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$



$$=\sqrt{(1+(\frac{y_0}{3})^2)(y_1-y_2)^2}$$

$$=\sqrt{(1+\frac{y_0^2}{9})[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$$

$$=\sqrt{(1+\frac{y_0^2}{9})(4y_0^2-4(2y_0^2-12))}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{(9+y_0^2)(12-y_0^2)}\ .$$

定点 $C(5,0)$ 到线段 AB 的距离

$$h=|CM|=\sqrt{(5-2)^2+(0-y_0)^2}=\sqrt{9+y_0^2}\ .$$ （10 分）

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot h=\frac{1}{3}\sqrt{(9+y_0^2)(12-y_0^2)}\cdot\sqrt{9+y_0^2}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}(9+y_0^2)(24-2y_0^2)(9+y_0^2)}$$

$$\le\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}(\frac{9+y_0^2+24-2y_0^2+9+y_0^2}{3})^3}$$

$$=\frac{14}{3}\sqrt{7}\ .$$ （15 分）

当且仅当 $9+y_0^2=24-2y_0^2$，即 $y_0=\pm\sqrt{5}$，$A(\frac{6+\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}+\sqrt{7}),B(\frac{6-\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}-\sqrt{7})$ 或

$A(\frac{6+\sqrt{35}}{3},-(\sqrt{5}+\sqrt{7})),B(\frac{6-\sqrt{35}}{3},-\sqrt{5}+\sqrt{7})$ 时等号成立.

所以 ΔABC 面积的最大值为 $\frac{14}{3}\sqrt{7}$. （20 分）

解二：同解一，线段 AB 的垂直平分线与 x 轴的交点 C 为定点，且点 C 坐标为 $(5,0)$.

（5 分）

设 $x_1=t_1^2,x_2=t_2^2,t_1>t_2,t_1^2+t_2^2=4$，则

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}5 & 0 & 1\\ t_1^2 & \sqrt{6}t_1 & 1\\ t_2^2 & \sqrt{6}t_2 & 1\end{vmatrix}$$ 的绝对值, （10 分）

$$S_{\Delta ABC}^2=(\frac{1}{2}(5\sqrt{6}t_1+\sqrt{6}t_1^2t_2-\sqrt{6}t_1t_2^2-5\sqrt{6}t_2))^2$$

$$=\frac{3}{2}(t_1-t_2)^2(t_1t_2+5)^2$$
$$=\frac{3}{2}(4-2t_1t_2)(t_1t_2+5)(t_1t_2+5)$$
$$\le\frac{3}{2}(\frac{14}{3})^3,$$
$S_{\Delta ABC}\le\frac{14}{3}\sqrt{7}$，（15 分）

当且仅当 $(t_1-t_2)^2=t_1t_2+5$ 且 $t_1^2+t_2^2=4$，

即 $t_1=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$，$t_2=-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$，$A(\frac{6+\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}+\sqrt{7}),B(\frac{6-\sqrt{35}}{3},\sqrt{5}-\sqrt{7})$ 或

$A(\frac{6+\sqrt{35}}{3},-(\sqrt{5}+\sqrt{7})),B(\frac{6-\sqrt{35}}{3},-\sqrt{5}+\sqrt{7})$ 时等号成立.

所以 ΔABC 面积的最大值是 $\frac{14}{3}\sqrt{7}$.（20 分）

11.（本小题满分 20 分）证明：方程 $2x^3+5x-2=0$ 恰有一个实数根 r，且存在唯一的严格递增正整数数列 $\{a_n\}$，使得 $\frac{2}{5}=r^{a_1}+r^{a_2}+r^{a_3}+\cdots$.

证明：令 $f(x)=2x^3+5x-2$，则 $f'(x)=6x^2+5>0$，所以 $f(x)$ 是严格递增的. 又 $f(0)=-2<0, f(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}>0$，故 $f(x)$ 有唯一实数根 $r\in(0,\frac{1}{2})$.（5 分）

所以 $2r^3+5r-2=0$，

$$\frac{2}{5}=\frac{r}{1-r^3}$$
$$=r+r^4+r^7+r^{10}+\cdots.$$

故数列 $a_n=3n-2(n=1,2,\cdots)$ 是满足题设要求的数列.（10 分）

若存在两个不同的正整数数列 $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$ 和 $b_1<b_2<\cdots<b_n<\cdots$ 满足

$$r^{a_1}+r^{a_2}+r^{a_3}+\cdots=r^{b_1}+r^{b_2}+r^{b_3}+\cdots=\frac{2}{5},$$

去掉上面等式两边相同的项，有

$$r^{s_1}+r^{s_2}+r^{s_3}+\cdots=r^{t_1}+r^{t_2}+r^{t_3}+\cdots,$$

这里 $s_1<s_2<s_3<\cdots,t_1<t_2<t_3<\cdots$，所有的 s_i 与 t_j 都是不同的.（15 分）

不妨设 $s_1<t_1$，则

$$r^{s_1} < r^{s_1} + r^{s_2} + \cdots = r^{t_1} + r^{t_2} + \cdots,$$

$$1 < r^{t_1 - s_1} + r^{t_2 - s_1} + \cdots \le r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1-r} - 1 < \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1，矛盾.$$

故满足题设的数列是唯一的. （20 分）