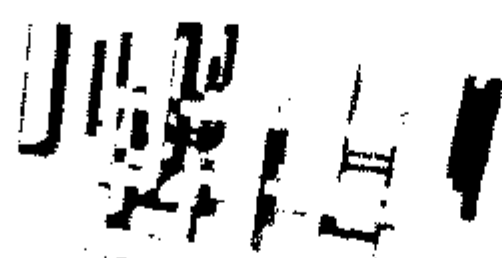
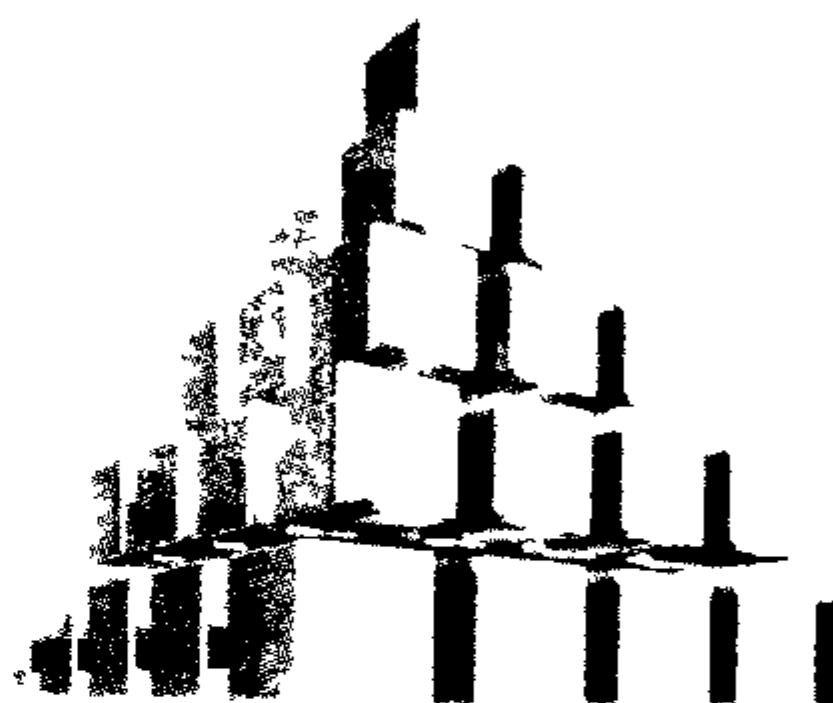




解题研究

单 埈 著

南京师范大学出版社



A1023835



图书在版编目(CIP)数据

解题研究 / 单增编著. —南京: 南京师范大学出版社,
2002.4

ISBN 7-81047-687-4 / O·16

I. 解... II. 单... III. 数学—解题—中学—教学研究
IV. G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 015009 号

书 名	解题研究
编 著	单 增
责任编辑	周海忠
出版发行	南京师范大学出版社
地 址	江苏省南京市宁海路 122 号(邮编:210097)
电 话	(025)3598077(传真) 3598412(发行部) 3598297(邮购部)
E-mail	nnuniprs@public1.ptt.js.cn
照 排	江苏兰斯印务发展有限公司
印 刷	如皋市印刷厂
开 本	850 × 1168 1/32
印 张	10
字 数	250 千
版 次	2002 年 6 月第 1 版 2002 年 6 月第 1 次印刷
印 数	1-6000 册
书 号	ISBN7-81047-687-4 / O·16
定 价	15.00 元

南京师大版图书若有印装问题请与销售商调换
版权所有 侵犯必究

目 录

第一章 与同学们谈解题	(1)
1. 解题的重要性	(3)
2. 解题必须实践	(3)
3. 信心与决心	(4)
4. 兴趣	(6)
5. 专心致志	(7)
6. 打好基础	(8)
7. 简单技巧	(13)
8. 应用题	(16)
9. 常规问题	(19)
10. 简单、自然	(22)
11. 一个实际例子	(27)
12. 字母的使用	(28)
13. 代数方法(一)	(31)
14. 代数方法(二)	(33)
15. 分析法	(36)
 第二章 喜爱数学的同学	 (39)
1. 做有质量的问题	(41)
2. 基本量	(43)
3. 从简单的做起	(46)
4. 寻找规律	(49)
5. 简单自然、直剖核心	(52)

6. 跟着感觉走	(55)
7. 思则有路	(58)
8. 要有好的想法(一)	(60)
9. 要有好的想法(二)	(62)
10. 从不同的角度看问题	(65)
11. 创造条件	(67)
12. 非智力因素	(69)

第三章 解题的基本知识

1. 问题是数学的心脏	(73)
2. 解题是数学的特点	(75)
3. 教会思考	(79)
4. 解题必须实践	(81)
5. 问题的种类	(84)
6. 解题的步骤	(86)
7. 弄清问题	(89)
8. 拟定计划	(94)
9. 实现计划	(98)
10. 总结(一)	(102)
11. 总结(二)	(106)
12. 12 条解题要诀	(108)

第四章 修改解答

1. 笨拙的解答	(113)
2. 不要滥用反证法	(116)
3. 直接去做	(117)
4. 尽信,则不如无	(119)
5. 对照比较(一)	(124)

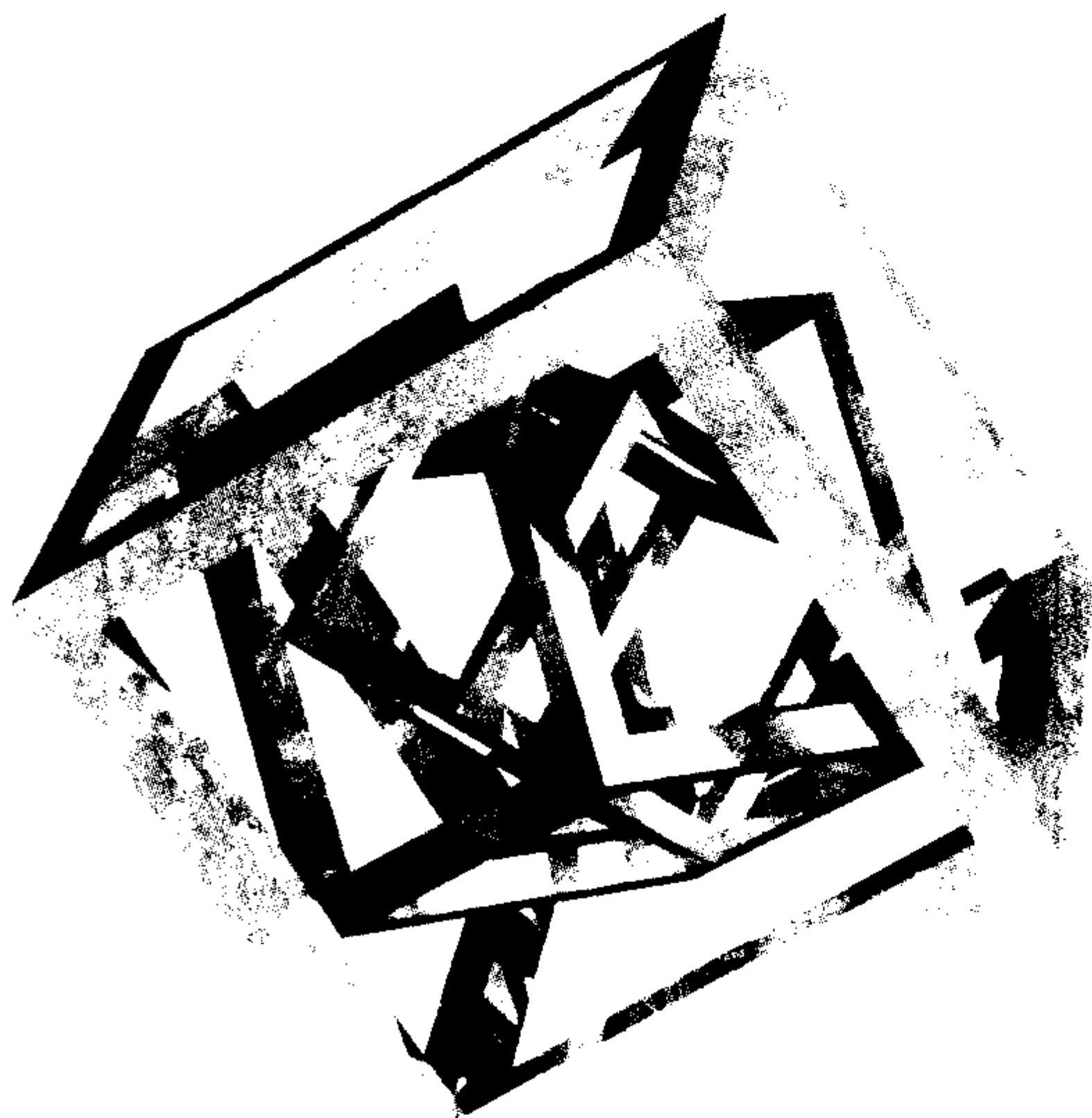
6. 对照比较(二)	(131)
7. 弄清实质(一)	(135)
8. 弄清实质(二)	(140)
9. 自己的毛病	(144)
第五章 10 道问题	(149)
1. 上下求索	(151)
2. 学思结合	(153)
3. 逐步逼近	(155)
4. 比赛日程	(157)
5. 双轨迹模式	(160)
6. 集成块与组合拳	(162)
7. 算两次	(164)
8. 平方数与平方式	(167)
9. 谋定而后动	(170)
10. 电阻问题	(174)
第六章 数学教师	(177)
1. 解题的重要性	(179)
2. 教师的素质	(182)
3. 教师的优势	(183)
4. 理解题意	(185)
5. 变更问题	(188)
6. 从何入手	(192)
7. 用不同的观点看问题	(197)
8. 拟定与实现计划	(202)
9. 技巧	(206)
10. 不必“为技巧而技巧”	(211)

11. 简单自然	(214)
12. 关于一题多解	(222)
13. 探索法	(232)
14. 加阶梯	(236)
15. 非数学因素	(240)
第七章 谈谈命题	(243)
1. 关于题库	(245)
2. 处处留心	(246)
3. 旧瓶新酒	(252)
4. 源头活水	(261)
5. 可上可下	(265)
6. 苦心孤诣	(269)
7. 小心出错	(274)
8. 问题的背景	(279)
9. 不适当的问题	(286)
10. 小题大做	(292)
11. 一道试题的编制	(295)
第八章 波利亚及其解题理论	(299)
1. 波利亚的生平	(301)
2. 波利亚的教育论著(一)	(303)
3. 波利亚的教育论著(二)	(306)
4. 波利亚的教育论著(三)	(309)
5. 波利亚的教育论著(四)	(310)

第 1 章

与同学们谈解题

这一部分，与广大同学谈如何解题，所谈的是解题的基本内容，所举的例题也都是比较容易的。



1. 解题的重要性

我曾经问一些初中同学：

“你们觉得数学的特点是什么？”

回答是：

“数学有很多习题。”

回答完全正确。

物理、化学、生物也有一些习题，但数量远远少于数学，“花样”更不及数学那样变化万千。对于物理、化学、生物来说，培养动手做实验的能力，比培养解题能力更为重要。

数学的习题，不仅用来巩固所学的知识，而且可以培养你的能力，发展你的智慧。只有通过解题，你才能更多、更好地掌握数学的内容、意义和方法。

学数学的目的，不是别的，就是为了学会解题。

数学书中有不少公式、法则、定义、定理，这些都不需要死记硬背，而是要通过解题逐步地理解、掌握。所以善于学习数学的同学，都把重要精力花在解题上。

“数学尖子”就是解题能力强的同学。

希望这本书能提高你的解题能力，帮助你成为“数学尖子”。

2. 解题必须实践

怎样提高解题能力？

必须多做题.除此以外,没有别的办法.

这就像学骑自行车,你必须去骑才能学会如何骑.

开始,你可能需要别人扶着车子,推你,也可能会摔上几跤,但只要坚持骑,终究会学会的,而且还可以骑得很好,潇洒自如.

我国著名数学家华罗庚先生就曾在一次报告中说过,学习数学要做到熟练化.熟能生巧,进而出神入化.而要这样,就必须多练.

首先要做一定数量的基本题,打好基本功.在此基础上,再做一些较有技巧的问题.

没有一定的数量就不可能熟练.但更重要的是通过这一定数量的题,掌握基本的运算技能、基本的解题方法,做到纯熟自如.

要不断地提高自己的解题能力,决不要老是简单地重复,一遍又一遍地做那些已经掌握了习题.更重要的是习题的质量,要做一些有变化的、有技巧的题,掌握更多的新方法、新技巧.

所谓“数学尖子”,无非是多做了一些题,掌握了一些解题方法.只要努力去做题,你也能成为班上的“数学尖子”.

3. 信心与决心

应当对自己充满信心.

面对一道数学题,应当满怀信心:

“我能够解出来.”

“李雪花能解出来,我为什么解不出来?”

“江小毛能解出来,我更应该能解出来.”

你没有哪一点比别人差,甚至还有许多别人没有的优点.所以,不必气馁,至少应当努力“尝试”一下.

英国女诗人罗赛蒂有一首小诗“我想试试”(I'll Try)写得

很好：

那个说“我想试试”的小孩，
他将登上山巅，
那个说“我不成”的小孩，
在山下停步不前。
“我想试试”每天办成很多事，
“我不成”就真一事无成。
因此你务必说“我想试试”，
将“我不成”弃于埃尘。

当然，一次尝试未必就能完全成功，往往要一再尝试，反复多次，直至成功。应当知道：“自古成功在尝试”，“失败是成功之母”。无论谁都不免会遇到挫折，这是十分正常的，千万不要灰心丧气，曙光就在前头，或许胜利已经向你招手，只需要再努力一下。

决心也很重要。

不痛下决心，事情是办不好的。

如果你的家离学校不远，或者有班车直达，可能你不一定去学骑自行车，但如果你升入一所新学校，非骑自行车不可，那么你就会下决心去学骑车，而且一定能够学会。

很多事情都是“逼上梁山”的，如果明天就要交作业，周围又没有人能帮你做，那么你只好自己去解题。逼一逼，困难的题也就解出来了。

班上的“数学尖子”，由于没有比他更强的同学，别人遇上难题可以问他，他自己遇到难题只能自己去想，日久天长，他解难题的能力就越来越强，其实也是“逼”出来的。

项羽与秦兵决战，破釜沉舟。韩信攻打赵国，背水结阵。兵法上称为“置之死地而后生”，即没有其他选择，只能努力向前。

应当自觉地自己“逼”自己，下定决心，努力进取，就没有不能克服的困难。

4. 兴趣

学习要有兴趣.

如果你对一件事有兴趣,那么你就会“乐此不疲”,比如你喜欢唱歌、打球或者下棋,那么你花很多时间唱歌、打球或者下棋,不但不会觉得累,反而觉得十分愉快.

如果你对数学有兴趣,那么你就会解很多数学题,越做越想做,根本不觉得是什么“负担”.

特别是一道困难的问题,冥思苦想,久久不能解决,突然灵机一动,想了出来,这时你一定觉得非常的快乐.而这种乐趣,是其他任何东西所不能代替的,只要你有过这种乐趣,你就会喜爱数学、喜爱解题.

我相信每一位数学家都有过上述体验,例子就不必举了.这里举一位现代人文科学的宗师胡适(1891—1962)作例子,看看他是怎么说的:

“我这时(注:胡适这时大约十四五岁)对于算学最感觉兴趣,常常在宿舍熄灯之后,起来演习数学问题.卧房里没有桌子,我想出一个法子来,把蜡烛放在帐子外床架上,我伏在被窝里,仰起头来,把石板放在枕头上做算题.因为下半年要跳过一班,所以我须要自己补习代数.我买了一部丁福保先生编的代数书,在一个夏天把初等代数习完了,下半年安然升班.”

兴趣生努力,努力生兴趣.

如果你原来对数学没有兴趣,那么可以逐步培养,逐步建立起兴趣来.

数学其实就是一种智力的游戏.

你可以先做一些有趣的智力题(也就是数学题).

比如:四张扑克牌,点数分别为:

8,2,4,9

如何用它们进行四则运算(加减乘除),使得数为 24(每种运算用的次数不限,但每个数只能用一次)?

再如:五只袜子两种颜色,那么其中至少有几只袜子同一种颜色?

这方面的书很多,如任宏硕的《奥林匹克金钥匙》(海南摄影美术出版社出版,内容很浅,小学三年级以下就可以读,但图文并茂,不仅有趣,而且有深刻的数学内容),单增的《小学数学趣题巧解 100 例》(南京师范大学出版社出版)等,都可以读一读.

你可以将每一道数学题作为对你的智力的挑战,你应当有信心,战而胜之.

开始做的题不要难,不要好高骛远,应当做力所能及的,甚至做一些低年级的题,增强信心,增加兴趣(例如 24 点,就是学过除法后人人可做的游戏).

小学的应用题,初中的平面几何题,竞赛中的一些动手做的问题,都有助于提高兴趣(后面我们将会说到一些例子).

“学海无涯苦作舟”,这句话我很不赞成,其中的“苦”字应当改成“乐”字,只有有了兴趣,你才能在“学海”中自在地遨游.

5. 专心致志

解题时必须全神贯注,全身心地投入.

“不专心致志则不得焉”.如果在做作业时,吃东西、看电视、听别人聊天,思想不集中,那么时间花得多,作业也做不好,久而久之

之,形成做事不专心的坏习惯,而坏习惯一旦形成后,不花大力气就很难改正.

做作业时,思想应当高度集中,心无旁骛,争取在尽量短的时间内,“三下五除二”,很快完成作业,然后再吃东西、看电视或从事其他活动.

“学习时学习,玩的时候玩”,结果学得好,玩得也痛快;“学习时玩,玩的时候又担心功课未做好”,结果学得不好,玩得也不痛快.

学习好的同学,并不一定花很多的时间学习,诀窍在于合理使用时间,提高学习效率;而要提高效率,就必须专心致志.

解数学题,必须全力以赴,即使是常规问题,也需要开动脑筋想一想有哪几条路可走? 有哪一个例题可以仿效(最好能想一想有没有更好的解法)? 选好解题路线之后,你应小心翼翼,在计算或推理中不可出错.有时“走错一步,满盘皆输”,所以切不可粗枝大叶,掉以轻心(细心也是一种需要从小培养的“习惯”).

思想不集中,就容易出错,而且会一错再错,做错了推倒重来,显然比一次做好花的时间精力要多.应当力求一次做好,不要老是改来改去.

解题需要专心致志,反过来,解题也有助于培养做事专心致志的习惯.多解数学题,就不会粗心浮气,焦躁不安,这也是解题的一个功效.

6. 打好基础

“万丈高楼平地起”.要提高解题能力,首先要简单的基本题做好.

最基本的问题是四则运算. 运算, 一要准确, 二要迅速. 由于计算器的普遍使用, 运算的准确迅速已经不再成为严重问题, 更应当留心的是如何掌握运算规律, 进行巧算.

例 1 计算 $8 \times 21 \times 25$.

解 $8 \times 21 \times 25 = 4\ 200$.

这道题应当全用心算: $4 \times 25 = 100$, 从而

$$8 \times 21 \times 25 = (2 \times 21) \times (4 \times 25) = 4\ 200.$$

既然用心算, 就没有必要再写出所谓过程. 这种“过程”必须“消灭”, 因为它是不该有的“废招”. 废招过多, 既浪费时间, 也影响解题能力的提高.

说到“废招”, 不由想到金庸的一本小说《连城诀》. 其中“师祖梅念笙早瞧出三个徒儿心术不正, 在传授之时故意引他们走上了剑术的歪路, 而万震山与戚长发在教徒儿之时, 或有意或无意的, 引他们在歪路上走得更远”. 于是徒弟们学的全是中看不中用的剑招, 明明可以一剑直接刺去, 却偏要转七个圈子. 如果对方直接一刀挥来, 早就头颅落地了. 可见废招十分害人.

我们的老师当然不会故意教同学废招, 但在初学阶段, 也许会作一些分析式的讲解, 例如合并同类项:

$$5x - 3x = (5 - 3)x = 2x.$$

开始这样讲, 是为了说清道理, 但中间一步应当心算, 在熟练之后, 必须省掉. 可惜有的同学不懂这个道理, 我就遇到一位高三学生, 竟然还这样做:

$$\begin{aligned} & 15x - 3x + 2x \\ &= (15 - 3)x + 2x \\ &= 12x + 2x \\ &= (12 + 2)x \\ &= 14x. \end{aligned}$$

这种问题如果不能一步完成, 数学就无法学好. 因为别人每走

一步,你要走四五步,绝对跟不上.反过来,如果你能够注意自觉地减少废招,经常“三步并作两步”,那么一生中就要节省很多时间,而且思维变得快捷、敏锐,可以将主要力量集中在关键的地方,而不致让枝节拖住后腿.

一个“招式”,老师讲解时,可以分拆成许多“慢动作”,但在运用(对敌)时,却必须“一气呵成”,越快越好.

四则运算的技巧,主要在注意运算定律(交换律、结合律、分配律)与凑整(凑成整十、整百等等),就像例 1 那样.

初中有理数的运算,多了正负符号.

例 2 计算

$$3\frac{1}{4} + (-5\frac{1}{6}) - (-1\frac{3}{4}) - (+3\frac{5}{6}) + (10\frac{3}{7}) - (-12\frac{4}{7}) + 4\frac{7}{25} + 11\frac{4}{13} + 8\frac{5}{26} - 10\frac{2}{5}.$$

这道题不难,但如果从左到右一步一步地做,也是非常麻烦的,怎样才能做得简单呢?

首先注意有理数有正、负之分,同号两数相加是相加;异号两数相加,实质上是绝对值相减.于是,可以在草稿纸上将正数、负数各写一列

+	-
$3\frac{1}{4}$	$5\frac{1}{6}$
$1\frac{3}{4}$	$3\frac{5}{6}$
$10\frac{3}{7}$	$10\frac{2}{5}$
$12\frac{4}{7}$	
$4\frac{7}{25}$	

$$11\frac{4}{13}$$

$$8\frac{5}{26}$$

左边的 3, 10 分别与右边的 3, 10 抵消. 左边 1, 4 的和与右边的 5 抵消. 左边的 $\frac{1}{4}$ 与 $\frac{3}{4}$ 合并成 1, $\frac{3}{7}$ 与 $\frac{4}{7}$ 合并成 1, 右边的 $\frac{1}{6}$ 与 $\frac{5}{6}$ 合并成 1. 这样, 将两边的整数相加减得整数 32. 然后, 左边 $\frac{4}{13}$ 与 $\frac{5}{26}$ 合并成 $\frac{1}{2}$, 而右边 $\frac{2}{5}$ 减左边 $\frac{7}{25}$ 得 $\frac{3}{25}$, $\frac{1}{2}$ 减去 $\frac{3}{25}$ 得 $\frac{19}{50}$, 所以答案为 $32\frac{19}{50}$.

例 2 人人会做, 但其中却有一些值得注意的地方.

首先, 我们的目标是得出最终结果, 中间的步骤是不重要的. 上面的做法不仅省去了不必要的过程, 而且有助于培养从整体看问题的习惯. 在明确符号的正负后, 该合并的合并, 该抵消的抵消, 整个过程可用心算结合草稿纸上的演算完成.

其次, 在加减法中, 不需要先将带分数化为假分数, 反倒是假分数往往需化为带分数. 在乘、除运算中, 才需要将带分数化为假分数. 同分母的分数应当先加、减, 不要一上来就不分青红皂白, 一古脑儿通分, 那样做往往使运算变得麻烦, 不可取.

最后, 应当合理使用草稿纸, 抵消的数可以用笔划去. 上面的 $\frac{4}{13}$, $\frac{5}{26}$ 也可以划去, 换成 $\frac{1}{2}$. $\frac{7}{25}$ 与 $\frac{2}{5}$ 可以划去, 在右边写上 $\frac{3}{25}$, 等等. 这样, 结合心算很快就能得出结果.

草稿纸也应当节约使用, 尽可能写整齐, 尽可能心算. 有人过份依赖草稿纸, 虽然在卷面或本子上写得不多, 却在草稿纸上写了大量的计算过程, 一张不够又写一张, 这就削弱了心算能力. 还有些人草稿纸上写得乱七八糟, 需要的算式或结果找不到, 甚至将错

误的东西当作正确的参与运算.这些坏习惯务须及早根绝.

我的朋友,如肖刚教授、李克正教授,他们都很少用草稿纸,很多运算或推理都在“心里”完成,所以他们的运算能力与推理能力都非常之强.

例3 计算

$$3x(x-5)-7(x+1)(x-2)+2(x-1)(x-5).$$

很多人将每个括号乘开写好,然后再合并.其实这两步可以并作一步,即按 x 的降幂排列,陆续写下

$$-2x^2-20x+24.$$

如果一下写不出来,也可以在草稿纸上写出系数(如 x 的系数是 $-15-7\times(-2+1)+2\times(-1-5)$ 或 $-15+7-12$),再合并,这也比多写一道式子要快.

我们再举一个较为复杂的例子.

例4 化简

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

这是分式的运算,应该说没有什么困难,但1977年恢复高考时,我给参加考前复习的数百人做这道题,能够做对的却寥寥无几.

首先,应以 x 为主要字母(其他三个字母 a, b, c 地位平等,不宜畸轻畸重,选哪一个作主要字母均不合适).这时每一项都是 x 的二次多项式,理应按照 $x^2, x, 1$ 来合并.

x^2 的系数是分式,以 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 为公分母,通分后,三项的分子分别为 $-(b-c), -(c-a), -(a-b)$,它们的和为0.所以 x^2 项在最后结果中不出现.

x 的系数也是分式,以 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 为公分母,通分后,三项分子分别为 $(b+c)(b-c), (c+a)(c-a), (a+b)(a-b)$,即 $b^2-c^2, c^2-a^2, a^2-b^2$,它们的和也为0,所以 x 项在最后

结果中也不出现.

常数项也由三项合并而得,公分母与前面相同,通分后,三项的分子分别为 $-bc(b-c)$, $-ca(c-a)$, $-ab(a-b)$,分子的和

$$\begin{aligned}& -bc(b-c) - ca(c-a) - ab(a-b) \\&= -c(b^2 - bc + ac - a^2) - ab(a-b) \\&= -c(a-b)(c-a-b) - ab(a-b) \\&= (a-b)(ac + bc - c^2 - ab) \\&= (a-b)(b-c)(c-a),\end{aligned}$$

正好与分母相同,相约后值为 1.

所以答案为 1.

很多人做这道题毫无条理,只知道将所有式子全乘开,写得很长,看不出规律,自然容易搞错.应当养成井井有条的好习惯,既要有整体观点,又能将问题分解,一部分一部分地解决,分而治之就可以避免混乱,脉络清楚,操作简便.

本例在第二章第 9 节中还要说到.

7. 简单技巧

一些简单的技巧在解题时常常用到(本节例题都是人民教育出版社出版的初中数学教材中的例题、习题).

例 1 解方程

$$0.5x = 10.5. \quad \textcircled{1}$$

方程两边同除以 0.5 即可得出 x 的值.但两边同乘以 2 更简单,完全能通过心算完成:

$$x = 21.$$

例 2 解方程

$$x - \frac{1}{3} \left[x - \frac{1}{3}(x - 9) \right] = \frac{1}{9}(x - 9). \quad ①$$

在行动之前,应当先仔细观察一下,①的右边有 $\frac{1}{9}(x - 9)$,而左边里面的小括号里也是 $x - 9$,并且将外面的中括号打开后,系数 $-\frac{1}{3} \times (-\frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$.于是左边的 $\frac{1}{9}(x - 9)$ 正好与右边的抵消.这样①就成为

$$x - \frac{1}{3}x = 0,$$

从而 $x = 0$.

上述做法可以用心算完成.

如果循规蹈矩,先打开里面的小括号,当然也可以解,但不如上述解法快捷.解题的技巧就是变通,切忌墨守成规,固执不变.

例 3 解方程

$$\frac{x+2}{4} - \frac{2x-3}{6} = 1.$$

本题可化为标准形式

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)x = 1 - \frac{2}{4} - \frac{3}{6}.$$

由于右边为 0,左边系数不为 0,所以 $x = 0$.

例 4 解方程

$$\frac{3}{4} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) - 8 \right] = \frac{3}{2}x + 1. \quad ①$$

本题以先去中括号为好(因为 $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$).这样,方程①化为

$$\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) - 6 = \frac{3}{2}x + 1. \quad ②$$

从而

$$x = -\frac{1}{4} - 6 - 1 = -7\frac{1}{4}.$$

最后一步是将②的左边的 $\frac{1}{2}x$ 移到右边,而不是移右边的 $\frac{3}{2}x$ 到左边,这样做的好处是避免出现负系数,直接产生 x .此外,解方程的过程中通常不用连等,但最后的计算用连等也没有关系(当然能用心算完成更好).

例5 解方程

$$3\{2x-1-[3(2x-1)+3]\}=5.$$

本题可将 $2x-1$ 作为一个新变数,通过心算化成标准形 $a(2x-1)=b$,其中 $a=-6, b=14$,所以

$$\begin{aligned}2x-1 &= -\frac{7}{3}, \\x &= -\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

例6 解不等式

$$\sqrt{3x-4} > \sqrt{x-3}. \quad \text{①}$$

不等式①的右边根号下是 $x-3$,左边则没有 $x-3$,这是与上例不同的地方,但上例的方法仍然适用:左边可以变形为

$$3x-4=3(x-3)+5.$$

于是在 $x-3>0$ 时,显然左边大于右边.

另一方面, $x-3>0$ 才能使①的两边同有意义,所以①的解就是 $x>3$.

本题依照常规,应当在①两边同时平方,形成不等式组

$$\begin{cases} 3x-4 > x-3, \\ x-3 > 0, \\ 3x-4 > 0, \end{cases}$$

稍为麻烦.

以上种种技巧,只要留心,不难掌握.学习数学,不仅要学习已有的(别人的、书上的)技巧,更要培养良好的观察能力,从整体看,

从局部看,从不同角度去看,发现问题的特点,挖掘其中的联系,自己创造技巧.而这种观察能力,就是所谓见识的一部分,应当逐步养成.

8. 应用题

小学与初一阶段培养推理能力,主要通过解应用题.

应用题解得好,对今后的数学学习有莫大的好处.理解能力、分析能力、表达能力,都得到了锻炼,尤其是算术解法,多种多样,极能启迪思维,培养兴趣,对于今后学习数论(也就是高等算术)与组合数学都会很有帮助.我在初三毕业后,看到一本 1949 年前的小学升学指南,上面有很多有趣的应用题,暑期中做了一通,至今觉得获益匪浅.

当然,代数的解法(设未知数,列方程或方程组)具有统一性,各种各样的应用题可以用同样的方法处理,而且复杂的应用题,特别是涉及二次方程的应用题,往往只能用代数方法来解.

多样性与统一性,都体现了数学的美.

例 1 “妇人洗碗在河滨,路人问她客几人? 答曰不知客数目,六十五碗自分明,二人共食一碗饭,三人共吃一碗羹,四人共肉无余数,请君细算客几人?”

这是我国古算书《孙子算经》中的一道问题.可以用代数解,也可以用算术解.

代数的方法是设客人 x 人,则饭碗用 $\frac{x}{2}$ 只,羹碗用 $\frac{x}{3}$ 只,肉碗用 $\frac{x}{4}$ 只,根据题意得方程

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 65. \quad \textcircled{1}$$

解得 $x = 60$.

算术的解法又有两种. 一种采用分数: 每人平均用 $\frac{1}{2}$ 只饭碗, $\frac{1}{3}$ 只羹碗, $\frac{1}{4}$ 只菜碗, 即每人用 $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4})$ 只碗, 所以共有

$$65 \div (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = 60 \quad \textcircled{2}$$

个人.

②与①几乎一样.

还有一种是不用分数的算术解法(我国的传统解法): 首先求出 2, 3, 4 的最小公倍数 12, 每 12 个人共用饭碗 $6(=12 \div 2)$ 只, 羹碗 $4(=12 \div 3)$ 只, 菜碗 $3(=12 \div 4)$ 只, 即 12 个人用碗

$$6 + 4 + 3 = 13$$

只. 所以总人数是

$$65 \div 13 \times 12 = 60.$$

最后一种方法, 可以心算, 也最为有趣, 不知同学们是否同意我的看法?

例 2 李经理的司机每天早上 7:30 到达李经理家接他去公司. 有一天李经理 7 点从家步行去公司, 路上遇到按时从公司来接他的车, 再乘车去公司, 结果早到 5 分钟, 问李经理什么时候遇上汽车? 汽车速度是步行速度的几倍?

这样的题目, 叙述较长, 首先要读懂题意, 包括画一个简单的图, 如下图:

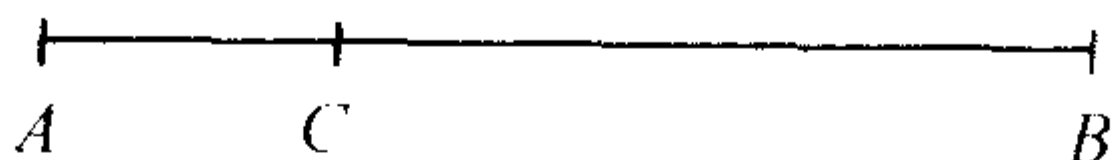


图 1-1

其中 A 是李经理家, B 是公司, C 是相遇地点. 然后进行仔细分析. 不要急于设未知数, 也不要急于套行程问题的公式.

分析可从人、车两方面入手, 由于人(李经理)只走了一次, 无从比较, 所以应当从车入手. 车通常从 B 到 A 再从 A 到 B , 而这一天只行到 C 就返回, 少行了 $2 \times AC$, 少用了(即早到了)5 分钟. 所以车行 CA 所用时间是

$$5 \div 2 = 2.5(\text{分}),$$

相遇时间是 7 点 27.5 分($30 - 2.5 = 27.5$).

由于李经理行 AC 用 27.5 分, 所以车速是人速的 11($= 27.5 \div 2.5$)倍.

本题并不难, 但却有不少人做不出来, 原因是没有“模式”可套. 学习解应用题, 重要的是通过自己的分析, 提高分析的能力, 而不是生搬硬套.

例 3 甲、乙两人各做一件工程. 如果全是晴天, 甲需 12 天, 乙需 15 天可以完成. 雨天甲的工作效率比晴天减少 40%, 乙减少 10%. 两人同时开工, 恰好同时完成, 问工作中有多少个雨天?

代数的解法以设两个未知数, 列方程组为好. 先算出甲、乙晴天的工作效率分别为 $\frac{1}{12}$ 与 $\frac{1}{15}$, 雨天的工作效率分别为

$$\frac{1}{12} \div (1 - 40\%) = \frac{1}{20},$$

$$\frac{1}{15} \div (1 - 10\%) = \frac{3}{50}.$$

设工作中有 x 天晴天, y 个雨天, 则有

$$\begin{cases} \frac{1}{12}x + \frac{1}{20}y = 1, \\ \frac{1}{15}x + \frac{3}{50}y = 1. \end{cases}$$

解这个方程组得 $x = 6, y = 10$.

算术的解法不必求出雨天的工作效率,而只需要知道每个人晴、雨天的工作效率的比.

甲雨天的工作效率是晴天的

$$1 - 40\% = \frac{3}{5},$$

即甲 3 个晴天的工作量相当于 5 个雨天的工作量.

同理,由

$$1 - 10\% = 90\%,$$

得乙 9 个晴天的工作量相当于 10 个雨天的工作量.

所以,如果有 10 个雨天(10 是 5 与 10 的最大公倍数),那么乙只需再工作

$$15 - 9 = 6$$

个晴天,共用

$$10 + 6 = 16$$

天,这时甲 10 个雨天相当于 6 个晴天,再工作 6 个晴天也正好完成任务.所以工作中有 10 个雨天,6 个晴天.

10 个雨天,折算为晴天时,乙正好比甲少 $3(=9-6)$ 天,而全为晴天,甲正好比乙少 3 天,如果题目改为原来全为晴天时,甲比乙少 6 天(比如甲 16 个晴天干完,乙 22 个晴天干完),那么就应当有 20 个雨天(4 个晴天,共用 24 天).

比较各种解法,不仅很有趣,而且可以知道各种方法的适用范围与优缺点,增长很多见识.

9. 常规问题

课本中的问题,是中学里的常规问题.

常规问题是基础,登高必自卑,行远必自迩.常规问题做好了,才能做更难的竞赛性的问题.反过来,常规问题都做不好,却一味找难题去做,好高骛远,注定要失败.

常规问题往往有固定的套路或模式,做这类问题时,可以想一想:书上有没有(或老师讲没讲过)类似的例题?我有没有做过类似的问题?如果在记忆中找到了类似的问题,解起来当然容易得多.所以常规问题的套路或模式应当熟悉.但(我们在上节例2中已经说过)更重要的不是死记这些套路或模式,而是通过这种问题养成良好的数学品质,如分析问题的能力,对数学的感觉,从整体上看问题等等.

常规问题,应当如前面所说,做到“熟练化”,熟是纯熟自如,化是出神入化.不熟不化,更要多练,待到后来,自然熟能生巧,变化无穷.

由于常规问题在课本中已有很多,老师也常在课堂上讲授,所以我们不打算多谈.

下面介绍几个常规的解不等式的问题,重点在其中的技巧.

例1 求满足 $1 < |x - 2| < 4$ 的整数 x .

解 应当注意几何意义. $|x - 2|$ 表示数轴上点 x 与点 2 之间的距离, $1 < |x - 2| < 4$ 表示 x 与点 2 的距离大于 1 并且小于 4.

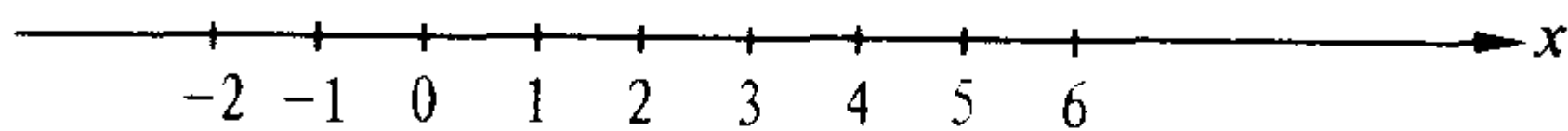


图 1-2

于是,合乎要求的整数 x 是 $-1, 0, 4, 5$.

例2 解不等式 $|x + 1| + |x - 1| \leq 2$.

解 几何意义即数轴上,点 x 到 $+1$ 、 -1 的距离的和 ≤ 2 ,显然区间 $[-1, 1]$ 中的点合乎要求,即本题的解是 $-1 \leq x \leq 1$.

$$\frac{1}{2} < x < \frac{4}{3}.$$

注 本题并不复杂,但其他的解法均不及上面的解法简明.应当掌握这种用零点与极点(分母的零点)将数轴分段,然后讨论的方法.

10. 简单、自然

解法应以简单、自然为上.

莎士比亚说得好:“简洁是智慧的灵魂,冗长是肤浅的藻饰.”
(朱生豪译《莎士比亚全集》第九卷 41 页,人民文学出版社)

解题最好单刀直入,直接剖析问题的核心,不要兜圈子.常规的题,往往可以“一招破敌”.能一招解决的决不要用两招,应当尽量减少“废招”.那些“花棒”“只好看,上阵无用”(《水浒》第一回“王教头私走延安府,九纹龙大闹史家庄”).

简单与自然是在一起的.

所谓“自然”,就是抓住问题的实质,题目该怎么解就怎么解,不故弄玄虚,朴实自然.

一位著名的围棋高手武宫正树,被人誉为“宇宙流”,他自己却说:“如果我给自己的围棋命名的话,是‘自然流’”.又说他“只是非常自然的下”,“自然是美的.就围棋来说,下得自然、流畅就会感到美.相反,不自然的话,就会感到难看”.

解题也是如此.

下面通过一些例子说明什么是简单、自然的解法.每道题的关键所在,我们都反复强调.常规的题,大多只有一个关键.复杂一些的题,可能有几个关键步骤.掌握关键步骤,就掌握了这道题.此外,我们还特别说明为什么要这样解,希望能够体现出“简单、自

然”的原则.

例 1 甲、乙两人分别从 A, B 两地同时出发相向而行, 两人相遇在离 A 地 10 千米处. 相遇后, 两人继续前进, 分别到达 B, A 后, 立即返回, 又在离 B 地 3 千米处相遇, 求 A, B 两地的距离.

这样的问题应当画一个简单的图帮助分析.

题中只出现路程, 未出现速度、时间. 所以应集中力量研究路程.

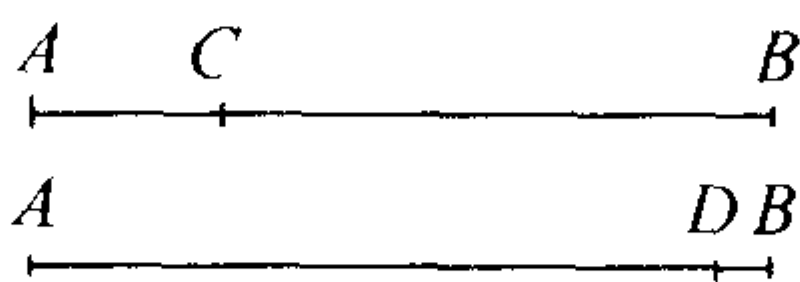


图 1-5

第一次相遇在 C , 甲走 10 千米, 乙走的路程不知道, 但甲、乙走的路程合在一起正好是 AB .

第二次相遇在 D , 甲、乙走的路程均不知道. 但甲、乙走的路程合在一起正好是 $2 \times AB$. 所以甲走的路程应当是第一次相遇的两倍, 即

$$10 \times 2 = 20(\text{米}).$$

由于 $BD = 3$, 所以 $CB = 20 - 3 = 17$, 所求答案

$$AB = 10 + 17 = 27(\text{米}).$$

这类相遇问题, 常常考虑两人所走路程之和.

数形结合, 对于解题极有帮助. 本题及第 8 节例 2、第 9 节例 1~3 的解法都是这样. 下面我们再看一道高考题(初三学生也可以做).

例 2 已知关于 x 的实系数二次方程 $x^2 + ax + b = 0$ 有两个实数根 α, β . 证明: 如果 $|\alpha| < 2, |\beta| < 2$, 那么 $2|a| < 4 + b$ 且 $|b| < 4$ (1993 年理科高考题).

由韦达定理(根与系数的关系), 显然有 $|b| = |\alpha\beta| < 2 \times 2 = 4$.

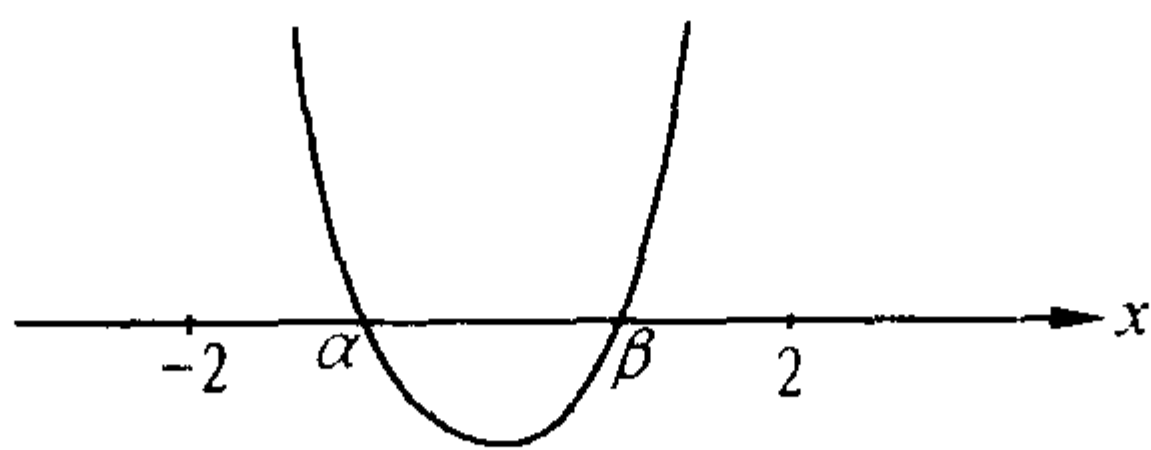


图 1-6

另一方面,由函数 $y = x^2 + ax + b$ 的图像易知函数在 $x = \pm 2$ 时均为正值,即

$$(\pm 2)^2 \pm 2a + b > 0,$$

从而

$$4 + b > 2|a|.$$

这题是数形结合的很好范例.如果不用函数的图像,单纯依靠根与系数关系则较为麻烦.

例 3 当 $A = \frac{(|a+1| + |b-1|)^2 - (a+b)^2}{(a+1)(b-1)}$ 时,求

$A(A+4)$ 的值.

解 A 的表达式比较繁,应当先化简(然后再代入 $A(A+4)$ 中).

A 的分母已无法化简,分子中的绝对值符号也不能随意去掉,除非进行讨论.化简的关键是看出 $a+b$ 可写成 $(a+1) + (b-1)$,这样

$$\begin{aligned} & (|a+1| + |b-1|)^2 - [(a+1) + (b-1)]^2 \\ &= 2|(a+1)(b-1)| - 2(a+1)(b-1). \end{aligned}$$

如果 $(a+1)(b-1) \geq 0$,那么上式的值为 0.如果 $(a+1)(b-1) < 0$,那么上式的值为 $-4(a+1)(b-1)$.于是

$$A = \begin{cases} 0, & \text{若 } (a+1)(b-1) \geq 0; \\ -4, & \text{若 } (a+1)(b-1) < 0. \end{cases}$$

从而 $A(A+4) = 0$.

本题 A 的表达式中,大多数项是 $a+1$ 与 $b-1$ 的表达式. 所以将 $a+b$ 改成 $(a+1)+(b-1)$ 非常自然,也正是问题的关键.

例 4 已知

$$\frac{a}{1+a+ab} + \frac{b}{1+b+bc} + \frac{c}{1+c+ca} = 1, \quad (1)$$

求证

$$abc = 1. \quad (2)$$

这类恒等式的证明并无太大困难. 但式的运算必须娴熟,方能得心应手,左右逢源.

将①逐步化简,应当能导出②. 为此,由①得

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - \frac{a}{1+a+ab} - \frac{b}{1+b+bc} - \frac{c}{1+c+ca} \\ &= \frac{1+ab}{1+a+ab} - \frac{b}{1+b+bc} - \frac{c}{1+c+ca}. \end{aligned}$$

现在被减式为一项,减式有两项,需将被减式拆为两项分别去减减式的两项. 这就好像对方分兵两路而来,我也分兵两路对抗. 但如何分法则大有讲究. 现在被减式 $\frac{1+ab}{1+a+ab}$ 的分子为两项,就拆成

$\frac{1}{1+a+ab}$ 与 $\frac{ab}{1+a+ab}$, 既简单又自然,但 $\frac{1}{1+a+ab}$ 去减

$\frac{b}{1+b+bc}$ 却不妥当,因为 $\frac{ab}{1+a+ab}$ 的分子有 b , 与 $\frac{b}{1+b+bc}$ 在一

起可提取公因式,而且进一步运算可以消去很多东西,将

$\frac{1}{1+a+ab}$ 去减 $\frac{c}{1+c+ca}$ 也是如此. 所以

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{ab}{1+a+ab} - \frac{b}{1+b+bc} \right) + \left(\frac{1}{1+a+ab} - \frac{c}{1+c+ca} \right) \\ &= \frac{b(abc-1)}{(1+a+ab)(1+b+bc)} + \frac{1-abc}{(1+a+ab)(1+c+ca)} \\ &= \frac{(abc-1)(abc-1)}{(1+a+ab)(1+b+bc)(1+c+ca)}. \end{aligned}$$

从而②成立.

本题的关键即在上面的“分兵”.“水来土掩,兵来将挡”,分得合理,一切顺顺当当;分得不合理,就会陷入左支右绌的困难境地.所以在每个分叉路口,都应当慢一点,想一想,下一步如何走才好,“不要太快了!”

例 5 已知

$$abc = 1, \quad \text{①}$$

求证

$$\frac{a}{1+a+ab} + \frac{b}{1+b+bc} + \frac{c}{1+c+ca} = 1. \quad \text{②}$$

本题正好是上题的逆问题.

如果 $a=b=c=1$, 那么①成立, 而且②成为 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$.

问题当然不是这样简单. 不过, 虽然不能奢望②的左边三项都是 $\frac{1}{3}$, 但我们可以利用①将②的左边三项化成分母相同的项, 这样计算就简单多了.

通分显然太繁, 不是好办法, 我们保留第一项 $\frac{a}{1+a+ab}$, 希望将后两项分别变为 $\frac{1}{1+a+ab}$ 与 $\frac{ab}{1+a+ab}$.

因为 $\frac{b}{1+b+bc}$ 的分子已有 b , 所以我们希望将它变为 $\frac{ab}{1+a+ab}$. 为此, 在分子分母上同乘 a :

$$\frac{b}{1+b+bc} = \frac{ab}{a(1+b+bc)} = \frac{ab}{a+ab+1}.$$

正如我们所料! 而最后一项分子应变为 1, 所以

$$\frac{c}{1+c+ca} = \frac{abc}{ab(1+c+ca)} = \frac{1}{ab+1+a},$$

从而

$$\frac{a}{1+a+ab} + \frac{b}{1+b+bc} + \frac{c}{1+c+ca} = \frac{a}{1+a+ab} + \frac{ab}{a+ab+1} + \frac{1}{ab+1+a} = 1.$$

虽然式的运算人人皆会,但实际运算时应多动点脑子,不仅“埋头拉车”,更要“抬头看路”.想一想下一步应当怎样走,看一看走下去后果如何.保持清醒的头脑,注意简单、自然,就会得到合理的解法.

11. 一个实际例子

数学的作用是培养思维能力.如果思维能力很强,遇到生活中熟悉的实际问题,当然不难解决.但社会生活是很复杂的,有许多问题需要专门的知识才能解决.所以我们不强调解实际生活中的问题,而只限制在解数学中的问题(否则就不得不补充各种专门知识,那就不成为数学了).仅在本节举一个真正实际(不是人为编选)的例子.

例 国家税收制度对所得税的征收作如下规定:

如果你一次所得为 x 元,那么扣除 20% 后,剩余部分为应纳税所得额 y ,即

$$x - x \cdot 20\% = y.$$

其中法定应纳税额 z 占 20%,即

$$z = y \cdot 20\%.$$

法定减税额 u 是 z 的 30%,即

$$u = z \cdot 30\%.$$

实际应纳税额为 $z - u$.

我见过很多人按照上面的步骤一步一步地算,却不知道用一点数学将计算简化.其实

$$\begin{aligned} z - u &= z \cdot (1 - 30\%) = z \cdot 70\% \\ &= y \cdot 20\% \cdot 70\% \\ &= x \cdot (1 - 20\%) \cdot 20\% \cdot 70\% \\ &= x \cdot \frac{112}{1\,000}. \end{aligned}$$

也就是说,只要将所得 x 元乘以 112,再除以 1 000,就得到应纳税额,完全没有必要像上面那样一步一步地算.

受过数学训练的人应当比没有受数学训练的人聪明一些,效率更高一些.

12. 字母的使用

适当地使用字母可以使问题简化,规律变得明显.

例 1 设

$$A = \frac{2\,000^{2\,001} + 2\,001^{2\,002}}{2\,000^{2\,000} + 2\,001^{2\,001}} \times 10,$$

求 A 的整数部分.

问题也就是要定出两个连续整数,使 A 在它们之间.

设 $a = 2\,000^{2\,000}$, $b = 2\,001^{2\,001}$, 则一方面

$$A = \frac{2\,000a + 2\,001b}{a + b} \times 10 < 20\,010.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} A &= (2\,001 - \frac{a}{a+b}) \times 10 \\ &= 20\,010 - \frac{10a}{a+b} \end{aligned}$$

$$= 20\,010 - 1 (\text{显然 } 10a < b)$$

$$= 20\,009.$$

所以 A 的整数部分是 20 009.

本题不引入字母 a, b , 仍然能解决问题, 但不如引入 a, b 清晰. 如果引入字母, 应当引入两个. 因为 $2\,000^{2\,000}$ 与 $2\,001^{2\,001}$ 底数不同, 难以用一个表示另一个, 所以不应只引入一个字母. 引入更多的字母又无必要, 因为分子的两项可以用 a, b 来表示. 引入过多的字母, 反而使规律变得模糊不清.

字母不仅可以表示数, 而且可以表示字母与数组成的式子, 这就是“换元法”. 在解可化为二次方程的分式方程、无理方程或高次方程时, 常用一方法. 这种例子我们就不举了. 下面的例子较有特点.

例 2 设对所有实数 x , 不等式

$$x^2 \log_2 \frac{4(a+1)}{a} + 2x \log_2 \frac{2a}{a+1} + \log_2 \frac{(a+1)^2}{4a^2} > 0 \quad ①$$

恒成立, 求 a 的取值范围 (1987 年理科高考题).

本题中每个对数必须真数为正, 即

$$\frac{a+1}{a} > 0. \quad ②$$

然后怎么办呢? 不少同学一看是 x 的二次式, 立即条件反射, 写出

$$\begin{cases} \log_2 \frac{4(a+1)}{a} > 0, \end{cases} \quad ③$$

$$\begin{cases} (2\log_2 \frac{2a}{a+1})^2 - 4\log_2 \frac{4(a+1)}{a} \cdot \log_2 \frac{(a+1)^2}{4a^2} < 0. \end{cases} \quad ④$$

这当然不能说错. 但学习数学目的之一是学会思索, 而不是生搬硬套. 再说, 解题要多往前看几步, 看看下一步怎么做. 这主要指④如何化简. 看来困难并未克服, 正横亘在面前.

能力强的同学会想到令

$$u = \log_2 \frac{a+1}{a}, \quad (5)$$

即所谓换元. 这样③、④成为

$$2+u>0, \quad (6)$$

$$4(u-1)^2-8(2+u)(u-1)<0. \quad (7)$$

然后再接下去解不等式组.

本题的第一个关键就是换元(这才是真正自出机杼的地方), 换元使问题的形式简化, 便于思考. 比⑤更好一点是令

$$v = \log_2 \frac{a+1}{2a}, \quad (8)$$

这样原不等式①成为

$$x^2(v+3)-2vx+2v>0. \quad (9)$$

(如果用⑤得到的不等式稍复杂一些)

不必用判别式, 令 $x=0$ 就得到

$$v>0. \quad (10)$$

而在 $v>0$ 时又有

$$x^2(v+3)-2vx+2v=v(x-1)^2+3x^2+v>0$$

恒成立.

所以本题已做好一半, 下一半即是解不等式

$$(v=)\log_2 \frac{a+1}{2a}>0. \quad (11)$$

⑪可化简为

$$\frac{a+1}{a}>2. \quad (12)$$

移项合并成为

$$\frac{1-a}{a}>0, \quad (13)$$

从而得到答案

$$0<a<1. \quad (14)$$

所以本题实际上由解不等式⑨,解不等式⑪两个问题组成.前一个问题并不需要机械套用判别式 <0 去处理.只需令 $x=0$ 得出必要条件,再通过配平方证明条件也是充分的.当然这种做法有时不能奏效,仍需利用判别式处理.但在本题,用这种特殊方法显然简便许多,不失为一种变通的好办法.

在解不等式⑪时,当然要注意隐含的要求②,但由⑫显然可推出②,所以不等式②就省略了.

13. 代数方法(一)

引入字母表示有关的量,找出它们之间的关系,建立等式(方程)、不等式,或发现其他的性质(如整除),从而解决问题,这是代数的方法,也有人称之为笛卡儿模式,在解题中经常采用.在通常的课本中也有大量的例子,但课本中的例子大多有套路可以遵循,容易形成“定势思维”.应适当做一点稍有灵活性的问题,因为代数方法运用广泛,决不限于课本中的例子.

例 1 两个两位数,差是 56. 它们的平方的个位数字相同,十位数字也相同. 求这两个数.

解 设小的数为 x , 则大的数为 $x+56$, x^2 与 $(x+56)^2$ 的个位数字、十位数字都相同, 所以

$$(x+56)^2 - x^2 = 56(56+2x) = 7 \times 8(56+2x)$$

是 100 的倍数, 从而 $56+2x$ 是 25 的倍数.

接下去就要靠自己动脑筋了(课本中没有现成的套路), 需要通过估计定出 $56+2x$.

注意 $x+56$ 是两位数, 所以

$$x < 100 - 56 = 44,$$

$$56 + 2x < 100 + 44 < 150.$$

又 $56 + 2x$ 是 25 的倍数, 又是偶数, 所以 $56 + 2x$ 是 50 的倍数. 但 $56 + 2x > 50$, 所以必有 $56 + 2x = 100$, 从而 $x = 22$, $x + 56 = 78$. 即所求的数是 22 与 78.

与通常的列方程解应用题不同, 本题的 x 所满足的方程需要经过细致的分析才能得出. 下面的一道题虽然也是列方程解应用题, 但列方程时需要仔细分析.

例 2 若干人挖沟, 如果所有的人同时进行, 则需 24 小时, 如果每个人开始参加的时间不同, 每隔一定时间有一人参加, 参加后就一直干到结束, 那么第一个人劳动的时间恰为最末一人劳动时间的 5 倍. 问这样挖法从开始到结束, 共经过多少小时?

这里假定每个人的工作效率都相同, 而且从开始到结束没有变化.

解 设共经过 x 小时, 则最末一人劳动的时间是 $\frac{x}{5}$ 小时. 第一个人与最末一人共劳动

$$x + \frac{x}{5} \text{ 小时.}$$

注意“每隔一定时间有一人参加”这一条件, 第二个人比第一个人少劳动一定时间, 而倒数第二个人比最末一个人多劳动一定时间, 所以第二个人与倒数第二个人也共劳动

$$x + \frac{x}{5} \text{ 小时.}$$

依此类推, 每两个人组成一对, 他们共劳动 $(x + \frac{x}{5})$ 小时 (如果人数是奇数, 那么中间的一个“自身配对”, 他工作了 $\frac{1}{2}(x + \frac{x}{5})$ 小时).

于是, 相当于每个人劳动了 $\frac{1}{2}(x + \frac{x}{5})$ 小时, 就完成了这一工

作. 因此, 根据已知

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{5}\right) = 24,$$

从而

$$x = 40.$$

即从开始到结束共用 40 小时.

如果上面所说的“一定时间”是整数(以小时为单位), 我们还可以进一步讨论一共有多少人挖沟.

设人数为 y , 每隔 t 小时有一个人参加, 那么最末一人比第一个人少劳动 $(y-1)t$ 小时, 即

$$40 - (y-1)t = 8 (= 40 \times \frac{1}{5}),$$

于是

$$(y-1)t = 32.$$

由于 $y-1$ 与 t 是正整数, 所以它们都是 32 的约数, 从而只有以下 6 种可能:

$$\begin{cases} t=1, \\ y=33, \end{cases} \begin{cases} t=2, \\ y=17, \end{cases} \begin{cases} t=4, \\ y=9, \end{cases} \begin{cases} t=8, \\ y=5, \end{cases} \begin{cases} t=16, \\ y=3, \end{cases} \begin{cases} t=32, \\ y=2. \end{cases}$$

注 本题实质上是一个等差数列的问题: 各人劳动的时间成一个公差为 t 小时的等差数列.

代数方法(二)

用字母表示量, 这种代数方法运用极广泛, 灵活性也很大, 本节再举两个例子加以说明.

例 1 设数列

$$a_1, a_2, \cdots, a_{10}$$

中,每一项等于前两项的和($a_3 = a_2 + a_1, a_4 = a_3 + a_2, \cdots, a_{10} = a_9 + a_8$), S_{10} 是这 10 项的和,如果

$$a_1 = 2 + 3\sqrt{2} - \sqrt{3}, a_2 = 2\sqrt{3} - \sqrt{2},$$

求 $\frac{S_{10}}{a_7} = ?$

这道题曾用于南京师范大学对保送生的考试,这些保送生在南京市的高三学生中应属中上等,但是有些同学这道题做得并不尽如人意.

首先,不要急于将 a_1, a_2 的具体数值代入计算,如果一开始就将数值代入,增加了不少计算上的麻烦,殊无必要.先列代数式,再化简,最后才以数值代入计算.这一条简单原则,务必牢记.

由已知条件,不难逐步推出

$$a_3 = a_1 + a_2,$$

$$a_4 = a_1 + 2a_2,$$

$$a_5 = 2a_1 + 3a_2,$$

$$a_6 = 3a_1 + 5a_2,$$

$$a_7 = 5a_1 + 8a_2,$$

$$a_8 = 8a_1 + 13a_2,$$

$$a_9 = 13a_1 + 21a_2,$$

$$a_{10} = 21a_1 + 34a_2,$$

及

$$S_{10} = 55a_1 + 88a_2,$$

于是

$$\frac{S_{10}}{a_7} = \frac{55a_1 + 88a_2}{5a_1 + 8a_2} = 11.$$

可见,题中所设 a_1, a_2 的值是完全随意的.

上面的计算中,我们将 $a_3, a_4, \dots, a_{10}$ 及 S_{10} 写成一行. 这样的格式计算时比较方便, 结果一目了然.

例 2 $\triangle ABC$ 中, $\angle A \geq \angle B \geq \angle C$, 边 a, b, c 成等差数列 (即 $a - b = b - c$), 并且 $a^2 + b^2 + c^2 = 147$. 求 b 的取值范围.

解 三角形的边成等差数列, 设差

$$a - b = b - c = d, \quad (1)$$

则这三条边可以表示成 $b + d (= a), b, b - d (= c)$. 代入 $a^2 + b^2 + c^2 = 147$ 中, 经过化简得

$$3b^2 + 2d^2 = 147. \quad (2)$$

由②及 d 的变化范围就可以得 b 的取值范围.

首先 $d \geq 0$, 所以

$$\begin{aligned} 3b^2 &\leq 147, \\ b &\leq 7. \end{aligned}$$

其次, 三角形最大的边小于其他两边之和,

$$b + d < b + (b - d),$$

即 $2d < b$, 结合②得

$$6b^2 + b^2 > 147 \times 2,$$

所以

$$b > \sqrt{42}.$$

于是 d 的变化范围为 $0 < d < \frac{b}{2}$, b 的取值范围为 $\sqrt{42} < b \leq 7$.

本题应直接抓住边之间的关系进行处理, 不必转化为角的关系. 如果采用余弦定理来讨论, 那就走了弯路, 而且容易出错.

由于三边成等差数列, 实际上只有 2 个独立字母, 除了 b 本身外, 再引入公差 d , 用 d 比用 a, c 方便.

注 严格说来, 还应指出满足 $\sqrt{42} < b \leq 7$ 的值均可取作 b .

事实上, 这时令 $d = \sqrt{\frac{147 - 3b^2}{2}}$, 则 $0 < d < \frac{b}{2}$, 从而 $b - d, b, b +$

d 可成三角形, 并且 $(b-d)^2 + b^2 + (b+d)^2 = 147$.

15. 分析法

常常见到一种称为迷宫的游戏, 需要从入口处走到迷宫的核心. 有时, 你会发现, 如果反过来, 从迷宫的核心走到入口处, 更容易办到.

解题时, 就有这样的两种办法: 一种是由已知走向求证, 另一种则是反过来, 由求证走向已知. 前者称为综合法, 后者称为分析法, 这里的“分析”不同于通常分析问题的分析, 它专门指倒过来, 由结果追溯到已知的论证方法, 简称“执果索因”. 在平面几何中常用这种方法(当然分析法不仅局限于平面几何).

例 四边形 $ABCD$ 内接于半径为 R 的圆. 对角线 AC, BD 相交于 E . $AC \perp BD$. 求证: $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4R^2$.

垂直的条件及平方和, 启示我们利用勾股定理. 显然 $EA^2 + EB^2 = AB^2$, $EC^2 + ED^2 = CD^2$. 于是要证明结论成立, 只需证明

$$AB^2 + CD^2 = 4R^2. \quad ①$$

$4R^2$ 是直径 $2R$ 的平方, 而直径上的圆周角是直角, 所以我们应当作出过 A (或过 B, C, D) 的直径 AF . 这时

$$AB^2 + BF^2 = AF^2 = 4R^2. \quad ②$$

要证①成立, 只需证明

$$CD = BF. \quad ③$$

证明两条弦相等, 只需证明它们所对的弧或圆周角相等.

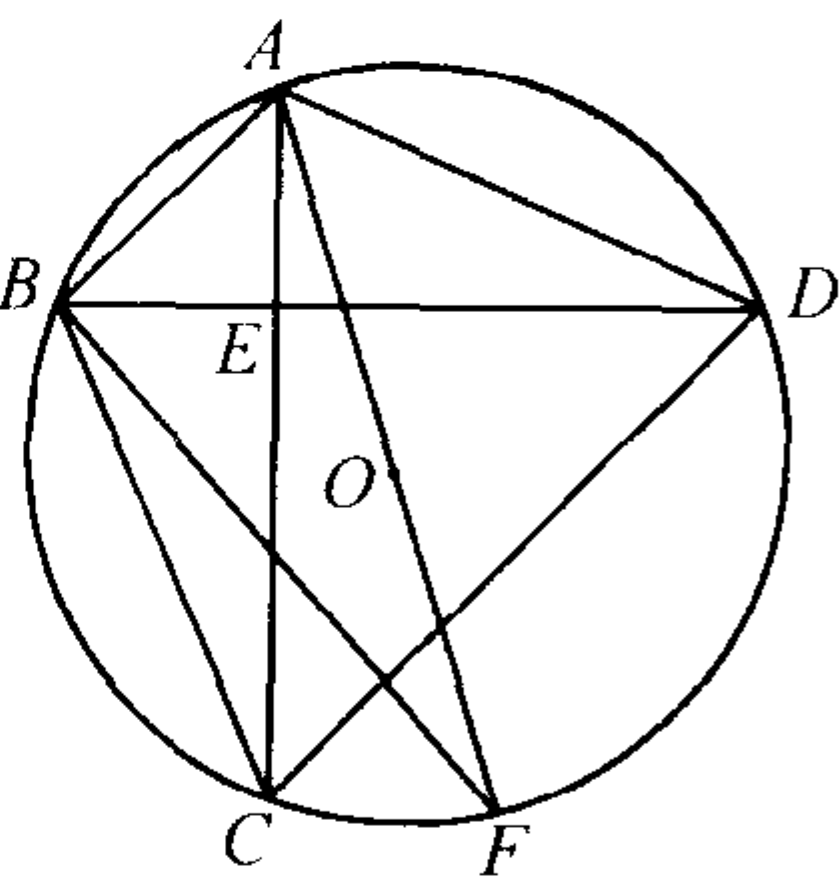


图 1-7

由于 $\angle CAD = 90^\circ - \angle ADB = 90^\circ - \angle AFB = \angle BAF$, 所以③成立. 从而②, ①均成立.

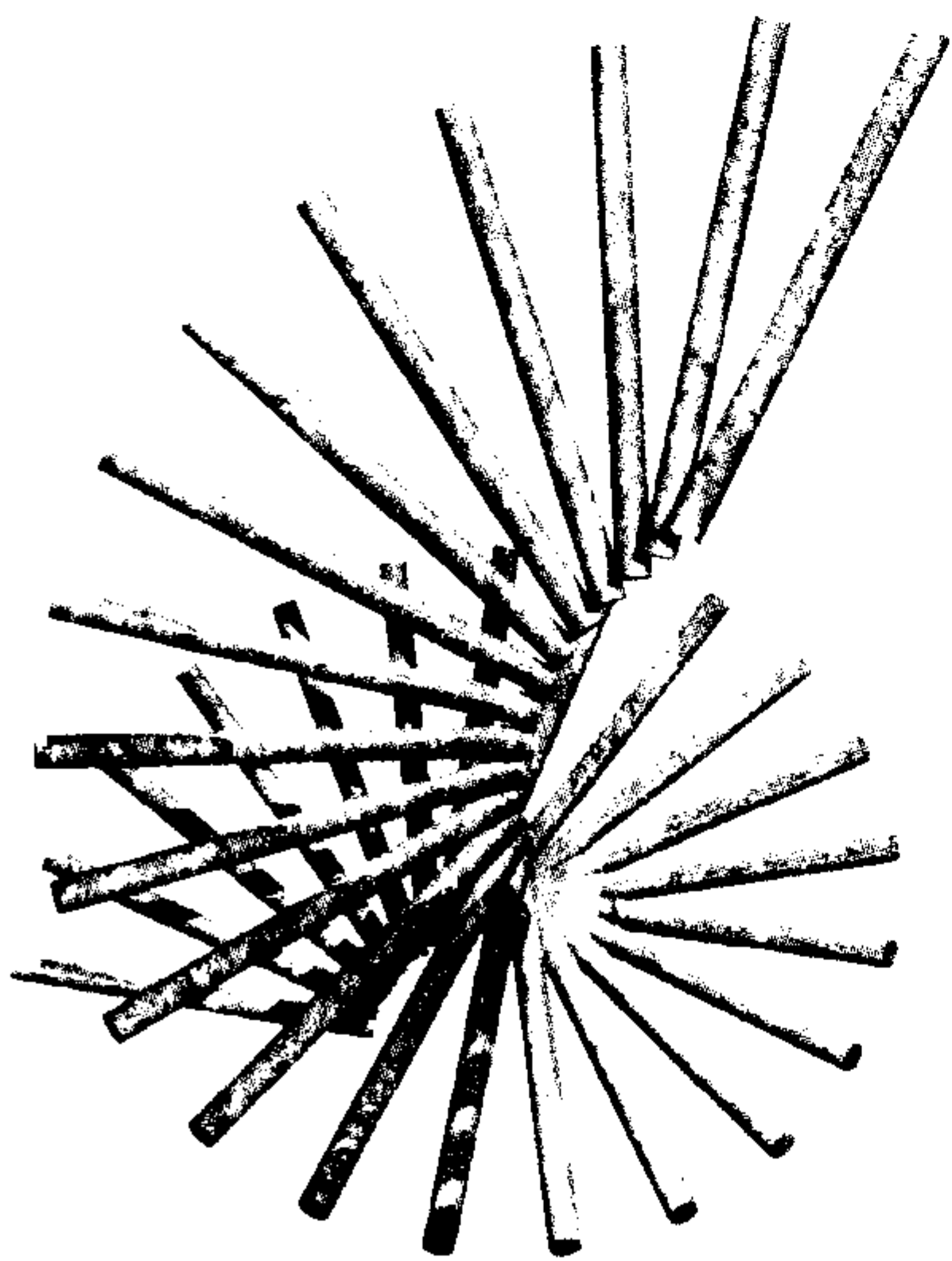
如果能掌握分析法, 平面几何就基本掌握了.

分析法与综合法相比, 有时(在推理时)更为方便. 在表述时, 分析法常用“要证……只要证……”的句式(切不可将“要证明结论成立, 只需证①”写成“因为结论成立, 所以①成立”, 或者将“要证明①成立, 只需证明②成立”写成“因为①, 所以②”). 用分析法有时使人感到别扭, 初学者也不易掌握, 所以常常用分析法去思考, 而在表述时采用综合法.

也有时将综合法、分析法结合起来, 就好像有两个人, 一个从入口走向迷宫核心, 一个从核心走向入口, 争取在某处相会.

喜爱数学的同学

喜爱数学的同学，可以成为或者已经成为班上的“数学尖子”，因此，我们想在这一章讨论一些较难的问题，特别是稍有竞赛意味的问题，对于解题的方法也多作一些议论，目的是开拓视野，提高见识。



做有质量的问题

解题需要实践,因而要做大量的题.不仅如此,对于优秀的同学来说,题目的质比量更为重要.

题目通常分为两种,一种是常规题,有固定的套路可循,例如解一元二次方程;另一种是带有竞赛意味的问题,简称为竞赛题,这类问题没有固定的套路,往往需要解题者发挥自己的创造性.

我们常说要培养创造性,创造性从何而来?这就需要解一些竞赛题.优秀的学生应当做相当数量(比如说 100 道)的竞赛题.有机会的话,适当参加一些数学竞赛,这会对自己有很大的提高.

下面是一道竞赛题,这道题不太容易,也不能算一道好题.我们随意取出这样一道手边的题,目的是通过它了解竞赛题的有关情况.

例 设 $S = \{1, 2, \dots, 98\}$. 求最小的自然数 n , 使得 S 的任一 n 元子集中都可以选出 10 个数, 无论怎样将这 10 个数均分成两组, 总有一组中存在 1 个数与另外 4 个数都互质, 而另一组中总有 1 个数与另外 4 个数都不互质.

首先, 我们看到这道题的内容和叙述与课本上常见的题迥然不同, 应当很好地读题. 这样的“长”题, 需要仔细地读, 它有助于提高你的阅读水平与理解能力. 这里用得上中国形容人的阅读水平高的一句话: “一目十行, 过目不忘.” 一目十行是指能很快地抓住问题的大意与中心. 过目不忘未必是终生不忘, 而是一种短暂的强记, 将问题的条件与结论都牢记心中.

本题条件很简单: $S = \{1, 2, \dots, 98\}$. 结论则比较复杂. “求最小的 n ”, 实际上是 3 个问题: 第一, 猜出这个 n 是多少. 第二, 说

明这个 n 满足要求. 第三, 说明这个 n 最小. 这 3 个问题不一定按顺序进行, 比如可以先做第三, 后做第二.

所谓 n 满足要求, 这句话要好好理解. 本题的要求稍嫌啰嗦, 可改为稍强的结果(叙述也更简洁):

S 的任一 n 元子集中都可以选出 10 个数, 其中 1 个数与另外的 9 个数互质, 而这 9 个数的最大公约数大于 1. $(*)$

请仔细对照原题的要求与 $(*)$. $(*)$ 可推出原题的要求. 而将要求改为 $(*)$ 后, 更接近问题的实质, 因此也就更容易解决.

注意 S 中有 49 个偶数, 这 49 个数中, 每一个都不与其他的数互质. 所以 $n \geq 50$.

我们只需证明 $n = 50$ 满足要求, 即设 T 是 S 中任一个 50 元子集. 要证明 T 中可以找出 10 个数满足 $(*)$.

仍从奇偶性入手.

设 T 中偶数的个数为 a , 奇数的个数为 b . 显然

$$b = 50 - a > 1.$$

设奇数 $x \in T$. x 至多有两个不同的质因数(因为 $3 \times 5 \times 7 > 98$). 所以 T 中与 x 不互质的偶数至多有

$$\left[\frac{98}{2 \times 3} \right] + \left[\frac{98}{2 \times 5} \right] - \left[\frac{98}{2 \times 3 \times 5} \right] = 16 + 9 - 3 = 22 \text{ 个}.$$

如果 $a \geq 31$, 那么可选出 9 个与 x 互质的偶数, 结论成立.

如果 $a \leq 30$ 呢? 这时 $b \geq 20$. 由于 S 中最小质因数为 3 的奇数共 16 个($\left[\frac{98}{3 \times 2} \right] = 16$), 所以 T 中有奇数 x , 它的最小质因数 ≥ 5 . T 中与 x 不互质的偶数至多有

$$\left[\frac{98}{2 \times 5} \right] + \left[\frac{98}{2 \times 7} \right] - \left[\frac{98}{2 \times 5 \times 7} \right] = 9 + 7 - 1 = 15$$

个. 在 $a \geq 24$ 时, 仍可选出 9 个与 x 互质的偶数, 结论成立.

此消彼长. 如果 $a \leq 23$, 那么 $b \geq 27$, S 中最小质因数为 5 的奇数共 7 个(即 $5, 5 \times 5, 5 \times 7, 5 \times 11, 5 \times 13, 5 \times 17, 5 \times 19$). $27 >$

16+7, 所以 T 中有数 x , 它的最小质因数 ≥ 7 . T 中与 x 不互质的偶数至多有

$$\left[\frac{98}{2 \times 7} \right] + \left[\frac{98}{2 \times 11} \right] = 7 + 4 = 11$$

个. 在 $a \geq 20$ 时, 结论仍成立.

如果 $a \leq 19$, 那么 $b \geq 31$. S 中最小质因数为 7 的奇数共 4 个 (即 $7, 7 \times 7, 7 \times 11, 7 \times 13$), 最小质因数为 11, 13, 17 的均只有 1 个. 而

$$31 > 16 + 7 + 4 + 1 + 1 + 1,$$

所以 T 中有数 x , 它的最小质因数 ≥ 19 . T 中与 x 不互质的偶数至多 $\left[\frac{98}{2 \times 19} \right] = 2$ 个. 在 $a \geq 11$ 时, 结论仍成立.

如果 $a \leq 10$, 那么 $b \geq 40$. T 必有一个数 x 在 11 元集

$$P = \{1, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}$$

中, x 与 T 中任一其他的数互质. 在 $a \geq 9$ 时, 仍可任选 9 个偶数与 x 组成符合要求的 10 个数. 在 $a \leq 8$ 时, $b \geq 42$. S 中的 49 个奇数至多有 7 个不在 T 中. 从而 16 个最小质因数为 3 的奇数, 至少有 $9 = 16 - 7$ 个在 T 中. 这 9 个数与 x 符合要求.

这道题的关键想法就在于 a 与 b 的长消. b 越大, 就能选出最小质因数也越大的数 (因而与它不互质的数少). 但本题过程较长, 需要分情况逐步去做, 得有一定的耐心.

竞赛题中, 证明题远多于计算题或求解题. 因为证明题更能培养思维能力, 所以我们将重点放在证明题的讨论上.

2. 基本量

在问题中, 有些量是基本的, 有些量是由基本量派生的. 例如

三角形中,三条边的长 a, b, c 或三个角 A, B, C 是基本的量.而在此基础上得到的量,如中线、高等等,就是非基本的.

解题中,常将非基本的量化为基本的量,使得要证明的结论变为基本量之间的关系,从而变得显而易见或不难证明.这也可以说成是消元,消去派生的或中间的字母,化成只剩下基本字母(如三角形的边长 a, b, c)的问题.

例 在四边形 $ABCD$ 中,对角线相交于 P , BD, AC 的中点分别为 M, N , Q 是 P 关于 MN 的对称点.过 P 作 MN 的平行线,分别交 AB, CD 于 X, Y .过 Q 作 MN 的平行线,分别交 AB, BD, AC, CD 于 E, F, G, H .求证:

$$(1) EF = GH;$$

$$(2) \frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle CPD}} = \frac{XP}{YP}.$$

本题中,四边形 $ABCD$ 的边长是基本的量,其次便是对角线 AC, BD 及 PA, PB, PC, PD .再其次是 MN, XP, YP .最后是 EF, GH .

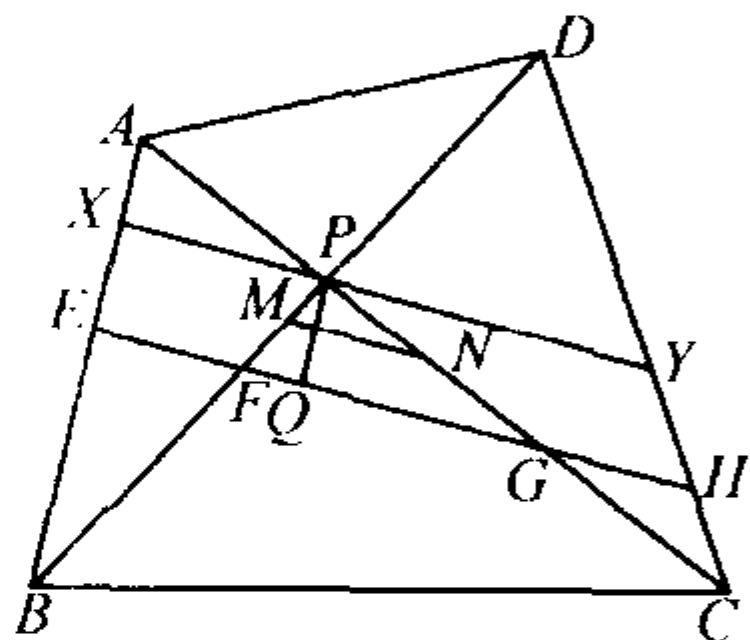


图 2-1

在本题中,不涉及四边形 $ABCD$ 的边长,所以我们将 PA, PB, PC, PD 作为基本量,尽可能将其他量用它们表示.

首先注意 $BF = PD$, 所以

$$\frac{EF}{XP} = \frac{BF}{PB} = \frac{PD}{PB},$$

同理

$$\frac{GH}{YP} = \frac{PA}{PC},$$

所以要证明①只需证明

$$\frac{XP \cdot PD}{PB} = \frac{YP \cdot PA}{PC} \quad (3)$$

这时图 2-1 可以擦去 E, F, Q, G, H , 成为较简单的图 2-2.

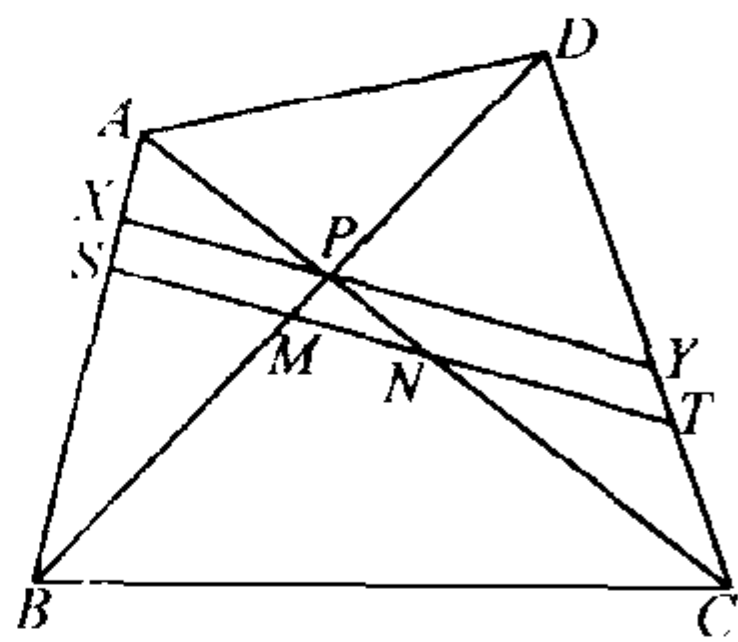


图 2-2

③中的 XP 、 YP 应进一步向基本量“靠拢”. 为此, 设 MN 分别交 AB , CD 于 S , T . 我们有

$$\frac{SM}{XP} = \frac{BM}{PB} = \frac{BD}{2 \cdot PB},$$

$$\frac{SN}{XP} = \frac{AN}{PA} = \frac{AC}{2 \cdot PA},$$

两式相减得

$$\frac{MN}{XP} = \frac{AC}{2 \cdot PA} - \frac{BD}{2 \cdot PB}.$$

同理

$$\frac{MN}{YP} = \frac{BD}{2 \cdot PD} - \frac{AC}{2 \cdot PC}.$$

要证③只需证

$$\frac{PD}{PB} \left(\frac{BD}{PD} - \frac{AC}{PC} \right) = \frac{PA}{PC} \left(\frac{AC}{PA} - \frac{BD}{PB} \right),$$

上式即

$$\frac{BD}{PB} + \frac{PA \cdot BD}{PC \cdot PB} = \frac{AC}{PC} + \frac{PD \cdot AC}{PB \cdot PC}.$$

显然两边都等于 $\frac{BD \cdot AC}{PC \cdot PB}$. 于是③成立, 从而(1)成立.

易知

$$\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle CPB}} = \frac{PA \cdot PB}{PC \cdot PD}.$$

由(3)即知(2)成立.

本题不化为基本量, 直接去证(1)成立, 也不是不可以, 甚至更简单一些. 但我们宁愿采取上面的做法, 它似乎无技巧, 却是一种很高的、可以遵循的技巧. 所谓“大匠不工”, “似拙实巧”, 就是指这种朴实无华的技巧, 在很多场合, 有助于走向成功.

3. 从简单的做起

“天下大事,必作于细.天下难事,必作于易”.解题应当从简单的做起.

从简单的做起,首先可以熟悉题意,通过具体实例,弄清题目的条件与结论.其次,先解决简单问题,可以增强自己的信心:既然我先解决这个特例,那么再努把力兴许就能解决更一般的问题.最后,也是最重要的一点,简单、特殊情况的解决,往往给我们很多的启发,往往指出一条解决一般问题的道路.所以遇到问题,切莫裹足不前,切莫束手无策.只要你动手去试,就会有“策”.

我曾经用小钉锤敲过矿石(那是1958年“大炼钢铁”的时候).矿石很大,浑然一体,似乎无从下手.但只要耐心地敲打,一锤、两锤……终于敲下一小块.再继续不断地敲,最后大矿石瓦解了.解题也是如此.

例1 n 是大于2的自然数,如果有 n 个自然数的和等于这 n 个数的积,那么其中至多有多少个自然数是1?

我们逐步去试.这 n 个数全是1时,和为 n ,积为1,和大于积.不行.

这 n 个数中恰有 $n-1$ 个1,另一个为大于1的自然数 a .这时和为 $n-1+a$,积为 a ,和仍大于积,不行.

这 n 个数中恰有 $n-2$ 个1,另两个数为大于1的自然数 a, b .这时和为 $n-2+a+b$,积为 ab ,等式

$$n-2+a+b=ab$$

是否能够成立?

如果移项,可将上式化为

$$n-1=(a-1)(b-1),$$

(关于整数的问题,应尽量将式子写成因式的积)从而可取

$$a-1=1, b-1=n-1,$$

即 $a=2, b=n$. 这时的确有

$$(n-2)+2+n=2 \cdot n.$$

所以 n 个数中至多有 $n-2$ 个 1.

例 2 $n \geq 6$ 个人中,每个人至少认识 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个人,并且任意 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个人中,或者有两个人互相认识,或者这 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个人以外的人中有两个人互相认识. 证明一定有 3 个人,两两相识.

我们可以先考虑 $n=6$ 的情况,此时每个人至少认识 3 个人,并且任意 3 个人中,或者有两个人互相认识,或者其他的 3 个人中有两个人互相认识.

设 x, y 是 6 个人中互相认识的两个人. 其余 4 个人中,如果 x, y 有共同认识的人,结论已经成立. 设没有 x, y 共同认识的人,那么 x, y 各认识其中的两个人. 设 x 认识 u, v , 而 y 认识 w, t .

现在要利用第二个条件,在 y, u, v 这三个人中,如果有两个人互相认识,这只能是 u, v 互相认识. x, u, v 三个人两两相识,结论成立. 如果 y, u, v 中没有两个人互相认识,那么其余的 3 个人 x, w, t 中有两个人互相认识,同样, y, w, t 三个人满足要求.

$n=6$ 的论证不难推广到 $n=2k$ 的情况.

接下去,我们再考虑 $n=7$ 的情况. 同样可设 x, y 互相认识,并且 x, y 没有公共认识的人. x, y 至少各认识(除 x, y 外的)2 个人. 如果 x (或 y)还认识 3 个人,那么与上面同样,对 x (或 y)与他不认识的 2 个人利用第二个条件便可得出结论. 因此,设 x (除 y 外)只认识 u, v ; y (除 x 外)只认识 w, t . 还剩一个人 z 与 x, y 都不相识.

z 至少认识 3 个人,不妨设 z 认识 u, v, w . 这时 w 除认识 y ,

外,还应再认识一个人,无论这个人是 u, v 还是 t , 结论均成立.

$n = 2k + 1$ 的情况与 $n = 7$ 基本相同.

从简单的做起,可以发现规律. 有时候不知如何入手,更看不清楚规律是什么,这时应当先退后进,即退到最简单的情况,从简单的做起. 待规律看清后,再向前迈进.

例 3 一个 8×8 的棋盘(即由 64 个单位方格组成的正方形),能否分成 32 个 1×2 的矩形(即一边是 1, 另一边是 2 的矩形),并在每个矩形中连一条对角线,使得这 32 条对角线中的任两条都没有公共端点?

分成 32 个 1×2 的矩形很容易. 但要连出的 32 条对角线都没有公共端点就不容易了. 或许这是一件不可能的事情?

情况不清,决心难下. 不如退到最简单的 2×2 的情况. 这时很容易将棋盘分成两个 1×2 的矩形,并各连 1 条对角线,对角线没有公共端点,而且分法连法不止一种,如图 2-3 即是一种.

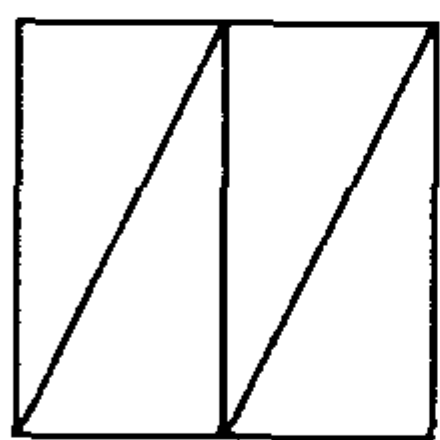


图 2-3

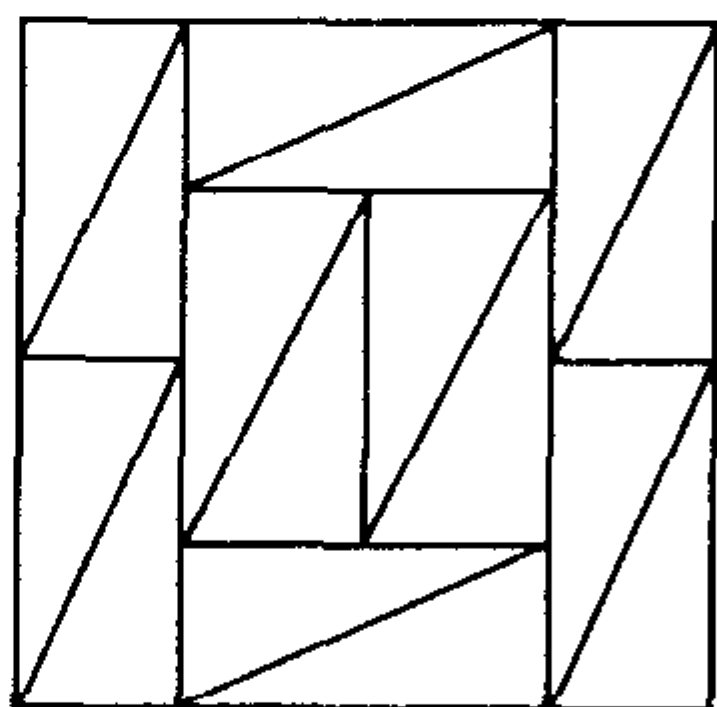


图 2-4

进一步,考虑 4×4 的棋盘. 它可以由刚才的 2×2 的棋盘加一个边框而得到.(在图 2-3 的基础上的)分法只有一种,连法也只有一种,即图 2-4.

再加一个边框便得到图 2-5 的 6×6 的棋盘.

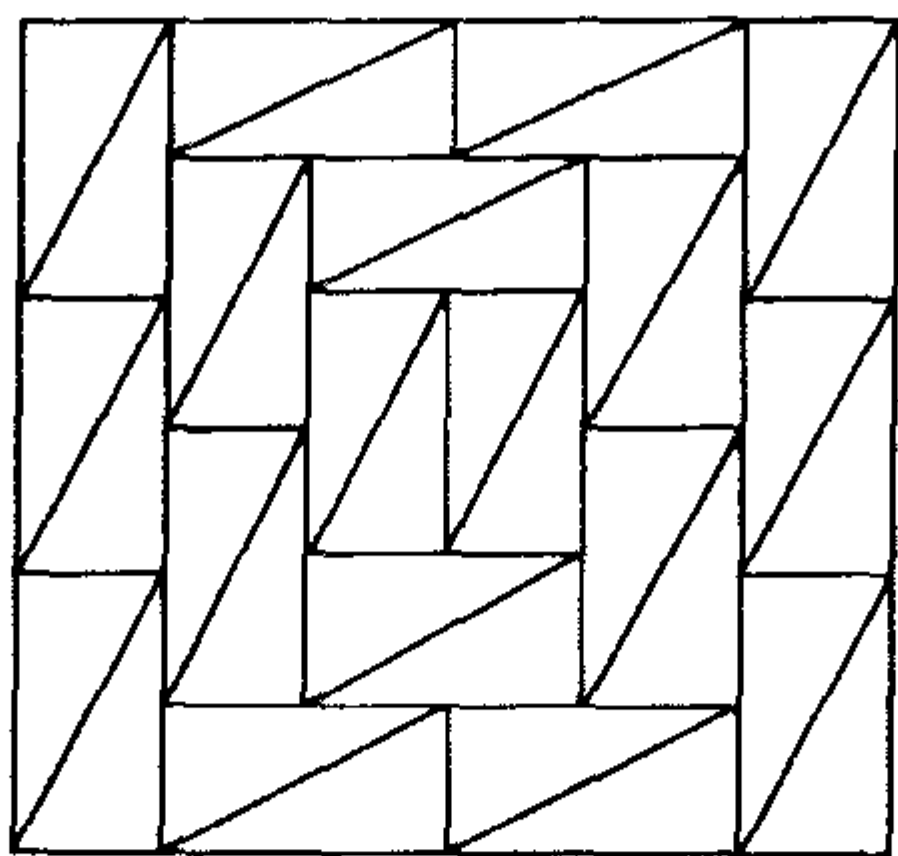


图 2-5

更一般地, 不仅 8×8 的棋盘, $2n \times 2n$ 的棋盘也都可以用这种加框的方法, 逐步进行. 分成 1×2 的矩形, 并在每个矩形中各连一条对角线, 使得这 $2n^2$ 条对角线中每两条都没有公共端点.

4. 寻找规律

数学研究的目的是为了发现规律. 在解题中, 也应当注意寻找规律.

例 1 计算

$$\frac{1^2 + 2^2}{1 \times 2} + \frac{2^2 + 3^2}{2 \times 3} + \frac{3^2 + 4^2}{3 \times 4} + \cdots + \frac{2\,000^2 + 2\,001^2}{2\,000 \times 2\,001}.$$

本题是 2 000 个分数的和, 每个分数的分母是两个连续整数的积, 而分子是它们的平方和. 这就是很明显的规律. 在学过代数之后, 应当知道一般项是

$$\frac{k^2 + (k+1)^2}{k(k+1)}. \quad (k=1, 2, \cdots, 2\,000)$$

如果将分子的两项先加起来, 那么规律就变得模糊不清, 计算也就难以继续下去. 因此, 不应当将分子的两项加起来. 相反地, 应当将

分数“顺势”拆为两项,即

$$\frac{k^2 + (k+1)^2}{k(k+1)} = \frac{k^2}{k(k+1)} + \frac{(k+1)^2}{k(k+1)}.$$

经过约分,变为 $\frac{k}{k+1} + \frac{k+1}{k}$. 前一项较1略小,后1项较1略大,即

$$\frac{k}{k+1} + \frac{k+1}{k} = 1 - \frac{1}{k+1} + 1 + \frac{1}{k} = 2 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

令 $k=1, 2, \dots, 2\,000$, 然后相加即得

$$\text{原式} = 2\,000 \times 2 + 1 - \frac{1}{2\,001} = 4\,000 \frac{2\,000}{2\,001}.$$

本题中的“规律”千万不能破坏,这就像生态平衡要保护,不能破坏一样. 规律破坏了,事情就很难办. 这类“焚琴煮鹤”的傻事千万不能做.

例2 已知 $a_1=0, |a_2|=|a_1+1|, |a_3|=|a_2+1|, \dots, |a_{100}|=|a_{99}+1|$, 求 $a_1+a_2+\dots+a_{100}$ 的最小值.

我们从简单情况做起, $|a_2|=1$, 所以 $a_2=1$ 或 -1 , a_1+a_2 的最小值是 -1 .

如果 $a_2=-1$, 那么 $a_3=0, a_4=1$ 或 $-1, a_1+a_2+a_3+a_4 \geq -2$.

如果 $a_2=1$, 那么 $a_3=2$ 或 -2 , 前者 $a_4=\pm 3, a_1+a_2+a_3+a_4 \geq 1+2-3=0$. 后者 $a_4=\pm 1, a_1+a_2+a_3+a_4 \geq 1-2-1=-2$.

所以 $a_1+a_2+a_3+a_4$ 的最小值是 -2 .

于是我们可以大胆猜想 $a_1+a_2+\dots+a_{100}$ 的最小值是 -50 . 甚至更大胆一些, 猜测 $a_1+a_2+\dots+a_{2n}$ 的最小值是 $-n$. 这里 a_k 满足 $a_1=0, |a_k|=|a_{k-1}+1| (k=2, 3, \dots, 2n)$.

这就是一般的规律, 要证实这一规律并不困难: 如果 $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ 全是非负的, 那么和当然也是非负的. 如果有某个 $a_{j+1} <$

0,那么可设它是 $a_2, a_3, \dots$ 中第一个负数,这时

$$a_{j+1} = -|a_j + 1| = -(a_j + 1),$$

从而

$$a_j + a_{j+1} = -1.$$

同时

$$|a_{j+2}| = |a_{j+1} + 1| = |-a_j| = |a_j| = |a_{j-1} + 1|.$$

于是在 $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ 中将 a_j 与 a_{j+1} 这两个数去掉后,原来的递推关系仍然成立.

这样,将 $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ 中的负数逐步去掉,直至最后剩下的数中没有负数.而每次去掉的两个数的和为 -1 ,所以整个和 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} \geq -n$.

其中等号可以成立,例如 $a_2 = a_4 = \dots = a_{2n} = -1, a_3 = a_5 = \dots = a_{2n-1} = 0$.这时 $a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}$ 取最小值 $-n$.

从简单情况做起,发现规律,提出猜想,然后加以证明,这是数学中常用的方法,尤其在数学归纳法中有很多这样的例子.

例 3 已知数列 $\{a_n\}$,由 $a_0 = 1, a_1 = 5$ 及递推关系

$$a_{n+2} = \frac{2a_{n+1}^2 - 3a_{n+1} - 9}{2a_n}$$

给出.证明对所有 n, a_n 为整数.

直接去证 $2a_{n+1}^2 - 3a_{n+1} - 9$ 被 $2a_n$ 整除,当然无从下手,最好能知道 $\{a_n\}$ 的通项公式.

为此,从简单的做起,逐步发现规律.不难算出 $a_2 = 13, a_3 = 29$.由此可以猜想

$$a_n = 2^{n+2} - 3. \quad \text{①}$$

这猜想在 $n = 0, 1, 2, 3$ 时均成立.假设对 $n, n+1$ 成立,那么由递推公式

$$a_{n+2} = \frac{2(2^{n+3} - 3)^2 - 3(2^{n+3} - 3) - 9}{2(2^{n+2} - 3)}$$

$$= \frac{2^{2n+6} - 15 \times 2^{n+2} + 9}{2^{n+2} - 3}$$

$$= 2^{n+4} - 3,$$

即①对于 $n+2$ 也成立. 从而对一切自然数 n , ①均成立.

由①立即得出 a_n 为整数.

5. 简单自然、直剖核心

解题应力求简单自然. 要抓住问题的实质, 直接剖取核心, 不要拖泥带水、兜圈子、使出很多“废招”.

例 1 m 取什么值时, 方程 $2x^2 - (3m+2)x + 12 = 0$ 与 $4x^2 - (9m-2)x + 36 = 0$ 有一个相同的根?

如果分别解两个二次方程, 再将所得的根加以比较, 那就白花了很多气力. 本题的实质就是(将两个方程的 x 当作同一个数)解方程组:

$$\begin{cases} 2x^2 - (3m+2)x + 12 = 0, & \text{①} \\ 4x^2 - (9m-2)x + 36 = 0. & \text{②} \end{cases}$$

消去 x 就可以得出 m , 先消去 x^2 项, 得出

$$(m-2)x = 4. \quad \text{③}$$

① $\times (m-2)^2$ 再用③代入得

$$2 \times 4^2 - 4(3m+2)(m-2) + 12(m-2)^2 = 0.$$

化简、解得

$$m = 3.$$

不难验证 $m=3$ 时, ①, ②确有一个相同的根 $x=4$.

例 2 在 $\triangle ABC$ 中, 已知

$$a^2 - a - 2b - 2c = 0, \quad \text{①}$$

$$a + 2b - 2c + 3 = 0. \quad ②$$

求 $\triangle ABC$ 的最大角.

解 a, b, c 三个元素, 只有两个方程, 因而无法解出, 只能将其中两个用第三个表示. 由于有 a^2 出现, 如果用 b 或 c 表示 a 将出现根式, 很不方便. 所以宜将 b, c 用 a 来表示.

由①, ②相加消去 b , 化简得

$$c = \frac{a^2 + 3}{4}. \quad ③$$

代入②, 化简得

$$b = \frac{a^2 - 2a - 3}{4} = \frac{(a + 1)(a - 3)}{4}. \quad ④$$

由③, ④显然看出 $c > b$. 又由④, $a > 3$, 从而由③,

$$c - a = \frac{a^2 + 3}{4} - a = \frac{(a - 1)(a - 3)}{4} > 0.$$

即 c 是最大的边, C 是 $\triangle ABC$ 最大的角.

由余弦定理

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{a^2 + (b + c)(b - c)}{2ab} \\ &= \frac{a^2 - \frac{1}{4}a(a - 1)(a + 3)}{2a \times \frac{1}{4}(a + 1)(a - 3)} \\ &= \frac{4a - (a - 1)(a + 3)}{2(a + 1)(a - 3)} \\ &= \frac{-(a + 1)(a - 3)}{2(a + 1)(a - 3)} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

所以 $C = 120^\circ$.

其中 $(b + c)(b - c)$ 可由③, ④得出, 但直接将①, ②变形得

$2b + 2c = a^2 - a$ 与 $2c - 2b = a + 3$, 然后相乘更为简单.

本题 c 与 a, b 的大小比较可以省去, 因为求出的 C 是钝角, 当然是最大角.

有人曾“苦心孤诣呕心呕肝”地研究本题的解法, 其实解法应简单自然, 这是一道并不复杂的问题, 不必过份地“苦心孤诣”, 更没有必要“呕心呕肝”.

例 3 求证

$$S = \sum_{k=0}^n (-1)^k (\sqrt{1991})^k \cdot \sum_{k=0}^n (\sqrt{1991})^k$$

是整数.

如果 k 是偶数, 那么 $(\sqrt{1991})^k$ 当然是整数, 问题出在 k 是奇数的那些项上, 但这些项都是 $\sqrt{1991} \times$ 某个整数. 所以, 如果设

$$A = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ 为偶数}}}^n (\sqrt{1991})^k, B = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ 为奇数}}}^n (\sqrt{1991})^k,$$

那么 A 是整数, $B = \sqrt{1991} \times$ 整数, 并且

$$S = (A - B)(A + B) = A^2 - B^2$$

当然是整数.

处理形如 $(\sqrt{a})^k$ 的式子, 按 k 的奇偶来分类是常用的方法.

本题只需知道二次根式的定义及平方差公式即可解决. 有人却先令

$$f(x) = \sum_{k=0}^n x^k,$$

再令

$$F(x) = f(-x)f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k \cdot \sum_{k=0}^n x^k.$$

然后由 $F(-x) = F(x)$ 知道 F 是偶函数, 从而

$$F(x) = \frac{F(-x) + F(x)}{2},$$

可知 $F(x)$ 只含 x 的偶次项, 成为 x^2 的整系数多项式. 取 $x = \sqrt{1991}$ 可得 $S = F(\sqrt{1991})$ 是整数.

这样处理与上面的做法相比, 明显地将简单问题复杂化, 极不可取.

6. 跟着感觉走

学音乐的人乐感好, 打乒乓的人球感好. 下棋有棋感, 游泳有水感, 学数学也必须有良好的数学感觉, 这主要指对数量的大小、图形的对称……一般地, 指对研究对象的内在规律或内在联系的把握程度.

数学的感觉非常重要. 按照菲尔兹奖获得者小平邦彦的观点, 能否学好数学取决于有无良好的数学感觉.

除去先天的因素外, 数学感觉可以逐步培养.

解题时的“题感”, 也是数学感觉的一个反映. 题做得越熟, 题感就越好. 解题时, 我们往往“跟着感觉走”.

这里举一个例子.

例 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, 对角线相交于 O , P 、 Q 分别在腰 AD , BC 上, 并且 $\angle APB = \angle CPD$, $\angle AQB = \angle CQD$. 求证: $OP = OQ$.

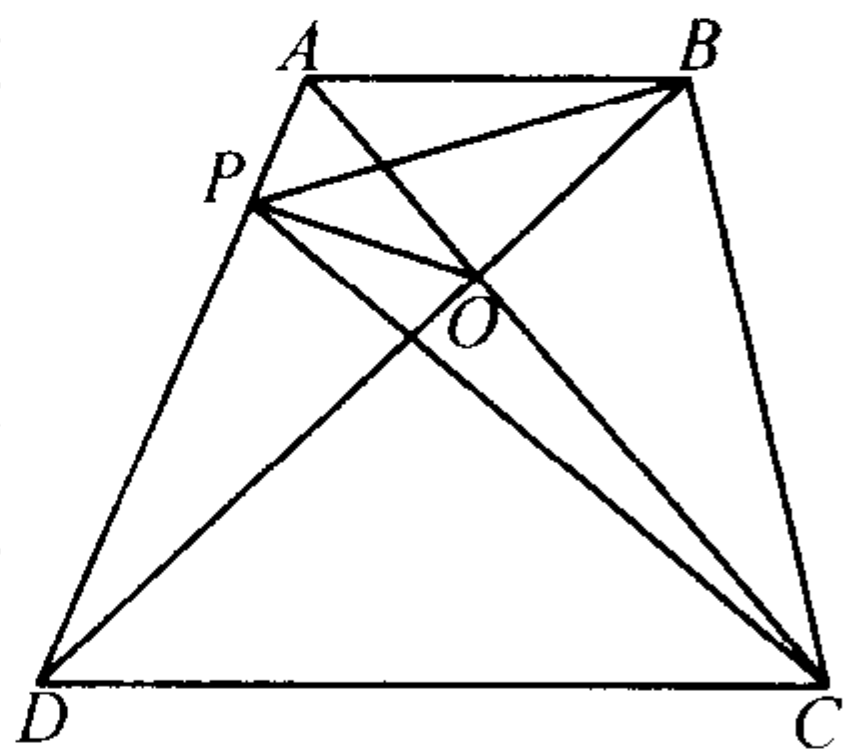


图 2-6

梯形 $ABCD$ 中, 四条边的长是基本的量. 画好梯形后再连对角线. OA , OB , OC , OD 是次基本的量, 最后再定 P , Q 点. P , Q 有某种对称性, 即 P 点怎样确定, Q 点也怎样确定 (虽然本题并不要求精确地定出 P , Q 点), 而且, 如果 OP

可以算出,即用基本量或次基本量表示,那么 OQ 也可以类似地算出,表达式与 OP 的表达式也有对称性(如 AD 换成 BC , OA 换成 OB 等等),从而导出两者相等.

有鉴于此,我们只需计算 OP ,所以图中也只画出 OP .

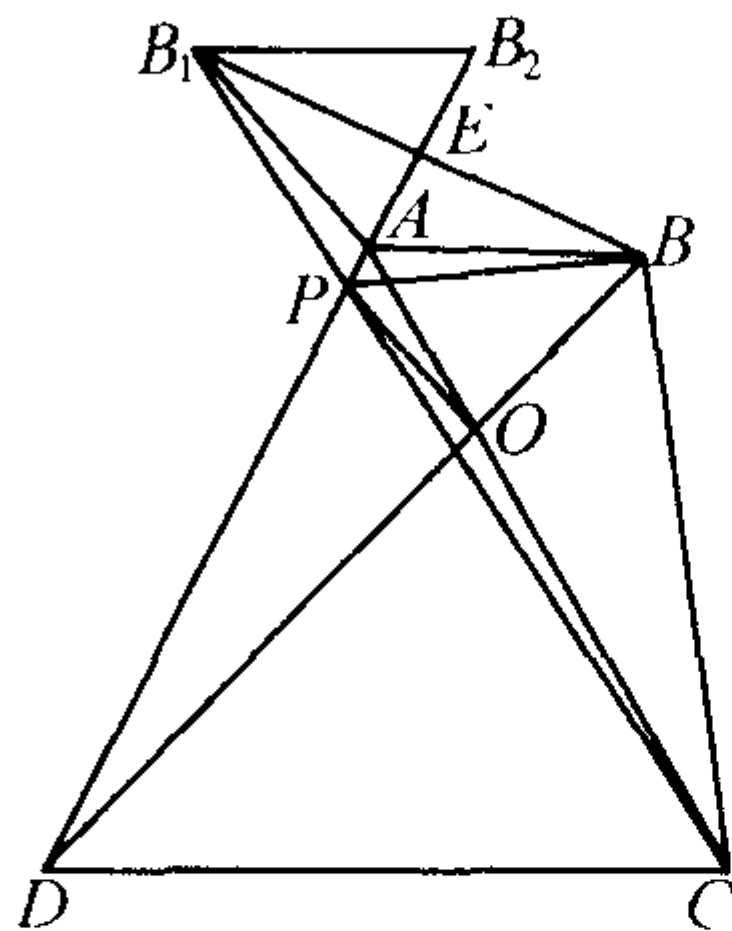


图 2-7

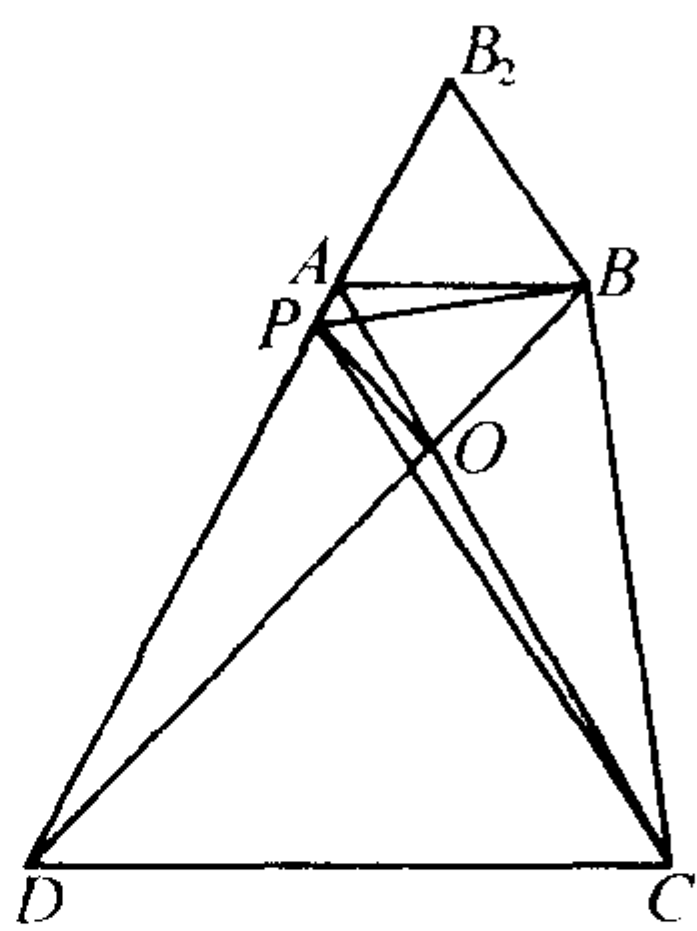


图 2-8

为了计算 OP ,有两种常用方法,一种是先考虑如何精确地定出 P 点.

由 $\angle APB = \angle CPD$,我们回忆起一个著名的问题:在 AD 上找一点 P ,使 $PB + PC$ 为最小,作法是求出 B 关于 AD 的对称点 B_1 ,连结 CB_1 ,它与 AD 的交点就是 P .

完成上述确定 P 的作图后,连结 OP , AB_1 .如果图作得精确的话,你会看到(感觉到)什么?

“看到 $OP \parallel AB_1$ ”.

应当相信这一正确的感觉.而且你一定会有感觉:这就是本题的关键.

的确,跟着这种感觉走下去,如果 $OP \parallel AB_1$,那么

$$OP = AB_1 \times \frac{OC}{CA} = AB \times \frac{OC}{CA}, \quad ①$$

而对称地,

$$OQ = AB \times \frac{OD}{DB}.$$

但 $\frac{OC}{CA} = \frac{OD}{DB}$ (因为 $AB \parallel CD$), 所以结论成立.

剩下的是证明确实有 $OP \parallel AB_1$, 这是比较困难的事. $\triangle CPO$ 与 $\triangle CB_1A$ 应当相似, 但无法证明 $\angle CPO = \angle CB_1A$ 或 $\angle COP = \angle CAB_1$, 只有证

$$\frac{CO}{OA} = \frac{CP}{PB_1}. \quad ②$$

要构成相似三角形或产生比例线段, 最好也是最简单自然的办法, 就是过 B_1 作 CD 的平行线交 DA 于 B_2 , 这样

$$\frac{CP}{PB_1} = \frac{CD}{B_1B_2},$$

而

$$\frac{CO}{OA} = \frac{CD}{AB},$$

所以要证②, 只需证

$$AB = B_1B_2. \quad ③$$

这差不多是显然的(因为 AB_2 过 BB_1 的中点 E 而且与 BB_1 垂直, $B_1B_2 \parallel AB$, 所以 $\triangle B_1EB_2 \cong \triangle BEA$), 或许前面不作 $B_1B_2 \parallel CD$, 而是在 AE 上取 B_2 使 $EB_2 = AE$ 更好一些, 因为这样一来更显然看出四边形 ABB_2B_1 是菱形, $B_1B_2 \parallel CD$.

另一种计算 OP 的方法不涉及如何确定 P 点.

要得出①, 当然要用相似形, 已知 $\angle APB = \angle CPD$, 但 $\angle PAB$ 与 $\angle PDC$ 互补而不是相等, 所以 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PDC$ 不相似, 为了得出相似三角形得将 BA “弹出去”, 即在 DA 上取 B_2 , 使 $BB_2 = BA$, 这时 $\angle BB_2P = \angle BAB_2 = \angle CDP$. 从而 $\triangle BB_2P \sim \triangle CDP$. 于是

$$\frac{DP}{B_2P} = \frac{CD}{BB_2} = \frac{CD}{AB} = \frac{DO}{OB}.$$

这就导出 $OP \parallel BB_2$,

$$OP = BB_2 \times \frac{DO}{DB} = AB \times \frac{DO}{DB}.$$

也就是①成立.

图 2-8 中的 B_2 与图 2-7 中的 B_2 , 其实是同一个点.

后一种方法比前一种简单一些, 但前一种解法顺便定出了 P 点的精确位置, 两种解法实质相同, 也都是简单自然的.

简单自然, 就是正确的感觉. 如果在解题的过程中, 发觉越来越麻烦, 一团漆黑, 看不见路在何方, 那么多半你已经走到错误的道路上了, 明知死路一条, 那就不要坚持走这条道路, 及早抽身, 迷途知返才是上策.

事实上, 任何认真考虑过他的问题的人对于目标的接近程度和成功的可能都会有一定的感觉. 要相信正确的感觉, 跟着感觉走, 脚步越来越轻, 越来越快活, 成功就在不远处等着你.

7. 思则有路

常常有人问我解题的思路. 当然, 在讲题时, 每一位事先看过解答并作好充分准备的教师, 都可以把“思路”讲得清清楚楚, 似乎每一步都是合乎逻辑的产物. 其实, 实际解题时并非如此.

思路, 其实是说不清的. 你必须亲自解题才能体会到这一点, 解题时迈进的每一步, 不完全靠逻辑, 更多地是靠你的感觉. 如果越来越简单, 你会感到路走对了, 胜利就在前头. 如果越来越复杂, 越来越艰难, 你也应发现前景不妙, 希望渺茫. 简单自然, 往往是你判断的准则, 而逻辑很可能是事后诸葛, 对你的行为作“合理”的解释.

思才有路. 如果自己不动脑筋, 只等别人将解答告诉他, 那么即使说得非常清楚, 很可能还是一头雾水. 不知道思路是什么, 至

多知其然,却不知其所以然.

反之,如果已经认真作了思考,即使还没有获得解答,只要得到简单的“揭示”,被“点了一点”,也就能豁然贯通,完成剩下的部分.

思则有路.反复地思考,不断探索,再三地试,从简单的做起,从不同的角度观察,探测问题的各个方面,不放过丝毫的可能性,从挫折中不断总结,终于,皇天不负苦心人,突然之间,灵感来了,像“被一道闪电击中”,出现了一个巧妙的想法,看到了灿烂的阳光,一切全清楚了.

有一次,我看见一位中学生解下面的题:

例 已知 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,外心为 O , P 在 BC 上, AP 是高,若 $\angle BCA \geq \angle ABC + 30^\circ$. 证明 $\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$.

这位同学首先注意到 $\angle CAB + \angle OCP = 90^\circ$,从而将问题化为证明 $\angle OCP > \angle COP$ (很合逻辑的一步),也就是要证明

$$OP > CP. \quad ①$$

(这也完全合乎逻辑).

为了证明①,他将 CP, OP 用 $\triangle ABC$ 的基本元素(即边长 a, b, c 与角 A, B, C)及外接圆半径表示. 易知

$$CP = b \cos C. \quad ②$$

但 OP 有点难算,由勾股定理,

$$\begin{aligned} OP^2 &= DP^2 + OD^2 = \left(\frac{a}{2} - b \cos C\right)^2 + (R \cos A)^2 \\ &= R^2 \sin^2 A + b^2 \cos^2 C - ab \cos C + R^2 \cos^2 A \\ &= R^2 - ab \cos C + b^2 \cos^2 C. \end{aligned} \quad ③$$

由②,③,只需证明

$$R^2 > ab \cos C,$$

即

$$1 > 4 \sin A \sin B \cos C. \quad ④$$

以上步骤完全合乎逻辑,但问题并未走向简单. 利用已知条

件,④是可以证明的,但决非容易(或许证明④比证明本题原来的结论更难).

毛病出在哪里?显然, OP 的计算太繁,因而带来④的右边出现三个三角函数的积(两个三角函数的积可用积化和差公式,三个就不太好办了).如果想要简单,胆子应当大一点,将①改为更强的结论:

$$DP > CP, \quad (5)$$

其中 D 是 BC 的中点.

DP 当然比 OP 容易计算.⑤其实就是要

$$CP < \frac{1}{2}CD,$$

即

$$4 \sin B \cos C < \sin A.$$

利用和差化积易知⑥可由

$$2 \sin(C - B) \geq 2 \times \frac{1}{2} = 1 > \sin A$$

推出.

作出用⑤代替①的决断,是一个大胆的行为.它的出发点是解题时的良好感觉:力求简单自然.图 2-9 或许也会提供给你一个直观的印象.当然,如果需要用逻辑来说明这一行为的合理性,也有解释的办法,请参见第六章第 4 节例 1(那里的解法是纯几何的,完全没有用三角).

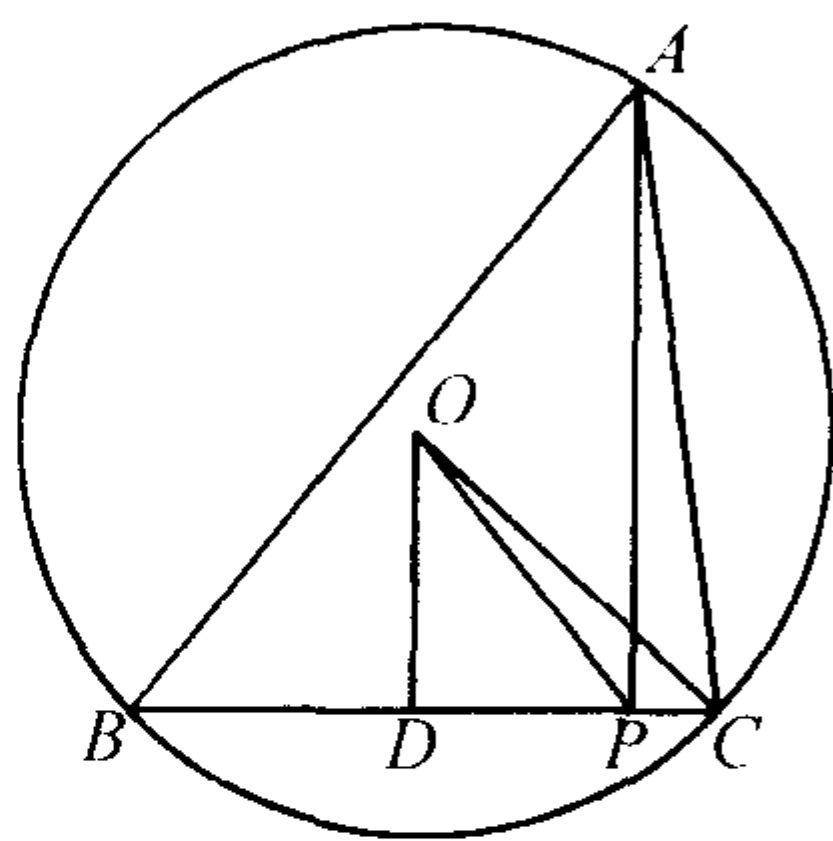


图 2-9

8. 要有好的想法(一)

解题需要有好的想法.

学而不思则罔,在学习中应当多想.数学是抽象的,又是具体的.要把抽象的内容与生动的例子结合起来,才能真正理解抽象的内容.因此,学习数学要掌握很多具体的实例,正面的或反面的.只有这样,才能真正地“感觉”到数学,解题时也就能左右逢源.

例 1 平面上有 5 个全等的三角形纸片,只允许平行移动,不允许旋转,能否用其中 4 个将第 5 个完全盖住?

如果你见到“海马”——海洋中的一种鱼类,它总是直着身子(尽管有上下波动)在水里游,那么你就会想到:在 4 个三角形都是直立的“海马”,并且长度超过宽度的 4 倍时,它们无法盖住第五个横放的(可能已经死去的)海马(不论将它们怎样平行移动,即上、下、左、右的移动).

例 2 平面上有 5 个全等的正三角形纸片,只允许平行移动,不允许旋转,能否用其中 4 个将第 5 个完全盖住?

现在增加了一个条件:纸片都是正三角形.因此感觉答案应当是肯定的,即能够盖住.

怎样证明呢?

将第 5 个正三角形用三条中位线分成 4 个全等的正三角形,每一个的边长是原来的 $\frac{1}{2}$,要证明每一个边长为 1 的正三角形,(只)经过平移可以覆盖一个边长为 $\frac{1}{2}$ 的正三角形.

三角形是“有角的”,各个方向不均匀(即使是正三角形).比正三角形更“均匀”的图形是圆.圆没有角,在任何一个方向看都是完全一样的.一个边长为 $\frac{1}{2}$ 的正三角形可以用它的外接圆盖住,而这个外接圆正好与边长为 1 的正三角形的内切圆一样大,经过平移,可以使大的正三角形的内切圆与小的正三角形的外接圆重合(只要使圆心重合就可以了),从而大的正三角形也就覆盖了小的正三角形.

举例要靠平时留心.例如第一章第15节的例题:

圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线相交于 E , 并且互相垂直. 求证

$$EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4R^2. \quad ①$$

其中 R 是圆的半径.

这道题是个通常的几何题, 但可以反问一句: 如果①成立, 是否必有对角线 $AC \perp BD$?

这样的问题应当经常去想, 久而久之, 数学的修养(解题的能力)就会大有提高. (本题的答案当然是否定的: 相交于圆心 O 的两条直线经 AC, BD , 满足①式, 其中 E 即圆心 O , 但一般说来 AC 与 BD 不互相垂直.)



要有好的想法(二)

好的想法, 除了平时留心、多想, 还要靠学习.

要读点书. 可以先读一些数学小册子. 前苏联曾组织数学家写过很多小册子, 如《直圆柱》《摆线》《循环级数》等, 在 1950—1966 年期间就译成中文, 由中国青年出版社等单位出版, 内容广泛、精练、有趣, 可读性很强. 可惜现在已经很少见到. 我国以华罗庚先生为首的数学家在上个世纪 60 年代也写过很多小册子, 如《从杨辉三角谈起》《从孙子的神奇妙算谈起》《一笔画与邮递路线问题》等, 对数学的普及起了很好的作用. 文化大革命后, 上海教育出版社也推出很多小册子, 如《抽屉原则及其它》《几何不等式》《趣味的图论问题》《覆盖》《不定方程》《计数》等, 这套小册子均有大量例题与习题. 还有中国科学技术大学出版社出版的《解析几何的技巧》《算两次》《组合恒等式》等. 这些均可作为课外阅读或数学小组讨论的材

料.有能力的同学还可读一点高等学校的课程.

“思而不学则殆”,如果不读书,只凭自己空想,也是不易提高的.应当将学与思两者结合起来,观点提高了,见识增长了,好的想法往往也就自然产生了.

请看下面的一道竞赛题.

例 1 对于给定的大于 1 的正整数 n , 是否存在 $2n$ 个两两不同的正整数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, 同时满足以下两个条件:

$$(1) a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n;$$

$$(2) n - 1 > \sum_{i=1}^n \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} > n - 1 - \frac{1}{1998}.$$

请说明理由.

解这道题需要有一点“极限”的观念,这正是本题的优点(体现高等数学的背景).

$2n$ 个数,只要求适合两个条件,选择余地很大,答案应当是肯定的.

(2) 中 $\frac{1}{1998}$ 可改为任一小正数. (2) 表明 $\sum_{i=1}^n \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i}$ 大致为 $n - 1$, 所以可以取 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 远大于 $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$. 这样, 前 $n - 1$ 个分数均大致为 1, 它们的和大致为 $n - 1$ (但小于 $n - 1$), 在 $a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$ 取定后, 由 (1), b_n 应大于 a_n , 它们的差

$$b_n - a_n = (a_1 + \dots + a_{n-1}) - (b_1 + \dots + b_{n-1}).$$

如取 a_n 远大于这个差 (b_n 更远大于这差), 则第 n 个分数 $\frac{a_n - b_n}{a_n + b_n}$ 的值是负数, 大致为 0. 从而 (2) 成立.

具体一点, 可令

$$a_1 = N + 1, a_2 = N + 2, \dots, a_{n-1} = N + (n - 1),$$

$$b_1 = 1, b_2 = 2, \dots, b_{n-1} = n - 1.$$

这时有

$$b_n - a_n = N(n-1).$$

令(a_n 比差 $b_n - a_n$ 的“阶”高)

$$a_n = N^2, b_n = N^2 + N(n-1),$$

则

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} = n - 1 - \left(\frac{2}{N+2} + \cdots + \frac{2(n-1)}{N+2(n-1)} + \frac{n-1}{2N+(n-1)} \right)$$

显然小于 $n-1$. 而取 N 充分大(比如 $N > 2n(n-1) \times 1998$),

$$\text{则上式} > n - 1 - \frac{2n(n-1)}{N} > n - 1 - \frac{1}{1998}.$$

本题如有“背景知识”,即可居高临下,产生上面的好想法:在 $1 \leq i \leq n-1$ 时, $a_i - b_i$ 与 $a_i + b_i$ 大致是“一阶的”,即大致为一个数 N . 而 a_n 与 b_n 是“二阶的”,即大致为 N^2 , 并且差 $b_n - a_n$ 是一阶的. 如果没有背景知识,没有极限观点,那就难以看清解题的路线. 枉被别人(如果看未将思路写清楚的解答)牵着鼻子走或沉溺于琐碎的、无关紧要的“细节”中. 所以应该努力多学点东西,登上更高的一层楼,就能看得更清楚,更透彻.

例2 化简 $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

本题在第一章第6节例4已经说过. 如果观点高一点,可以将它看成一个 x 的次数 ≤ 2 的多项式. 如果你又知道多项式恒等定理:

两个次数 $\leq n$ 的多项式,对 $n+1$ 个 x 值取相同的值时,这两个多项式一定恒等.

那么,就可以用3个值 $x=a, x=b, x=c$ 分别代入上式,不难看出式子的值都是1. 于是有恒等式

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

如果你知道拉格朗日插值多项式,对上面的结果就更觉得非常显然了.

10. 从不同的角度看问题

“横看成岭侧成峰,远近高低各不同”.从不同的角度去看同一个问题,会得出不同的看法,因而也就产生不同的解法.例如平面几何问题,可以从纯几何的角度去看,也可从解析几何的角度去看,还可从三角的、复数的或者向量的角度去看.如果你头脑灵活而不僵化,学识越多,看问题的角度也就越多.有时一个很难的问题,换一个角度来看却比较容易.所以解题时特别需要从不同的角度来看.

例 $\triangle ABC$ 的与 C, B 相对的傍切圆分别为 $\odot O_1, \odot O_2$, $\odot O_1$ 分别切 CB, CA 的延长线于 E, G , $\odot O_2$ 分别切 BC, BA 的延长线于 F, H , 直线 EG, FH 相交于 P .

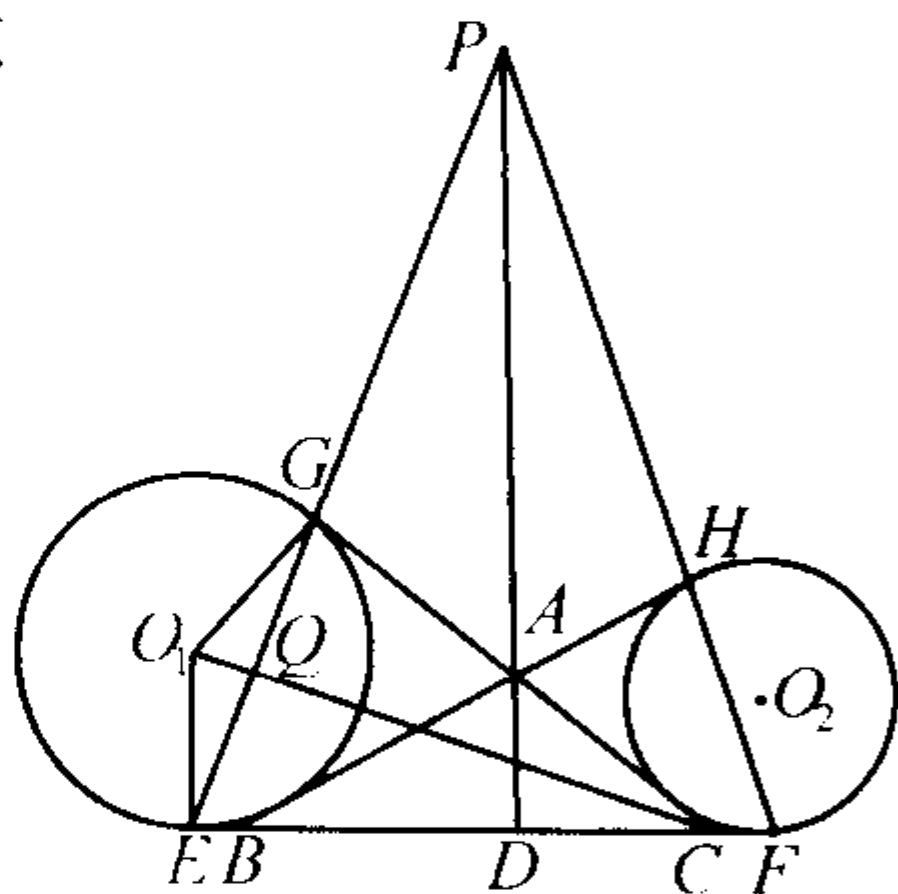


图 2-10

求证: $PA \perp BC$ (图 2-10).

直接证明 $PA \perp BC$ 并不容易(当然不是不可以).我们换一个角度来看问题.

设 AD 是 BC 边上的高.直线 EG 交 AD 于 P , FH 交 AD 于 P' .如果能证明 P 与 P' 重合,那么问题也就解决了.

而要证明 P 与 P' 重合,只需证明 $DP = DP'$.问题又化为 DP (与 DP') 的计算.而 DP 在直角三角形 PDE 中.如果设 CO_1 交 EG 于 Q ,那么 $\angle CQE$ 也是直角(因为 CE, CG 是 C 向 $\odot O_1$ 所引

的两条切线), 所以 $\triangle PDE \sim \triangle CQE$, 而 $\triangle CQE$ 又与 $\triangle CEO_1$ 相似. 所以 $\triangle PDE \sim \triangle CEO_1$ (也可以不通过 $\triangle CQE$, 直接证明这两个三角形相似), 于是得出

$$DP = \frac{DE \times CE}{O_1E}.$$

同理

$$DP' = \frac{DF \times BF}{O_2F}.$$

容易看出 $CE = CG = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) = BF = BH$. 所以问题又化为:

设 $\triangle ABC$ 的与 C, B 相对的傍切圆分别为 $\odot O_1, \odot O_2$, 它们分别切直线 BC 于 E, F , AD 为高. 求证

$$\frac{O_1E}{DE} = \frac{O_2F}{DF}. \quad ①$$

解决问题的过程, 实际上就是不断地变更你的问题, 直到它越来越容易解决.

这里可以诉诸我们的感觉, 判断一下现在的问题是否比原来的简单.

应当说, 问题已经变得简单一些了, P 与 P' 已经不再需要, 图也变成较简单的图 2-11.

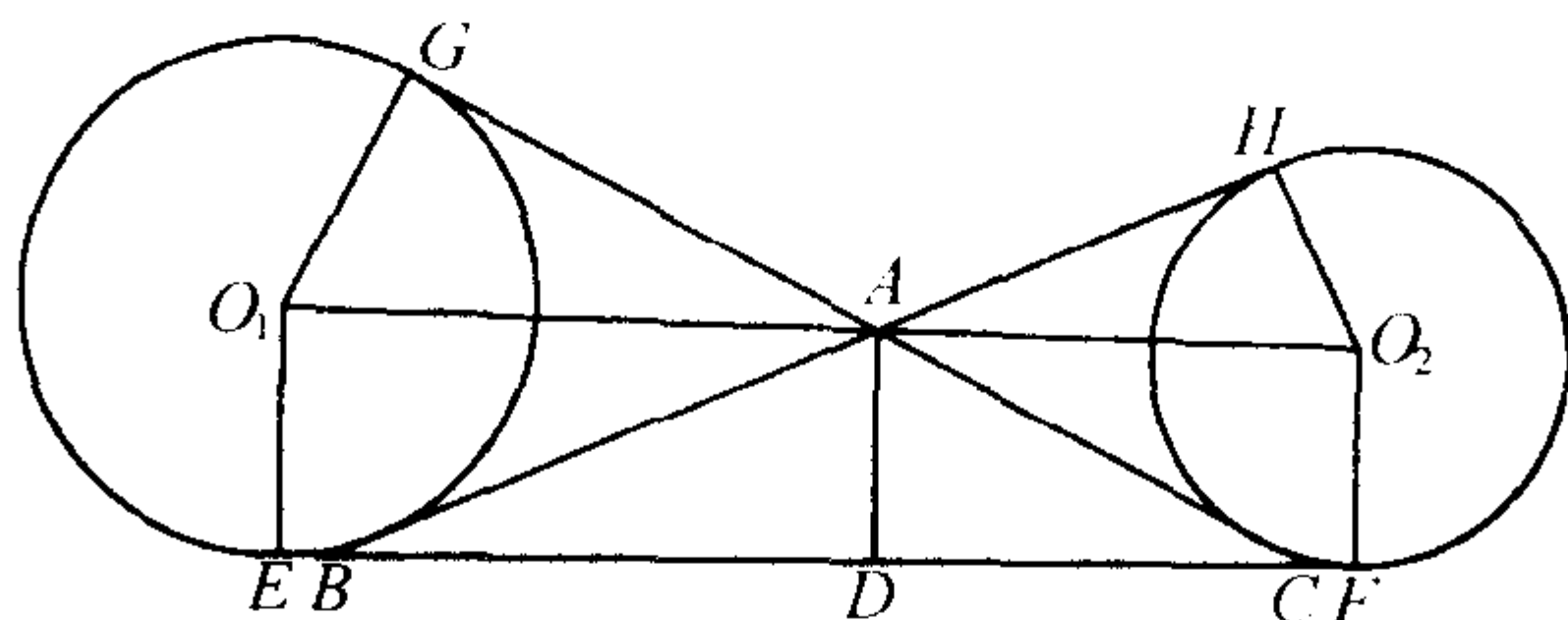


图 2-11

因此, 我们所走的道路是正确的, 应当满怀信心地走下去 (如

果反过来,问题越来越复杂,那就要另找一条路了).

显然 $\frac{DE}{DF} = \frac{AO_1}{AO_2}$, 而 $\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{O_1E}{O_2F}$ 又是显然的. 因为 A 是 $\odot O_1$, $\odot O_2$ 的内相似中心. 如果看不到这一点, 也可以由 $\triangle AO_1G \sim \triangle AO_2H$ 得出 $\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{O_1G}{O_2H} = \frac{O_1E}{O_2F}$, 于是问题便告解决.

11. 创造条件

条件越多,问题就越容易解决.

解题时,首先要牢记已知条件,加以充分利用,不仅如此,还要努力创造条件. 例如要证命题“若 A , 则 B ”, 可以采取反证法. 反证法其实就是增加了一个强有力的条件 $\bar{B}$, 而要证明的结论则是“矛盾”, 无论与什么矛盾均可(与已知矛盾, 与已证矛盾, 与熟知结论矛盾等等).

再如枚举法(穷举法), 分为几个情况讨论, 每一种情况就增加了一个条件, 例如第 1 节的例题中, 分为 (1) $a \geq 31$, (2) $30 \geq a \geq 24$, (3) $23 \geq a \geq 20$, (4) $19 \geq a \geq 11$, (5) $10 \geq a$ 五种情况. 在情况 (1) 中增加了一个条件 $a \geq 31$, 其他情况也都增加了条件. 因而在每一种情况中, 问题都容易解决, 枚举是个很重要的方法. 如果问题不是一揽子完全解决, 那么一部分一部分地解决不失为一种可行的办法, 这比束手无策, 守株待兔要好得多.

归纳法, 也是增加一个强有力的条件: 归纳假设, 假设命题对 $n-1$ (或 $< n$ 的自然数) 成立, 在此条件下证明命题对 n 成立. 有时宁愿将要证的结论加强再证. 因为运用归纳法时, 要证的结论加强了, 归纳假设也就加强了, 手中的条件增强, 对证明当然有利.

同一法则是变更命题,将条件与结论颠倒,改证逆命题.在有某种惟一性时,原命题与逆命题是等价的.如果逆命题更好证,这也是一种创造条件的办法.

例 已知 $\triangle ABC$ 的,与 C, B 相对的傍切圆分别切 AB, AC 于 M, N ,而 D, E 分别为 BC, MN 的中点,求证:

- (1) DE 平分 $\triangle ABC$ 的周长;
- (2) DE 平行于 $\angle BAC$ 的平分线 AT .

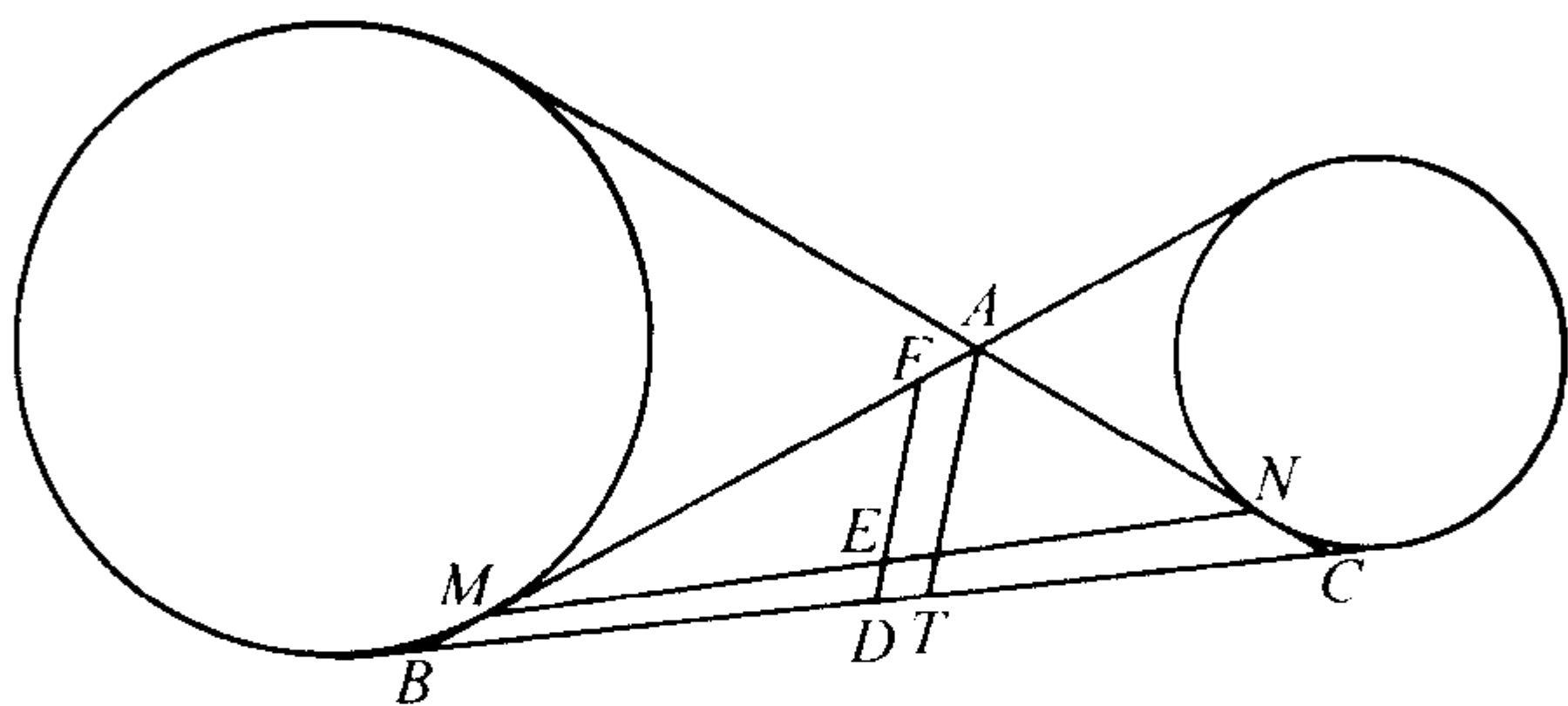


图 2-12

本题条件“ D 为 BC 中点”,是一个与 $\triangle ABC$ 直接有关的条件,但“ E 为 MN 的中点”,与原来的 $\triangle ABC$ 没有直接关系,因此难以证明 DE 具有性质(1),(2).

困难像一堵墙横亘在我们面前,我们没有必要非用头去撞墙,如果旁边有门,宁可走门出去,绕过墙这道障碍.

现在的情况就是如此,我们可以绕过障碍.不妨设 $AB \geq AC$,在 AB 上取一点 F ,使得 $BF = FA + AC$.

然后,我们证明:

(3) $DF \parallel AT$.

(4) $EF \parallel AT$.

由于过 F 只能作一条直线平行于 AT . 如果(3),(4)成立,那么 D, E, F 共线,这条直线 DE 当然满足(1),(2).

于是问题既为证明(3),(4),而 D, F 平分 $\triangle ABC$ 的周长则成

为我们的条件——一个重要的有力的条件.

(3) 不难证明: 延长 BA 到 P , 使 $AP = AC$, 这时 $BF = FA + AC = FA + AP = FP$, 所以 DF 是 $\triangle BCP$ 的中位线, $DF \parallel CP$.

同时, $\angle ACP = \angle APC = \frac{1}{2} \angle BAC = \angle TAC$, 所以 $AT \parallel CP$.

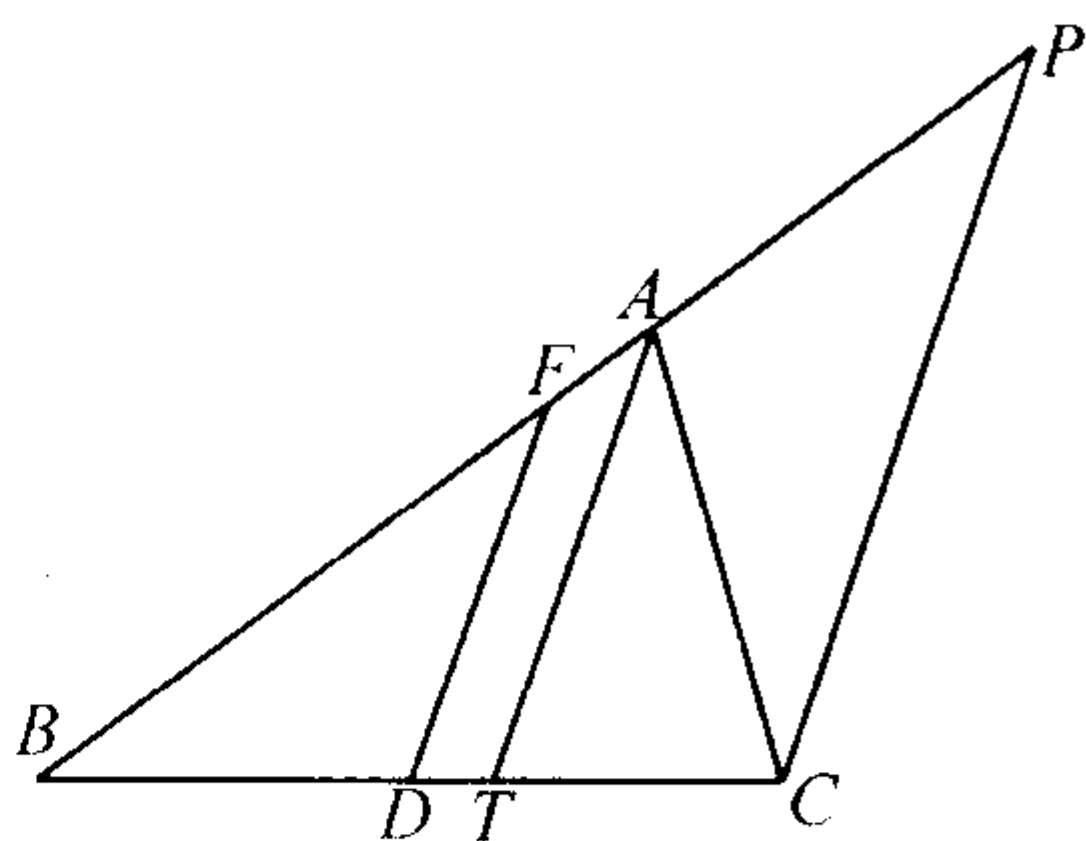


图 2-13

于是(3)成立.

(4) 也不难证明, 只要注意 $BM = s - a$, 其中 $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ 是 $\triangle ABC$ 的半周长 (C 到所对傍切圆的切线长为 s , 它减去 BC 就等于 BM).

$CN = s - a$, 所以 EF 也平分 $\triangle AMN$ 的周长, 由(3)即得 $EF \parallel AT$.

上面的解法就是一种同一法, 它将不利因素(要证 DE 平分 $\triangle ABC$ 周长)改为有利条件“ DF 平分 $\triangle ABC$ 的周长”, 这种手法值得仔细体会.

12. 非智力因素

“汝果欲学诗, 功夫在诗外”, 解题也是如此, 要提高解题能力, 除了去解题外, 还有一些题外功夫.

第一, 要有浓厚的兴趣. 数学学得好的同学, 对数学原本就有兴趣, 要保持、发展这种兴趣, 不断体会到解出题来的乐趣, 而且从

解一般的题发展到解有挑战意味的竞赛题.遇到难题,锲而不舍,昼思梦想,精诚所至,金石为开,所谓“思之,思之,反复思之,思之而不通,鬼神将通之”,这里的“鬼神”,心理学上便称为“潜意识”.

第二,要有信心.不要怕困难,不向困难低头,要有“舍我其谁”的气概.“这样的难题是对我的考验,我当然能做出来”.“只要给我足够的时间,我一定能解决它”.随着做出的难题越多,信心应当越来越强,好似一位百战百胜的将军,“在我的字典里,没有做不出这个词”.

第三,要有决心.遇到一道题,要全力以赴,下定“我一定要把它解出来”的决心,灭此朝食.做题得花时间,但所花时间并不是简单的加法或乘法,越熟练,水平越高,花的时间就越少.大量题目,往往5分钟就可解决,少数的需要20~30分钟,极少数才需要1个小时以上.

第四,要通过总结,不断增长才识,能够判明什么样的解法是优雅的解法,什么样的解法是兜圈子,逐步掌握简单自然的解法.在解题中,根据“简单自然”的原则去寻找解法,去调整思路.这种识别、判断、鉴赏与调节的能力是十分重要的.

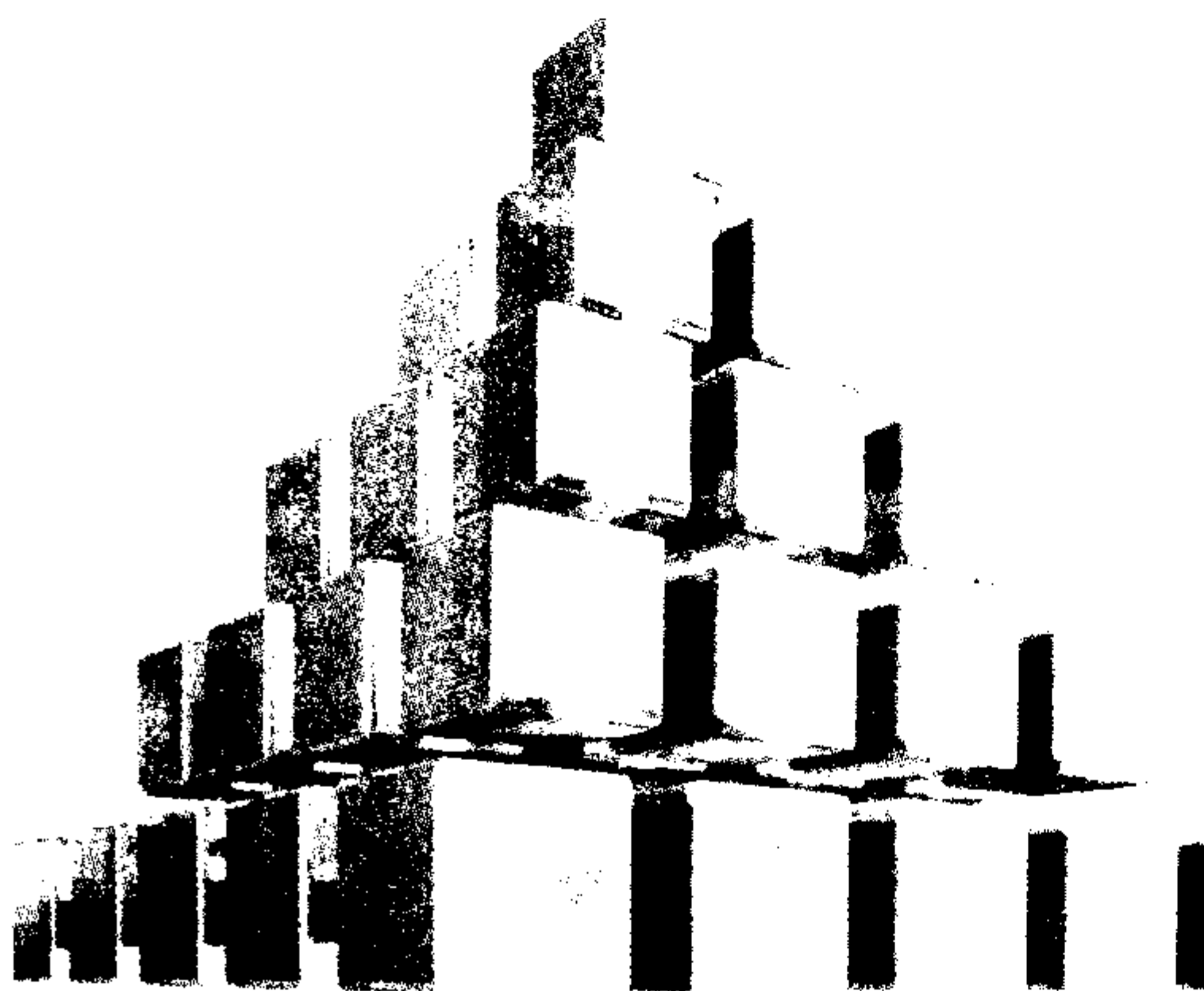
在第三章第10节中,我们还要强调总结的重要性.

以上几点都属于“非智力因素”.

此外,还要善于学习,学习书上或别人的好的解法,把别人的长处变为自己的长处,集思广益,不要固执己见,骄傲自满,以为自己的解法一定是最好的.

解题的基本知识

本章介绍解题的基本知识(有人称之为解题理论或解题学),特别是著名教育家波利亚的“怎样解题”表,同时介绍我们所总结的一些解题原则.



1. 问题是数学的心脏

在《数学的心脏》(美国数学月刊 1980 年第 7 期)这篇文章中,数学家 P. R. Halmos 劈头提出一个问题:

“数学究竟是由什么组成的?”

“公理? 定理? 证明? 概念? 定义? 理论? 公式? 方法?”

Halmos 认为这些都很重要,但不是数学的心脏,他强调指出:

“问题是数学的心脏.”

这句名言代表了众多数学家的共同看法,也反映了数学发展的真实情况.

从古到今,有许多著名的数学问题脍炙人口,例如尺规作图的三大问题(指三等分任意角、立方倍积、化圆为方,后来都被证明不可能用尺规作图完成);高次方程的求根公式(三次、四次方程可以借助于 Fartaglia—Cardano 公式,一般的高于四次的方程没有根式解,这是 Abel 等人证明的);最速降线(Johann Bernoulli 指出质点从一点下降到另一点的最快的曲线是摆线);Fermat 大定理($n \geq 3$ 时, $x^n + y^n = z^n$ 没有正数解,这个大猜测、大问题,直到 1995 年,才被怀尔斯(Andrew Wiles, 1953—)解决)等等. 对这些问题的研究大大促进了数学的发展,产生了许多的新概念、新方法,甚至新的数学分支. 正是化圆为方问题的刺激, Lindemann 证明了 π 是超越数,成为超越数论这一数学分支的滥觞. 而 Galois 在构造具体、特殊的不能用根式解的高次方程的过程中,创立了意义重大的群论. 最速降线导致变分学的诞生也是人所周知的事实. Fermat 大定理更是一只生金蛋的鸡,理想、分园域、模曲线……各种新的研究不断地由它产生.

在 20 世纪开始之际,第二届国际数学家大会在巴黎召开.会议的筹备组邀请希尔伯特(Hilbert, 1862—1943)作一个报告.希尔伯特与他的好友 Minkowski 商议,后者在 1900 年 1 月 5 日回信说:

“最有吸引力的题材莫过于展望数学的未来,列出在新世纪里数学家应当努力解决的问题.”

希尔伯特接受了朋友的建议.经过近八个月的准备,1900 年 8 月 6 日,已享有盛誉的、38 岁的希尔伯特向国际数学界提出名为《数学问题》的报告,其中包含 23 个数学问题.这一意义深远、大气磅礴的演说,揭示了 20 世纪数学发展的方向,成为数学史上的一座丰碑.

希尔伯特的演说,一开始就指出:

“我们当中有谁不想揭开未来的帷幕,看一看在今后的世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘呢?我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标?在广阔而丰富的数学领域,新世纪将会带来什么样的新方法和新成果?”

历史教导我们,科学的发展具有连续性.我们知道,每个时代都有它自己的问题,这些问题后来或者得以解决,或者因为无所裨益而被抛到一边并代之以新的问题.如果我们想对最近的将来数学知识可能的发展有一个概念,那就必须回顾一下以往尚未解决的问题,同时检阅一下当今科学提出的、期望在将来能够解决的问题.现在,当此世纪更迭之际,我认为正适于对问题进行这样一番检阅.因为,一个伟大时代的结束,不仅促使我们追溯过去,而且把我们的思想引向那未知的将来.

某类问题对于一般数学进展的深远意义以及它们在研究者个人的工作中所起的重要作用是不容否认的.只要一门科学分支能提出大量的问题,它就充满着生命力;而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或中止.正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样,数学研究也需要自己的问题.正是通过这些问题的解决,研究者锻

炼其钢铁般的意志和力量,发现新方法和新观点,达到更广阔、更自由的境界。”

希尔伯特关于数学问题的论述非常精辟,而且一个多世纪的数学的演进完全证明了上述论述的正确.

大批数学家投入解决 23 个问题的洪流中.这 23 个问题以及其他的数学问题(例如希尔伯特也曾提到的“三体问题”,还有很多希尔伯特当时无法预见的新问题)是推动数学向前发展的巨大的杠杆.

2. 解题是数学的特点

既然“问题是数学的心脏”,学习数学自然需要解题.实际上,学习数学就是学习解题.

解题,是数学的一大特点.其他的学科,例如语文,也需要习作,需要命题作文,但其数量与种类均不能与数学的习题相提并论.至于理化等科,它们的特点是动手实验或实习.

我国古代数学家杨辉就曾指出:

“夫学算者,题从法取,法将题验,凡欲明一法,必设一题.”

任何一本现代的数学课本,都配备了相当数量的习题,用以领悟巩固所学的内容、方法.

很多人学习数学,是为了将它作为工具来运用.要使这“工具”得心应手,运用自如,必须勤加练习,很多数学书中都设计了这种应用性的问题,它比巩固性的习题要高一层次.但这种“应用”仍然是模拟的,真正的应用还必须通过今后自己的实践.

在信息社会中,知识、脑力的重要性越来越超过体力,人们也越来越多地需要数学.在 1989 年,美国数学科学委员会等组织写

给美国政府的报告中强调:

“从来没有像现在这样,美国人需要为生存而思考,他们需要进行数学式的思维.”(《人人有份——致国家的一份关于数学教育之未来的报告》)

要学会数学式的思维,必须做一些含有推理、论证的问题,这种问题比一般的计算题、求解题难度大,更有利于增长智慧.

学数学如同下围棋,必须实践(做习题),必须和较高水平的人切磋(做有一定难度的题),棋力(数学水平)才有长进.此外,还需揣摩成局(学习定理的证明或著名问题的解法),领会其精髓(深刻的数学思想).

应当指出,做习题并不只是在学完一个方法或一些知识之后.知识、方法应当尽可能地通过问题的形式引入.

有一位大学教授在某市奥林匹克学校向中学生介绍图论,劈头就是一串定义与定理:

“定义 图 $G=(V, E)$, 由顶点集 V 与一些连结 V 中两个点的边的集 E 组成.

定义 如果 E 由连结 V 中每两个点的边组成,那么 $G=(V, E)$ 称为完全图.

定义 如果图 $G_1=(V, E_1), G_2=(V, E_2)$ 具有相同的顶点集 V , 并且 $E_1 \cap E_2 = \emptyset, (V, E_1 \cup E_2)$ 是完全图,那么称 G_1 为 G_2 的补图.

定理 在 $|V| \geq 6$ 时, $G=(V, E)$ 或它的补图中必有三角形.”

这样的讲授固然严谨,却难免使人“丈二金刚摸不着头脑”,不知道这些东西从何而来,讲这些又有什么用处.

为了提高学生的兴趣,不如从下面的问题引出图论的知识:

“任意六个人中必有三个人互相认识或三个人互不相识.为什么?”

为了解决这个问题,为了叙述的方便,我们用六个点表示六个人.如果两个人互相认识,就将相应的两点用线连结起来.这种由点及一些连结点的线组成的图形,就称为图.问题就成为

“六个点的图中,一定有三个点两两相连(即构成三角形),或者有三个点互不相连.”

现在从这六个点中任取一点 A . A 向其他五点引出的线(图论中常称为边),如果有三条以上,设 AB, AC, AD 是其中的三条.在 B, C, D 三点互不相连时,结论已经成立.在 B, C, D 三点至少有两点相连,例如 B 与 C 相连时, A, B, C 三点两两相连.

如果 A 引出的边不超过两条,那么设 A 与 B, A 与 C, A 与 D 均不相连.在 B, C, D 三点两两相连时,结论已经成立.在 B, C, D 三点中至少有两点不相连,例如 B 与 C 不相连时, A, B, C 三点互不相连.

问题解决了.通过解这个问题,我们也介绍了一些图论的基本术语与一种方法(考虑一个点引出的边的条数——称为这个点的次数).

这样通过问题与解题介绍知识与方法,显然比直接抛出定义、定理,容易被学生(尤其是中、小学生)接受.

青少年是求知欲最强的时期.问题,可以刺激他们的学习兴趣.

我们的课本(教科书)也可以采用提问题的方式引入新的内容.

例如负数就可以用问题

$$3 - 5 = ?$$

来引入,解方程可以从最简单的填空

$$(\quad) + 5 = 7,$$

$$\frac{3}{5} \cdot (\quad) = 12,$$

到比较复杂的

$$x + \frac{x}{7} = 16, \quad \text{①}$$

$$3x - 2 = \frac{1}{2}x + 5,$$

组成一系列的问题,如果学生能解决这一系列问题,他就掌握了解方程的技术.

当然,如果放手让学生去解上述方程,也会出现一些事先未必料想到的方法,例如在解方程①时,有一位学生先设 $x = 7$ (因为分母是 7),这时

$$x + \frac{x}{7} = 7 + 1 = 8,$$

并不等于①或右边的 16.

将 x 扩大 2 倍,即 $x = 14$,这时 x 正好适合①.

对这样的学生,应该鼓励(这种创造性是很重要的),同时,也应指出将①左边化简得

$$\frac{8}{7}x = 16,$$

从而

$$x = \frac{7}{8} \times 16 = 14,$$

是一般的解法.与上面的解法实质上是一样的(作为教师还应当知道上面的解法只适用于一次方程,而且方程的一边应当为数).

通过解题介绍知识与方法(当然,首先用提问题的方式引入),并不是追求一种形式(有一段时期,流行过一些非常程式化的“教学方法”,大多无疾而终,这里就不举例子了),而是遵循教学中一条重要的原则:主动学习的原则.它的中心思想是:学习任何东西的最佳途径就是靠自己去发现.

所谓教学改革,无非是希望以最少的时间取得最好的效果.如

果以问题与解题为中心重新组织教材,我相信能够达到上述目的,有兴趣、有胆识的同志可以试验一下.

3. 教会思考

按照波利亚的观点,“数学技能就是解题能力——不仅能解决一般的问题,而且能解决需要某种程度的独立思考、判断力、独创性和想像力的问题.所以,中学数学教学的首要任务就在于加强解题能力的训练”(《数学的发现》第一卷序言).

中小学为什么要开设数学课程?

数学有很多的应用,日常生活与工农业生产、经济、管理等等都需要数学.但这并不是开设数学课程的最主要的理由.事实上,如果不是专业技术人员,小学的算术与简单的方程在绝大多数场合已经足够了.

开设数学课程的主要目的是教会学生如何思考.

其他课程,同样地,也担负着教会学生思考的任务,但数学是一门关于思维的科学.学习数学,对于思考能力的提高起着很重要的作用.

例如,学习非欧几何与公理化的思想,学生就不会盲目地轻信几项基本原则,他们能够领悟到几何学的公理体系必须不含矛盾,而在一定程度上又可以根据不同需要加以选择,衍生出不同的几何学.

本书不拟讨论数学思想,仅想介绍一下波利亚的观点,即

“‘教会思考’意味着数学教师不仅仅应该传授知识,而且也应当去发展学生运用所传授的知识的能力……但是在这里,我想仅侧重说明两点就够了.

第一,我们这里所提的思想,当然不是指白日作梦,而是指‘有目的’,或‘有意识’的,或‘能导致后果’的思想,这种思想在我们谈论的范围内(至少在一次逼近之内),也就是‘解题’.不管怎么说,我认为,高中数学课程的主要目标之一应是发展学生的解题能力.

第二,数学的思想并不总是纯“形式”的,它并不仅仅就只是公理、定义和严格证明,而尚有许多从属于它的其他东西:如将所观察到的情况加以一般化,归纳地论证,从类比中进行论述,在一个具体问题中认出一个数学概念,或者从一个具体问题中抽象出一个数学概念等等.一个数学教师有很多机会使他的学生去了解这些极其重要的‘非形式’的思想过程,我的意思是说,他应当更好地利用这种机会,应当大大改善今天的现状.或许用一句不很全面但较简短的话来说,就是:让我们尽一切努力去教会证明,同时也让我们去教会猜测.”(《数学的发现》第二卷,刘景麟等译,152页至153页)

波利亚所说的第一点是解题,第二点也是解题.

或许有人会嚷嚷:这只是为少数尖子生服务,违背了素质教育的原则.

似乎早就料到有这样的人和这样的意见,波利亚将学生依照未来的职业分为三类:数学家(包括理论物理学家、天文学家及某些专门研究领域里的工程师)约占1%,用到数学的人(工程师、科学家及一些社会科学家、数学教师、科学教师等)约占29%,不用数学的人(实业家、律师、牧师等)约占70%,他指出数学教育应当符合于两个原则:

“第一,每一个学生应当能够从他的学习中得到某些收获而不管他以后的职业是什么.

第二,那些在数学上表现出有一些资质的学生应当受到鼓励和吸引,而不要由于拙劣的教育使他们嫌弃数学.”

“解数学题的能力,当然,依赖于某些有关的数学知识,除此而

外,它还有赖于某种有益的思维习惯,某种一般性的我们在日常生活中称之为‘常识’的东西。”这种有益的思维习惯与常识,对于所有的学生(包括将来不用数学的人),都是非常重要的,是应当具备的素质.而这,只有通过解题才能成为学生自己的东西.

对于仅占 1% 的未来的数学家,“将他们发掘出来是一件最重要的事情.假如他们选择了一项错误的职业,那么他们的才能(现代社会在很多方面需要他们)将遭到浪费”.“高中教师对这 1% 能做到的最重要的事就是唤起他们数学上的兴趣”.“解题便是通向数学的一条最重要的道路”.

照顾多数与照顾尖子,这是相辅相成并行不悖的两个方面.一些地方举办讲座,开展兴趣活动,是一种有益的善举.禁止这类活动是不妥当的,在道理上难以说清楚,在实际中也是行不通的,千万别做这样的傻事.

4. 解题必须实践

波利亚有一段名言经常被人引用:“解题是一种实践性的技能,就像游泳、滑雪或弹钢琴一样,只能通过模仿和实践学到它……你想学会游泳,你就必须下水,你想成为解题的能手,你就必须去解题.”

华罗庚先生在一次报告中也曾说过,学习数学要做到熟练化.熟能生巧,进而出神入化.而要这样,就必须练.

苏步青先生在《怎样学好数学》一书中,介绍自己学微积分时,做了 20 000 多道习题.

可见,学好数学必须多做题,提高解题能力必须多做题,这是众多数学家、数学教育家共同的认识.

很多的数学教师鼓励学生做题,很多学生做题,这是学好数学的正确的途径.但也有人讥之为“题海战术”,这种人,不是身在教学一线的优秀教师,他们以为只要将课本上的定理、定义背熟了,数学就学好了.这完全抹杀了数学的特点,将数学混同于某些需要机械记忆的课程.

任何一个概念,例如立体几何中的异面直线,死记定义“不在同一平面的两条直线称为异面直线”并不能真正理解它.必须通过问题才能加深理解.图 3-1 中正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AB, CD 在同一平面内,不是异面直线. AB 与 C_1D_1 呢? 它们是平行直线,因而也在同一个平面内,不是异面直线,但这个平面图中没有画出

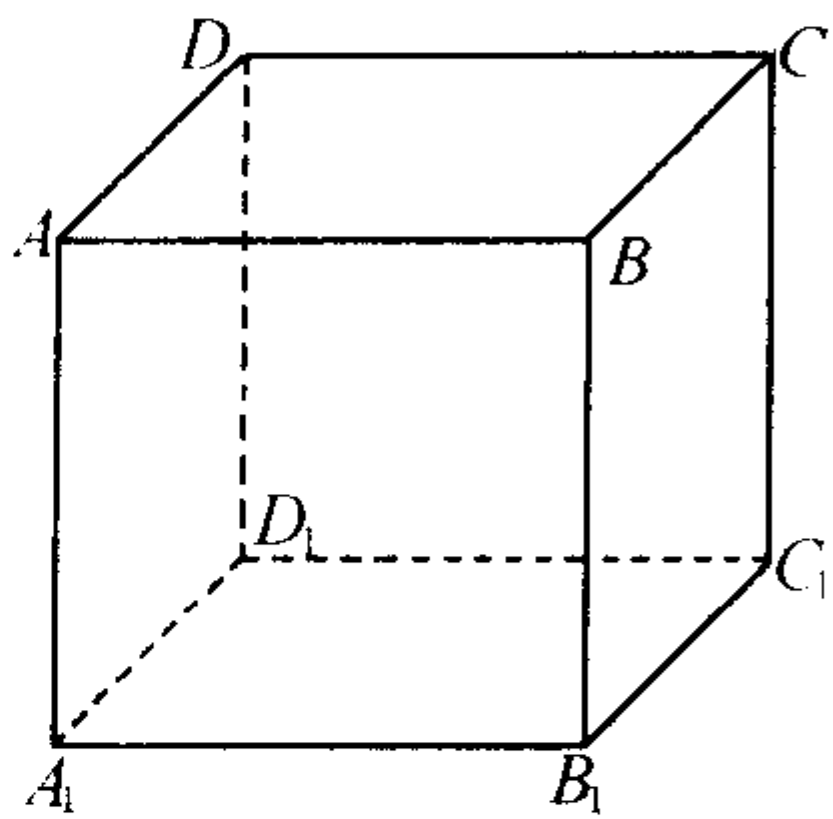


图 3-1

来.所以定义中的“不在”,实质上是“不能在”(很可能是翻译时没有译出这一含义).又如 AB 与 CC_1 是异面直线,为什么? 凡这类用否定方式定义的概念(定义中含有“不”、“没有”等词语),证明时常用反证法:假设 AB 与 CC_1 不是异面直线,那么 AB 与 CC_1 在同一平面内,这个平面就是平面 ABC .但 C_1 不在这个平面上,矛盾.在讨论与异面直线有关的问题(例如夹角、距离)时,还常常将一条直线平移(例如将 CC_1 平移到 BB_1)与任一条直线相交,或者过这两条直线各作一个平面分别与两条中的另一条直线平行(如过 AB 作平面 AA_1B_1B ,过 CC_1 作平面 CC_1D_1D).这些基本方法通过解题便能一一掌握.

当然,也不是题做得越多越好.“歪拳打三年”也有成不了拳师的.在解题时应当注意总结规律.例如三角形中,与中线有关的问题常常将中线延长成为原来的两倍.如图 3-2,设 $AB > AC$, AM 为 BC 边上的中线,求证 $\angle MAC > \angle BAM$.这道题就应当延长 AM 到 A' ,使 $MA' = AM$.易知 $\triangle A'MC \cong \triangle AMB$, $A'C =$

$AB > AC$, 所以, $\angle MAC > \angle MA'C = \angle BAM$.

这种问题也可以利用中位线: 设 N 为 AC 中点, 则 $MN \parallel AB$, 并且 $MN = \frac{1}{2}AB > \frac{1}{2}AC = AN$, 从而 $\angle MAC > \angle AMN = \angle BAM$.

再如与角平分有关的问题, 常常利用关于平分线的反射, 下题即是一例.

已知 $\triangle ABC$ 的内角平分线 AD 交 BC 于 D , E 为外角平分线 AE 上一点, $AB > AC$. 求证

- (1) $BD > DC$,
- (2) $EB + EC > AB + AC$.

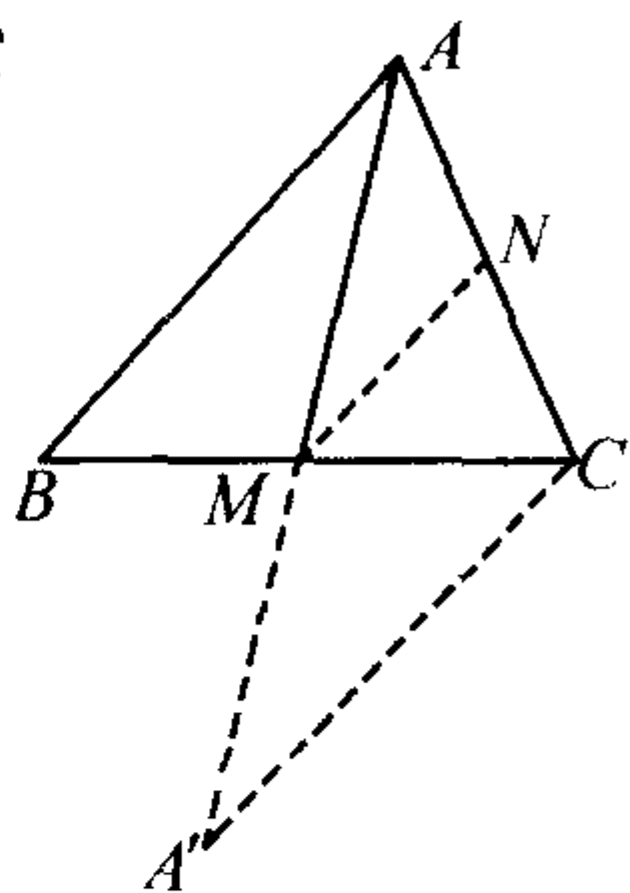


图 3-2

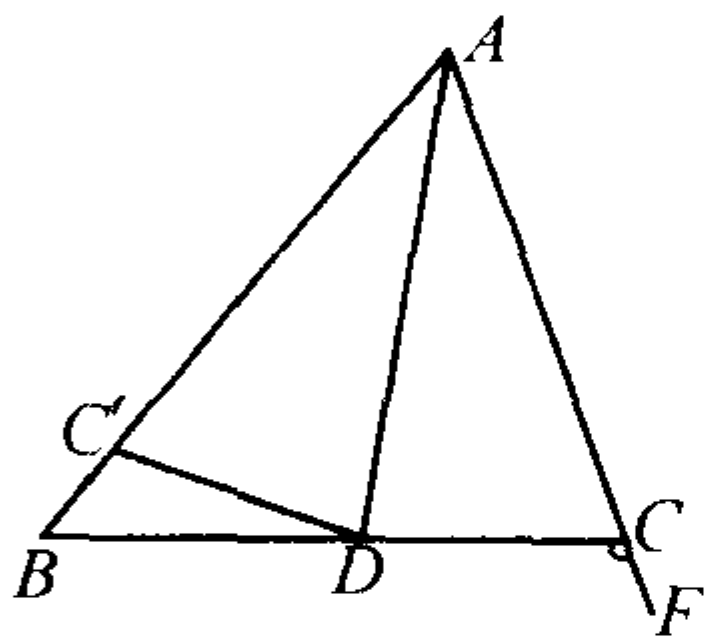


图 3-3

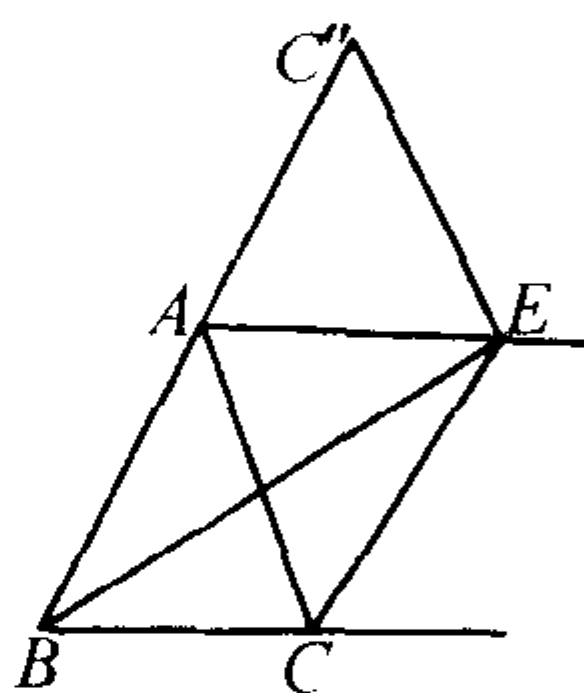


图 3-4

如图 3-3, 设 C 关于 AD 的对称点为 C' , 则 C' 在 AB 上, $C'D = CD$, $\angle BC'D = \triangle ABC$ 的外角 $\angle FCD > \angle B$, $BD > C'D = CD$ (掌握比例的人当然也可用 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ 求解).

对于 (2), 如图 3-4, 设 C 关 AE 的对称点为 C'' , 则 C'' 在 BA 的延长线上, $AC = AC''$, $\triangle AEC$ 与 $\triangle AEC''$ 全等, $EC = EC''$,

$$EB + EC = EB + EC'' > BC'' = AB + AC'' = AB + AC.$$

此外, 应当注意题的质量, 不要单纯追求数量. 例如, 学过微积分的人知道常数的导数是 0, 即 $(C)' = 0$, 于是做 20 000 道这样的微积分习题易如反掌:

$$(1)' = 0, (2)' = 0, (3)' = 0, \dots, (20\,000)' = 0,$$

但这 20 000 道习题没有任何价值,与苏步青先生所说的两万道习题不能同日而语.

大量重复的题会扼杀学生的兴趣,妨害他们的智力发展,因此,某类问题在做了足够的练习之后,学生业已掌握,就不必再继续做下去.最好每一道题都有一点新意.

现在的高考采用标准化试题.题的数量偏多,又包含一些琐碎的小题,为了应付这种考试,教师将题目归统为若干题型,学生必须反复练习.其实一些西方国家是由于人力不足(或者说雇人的费用太高)才采取这种“标准化”的做法,而且不少有识之士,如著名数学家 Whitney 早已指出标准化考试不可取.真要减轻学生负担,促进学生生动活泼地学习,必须废止这种标准化考试(它只适用外语等科目).改为考几道(数量应比现在大大减少)较能反映学生思维能力的大题.

有人认为将应试教育改为素质教育就可提高教育质量,其实,任何一种教育都少不了考试,用以检查是否达到预期的教育目的,因而任何一种教育都是应试教育,除非完全没有教育目的.将素质教育与应试教育对立起来是荒谬可笑的.要提高教育质量必须作切切实实的工作,例如改革高考,废止标准化考试.

5. 问题的种类

问题成千上万,形形色色,可以有各种分类方法.

按数学内容来分,可以分成几何、代数、数论(算术)、组合数学等,其中代数包含方程、等式、不等式、数列、函数等,几何包含平面几何、立体几何、解析几何以及一些组合几何、几何不等式.三角现在已不作为独立学科,往往纳入代数中.

按问题的结论来分,可以分为计算题、求解题、证明题.计算题大多比较容易,往往用于巩固所学运算法则,培养运算能力(小学以数的计算为主,初中则着重式的运算).求解题比计算题稍难,结论往往不能直接由计算得出,需要通过列方程或者公式变形等手段才能化为计算题.证明题通常更难一些,着重培养推理与思维能力.

从形式上分,有选择题、填充题、综合题.前两者有人称为客观性题,因为答案惟一,便于使用机器评分.其实,很多选择、填充仍需要计算或推理,只是略去了过程.这类题本书不拟花较多篇幅去讨论,因为我们认为解题的过程至关重要,只有看到过程,才能判定学生能力的强弱,才能指导学生提高水平,长期做大量的选择、填充题,对智力的发展有害无益.反之,倒是综合题做好了,做选择、填充也一定得心应手.综合题即所谓大题,应进一步分类(例如分为计算、求解或证明三类).

按难度分,可以定出 A,B,C,D 诸等级.国际数学竞赛最难的定为 A 级.但难度的确定不能依靠主观,得由一部分人(不是命题者)做一下才能得知.有些由于某种原因,难易可以转化,比如说,很多国家削弱了平面几何,因而本来不很难的几何题也认为很难.而有些难题,由于学生学过或从书上看到过,成了熟题,丝毫不成困难.

我赞成将问题分成两类,一类是有固定模式的,可以按照一定的套路去做.大多数计算题与求解题及一部分证明题属于这一类.中小学课本、考试中的问题基本上都可归入这一类.另一类则是没有或较少固定模式的,很多证明题及一些求解题属于这一类.各种竞赛题或带竞赛意味的题组成这一类.它更需要解题者发挥其聪明才智,有助于培养创造能力.从难度看,前者容易得多,对于解题高手,多半可在 5 分钟至半小时内基本解决,而后者则至少需要半

小时,甚至一小时以上.国际数学竞赛要求 $4\frac{1}{2}$ 小时解 3 道题,即平均每一道用一个半小时.本书第一章讨论的都是前一类问题,第二章讨论的大多是后一类问题.

此外,还有一个大类即所谓应用问题.然而,课本中的应用问题大多是理想化了的,并不是真正的实际问题,例如工程问题,假定每个人的工作效率保持不变,而合作时,效率等于各人效率的和.在实际中,往往并非如此,人多有时反而误事,“木匠多了盖歪屋”.国外有一种考查,要求学生完成一个设计(project).近年来,国内也有人主张考实际应用能力,并在每届高考中插入一道应用题,以作提倡.但真正的应用题,需要学生有很高的抽象能力,不仅了解面临的实际问题,而且善于从中找出主要因素,制定合理假设,将问题化为某种数学模型,再借助计算机等手段予以解决.因此,这类问题虽好,却是“儿童不宜”,不适合在中学普遍推广,更不应在考试中出现.对于中学生来说,还是着重在打好基础上.系统地学习数学知识,过份强调应用,反而易使知识失去系统性,变成零零碎碎.须知应用能力是很高的一种能力,现在大学流行数学建模比赛,大学生群体从事应用问题的研究是很有益的.但对中学,不应期望过高,勉强他们去做难以企及的事情.所以本书基本上不讨论这类应用问题.从高考来看,这几年出的应用题,数学知识基本上仅达到初中水平,困难倒在于理解题意.学生缺乏实际知识,长大了就自然明白,不必揠苗助长.

6. 解题的步骤

文章有不同的写法,不过大多有三个部分:开头、正文、结尾.

解题也是如此,可以分为三步,即

- (1) 弄清题意.
- (2) 拟定计划.
- (3) 实施计划.

解完以后,还可以进行一些讨论、回顾,也可以称为第四步,即

- (4) 总结.

也有人分成五步或更多步(就像文章可以分成许多段或自然段),这中间并无实质性的区别.

在《怎样解题》这本书中,波利亚列出了一张“怎样解题”表,然后围绕这张表展开讨论.我们先将这张表抄录如下:

“怎样解题”表

弄清问题

第一
你必须弄清
问题

{

未知数是什么? 已知数据是什么? 条件是什么? 满足条件是否可能? 要确定未知数,条件是否充分? 或者它是否不存在? 或者是多余的? 或者是矛盾的?

画张图,引入适当的符号.

把条件的各个部分分开,你能否把它们写下来?

拟定计划

你以前见过它吗？你是否见过相同的问题而形式稍有不同？

你是否知道与此有关的问题？你是否知道一个可用得上的定理？

看着未知数！试想出一个具有相同未知数或相似未知数的熟悉的问题。

这里有一个与你现在的问题有关，且早已解决的问题。

你能不能利用它？你能利用它的结果吗？你能利用它的方法吗？为了能利用它，你是否应该引入某些辅助元素？

你能不能重新叙述这个问题？你能不能用不同的方法重新叙述它？

回到定义去。

如果你不能解决所提出的问题，可先解决一个与此有关的问题。你能不能想出一个更容易着手的有关问题？一个更普通的问题？一个更特殊的问题？一个类比的问题？你能否解决这个问题的一部分？仅仅保持条件的一部分而舍去其余部分，这样对于未知数能确定到什么程度？它会怎样变化？你能不能从已知数据导出某些有用的东西？你能不能想出适于确定未知数的其他数据？如果需要的话，你能不能改变未知数或数据，或者两者都改变，以使新未知数和新数据彼此更接近？

你是否利用了所有的已知数据？你是否利用了整个条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要的概念？

第二.
找出已知数
与未知数之
间的联系.
如果找不出
直接的联系,
你可能
不得不考虑
辅助问题.
你应该最终
得出一个求
解的计划

实现计划

第三	{	实现你的求解计划,检验每一步骤.
实行你的计		你能否清楚地看出这一步骤是正确的? 你
划		能否证明这一步骤是正确的?

回 顾

第四	{	你能否验证这个论证? 你能否用别的方法
验算所得		导出这个结果? 你能不能一下子看出它来?
到的解		你能不能把这个结果或方法用于其他问
		题?

这一张表并没有什么出奇的地方. 我们已经说过解题时, 不论自觉或不自觉, 大多有这样的四个步骤.

这张表并不是一把万能的钥匙, 更不是解题的“纲领”. 它只是一串提示. 也许会给解题者一点启发, 但问题的解决还必须依靠解题者自己的努力.

没有必要去背诵这张表. 可以根据实际情况问自己几个为什么, 或给别人一些提示(启发性的提问). 表中第二步的“你能不能重新叙述这个问题? 你能不能用不同的方法重新叙述它?”我们觉得纳入第一部分更为合适. 第四步, 我们称之为总结, 它是提高解题能力的至关重要的一环, 决非仅仅“验算所得的解”. 表中第二步有些内容归入第四步似乎更为合适.

以下几节, 我们将对这四个步骤作进一层的讨论.

7. 弄清问题

解题的第一步当然是弄清问题: 已知什么? 需要我们去做什么(达到什么目的)? 说起来, 这一点是极简单极明白的事情. 但如

果提问几位正在做题的、中等偏下的学生,往往能发现他们并不一定清楚问题的条件,而且也不太清楚自己在做什么.

不少学生在解题时并未全神贯注地投入.为什么会这样呢?有些是学习目的方面的问题(这是个很复杂的研究课题,本书不予讨论);有些是因为题目出得不好(尤其是内容过深、难度过大),应当精选习题;更多的是缺少好的学习习惯,需要引导与培养.

大概从小学应用题开始,学生就有明显的分化.中、下等学生在理解题意方面产生困难,应当加强阅读的训练.实际上这是语文的任务,语文太差的学生是无法学好数学的.较长、较复杂的题目,应该记住其中的条件和结论.

“一目十行,过目不忘”,前四个字可以解释为能够很快地理解题意,抓住最主要的东西;后四个字表示一种短暂的记忆力,即在一段时间内记住条件和结论(没有必要“终生不忘”,那将加重记忆的负担).这种功夫需要多练(多读书).

问题应当用自己的语言重新叙述.通过复述,可以发现学生是否理解了题意,有没有忽略重要的部分.凡有学生来问问题,首先让他复述,切不可急急忙忙地把解答告诉他.因为比解答更重要的是解法,即如何从已知走向未知,而将题目中的“信息”重新编排,适当整理,正是走向未知的第一步.

我们举几个例子说明.

例 1 某市有 n 所中学,第 i 所中学派出 C_i 名学生($1 \leq C_i \leq 39, 1 \leq i \leq n$)到体育馆观看球赛,总人数 $\sum_{i=1}^n C_i = 1990$.看台上每一横排有 199 个座位.同一学校的学生必须坐在同一横排,问至少要安排多少个横排才能保证学生全部坐下?

这道题的表述并不是很好,多用了几个符号: $C_i, \sum C_i$.看起来有点吓人,其实小学生能做这道题.我们可以重述为:

一些学校派出学生看球赛,看台上每一排有 199 个座位,同一

学校的学生必须坐在同一排. 每个学校派出的学生不超过 39 人, 学生总数为 1 990 人, 问至少要安排多少排才能保证学生全部坐下?

这样叙述比原题精练一些, 并且原题中的 $C_i, \sum$, 不仅是多余的, 而且有可能干扰我们的思路, 十分可恶. 解题的第一步就是将这些碍手碍脚的藤蔓扫除干净.

例 1 还可以用填充与提问的方式来加深理解:

学生总数是 1 990 人.

每个学校派出人数 $\leq$ 39.

每排可坐 199 人.

还有什么要求? 答: 同一学校的学生必须坐在同一排.

本题还有一个至关重要的词“至少”, 必须弄清楚.

“至少要安排多少排才能保证学生全部坐下”, 这句话是什么意思?

答: 如果至少要安排 n 排才能保证学生全部坐下, 它有两层含义.

一是 n 排就可以保证学生全部坐下. 二是 $n - 1$ 排就不能保证学生全部坐下.

这两层含义, 需要我们怎样去做? 怎样才是完整的解答?

答: 前一层含义, 需要证明不论什么情况, n 排总是够坐. 后一层含义需要举例说明 $n - 1$ 排有时不够. 只有将这两件事都做好才是完整的解答.

这道题, 学生能将以上问题都答对, 就表明他理解了题意. 解答将在第 11 节给出.

例 1 是 1990 年全国高中联赛的压轴题. 下面是 1995 年华罗庚金杯赛(由小学与初一学生参加)的试题.

例 2 摄制组从 A 市到 B 市有一天的路程, 计划上午比下午多走 100 千米到 C 市吃午饭. 由于道路堵塞, 中午才赶到一个小

镇,只行驶了原计划的三分之一.过了小镇,汽车赶了400千米,傍晚才停下来休息.司机说再走从C市到这里的二分之一,就到达目的地了.问A、B两市相距多少千米?

这是第二试的第一题.笔者作为主试委员会的成员去考场巡视,发现大多数同学都在急急忙忙地做这道题,方法很多,代数、算术,五花八门.我不禁想起自己读书时的一位老师贾长庚,他十分严厉,身材高,嗓门更高,大家都有几分畏惧他.在教列方程解应用题时,他问我们,拿到题目后第一件事是干什么?同学答“设未知数”,答“写‘解’字”等,都没有答对.只听他大吼一声:

“读题!”

是的,解题的第一步应该是读题.当时还不理解为什么贾老师强调读题,现在明白了.

上面的题应该细读,而且这类行程问题,应该画个简图帮助理解题意.

图3-5中D是小镇,E是傍晚休息处.D、E之间的距离是400千米.EB是CE的二分之一,AD是AC的三分之一,AC比CB多100千米.求AB的长.

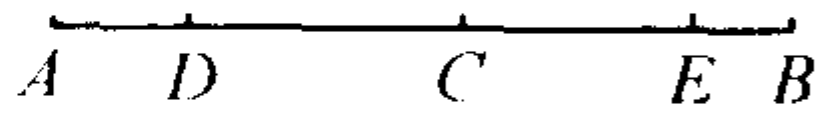


图 3-5

画了图后,如果能像上面一样,将数据、条件都说清楚,就可以说弄清题意了.但且慢解题(别急急忙忙地设未知数),再读读题,即再细看看图上各条线段的关系,特别是:

AD是DC的几分之几?

不难发现AD是DC的二分之一(因为AC是AD的三倍,所以DC是AD的两倍).如果能发现这一点,那么问题就迎刃而解了.

AD + EB是DC + CE的二分之一,所以 $AD + EB = 400 \times \frac{1}{2} = 200$ (千米),AB的长是 $600 (= 200 + 400)$ 千米.

题应当反复读,真正弄清楚,谋定而后动.这里所说的题不一定是原题,也可以是经过整理后的题.

根据我的观察,很多同学(尤其是考试时)没有重视“弄清题意”(也就是贾老师所说的“读题”)这一步,因而解不出题,或者虽然解出了,却走了不少弯路.孔子告诫我们“欲速则不达”,而这些同学解题时总是“匆匆,太匆匆”.

例2已经解完,这表明波利亚所说的四步决不是教条,实际解题不必(也往往很难)机械地分成四步.须知波利亚的所有设计与论述,无非帮助我们解题,如果奉为信条,生吞活剥,那么效果将适得其反.

例3 证明对任意 $n \geq 6$, 都存在一个凸六边形,它可以剪成 n 个全等的三角形.

这道题的意思是很清楚的,但并不容易做.能不能换一个提法?

我们可以将问题改换一个提法:能否用 n 个全等的三角形(形状可以选择)拼成一个凸六边形?

问题的这种形式,有利于解决(我们将在第五章第1节中解这道题).实际上,改变问题的提法已不仅是弄清题意,可以说是向问题的解决进了一大步.

波利亚主张“不断地变换你的问题”,“我们必须一再地变化它,重新叙述它,变换它,直到最后成功地找到某些有用的东西为止”.我们将在后面再用一些例题来阐发波利亚的这一主张.

解题有如侦探破案.要取得破案的线索,必须到现场勘察.如果解题遇到困难,也应当重新审读题目,以冀有新的发现,“现场调查一百次”,这是侦探的格言.有时平庸的警官发现不了线索,换了老练的福尔摩斯便一目了然.

例4 已知 $k > a > b > c > 0$, 求证

$$k^2 - (a + b + c)k + ab + bc + ca > 0. \quad \textcircled{1}$$

这道题,很多同学只注意到题目的结论是 k 的二次不等式,因而立即想到用判别式,却忽视了题目的条件.已知条件明明白白地告诉我们 k, a, b, c 都是正数,而且 k 比 a, b, c 都大(a, b, c 之间的大小无关紧要).从条件出发立即得到解题的关键.

这道题在后面(第8节例2)我们还要提到.

读题,读题,反复读题,这是解题时首先要认真做的事,切莫忽视.

8. 拟定计划

问题明确以后,接下来便是通常所说的真正的解题阶段了.

熟悉的问题,有一定套路的问题,不需要太多的思考.例如解一元二次方程,可以用求根公式.列方程解应用题,总是先设未知数,根据等量关系列出方程,然后再解方程.

稍进一步的问题,需要一点变化,用得上波利亚的表中所说的“你是否见过相同的或形式稍有不同的问题?”,以唤醒你的记忆,从大脑的信息库中找到一个可以利用的模式.严格说来,这类问题仍然是有一定套路的问题,只不过稍稍陌生一些,或者在个别地方与熟悉的问题略有不同而已.

真正的问题是不能照套的题,需要解题者发挥某种程度的主动性与创造性.主动性与创造性的程度越大,问题的难度越大,质量越高.

对这类问题来说,波利亚所说的“你以前见过它吗?”等等,就不用再考虑了,没有多大用处.这类问题往往是竞赛性的,波利亚的论述较少,而“能照套的”问题,很多资料中都有详细讨论,本书将用较多的篇幅来讨论这类竞赛性的问题.

这类问题首先需要探索. 就像一位棋手思考下一步棋应当如何走, 解题者应当考虑可以从哪些方面入手, 探讨一下可能的途径. 途径越多越好, 一位有经验的解题者往往能想出几条路子. 如果一点思路也没有, 那么就必须继续冥思苦想, 直到冒出一个主意(idea). 这一阶段是解题中最艰苦的阶段. 我们将在后面的各节中进一步阐述.

在有几种途径时, 需要从中挑选一种. 究竟哪一种途径能达到目标? 走哪一条路更好? 这也需要探索. 可以每条路都试一下, 但不必每条路都走很远, 你的感觉往往会告诉你这条路不好走, “此路不通”. 经验与见识也很重要, 善于判断、抉择, 也是解题者应有的素质(可以通过解题逐步养成).

一道题, 往往能分成若干步, 其中有一步或几步是关键步骤. 看书上的或别人的解答, 应当将关键步骤弄清. 自己解题时, 应当将关键步骤都想清楚, 知道第一步做什么, 第二步做什么……这样, 解题计划就基本完整了.

所以, 解题的这一步有:

- (1) 探索、思考.
- (2) 产生一个或几个好的想法(good idea).
- (3) 确定一条路线.
- (4) 想清关键步骤(key steps).

还应指出, 很难有十分完整的解题计划. 在解题的过程中, 可能发现计划的缺陷或错误, 需要修正, 甚至完全推翻原来的计划. 不必死死坚持一条道走到黑, “边打边改”是常有的. 除非是十分熟悉的问题, 计划往往是不完善的.

此外, 应当先打好基础. 解题必须从模仿开始, 经历这一初级阶段后, 才能有所创造, 能解较难的竞赛问题.

例 1 用 1, 2, 3, 4 四个数字可以组成许多没有重复数字的四位数, 求这些四位数的总和.

解 这个问题不难,最笨拙的解法就是将这些四位数(共 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 个)全写出来,然后再逐一相加,稍稍思索一下就可发现还有其他解法.

比如说,先考虑千位上数字之和,4 在千位出现 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 次,3,2,1 也在千位出现 6 次,所以千位上数字之和为

$$(4 + 3 + 2 + 1) \times 6 = 60.$$

同样,百、十、个位上数字之和也是 60.

这些四位数的总和是 66 660.

这道题有了想法(考虑各数位上数字之和)之后,步骤很清楚.计划可以说是完整的.

例 2 已知 $k > a > b > c > 0$, 求证

$$k^2 - (a + b + c)k + ab + bc + ca > 0. \quad ①$$

这是一道代数证明题,初中生就可以做.

很多同学一看到①,就想套用二次函数的知识:

抛物线 $y = x^2 - (a + b + c)x + ab + bc + ca$ 开口向上.如果二次多项式

$$x^2 - (a + b + c)x + ab + bc + ca \quad ②$$

的判别式

$$\Delta = (a + b + c)^2 - 4(ab + bc + ca) \quad ③$$

满足

$$\Delta < 0 \quad ④$$

那么抛物线与 x 轴没有交点,从而在 x 轴上方,恒有

$$x^2 - (a + b + c)x + ab + bc + ca > 0. \quad ⑤$$

于是①成立.

于是问题化为证明④成立.

这一计划也很清楚,但是无法证明④一定成立,很多同学走到这里,便“山重水复疑无路”了.他们中不少人不相信这一计划的缺陷,坚持证明④成立,结果徒劳无功.

其实问题并不要求⑤恒成立,只要求在 $x = k$ (或 $x > a$) 时⑤成立. 坚持证明④的人根本没看到,更没有利用已知中的条件 $k > a > b > c > 0$. 当然④在一定条件下是成立的. 例如

$$a < b + c \quad \text{⑥}$$

时,

$$\begin{aligned} \Delta &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \\ &= a(a - b - c) + (b^2 - ab) + (c^2 - ac) - 2bc < 0. \end{aligned}$$

因此,在 $a < b + c$ 时,①一定成立. 只需证明在 $a \geq b + c$ 时,①也成立.

熟悉二次函数的同学,现在到了“柳暗花明”的境地,不难看出抛物线顶点的横坐标是 $\frac{a+b+c}{2}$,横坐标为 a ($\geq \frac{a+b+c}{2}$) 的点在顶点右方,对应于 $x = a$,函数 y 的值是

$$a^2 - (a + b + c)a + ab + bc + ca = bc > 0.$$

而在 $x > a$ 时,函数 y 是增加的,所以 $y > 0$,特别地,①成立. 这样,不论 $a < b + c$ 或 $a \geq b + c$,①式均成立.

上述解法虽然复杂,却是中学生最“擅长的”做法,困难仅在于分 $a < b + c$ 与 $a \geq b + c$ 两种情况进行.

但是,上述解法并不是好的解法,更不是惟一的解法. 更好的解法是由已知出发,得

$$k - a > 0, k - b > 0, k - c > 0,$$

从而

$$\begin{aligned} 0 &< (k - a)(k - b)(k - c) \\ &= k^3 - (a + b + c)k^2 + (ab + bc + ca)k - abc \\ &< k^3 - (a + b + c)k^2 + (ab + bc + ca)k. \end{aligned}$$

因为 $k > 0$,在上式两边约去 k ,即得①.

从这种解法可以看出问题的实质是一个三次不等式(其中 $(k - a)(k - b)(k - c) = k^3 - (a + b + c)k^2 + (ab + bc + ca)k - abc$

是三次方程的韦达定理).套用二次函数是思维定势的反映.“不识庐山真面目,只缘身在此山中”.多长一点见识,才能抓住问题的本质.

模式教学容易产生定势思维,束缚创造性.但完全没有模式,也使初学者难于把握.正如围棋中的定式,需要根据情况灵活应用,不可拘泥.

对于非数学专业的人,学习数学在一定意义上就是学习模式,以便应用在他自己的专业上.对于数学专业的人,需要面对形形色色的“不能照套的”问题.有模式的问题只是其中的一小部分,过于强调模式反而有害.更应当强调的应当是创造性,自出机杼的想法才是最可贵的.

上一节已经说过,解题时不要慌不择路,而应“谋定而后动”.匆匆忙忙确定的计划,往往不是好的计划,可能事倍功半.应仔细观察,仔细思考.“将军欲以巧伏人,盘马弯弓惜不发”,不发则已,一发必中,这才是高手的作派.

9. 实现计划

在解题中,这一步是最容易的,如果计划是完善的,实现计划往往是“例行公事”,作一些机械性的计算,但我们上面已经说过,计划往往是不完善的,所以又往往需要回到上一步,出现一些反复.此外,计算或操作中也许有困难存在,甚至会遇到难以逾越的困难,这时原来计划必须推倒重来.

例1 设 a, b, c 满足

$$\frac{1}{bc-a^2} + \frac{1}{ca-b^2} + \frac{1}{ab-c^2} = 0. \quad \textcircled{1}$$

证明

$$\frac{a}{(bc-a^2)^2} + \frac{b}{(ca-b^2)^2} + \frac{c}{(ab-c^2)^2} = 0. \quad ②$$

我们将已知的①与②比较,发现①的左边第一项乘以 $\frac{a}{bc-a^2}$ 即得出②的左边第一项.类似地,分别用 $\frac{b}{ca-b^2}$, $\frac{c}{ab-c^2}$ 乘以①的左边第二项、第三项,得出②的左边第二项、第三项.于是为了得出②式左边的三项,应当将①的两边同时乘以

$$\frac{a}{bc-a^2} + \frac{b}{ca-b^2} + \frac{c}{ab-c^2}. \quad ③$$

但①的左边乘以③后,共有 $9(=3 \times 3)$ 项,除去所需的,在②式左边的3项外,还有6项.这6项的和,我们预见到应当为0(否则结论②不成立).

要实现上述计划,只需验证6项之和为0,而乘以这6项分母的最小公倍数 $(bc-a^2)(ca-b^2)(ab-c^2)$ 后,这6项成为

$$\begin{aligned} & a(ab-c^2) + a(ca-b^2) + b(bc-a^2) + \\ & b(ab-c^2) + c(bc-a^2) + c(ca-b^2) = 0 \end{aligned}$$

于是,“在①式两边乘以③,然后化简”,这一计划是十分完善的,实行时没有意外的困难产生.

例2 证明两个形如 a^2+b^2 的式子相乘,积仍然是同样形式的多项式.

例3 证明两个形如 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的式子相乘,积仍然是同样形式的多项式.

例4 证明两个形如 $a^2+b^2+c^2+d^2$ 的式子相乘,积仍然是同样形式的多项式.

这三个问题似乎是同一类型,实际上难易相差很大,例2不难由计算立即得出:

$$\begin{aligned}
 & (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \\
 &= a^2x^2 + b^2y^2 + a^2y^2 + b^2x^2 \\
 &= (ax + by)^2 + (ay - bx)^2.
 \end{aligned}
 \tag{①}$$

例 3、例 4 当然也可以先乘开,然后再配成所需的形式,但这样的计划实际上是难以执行的.如果你不知道答案,恐怕很难将产生的项适当搭配(并添出适当的项).所以必须另行设法.

这时,具有一些背景知识是有益的.例如行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.
 \tag{②}$$

所以例 3 实际上是行列式相乘,即

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix},$$

用行乘行得出积为

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{vmatrix},$$

其中 $A = ax + by + cz$, $B = az + bx + cy$, $C = ay + bz + cx$. 于是

$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$, 其中 A, B, C 已在上面给出.

例 3 的关键在于知道②式,计划中包含这一点才是完整的,否则只是纸上谈兵.

例 4 需要四元数的知识,也可以用两个四阶行列式相乘,结果是

$$\begin{aligned}
 & (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + u^2) \\
 &= (ax + by + cz + du)^2 + (ay - bx + cu - dz)^2 \\
 &+ (az - cx + dy - bu)^2 + (au - dx + bz - cy)^2
 \end{aligned}$$

如果纯用凑的办法,那么实施这步反倒是主要的,所拟的计划(展开再凑)太粗略了.

例5 设 $\triangle ABC$ 中,边长为 a, b, c ,面积为 Δ , $Q = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$,证明在三角形为锐角三角形时,

$$a^2 + b^2 + c^2 < 4\sqrt{3}\Delta + \frac{25}{16}Q. \quad ①$$

这个问题的解法不只一种,不妨设 A 为最大角.我们的计划是先保持 a 与角 A 不变,移动顶点 A (在以 a 为底,含角为 A 的弓形弧上移动),使 $\triangle ABC$ 成为等腰三角形,希望这一过程中

$$4\sqrt{3}\Delta + \frac{25}{16}Q - (a^2 + b^2 + c^2) \quad ②$$

的值减少,于是只要①对于顶角为 A 的等腰三角形成立,那么①对原来的三角形也成立.

然后对于较为简单的等腰三角形,用 $a = 2b \sin \frac{A}{2}$, $\Delta = \frac{1}{2}b^2 \sin A$ 代入,可将①化成

$$\frac{25}{16} > g(A). \quad ③$$

其中 $g(A)$ 是 A 的函数,可以具体标出.

如果能证明②的值确实在上述调整中减少,同时对等腰三角形③成立,那么我们的计划就完成了.但验证这两步并不很容易,读者可以自己试一试,这个例子表明,即使计划是正确的,在执行中也会遇到困难,需要在执行中不断完善,边执行边完善.因此,解题表中的第二步、第三步时常交织在一起.计划逐步变细,变成周密的,这一过程很可能在解题中一直进行,甚至持续到解题之后才完成.

在学生遇到困难,束手无策时,教师可视实际情况给予适当的提示.提示可以是解题计划中的好想法或主要(重要)想法,也可以

是关键步骤(比如例 5 中的两步或两步中的一步),然后让学生继续去做,如果仍有障碍,可以继续提示,即在每一关键步骤之中又有“子想法”或“子关键”,逐步加细,学生的困难也就逐步减少.这就好像登楼,没有阶梯,难以成功,适当加几级阶梯,困难就小一些,如果仍然上不了楼,再加阶梯,使得每两级之间的间距减少,如此下去,在有足够多的阶梯时,登楼就变得极为容易了.

提示就是给学生“想法”或“关键步骤”.一道难题分为若干小题,实际上已经“化难为易”,增添了许多提示.但应当注意,将全部解答一下子告诉学生,是不妥的,也没有必要,应尽量让他们自己思考,只在关键处稍加“点拨”.过多的提示,过细的解答,会使学生产生依赖.即使作了提示,也应使学生知道,不能仅仅满足于完成提示所指出的“子问题”,更应想一想为什么要完成这些子问题,即为什么要作这些提示?这样才能掌握问题的主要想法与关键步骤,自己造楼梯(或找楼梯)登楼.

在实现计划中遇到困难,并非坏事,它可以加深对问题的理解,不仅如此,这类挫折教育对于年轻学生尤为需要,它可以养成不屈不挠、敢于战胜困难的品格.当然,困难需要正视,需要想方设法去克服.每遇到一次困难,就增加一次经验,学到一些东西,所谓“失败者,成功之母也”,正是这样的道理.

10. 总结(一)

怎样提高解题能力?读书、解题都是十分重要的.但有些同学书读得不少,题也解了许多,解题的能力却没有长足的进步.一个重要的原因是,他们没有在总结上多下功夫.

有些同学在解题时,走了许多弯路,写得乌七八糟,说得不清

不楚,简直是一片混乱.即使勉强做对了,也不是一个好的解答,甚至解答中充满错误,只是自己以为解出来了.这种不整理、不总结,解完了事的态度是不可取,不足法的.

不论谁,在解题时总免不了会走一些弯路.只有通过总结,才能除去那些不必要的步骤,弄清问题的关键所在,使思路明晰起来;才能抓住问题的本质,给出一个简单、优美、漂亮的解法.

解题,如同在黑暗中走进一间陌生的房间.总结,则好像打开了电灯.这时一切都清楚了:在以前的探索中,哪几步走错了,哪几步不必要,应当怎样走,等等.朦胧变成了自觉.

正如波利亚所说,这是“领会方法的最佳时机”,“当读者完成了任务,而且他的体验在头脑中还是新鲜的时候,去回顾他所做的一切,可能有利于探究他刚才克服困难的实质.他可以对自己提出许多有用的问题:‘关键在哪里?重要的困难是什么?什么地方我可以完成得更好些?我为什么没有觉察到这一点?要看出这一点我必须具备哪些知识?应该从什么角度去考虑?这里有没有值得学习的诀窍可供下次遇到类似问题时应用?’所有这些问题都提得不错,而且还有许多别的问题——但最好的问题是自然而然地浮现在你脑海里的问题”.

总结,首先是将解法化简(或称为简化).

例 1 在正方体的 8 个顶点处分别标上 1,2,3,4,5,6,7,8,然后将每条棱的两端所标的两个数的和写在这条棱的中点,问各棱中点所写的数是否可能恰有 5 种不同数值?各棱中点所写的数是否恰有 4 种不同数值?

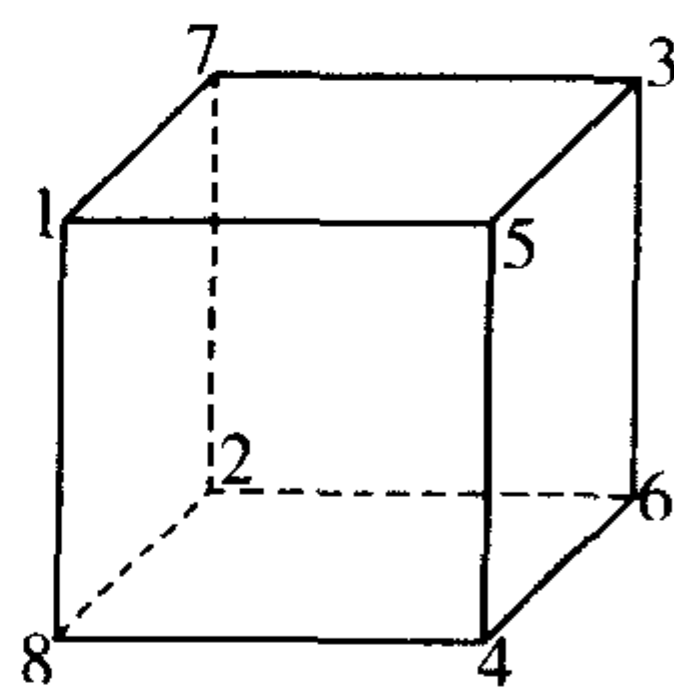


图 3-6

解 (i) 各棱中点所写的数恰有 5 种不同数值是可能的,但写法不惟一.图 3-6,即是一种,这时各棱中点所写的数为 6,8,9,10,12.

(ii) 不可能少于 5 种不同的数值.

以 1 所在顶点为端的棱有 3 条,不妨设这 3 条棱的另一端点所填写的数是 a, b, c , 满足 $a < b < c$, 则这 3 条棱的中点处的数为 $1+a, 1+b, 1+c$, 满足 $1+a < 1+b < 1+c$.

以 8 所在顶点为端点的棱也有 3 条, 设这 3 条棱另一端点所填写的数为 x, y, z , 满足 $x < y < z$, 则这 3 条棱的中点处所写的数为 $8+x, 8+y, 8+z$, 满足 $8+x < 8+y < 8+z$.

又 $c \leq 8, 1+c \leq 9, x \geq 1, 8+x \geq 9$, 所以

$$1+a < 1+b < 1+c \leq 8+x < 8+y < 8+z.$$

只有当 $c=8, x=1$ 时, 以上 6 条棱中点处的数才能恰有 5 个不同的数值, 否则就多于 5 种不同数值. 而这 6 条棱中点的 6 个数不可能少于 5 种不同的值, 因此在 12 条棱的中点处所写的数不可能有少于 5 种不同的数值.

上述解答写得很清楚, 但如此吹毛求疵, 还是能发现一些可以改进的地方.

首先(Ⅱ)的叙述显得冗长, 符号过多. 写解答的人大概是出于好心, 惟恐别人看不懂, 不厌其详. 但过于详细的解答反而淹没了主要的思路, 弊多益少. 要取得长足的进步, 就应当从解答中提炼出主要步骤(关键步骤). 符号过多, 使人望而生畏, 同时还会淹没思路. 如果改写一下, (Ⅱ)可以写成下面的解答:

写有 1 的顶点引出 3 条棱. 由于另一端写的数不同, 这三条棱的中点所写的数也互不相同. 其中最大的不超过 $9 (=1+8)$.

写有 8 的顶点引出 3 条棱, 与上面类似, 这三条棱的中点所写的数互不相同, 而且最小的不小于 $9 (=8+1)$.

于是上述各棱中点所写的数至少有 5 个不同的值, 并且只在 1 与 8 相邻时, 恰有 5 个不同的值, 两个大于 9, 两个小于 9, 一个等于 9.

上面的(Ⅰ)其实应写在(Ⅱ)的后面, 因为由(Ⅱ)知道恰有 5 个不同值时, 1 与 8 必须相邻, 有了这个条件后, 其他数不难通过

尝试写好,符合要求的写法共有 13 种.

对照一下,现在的解答叙述更加简明.完全未用符号,而要点更为突出,即考虑写 1 的顶点引出的棱与写 8 的顶点引出的棱,前者中点所写的数不超过后者中点所写的数.

总结,有助于弄清问题的实质.

例 2 在有限项的实数数列

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad \text{①}$$

中,如果有一段数 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+q-1}$ 的算术平均数大于 1 988,那么我们把这段数叫做一条“龙”,并把 a_k 称为这条龙的“龙头”(如果某一项 $a_k > 1\,988$,这单独一项也算作龙).

假定①中至少存在一条龙,证明①中全体可以作为龙头的项的算术平均数也必定大于 1 988.

这道题是第三届全国中学生数学冬令营的试题,解法很多,公布的标准解答考虑龙的长度,颇为麻烦.实际上龙的长度是非本质的,龙的“要害”在龙头.下面是我们所拟的解答:

根据定义,大于 1 988 的项一定是龙头(但龙头不一定大于 1 988).不是龙头的项一定 $\leq 1\,988$,将这项去掉,如果一条龙不含这项,去掉它对于这条龙毫无影响,如果一条龙含有这项,去掉它后,算术平均数仍然大于 1 988,龙还是龙,龙头还是龙头.

因此,我们可以将①中所有不是龙头的项逐一去掉,而龙头仍然为龙头,不受影响.于是,可以认为①中的项全是龙头.

a_1 属于一条龙 $a_1, a_2, \dots, a_t$. a_{t+1} 又属于一条龙 $a_{t+1}, a_{t+2}, \dots, a_s, \dots$ 这样,可将①分成若干条龙.每条龙的算术平均数大于 1 988,所以①的算术平均数大于 1 988.

本题亦可用归纳法,参照《数学竞赛研究教程》(单墀著,江苏教育出版社 1993 年出版).

本题出自于 Rieze 的一个引理.

11. 总结(二)

总结,是比较、评议.

第7节中的例1,原来的标准答案是考虑各排的空位数,抄录如下:

首先证明,只要安排12个横排就能保证全部学生都能坐下.

由于 c_i 只有有限个, c_i 的有限和也是有限个,选取其中最接近199的有限和,设为 $c_{i1} + c_{i2} + \cdots + c_{ik}$,即 $199 - (c_{i1} + c_{i2} + \cdots + c_{ik}) = x_1$ 为最小.

让这 k 个学校的学生坐在第1排,则 x_1 便是第1排中的空位数,于是对 $j \neq i_1, i_2, \cdots, i_k$ 的所有 j 均有 $c_j \geq x_1 + 1$ (否则第一排又可排下一个 c_j).我们断言必然有 $x_1 \leq 32$.事实上,若 $x_1 \geq 33$,则对所有其余的 c_j ,应有 $c_j \geq 34$,从中任取5个,不妨设为 c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 ,则有

$$5 \times 39 = 195 \geq c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 \geq 5 \times 34 = 170,$$

而

$$x = 199 - (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5) \leq 199 - 170 = 29$$

与 x_1 的最小性矛盾.

从所有其余的 c_j 中选取和 $c_{j1} + c_{j2} + \cdots + c_{jt}$ 使它最接近于199,让这些学生坐在第二排,令 $x_2 = 199 - (c_{j1} + c_{j2} + \cdots + c_{jt})$.同理可证 $x_2 \leq 32$.

对第3排,第4排, $\cdots$,依次如此去做.令 x_s 为第 s 排的空位数,只要剩下的学校不少于5所,便一定有 $x_s \leq 32$.

如果在安排11排后,学生已坐完,则问题得证.如果还未坐

完,则可分两种情况,一是余下的学校不足 5 所,由于 $4 \times 39 < 199$,其余的学生自然可坐在第 12 排.如果余下的学校不少于 5 所,则仍有 $x_{11} \leq 32$.这样前 11 排至少坐 $11 \times (199 - 32) = 1\,837$ 个学生,余下的学生数不多于 153 个,自然可坐在第 12 排.

另一方面,若只安排 11 排,有时候确实不够坐.设想 $n = 80$,其中前 79 所学校各派 25 名学生,而第 80 所学校派 15 名学生,则总人数 $\sum c_i = 25 \times 79 + 15 = 1\,990$.如果安排 11 排,除了某一排可坐 $25 \times 7 + 15 = 190$ 个学生外,其余每排均最多只能坐 $25 \times 7 = 175$ 个学生.这样 11 排总共坐 $1\,750 + 190 = 1\,940$ 个学生,还有 50 个学生没坐下.这就证明 12 排是保证全部学生都能坐下的最少排数.

上述解法当然是正确的,但比较艰深,两个部分(12 排够,11 排未必够)之间也无甚联系.我们提供另一种解法如下:

暂时放弃每所学校的学生必须坐在同一排的要求.让学生按照学校排好队,然后一个接一个入座,先坐第一排,坐满了再坐第二排,依此类推.1 990 人,每排坐 199 人,10 排刚好坐完.

再来检查一下有几所学校不合要求.这样的学校,学生坐在某排排尾及下一排的排头,至多有 9 个.将这些学校移到第 11 排与第 12 排去,由于每排至少能坐 $5(199 \div 39 > 5)$ 所学校,所以 12 排足以保证学生全部按要求坐下.

另一方面,如果 55 所学校人数均为 34,一所学校人数为 30,那么每一排只能坐 5 所学校($34 \times 5 + 30 > 199$),11 排只能坐 55 所学校,不能容纳这 56 所学校.而这 56 所学校的总人数为 $34 \times 55 + 30 = 1\,900$,所以学生总数为 1 990 时,11 排更不能保证学生全部按要求坐下.

比较一下,现在的解法简单不少,没有复杂的符号,而且符合常识(先坐下再调整.1 900 人如果坐不下,1 990 人更坐不下).突出了问题的实质:每排可坐 5 所学校,但不一定能坐 6 所学校.

总结,不仅是回顾,也包括进一步的探讨.

过去平面几何的作图题与轨迹题,都包括讨论一栏.这样的问题,现在很少有人去做.但对于其他问题,同样可以而且需要开展讨论.

讨论的内容很多,例如题目中的条件是否都是必要的?能否将条件减弱?能否将结论加强?能否将条件稍加改变,产生一个新问题?新问题怎样解?原来的方法还有效吗?等等.

第7节的例2,其中的条件“AC比CB多100米”就是一个多余的条件,解答完全没有利用它.

第10节的例1,可以问中点恰有5个不同数值的标法有多少种,也可以问中点至多有多少种不同的数值.前者业已说过共13种,后者是11种.

上面的座位问题,我们已经知道1900人,11排不一定能够坐下.那么,1899人,11排是否一定能够坐下?这就是一个新的问题.我们将在第七章第3节例1中解决.

坚持总结,可以提高鉴赏能力,知道什么是好的解法.有这种见识与没有这种见识大不一样.

坚持总结,可以养成一种敏锐的“题感”,在解题时,抓住关键,单刀直入,立即深入问题的核心,不致永远是战战兢兢地“摸着石头过河,走一步看一步”.

解题,切莫忘记总结.

12. 12 条解题要诀

解题是一门实践性的学问,研究解题的目的是为了提高解题能力,或如何更好地教解题,如何更好地教“教解题”.

因此,任何讲授“解题理论”或“解题学”的书,如果不能达到上述目的,那么不管它如何“系统”,如何“理论性强”,不管它说得如何天花乱坠,如何洋洋洒洒,也是毫无用处的.

在这方面,波利亚的几本著作是经典的传世之作,值得反复学习.请参看第八章.

有一些谈解题的书和文章,恕我直言,颇多“假、大、空”的架势.作者无疑都是才子,下笔千言,离题万里,说了不少“解题理论”,读来像文学评论或政治报告,与数学反倒没有什么关系.比如一位作者竟然批评波利亚“不能自觉运用辩证思维”.相映成趣的,另一位作者却认为波利亚“他的世界观充满唯物论和辩证法”.关于辩证思维及其与数学的关系,在文革前即讨论过.这类问题与姓社姓资一样,看似简单却总“拎勿清”,还是不谈为宜.

题目的解法应以简单、自然为上.有些谈解题的书或文章,偏带着读者“兜圈子”.兜得你晕头转向,然后停下来说:“你看我这解法,观点多么高,技巧多么高……”这样的书或文章读了不仅无用,而且还会使读者误以为自己很笨,失去学习的信心.老实说,我很怀疑这些作者自己是否解过题,是否能够独立解题.

其实,解题并不需要太多的理论,或许前面我们所说的一些要诀反倒更切实用.归结起来,有这么 12 条:

1. 要享受到解题的乐趣.对解题有浓厚的兴趣,能有几分痴迷更好.
2. 要有充足的信心.
3. 要有百折不回的决心与坚韧不拔的毅力.
4. 要做 100 道有质量的题目.
5. 反复探索,大胆地跟着感觉走.
6. 从简单的做起.
7. 从不同的角度看问题.
8. 学、思结合,发挥创造性,努力产生“好想法”.

9. 设法创造条件,不断变更问题.
10. 引入适当字母,向基本量靠拢.
11. 力求简单自然,直剖核心.
12. 注意总结.

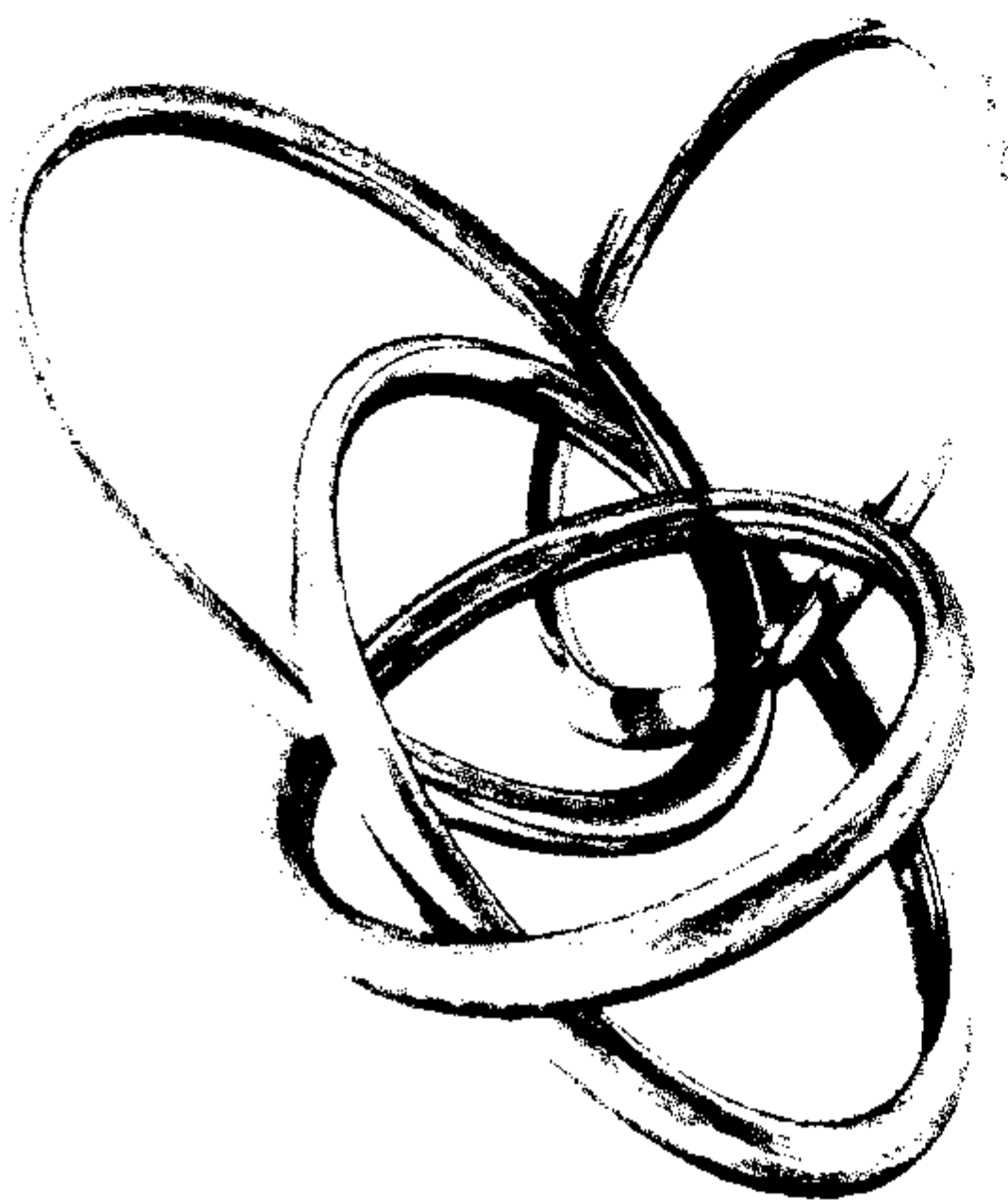
每一个解题的人,都有自己的经验,可以根据自己的经验总结出若干条有用的要诀.

修 改 解 答

修改已有的解答，
是一种很好的练习。

通过修改解答，可
以发现解答中的“废
招”，可以掌握问题的关
键步骤，可以了解问题
的本质，可以简单、自然
地解题，单刀直入，剖取
核心。

本章的实例都是从
一些书上选来的，我们
加以适当的评论，希望
对这些例子的分析有助
于增长读者的见识，提
高鉴赏能力，分了解法
的优雅与丑陋。



1. 笨拙的解答

应该自己睁开眼睛看,切莫被人牵着鼻子走.如果有别人的或书上的问题解答,千万注意不可盲从,很多现成的解答并不是最好的解答,有的甚至十分拙劣,与其被这种解答牵着走,不如自己去想.退一步说即使现成的解答很好,自己想一想,也有收益.实在想不出来,再瞅一瞅解答,印象才深,体会才深.

下面举几个例子,现成的解答都不很高明.

笨拙的解答可以充当反面教员.

例 1 求方程

$$4x^2 - 20[x] + 23 = 0$$

的所有实数根,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

这题某杂志公布的解答如下:

由于 $-20[x] + 23$ 是奇数,所以 $4x^2$ 必为奇数,设 $4x^2 = 2k + 1$ (k 为非负整数),则 $x = \frac{\sqrt{2k+1}}{2}$ (因为 $20[x] = 4x^2 + 23$ 为正,

所以 x 只取正值),代入原方程得 $[\frac{\sqrt{2k+1}}{2}] = \frac{12+k}{10}$,即 $12+k$ 是10的整数倍,又

$$\frac{12+k}{10} \leq \frac{\sqrt{2k+1}}{2} < \frac{12+k}{10} + 1, \quad (1)$$

解得 $13 - 5\sqrt{2} \leq k \leq 13 + 5\sqrt{2}$. 由于 $12+k$ 为10的倍数,所以

$$k = 8, 18, \text{从而 } x = \frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{37}}{2}.$$

这个解答兜来兜去,其中解不等式①一步尤为麻烦(未详细写出),虽然不算太长(因为题目本身并不复杂),却也费力不少,其原

因在没有抓住整数 $[x]$ 这个关键,反而用 $2k+1$ 去表示 $4x^2$,再求 x ,自寻烦恼.

正确的解法如下:

令 $n=[x]$,则 $20n=4x^2+23>0$,所以 n 为正整数, $n^2\leq x^2$,从而

$$4n^2-20n+23\leq 0,$$

上式即

$$(2n-5)^2\leq 2. \quad ②$$

所以 $n=2$ 或 3 ,代入原方程得 $x=\frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{37}}{2}$.

“不怕不识货,只怕货比货”,比较一下就知道现在的解法简单许多.关键在通过估计先定出 $[x]$,现在的解法抓住了关键,一棒打在七寸上,而原来的解法则是打蛇尾巴.

例2 设 $f(z)=z^2+az+b$ 是具有复系数 a, b 的关于复变量 z 的二次三项式,且对一切满足 $|z|=1$ 的 z 有 $|f(z)|=1$,求 a 和 b 的值.

原来公布的解答如下:

设 $a=a_1+ia_2, b=b_1+ib_2, a_1, a_2, b_1, b_2$ 为实数.

因为 $|z|=1$ 时, $|f(z)|=1$,令 $z=1$ 得

$$(1+a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2=1, \quad ①$$

令 $z=-1$ 得

$$(1-a_1+b_1)^2+(-a_2+b_2)^2=1, \quad ②$$

①-②得

$$a_1+a_1b_1+a_2b_2=0. \quad ③$$

同理,令 $z=i$ 与 $-i$ 得

$$(-1-a_2+b_1)^2+(a_1+b_2)^2=1, \quad ④$$

$$(-1+a_2+b_1)^2+(-a_1+b_2)^2=1, \quad ⑤$$

④-⑤得

$$a_2 - a_2 b_1 + a_1 b_2 = 0.$$

⑥

一般地,令 $z = \cos \theta + i \sin \theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$, 则

$$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2(a_1 + a_1 b_1 + a_2 b_2) \cos \theta + 2(a_2 - a_2 b_1 + a_1 b_2) \sin \theta + 2b_1 \cos 2\theta + 2b_2 \sin 2\theta = 0.$$

将③,⑥代入得

$$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2b_1 \cos 2\theta + 2b_2 \sin 2\theta = 0.$$

令 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ 得

$$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2b_1 = 0,$$

$$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2b_1 = 0,$$

所以 $b_1 = 0$.

再令 $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ 得

$$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + 2b_2 = 0,$$

$$a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2b_2 = 0,$$

所以 $b_2 = 0$.

将 $b_1 = 0, b_2 = 0$ 代入③,⑥得 $a_1 = a_2 = 0$, 故 $a = b = 0$.

本题的关键在于如何处理绝对值. 原解答认定 $|u + vi| = 1$ 需化成 $u^2 + v^2 = 1$, 在某些场合需要这样做, 其代价是将一个复未知数变为两个实未知数 a, b , 2 个复未知数就变为 4 个实未知数 a_1, a_2, b_1, b_2 , 因此产生较多方程, 显得复杂.

其实, 处理绝对值可以利用简单的不等式

$$|x| + |y| \geq |x + y|,$$

其中等号仅在向量(复数) x, y 同方向成立.

在本题中, 令 $z = \pm 1, \pm i$ 得

$$|1 + a + b| = |1 - a + b| = |-1 + ia + b| = |-1 - ia + b| = 1,$$

所以

$$4 = |1+a+b| + |1-a+b| + |-1+ia+b| + |-1-ia+b| \geq$$

$$|(1+a+b) + (1-a+b) + (-1+ia+b) + (-1-ia+b)| = 4.$$

从而 $1+a+b, 1-a+b, -1+ia+b, -1-ia+b$ 四个复数作为向量来看, 方向相同, 而它们的长又均为 1, 于是 $a=0, b=0$.

另一方面, 对 $|z|=1$, 显然有 $|z^2|=1$, 所以 $a=b=0$ 确为所求.

2. 不要滥用反证法

反证法是一种很有力的方法. 要证“ $A \rightarrow B$ ”, 原来只有一个条件 A . 采用反证法, 假设 B 不成立, 就多出一个条件 $\bar{B}$ (非 B), 而由条件 $A, \bar{B}$ 要导出的结论只是“矛盾”. 所以反证法常常能解决一些直接证明难以奏效的证明题.

但反证法也不宜滥用. 很多能直接证明的问题, 不必用反证法, 尤其在表述时, 正面说比正话反说总要清楚明白一些.

请看下面一例, 其中原来的解答大可修改.

证明: 如果 n 是大于 4 的偶数, 那么 $2^n - 1$ 是至少 3 个大于 1 的正整数的乘积.

【证明】 我们知道 $2^2 - 1 = 3, 2^4 - 1 = 3 \cdot 5, 2^{2k} - 1 = (2^k - 1) \cdot (2^k + 1)$. 如果当 $n = 2k > 4$ 时, 数 $2^{2k} - 1$ 等于 2 个质数的乘积, 那么数 $2^k - 1$ 与 $2^k + 1$ 都为质数, 这是不可能的. 因为当 k 为奇数时, $3 | 2^k + 1$; k 为偶数时, $3 | 2^k - 1$, 而 $2^k - 1 > 3$. 所以, 当 n 为大于 4 的偶数时, $2^n - 1$ 至少为 3 个大于 1 的自然数的乘积.

上面的证明采用了反证法, 而实际上证明的前半段只需保留“我们知道

$$2^{2k} - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1)”$$

以下接“当 k 为奇数时……”其中反证法部分全应删去.

3. 直接去做

有人解题喜欢搬用许多著名定理或重要结论,这些定理与结论当然是有用的,但杀鸡用牛刀就有点可笑了.其实解题主要是培养思维能力,而不是套用现成的结论.所以知识并不需要非常之多,重要在于灵活应用.好的数学题往往是小學生也能做,大学教授却未必做得好.所以中、小学不必“恶补”一些生僻的定理,如Stewart定理之类,有些知识可以了解,但也不要动辄搬出这些“法宝”来吓人.远比杀鸡用牛刀可怕的是“用原子弹来炸蚊子”,蚊子消灭了,但……

下面举一些例子,说明直接去做往往更好.

例 1 已知一个自然数被 3 除余 2,被 5 除余 3,被 7 除余 2,求这个数.

这样的题很多奥林匹克教材都有,大多先谈同余式,再谈孙子定理(中国剩余定理),似乎必须有了这些准备才能解题.

其实,这样的题目并不需要上述预备知识,小学生就可以解,应当鼓励他们大胆尝试,发挥自己的聪明才智,独立或通过讨论解决.

首先注意这个数被 3 除的余数是 2,被 7 除的余数是 2,所以这个数减去 2 后,既是 3 的倍数,也是 7 的倍数,因此就是 $3 \times 7 = 21$ 的倍数,这表明所求的数是

$$21k + 2,$$

这里 k 是任一个自然数或 0.

如果对小学生讲,索性写出这些数:

$$2, 23, 44, 65, \dots$$

其中除以 5 余 3 的就是 23.

当然,严格说来,23 只是满足要求的最小的数.

每个满足要求的数减去 23,差被 3,5,7 整除,即被 $105 = 3 \times 5 \times 7$ 整除.所以一般的解是形如

$$105a + 23$$

的数,这里 a 为自然数或 0.

例 2 已知 a, b, c 为正数. $\frac{\sqrt{2}b - 2c}{a} = 1$, 求证 $b^2 \geq 4ac$.

本题是个很简单的不等式证明题,由已知条件可得

$$\sqrt{2}b = a + 2c. \quad ①$$

①与要证的结论 $b^2 \geq 4ac$ 已经很接近: b 在左边, a, c 在右边.剩下的只需要用基本的不等式导出

$$a + 2c \geq 2\sqrt{a \cdot 2c} = 2\sqrt{2ac},$$

从而

$$\sqrt{2}b \geq 2\sqrt{2ac},$$

约去 $\sqrt{2}$ 再平方即得 $b^2 \geq 4ac$.

有人一看 $b^2 \geq 4ac$ 就想到一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的判别式(真是条件反射!).于是从方程有实根着手.正好 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 代入 $ax^2 + bx + c$ 中得出

$$a \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}b + c = \frac{a - \sqrt{2}b + 2c}{2} = 0.$$

这实在是太巧合了!因而也缺乏普遍性,如果题目改为“已知 $\frac{\sqrt{2}b - 3c}{a} = 1$, 求证 $b^2 \geq 4ac$ ”,那么采用判别式的做法就失效了.可见,采用判别式的做法实在是故弄玄虚,解题切忌学这种花架子.

4. 尽信,则不如无

书上的解答,多数非常之好,值得认真学习.但也有一些并不十分好,甚或有很糟糕的.“尽信书,则不如无书”.

每次竞赛或考试提供的标准答案也是如此,多数很好,个别的也许很差,不可迷信.任何解答,都谨供参考,应当尽可能拿出自己的解答.

例1 有 n 个人,已知他们中的任意 2 个至多通电话一次,他们中的任意 $n-2$ 个人之间通电话的总次数相等,都是 3^k 次,其中 k 是自然数,求 n 的所有可能值.

这是 2000 年全国高中联赛加试的第三题.标准答案如下:

显然 $n \geq 5$,记 n 个人为 $A_1, A_2, \dots, A_n$.

设 A_i 通话的次数为 m_i , A_i 与 A_j 之间通话的次数为 $\lambda_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$. 则

$$m_i + m_j - \lambda_{i,j} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n m_s - 3^k = c. \quad (*)$$

其中 c 是常数, $1 \leq i, j \leq n$. 根据 $(*)$ 知, $|m_i - m_j| = |(m_i + m_s) - (m_j + m_s)| = |\lambda_{i,s} - \lambda_{j,s}| \leq 1, 1 \leq i, j, s \leq n \Rightarrow |m_i - m_j| \leq 1, 1 \leq i, j \leq n$.

设 $m_i = \max\{m_s, 1 \leq s \leq n\}$, $m_j = \min\{m_s, 1 \leq s \leq n\}$, 则 $m_i - m_j \leq 1$.

若 $m_i - m_j = 1$, 则对于任意 $s \neq i, j, 1 \leq s \leq n$,

都有 $(m_i + m_s - \lambda_{i,s}) - (m_j + m_s - \lambda_{j,s}) = 1 - (\lambda_{i,s} - \lambda_{j,s}) \equiv 0$, 即 $\lambda_{i,s} - \lambda_{j,s} \equiv 1$.

故 $\lambda_{i,s} \equiv 1, \lambda_{j,s} \equiv 0, s \neq i, j, 1 \leq s \leq n$.

因此, $m_i \geq n-2, m_j \leq 1$. 于是, $m_i - m_j \geq n-3 \geq 2$.

出现矛盾, 故 $m_i - m_j = 0$, 即 $m_s (1 \leq s \leq n)$ 恒为常数.

根据(*)知, $\lambda_{i,j} \equiv 0$ 或 $\lambda_{i,j} \equiv 1$.

若 $\lambda_{i,j} \equiv 0$, 则 $m_s \equiv 0, 1 \leq s \leq n$. 与已知条件矛盾.

因此, $\lambda_{i,j} \equiv 1 \Rightarrow m_s \equiv n-1, 1 \leq s \leq n$. 所以

$$\frac{1}{2}n(n-1) - (2n-3) = 3^k, \text{ 即 } (n-2)(n-3) = 2 \times 3^k.$$

设 $n-2 = 2 \times 3^{k_1}, n-3 = 3^{k_2}, k_1 \geq k_2$, 则 $2 \times 3^{k_1} - 3^{k_2} = 1$,

于是 $3^{k_2}(2 \times 3^{k_1-k_2} - 1) = 1$, 得 $3^{k_2} = 1, 2 \times 3^{k_1-k_2} - 1 = 1$,

因此 $k_2 = 0, k_1 = 0$. 这与 $k \geq 1$ 矛盾.

设 $n-2 = 3^{k_1}, n-3 = 2 \times 3^{k_2}, k_1 \geq k_2 + 1$, 则 $3^{k_1} - 2 \times 3^{k_2} = 1$,

于是, $3^{k_2}(3^{k_1-k_2} - 2) = 1$, 得 $3^{k_2} = 1, 3^{k_1-k_2} - 2 = 1$,

因此 $k_2 = 0, k_1 = 1, n = 5$.

此时, 若 5 个人中每 2 人之间都通话一次, 则其中任意 3 个人之间通话的总次数为 3^1 次.

综上所述, $n=5$ 为 n 的所有可能值.

说实在的, 这个证明我看不懂, 尤其开头一段, 不知所云. 既然看不懂, 与其花大力气去“看懂”, 不如自己去做.

设总通话次数为 m . 任意 $n-2$ 个人通 3^k 次话, 所以 n 个人共通话 $C_{n-2}^{n-2} \times 3^k$ 次. 但这样算, 很多次通话被重复计算了. 由于每两个人的一次通话, 加入另 $n-2$ 个人中的 $n-4$ 个人就成为 $n-2$ 个人之间的通话, 所以每次通话恰被算了 C_{n-2}^{n-4} 次. 即

$$C_{n-2}^{n-2} \times 3^k = m \times C_{n-2}^{n-4}.$$

化简为

$$n(n-1) \times 3^k = m(n-2)(n-3). \quad \textcircled{1}$$

仔细看一看①, 其中的量都是正整数, 并且右边的 $n-2, n-3$ 都是左边 $n(n-1) \times 3^k$ 的约数, 再仔细想一想就可得出结论.

我们分两种情况.

(1) n 不被 3 整除, 这时 3 与 $n-3$ 互质; 并且 $(n, n-3) = (n, 3) = 1$, 所以必有 $(n-3) | (n-1)$. 但 $n-1 = (n-3) + 2$, 所以 $(n-3) | 2$, 即 $n-3=1$ 或 2 , $n=4$ 或 5 .

(2) n 被 3 整除, 这时 3 与 $n-2$ 互质, 又显然 $n-1$ 与 $n-2$ 互质. 所以必有 $(n-2) | n$, 从而 $n=3$ 或 4 .

因为任意 2 人至多通一次话(不是 3^k 次), 所以 $n=3, 4$ 均不合要求, 只能 $n=5$.

5 个人, 每 2 个人通一次话, 这时正好满足题目要求(每 3 个人通 3 次话).

我们只用了一个等式(1)就解决了问题, 显然比标准答案简单得多, (1)中虽有 3 个字母 m, n, k , 但利用算术关系(整除、互质)确定 n 并不困难(m, k 也随之确定).

例 2 I, O 分别为 $\triangle ABC$ 的内心和外心, AD 是 BC 边上的高, I 在线段 OD 上, 求证 $\triangle ABC$ 的外接圆半径等于 BC 边上的旁切圆半径.

原解答如下:

设 $AB = c, BC = a, CA = b$, AI 的延长线交外接圆于 M , 则 $OM \perp BC$, 从而 $OM \parallel AD$,

$$\frac{AI}{IM} = \frac{AD}{OM} = \frac{AD}{R} = \frac{c \sin B}{R} = 2 \sin B \sin C,$$

又

$$\angle ABI = \angle IBC = \frac{B}{2}, \angle CBM = \angle CAM = \frac{A}{2},$$

$$\angle AMB = \angle C, \angle BAM = \frac{A}{2},$$

所以

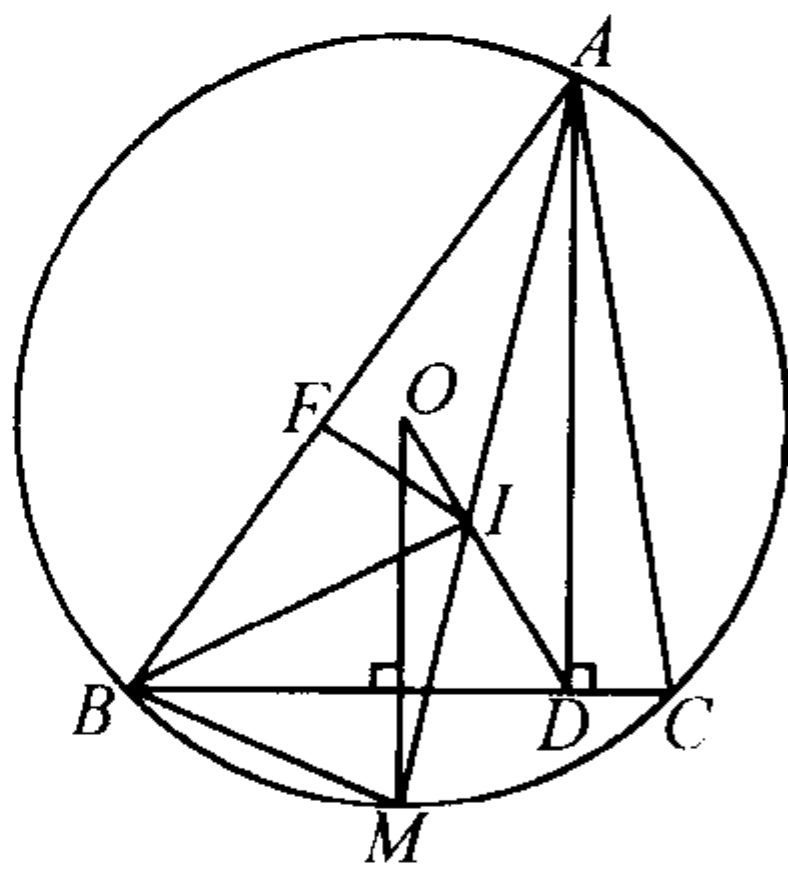


图 3-1

$$\begin{aligned}\frac{AI}{IM} &= \frac{S_{\triangle ABI}}{S_{\triangle MBI}} = \frac{AB \cdot \sin \frac{B}{2}}{BM \cdot \sin \frac{A+B}{2}} = \frac{AB}{BM} \cdot \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} \\ &= \frac{\sin C}{\sin \frac{A}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \frac{2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2}},\end{aligned}$$

于是

$$2 \sin B \sin C = \frac{2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2}},$$

所以

$$4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = 1.$$

设 BC 边上的旁切圆半径为 r_a , 则

$$\frac{1}{2} r_a (b + c - a) = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A,$$

所以

$$\begin{aligned}r_a &= \frac{bc \sin A}{b + c - a} = 2R \frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin B + \sin C - \sin A} \\ &= 2R \cdot \frac{\sin A \sin B \sin C}{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B+C}{2}} \\ &= 2R \cdot \frac{\sin A \sin B \sin C}{4 \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \\ &= \frac{R}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B \sin C}{\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} \\ &= 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = R.\end{aligned}$$

上面的解法以三角运算为主,缺乏几何意味.过多的三角运算往往使人不明白目标在哪里,做下去是否能成功.似乎靠你的运气;运气好就会成功,运气不好就一直在兜圈子.

这道题还是用几何证法为好,首先旁切圆半径 r_a , 我们比较陌生,应先求 r_a (尽量将不熟悉的化为熟悉的), 易知

$$r_a = \frac{S_{\triangle ABC}}{\frac{1}{2}(b+c-a)} = \frac{\frac{1}{2}h_a a}{s-a}, \quad (1)$$

其中 $s = \frac{a+b+c}{2}$.

于是问题化为证明

$$\frac{R}{h_a} = \frac{\frac{1}{2}a}{s-a}. \quad (2)$$

由 $OM \parallel AD$ 得

$$\frac{R}{h_a} = \frac{OM}{AD} = \frac{MI}{AI}. \quad (3)$$

可以证明 $MI = MB$ ($\because \angle MBI = \angle MBC + \angle CBI = \angle MAC + \angle CBI = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC) = \angle MIB$).

所以只需证明

$$\frac{\frac{1}{2}a}{s-a} = \frac{MB}{AI}. \quad (4)$$

设 OM 交 BC 于 E , 则 E 为 BC 中点. 在 $\triangle BEM$ 中, $BE = \frac{1}{2}a$, $\angle BEM = 90^\circ$, MB 是斜边, 所以只需再找一个相似的直角三角形, 以 AI 为斜边, $s-a$ 为一条直角边. 过 I 作 AB 的垂线, 设垂足为 F , 则易知 $AF = s-a$, 并且 $\angle BAM = \angle MAC = \angle MBC$, 所以

$\triangle AIF \cup \triangle BME$, ④成立.

这个解法, 每一步都很自然合理.

5. 对照比较(一)

有一年, 准备编一本题典, 搜集了一些题, 看了一些解答, 发觉有的题, 解答不是很简洁, 需要修改. 现在, 将其中一些题原来的解答附在后面, 请读者加以对照比较. 这可能有助于将解答写得更好些.

例 1 有多少个质数的十进制表示是 0, 1 相间且两端为 1?

设 $p_k = 10\,101\cdots 01$ (k 个 0), $k \geq 1$, 则

$$\begin{aligned} p_k &= 10^{2k} + 10^{2(k-1)} + \cdots + 10^2 + 1 \\ &= \frac{10^{2(k+1)} - 1}{10^2 - 1} = \frac{(10^{k+1} - 1)(10^{k+1} + 1)}{10^2 - 1}. \end{aligned}$$

如果 k 是奇数 $2h-1$ ($h \geq 1$), 那么

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{(10^{2h} - 1)(10^{2h} + 1)}{10^2 - 1} \\ &= (10^{2(h-1)} + 10^{2(h-2)} + \cdots + 1)(10^{2h} + 1), \end{aligned}$$

仅在 $k=1$ ($h=1$) 时, $p_k = 10^2 + 1$ 为质数, 在 $h > 1$ 时, p_k 有真因数 $10^{2h} + 1$, 不是质数.

如果 k 是偶数 $2h$ ($h \geq 1$), 那么

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{(10^{2h+1} - 1)(10^{2h+1} + 1)}{10^2 - 1} \\ &= \frac{(10 - 1)(10^{2h} + 10^{2h-1} + \cdots + 1)(10 + 1)(10^{2h} - 10^{2h-1} + \cdots + 1)}{(10 - 1)(10 + 1)} \end{aligned}$$

$$= (10^{2h} + 10^{2h-1} + \cdots + 1)(10^{2h} - 10^{2h-1} + \cdots + 1)$$

是合数.

因此, 只有一个质数 $p_1 = 101$ 合乎要求.

原解答如下:

设 $p_k = 1\ 010\cdots 101$ (k 个 0) 为十进制表示中的质数, $k \geq 1$. 显然, $p_1 = 101$ 为质数, 当 $k \geq 2$ 时, 若 k 为奇数, 则显然 101 整除 p_k ; 若 k 为偶数, 则

$$11p_k = 11\cdots 1(2k+2 \text{ 个 } 1) \stackrel{\text{记为}}{=} Q_{2k+2} = \underbrace{11\cdots 1}_{k+1 \text{ 个 } 1} \times \underbrace{100\cdots 01}_{k \text{ 个 } 0}.$$

故 $11 \cdot p_k = Q_{k+1} \cdot R$, 而 $11 \mid 10\cdots 01$, 故 $p_k = 11\cdots 1 \times \frac{100\cdots 01}{11}$ 是合数, R 为 $100\cdots 01$ (k 个 0), 而 11 整除 R , 故 Q_{k+1} 整除 p_k .

因此只有惟一的质数 101 满足题目要求.

两种解法不全相同, 我们的解法更直接一些, 少用了几个字母 (Q_{2k+2} 与 R).

例 2 设 $a_n = 6^n + 8^n$, 确定 a_{83} 除以 49 所得的余数.

$$\begin{aligned} \text{解 } a_{83} &= (7-1)^{83} + (7+1)^{83} \\ &\equiv 2 \times 7 \times 83 \equiv 35 \pmod{49}. \end{aligned}$$

原解答如下:

设 n 为奇数,

$$\begin{aligned} a_n &= (7-1)^n + (7+1)^n \\ &= (7^n - C_n^1 \cdot 7^{n-1} + C_n^2 \cdot 7^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} \cdot 7 - 1) + (7^n + C_n^1 \cdot 7^{n-1} + C_n^2 \cdot 7^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} \cdot 7 + 1) \\ &= 2(7^n + C_n^2 \cdot 7^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} \cdot 7) \\ &= 2 \times 49(7^{n-2} + C_n^2 \cdot 7^{n-4} + \cdots + C_n^{n-3}) + 14n. \end{aligned}$$

$$a_{83} = 49k + 14 \times 83 = 49(k + 23) + 35.$$

即 a_{83} 除以 49, 所得余数是 35.

显然一般情况的二项式展开, 没有写出的必要, 这些应尽量用

心算完成. 当然, 采用同余更方便些.

例 3 求有多少个实数 x , 满足方程

$$\frac{1}{5} \log_2 x = \sin(5\pi x).$$

解 令 $y = f_1(x) = \frac{1}{5} \log_2 x$, $y = f_2(x) = \sin(5\pi x)$, 两个函数的图像交点的横坐标即方程的解. 因此只要决定出两个函数图像交点的个数即可.

$y = f_1(x)$ 严格递增, $y = f_2(x)$ 的绝对值不超过 1.

由 $\frac{1}{5} \log_2 x = 1$, 得 $x = 32$, 故交点在区间 $[0, 32]$ 之内.

$y = f_2(x)$ 的周期为 $\frac{2}{5}$, $[0, 32]$ 恰由 $32 \div \frac{2}{5} = 80$ 个周期组成, 每个周期中恰有两个交点. 惟独第三个周期仅有一个交点 $(1, 0)$, 因此, 满足方程的实数有 159 个.

原解法如下:

设 $f_1(x), f_2(x)$ 等同前, 不再重复.

由 $\frac{1}{5} \log_2 x = \pm 1$, 得 $x_1 = \frac{1}{32}, x_2 = 32$. 故交点在区间 $[\frac{1}{32}, 32]$ 之内.

又由 $\sin 5\pi x = 0$ 知 $f_2(x)$ 的正零点为 $\frac{k}{5} (k \in \mathbf{N})$.

在 $[\frac{1}{32}, 1]$ 内, 两个函数图像交点在 $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}), (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ 内各有两个. 在 $x = 1$ 有一个交点. 在 $(1, 3), (3, 5), \dots, (29, 31)$ 内各有 10 个交点, 共 150 个. 在 $(31, 32)$ 内有 4 个交点. 总共有 159 个交点, 即满足方程的实数有 159 个.

其中“废招”显然.

例 4 求证: 不存在这样的整数, 把它的首位数字移到末位之后, 得到的数是原数的两倍.

解 设有这样的数, 它的首位数字为 A , 其余数字形成 k 位

数 x , 则

$$10x + A = 2(A \cdot 10^k + x), \quad \text{①}$$

于是

$$8x = (2 \cdot 10^k - 1) \cdot A = \underbrace{199 \cdots 9}_{k \text{ 个 } 9} A.$$

8 应整除 A , 而 $0 < A \leq 9$, 故 $A = 8$, 从而 $x = \underbrace{199 \cdots 9}_{k \text{ 个 } 9}$, 与 x 为 k 位数矛盾.

原解法设有这样的整数 m , 首位数字为 A , 其余数字组成 k 位数 x , 则 $m = A \cdot 10^k + x$. 将 A 移到末位后, 得到 $m' = 10x + A$. 从而得出 ① 式等等均与上面相同, 最后得出 $x = \underbrace{199 \cdots 9}_{k \text{ 个 } 9}$, 原数

$m = \underbrace{99 \cdots 9}_{k+1 \text{ 个 } 9}$. 与 A 是 m 的首位数字矛盾.

其中符号 m, m' 都不必引入, 设了反而累赘. 应尽量少用符号, 实在非用不可才用, 使用符号要合理、简洁.

例 5 设 a, b, c 是方程 $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ 的根,

(1) 证明: a, b, c 彼此不等.

(2) 证明: 下式表示一个整数.

$$\frac{b^{1982} - c^{1982}}{b - c} + \frac{c^{1982} - a^{1982}}{c - a} + \frac{a^{1982} - b^{1982}}{a - b}.$$

解 (1) 略.

(2) 令 $A_n = \frac{b^n - c^n}{b - c} + \frac{c^n - a^n}{c - a} + \frac{a^n - b^n}{a - b}$, 则 $A_0 = 0, A_1 = 3, A_2 = 2(a + b + c) = 2$ 都是整数, 设在 $n \leq k$ 时 A_n 均为整数 ($k \leq 2$), 则由于 $b^{k+1} = b^k + b^{k-1} + b^{k-2}$ 等, 所以 $b^{k+1} - c^{k+1} = (b^k - c^k) + (b^{k-1} - c^{k-1}) + (b^{k-2} - c^{k-2})$, 从而 $A_{k+1} = A_k + A_{k-1} + A_{k-2}$ 也是整数, 因此一切 A_n 为整数, 特别地, A_{1982} 为整数.

原解法如下:

(2) 设 $(a, b, c)_k = a^k + b^k + c^k, k = 1, 2, \cdots, 1981$. 因为 a, b, c

满足方程 $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, 所以有

$$(a, b, c)_3 = (a, b, c)_2 + (a, b, c)_1 + 1,$$

$$(a, b, c)_{m+3} = (a, b, c)_{m+2} + (a, b, c)_{m+1} + (a, b, c)_m, m \geq 1, \text{ 且}$$

$$(a, b, c)_1 = a + b + c = 1,$$

$$(a, b, c)_2 = (a + b + c)^2 - 2(bc + ca + ab) = 1 - (-2) = 3.$$

于是 $(a, b, c)_3, (a, b, c)_4, \dots, (a, b, c)_n$ 都是整数.

$$\begin{aligned} & \text{又 } b^k c^l + b^l c^k + c^k a^l + c^l a^k + a^k b^l + a^l b^k \\ &= (a^k + b^k + c^k)(a^l + b^l + c^l) - (a^{k+l} + b^{k+l} + c^{k+l}) \\ &= (a, b, c)_k \cdot (a, b, c)_l - (a, b, c)_{k+l}, \end{aligned}$$

因此也是整数.

因为 $b \neq c, c \neq a, a \neq b$, 所以

$$\text{原分式} = \sum_{k+l=1981} (b^k c^l + c^k a^l + a^k b^l) = \dots (\text{略})$$

也是整数.

原解法中, 记 $a^k + b^k + c^k$ 为 $(a, b, c)_k$, 这种记号很少见, 写起来也麻烦, 还不好用通常和的记法 S_k 来表示. 用这种符号, 解答也过长, 未抓住关键所在.

例 6 设 $f(x) = |x - p| + |x - 15| + |x - p - 15|$, 其中 $0 < p < 15$, 决定在区间 $p \leq x \leq 15$ 上 $f(x)$ 的最小值.

解 因为 $0 < p < 15$, 所以在区间 $p \leq x \leq 15$ 上,

$$f(x) = (x - p) + (15 - x) + (p + 15 - x) = 30 - x.$$

$$\min f(x) = f(15) = 30 - 15 = 15.$$

原解法在 $f(x) = \dots = 30 - x$ 之前增加

$$“|x - p| = x - p, |x - 15| = 15 - x, |x - (p + 15)| = p + 15 - x”,$$

在 $\min f(x) = \dots = 15$ 之前增加“若使 $f(x)$ 最小, 只须 x 取最大值 15”. 其实这些都不必写出.

应当突出解题中的关键, 省略一些简单的、不必要的“步骤”,

提高思维速度.

例 7 若 $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5, \log_8 b + \log_4 a^2 = 7$, 试确定 ab 的值.

解 两式相加得

$$\log_8 ab + 2\log_4 ab = 12, \quad \textcircled{1}$$

即

$$\frac{1}{3}\log_2 ab + \log_2 ab = \frac{4}{3}\log_2 ab = 12. \quad \textcircled{2}$$

所以 $ab = 2^9 = 512$.

原解答在①前增加一步

$$“(\log_8 a + \log_8 b) + (\log_4 b^2 + \log_4 a^2) = 12”.$$

在②前增加一步“换底得

$$\frac{\log_2 ab}{\log_2 8} + \frac{2\log_2 ab}{\log_2 4} = 12”.$$

最后结果前又增加一步“ $\log_2 ab = 9$ ”. 这些都没有必要写出来. 只有熟悉一些基本结论(如 $\log_8 x = \frac{1}{3}\log_2 x$), 才能减少不必要的“过程”, 提高思维速度, 将精力用在关键之处. 也只有这样, 才能使思维更深入, 更有深度.

例 8 设 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 是一个等差数列, 公差是 1, 并且 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{98} = 137$. 试求 $a_2 + a_4 + \dots + a_{98}$ 的值.

$$\text{解 } 137 + 49 = 2(a_2 + a_4 + \dots + a_{98}),$$

所以答案为 $93 (= \frac{1}{2}(137 + 49))$.

原解法如下:

$$\text{设 } S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{98} = 137.$$

$$S_2 = a_2 + a_4 + \dots + a_{98}.$$

那么

$$\begin{aligned} S_1 + 49 &= (a_1 + 1) + a_2 + (a_3 + 1) + \dots + (a_{97} + 1) + a_{98} \\ &= 2(a_2 + a_4 + \dots + a_{98}) = 2S_2. \end{aligned}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}(S_1 + 49) = \frac{1}{2}(137 + 49) = 93.$$

本题没有必要引入和 S_1, S_2 . 其实它是一个简单的算术问题, 不必采用代数方法. 这种用一个式子就能表示出来的结果, 不要用几个式子来表达.

例 9 对于 $i=1, 2, \dots, n$, 有 $|x_i| < 1$, 又设 $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = 19 + |x_1 + x_2 + \dots + x_n|$. 那么整数 n 的最小值是多少?

解 因 $|x_i| < 1, \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \geq 0$, 故

$$19 = \sum_{i=1}^n |x_i| - \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| < n.$$

又取 $x_1 = x_3 = \dots = x_{19} = 1 - \frac{1}{20}, x_2 = x_4 = \dots = x_{20} = -1 + \frac{1}{20}$,

则 $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ 满足要求, 所以 n 的最小值为 20.

原解答如下:

因 $|x_i| < 1, \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \geq 0$, 故

$$\sum_{i=1}^n |x_i| - \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| < n.$$

又由已知

$$\sum_{i=1}^n |x_i| - \left| \sum_{i=1}^n x_i \right| = 19,$$

因此 $n > 19$ (以下略).

我们将两步并为一歩. 经常将两步并为一歩, 三步并为两步, 思维的速度就会大大加快.

6. 对照比较(二)

有些解答可以直接做出来,没有必要兜个大圈子.

例 1 某生物学家想要计算湖中鱼的数目. 在 5 月 1 日他随机地捞出 60 条鱼并给它们做了记号, 然后放回湖中. 在 9 月 1 日他又随机捞出 70 条鱼, 发现其中 3 条有标记. 他假定 5 月 1 日时湖中的鱼有 25% 在 9 月 1 日时已不在湖中了(由于死亡或移居). 9 月 1 日湖中 40% 的鱼在 5 月 1 日时不在湖里(由于新出生或刚刚迁入湖中), 并且在 9 月 1 日捞的鱼能代表整个湖中鱼的情况, 问 5 月 1 日湖中有多少条鱼?

解 9 月 1 日捞出的 70 条鱼中, 有

$$70 \times (1 - 40\%) = 42$$

条是 5 月 1 日在湖里的.

42 条中有 3 条做了记号, 占 $\frac{3}{42}$, 所以 5 月 1 日捞出的 60 条占 $\frac{3}{42}$, 当时湖中有鱼

$$60 \div \frac{3}{42} = 840$$

条.

原解答如下:

设 5 月 1 日湖中有 x 条鱼, 9 月 1 日有 y 条鱼, 则由条件应有

$$y = 0.75x + 0.40y, \quad \text{①}$$

9 月 1 日湖中带标签的鱼有 $60 \times 0.75 = 45$ 条. 如果 9 月 1 日随意捕捞能代表整体情况, 则应有

$$\frac{3}{70} = \frac{45}{y}. \quad ②$$

由②得 $y=1\ 050$. 代入①得 $x=840$. 即 5 月 1 日湖中有鱼 840 条.

实际上题中的条件 25% 不起任何作用, 改为任一百分数, 不影响结果, 没有必要用 25% 求出一些结果来, 这些仅仅是兜圈子而已.

兜圈子的解法令人费解, 而且不利于思维能力的提高.

例 2 设 $\overline{a679b}$ 是一个五位数(十进制), 它可被 72 整除, 试决定 a 与 b 的值.

解 $72=8\times 9$. 因为 $\overline{a679b}$ 被 9 整除, 所以 $a+6+7+9+b=a+b+4+18$ 被 9 整除, 但 $0<a\leq 9, 0\leq b\leq 9$, 所以 $a+b=5$ 或 14.

又 $\overline{a679b}$ 被 8 整除, 所以 $\overline{79b}$ 被 8 整除, 从而 $b=2$. 于是 $a=5-2=3$.

原解答得出 $a+b=5$ 或 14 后, 兜了一个圈子:

设这五位数为 n . 因为 $2|n$, 所以 b 为偶数. 从而 $a=1, b=4$, 或 $a=3, b=2$, 或 $a=6, b=8$, 或 $a=8, b=6$.

又因 $4|n$, 故 4 整除末两位数字所成的数, 这只有 $b=2$ 或 6 才有可能.

又因 $8|n$, 故 8 整除末三位数字所成的数, 这只有 $b=2$ 才行.

总之 $a=3, b=2$ 是本题的惟一解.

例 3 求证

$$61!+1\equiv 0(\text{mod } 71),$$

$$63!+1\equiv 0(\text{mod } 71).$$

数论里有一个 Wilson 定理: 在 p 为质数时, $(p-1)!+1\equiv 0(\text{mod } p)$, 现在 71 是质数, 所以

$$70!+1\equiv 0(\text{mod } 71). \quad ①$$

注意 $70\times 69\times \cdots \times 64\equiv (-1)\times (-2)\times \cdots \times (-7)=- (3\times 4\times 6)\times (2\times 5\times 7)=-72\times 70\equiv 1(\text{mod } 71)$.

所以由①得

$$63! + 1 \equiv 0 \pmod{71}. \quad (2)$$

又 $63 \times 62 \equiv (-8) \times (-9) = 72 \equiv 1 \pmod{71}$, 所以由②得

$$61! + 1 \equiv 0 \pmod{71}.$$

原来解答如下, 其中字母较多, 我们的解法较具体:

当 p 为奇素数时, 根据威尔逊定理有

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}. \quad (3)$$

对于整数 $1 \leq r \leq p-1$, 有

$$p-j \equiv -j \pmod{p}, j=1, 2, \dots, r.$$

将上面 r 个式子两边相乘, 得

$$(p-1)(p-2)\cdots(p-r) \equiv (-1)^r \cdot r! \pmod{p}. \quad (4)$$

如果存在 r , 使

$$(-1)^r \cdot r! \equiv 1 \pmod{p}, \quad (5)$$

那么由③, ④, ⑤式可得

$$\begin{aligned} -1 &\equiv (p-1)! \\ &\equiv (p-1)\cdots(p-r) \cdot (p-r-1)! \\ &\equiv (-1)^r \cdot r! (p-r-1)! \\ &\equiv (p-r-1)! \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad (p-r-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}. \quad (6)$$

至于本题, 当 $p=71$ 时, $r=7, 9$ 满足⑤式, 所以由⑥式得

$$61! + 1 \equiv 0 \pmod{71},$$

$$63! + 1 \equiv 0 \pmod{71}.$$

例 4 设 p 为奇质数, 证明

$$\sum_{j=0}^p C_p^j C_{p+j}^j \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}.$$

解 在 $0 < j < p$ 时, $jC_p^j = pC_{p-1}^{j-1}$, 所以 C_p^j 被 p 整除, 而

$$C_{p+j}^j = \frac{(p+j)(p+j-1)\cdots(p+1)}{j!} \equiv \frac{j(j-1)\cdots 1}{j!} \equiv 1 \pmod{p},$$

所以在 $0 < j < p$ 时,

$$C_p^j C_{p+j}^j \equiv C_p^j \pmod{p^2}.$$

上式在 $j=0$ 时也显然成立.

而 $(2p-j)(p+j) \equiv j(p-j) \pmod{p^2}$, 所以

$$\begin{aligned} C_{2p}^p &= 2 \times \frac{(2p-1)(2p-2)\cdots(p+1)}{(p-1)!} \\ &\equiv 2 \times \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (p-2)(p-1) + p(1+2+\cdots+(p-1))}{(p-1)!} \\ &\equiv 2 \pmod{p^2}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^p C_p^j C_{p+j}^j &\equiv \sum_{j=0}^{p-1} C_p^j + 2 \\ &= \sum_{j=0}^p C_p^j + 1 \\ &= 2^p + 1 \pmod{p^2}. \end{aligned}$$

原解法如下:

$$\sum_{j=0}^p C_p^j C_{p+j}^j = \sum_{j=0}^p \frac{(p+j)!}{(j!)^2 (p-j)!} = 1 + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{(p+j)!}{(j!)^2 (p-j)!} + \frac{(2p)!}{(p!)^2}, \text{ 而 } \frac{(2p)!}{(p!)^2} = 2 \cdot \frac{(p+1)(p+2)\cdots(p+p-1)}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (p-1)}, \text{ 又}$$

$$(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1)$$

$$= \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} (x+j)(x+p-j)$$

$$= \prod_{j=1}^{\frac{p-1}{2}} (x^2 + px + j(p-j))$$

$$= (p-1)! + \lambda px + x^2 f(x).$$

①

其中, λ 为某个整数, $f(x)$ 为整系数多项式.

由①式知, $(p+1)(p+2)\cdots(p+p-1)\equiv(p-1)!\pmod{p^2}$.

注意到 $\frac{(2p)!}{(p!)^2}$ 是整数, 所以 $\frac{(2p)!}{(p!)^2}\equiv 2\pmod{p^2}$.

另外, 利用 $p+i\equiv i\pmod{p}$, 及 C_{p+j}^j 为整数,

$\frac{(p+1)\cdots(p+j)}{j!}=1+\lambda_j p$, 其中 λ_j 为整数, 由此可导出

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p-1} \frac{(p+j)!}{(j!)^2(p-j)!} &= \sum_{j=1}^{p-1} \frac{p!}{j!(p-j)!} \cdot \frac{(p+1)(p+2)\cdots(p+j)}{j!} \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} \frac{p!}{j!(p-j)!} (1+\lambda_j p) \\ &\equiv \sum_{j=1}^{p-1} \frac{p!}{j!(p-j)!} \equiv 2^p - 2 \pmod{p^2}.\end{aligned}$$

综合以上各式, 便得结论.

像例 4 这样, 解法越复杂就越有改进的余地.

弄清实质(一)

一些生疏的问题, 尤其是生疏而又复杂的问题, 首先要把问题的实质弄清楚, 尽量通俗化、具体化, 不要专在符号与形式推导上做文章. 表达也应力求清晰, 不要含混.

将一个复杂的问题想明白, 往往胜过做十多个普通的问题. 将一个复杂的问题写清楚, 更胜过做一大堆平凡的问题. 通过这种正确的锻炼, 你的思维能力, 你的表述能力, 将大大地提高, 升上新的台阶, 这是终生受益的事情.

作为第一步, 可以从看透别人(或书本上)的解答, 改进别人的解答及叙述开始. 经过这种练习, 久而久之, 不出手则已, 一出手就会击中要害, 解决问题.

例1 证明:对任意整数 $k > 2$, 存在无穷多正整数 n , 使得

$$[n, n+1, n+2, \dots, n+k-1] > [n+1, n+2, \dots, n+k].$$

这里 $[a_1, a_2, \dots, a_l]$ 表示 $a_1, a_2, \dots, a_l$ 的最小公倍数.

解 固定整数 $k > 2$. 记 $M_n = [n, n+1, n+2, \dots, n+k-1]$, 显然 M_n 为能整除 $n, n+1, \dots, n+k-1$ 之一的素数的最高次幂的乘积. 令 r_n 为形如 $p^{\alpha \cdot \beta}$ 的所有素数幂的乘积, 其中 $p^\alpha \parallel M_{n+1}$, $p^\beta \parallel M_n$ ($p^l \parallel M$ 表示 $p^l \mid M$, 但 $p^{l+1} \nmid M$), 且 $\alpha > \beta$. 类似地, 令 l_n 表示能整除 M_n , 但不整除 M_{n+1} 的所有素数幂的乘积. 于是

$$M_{n+1} = M_n \cdot \frac{r_n}{l_n}.$$

$$\text{表 } k = 2^m \cdot k', 2 \nmid k'.$$

若 $k' > 1$, 设 $p > k$ 为素数, $n = 2^m p$. 不难知道 $l_n = p$. 于是由 $n+k = 2^m(p+k')$ 知, $2^{m+1} \mid n+k$. 又因为 $2^{m+1} \mid 2^m p + 2^m \cdot 1$, $1 \leq 2^m \cdot 1 < k$, 所以

$$r_n \leq \frac{n+k}{2^{m+1}} = \frac{p+k'}{2},$$

$$\text{从而 } \frac{M_{n+1}}{M_n} = \frac{r_n}{l_n} \leq \frac{p+k'}{2p} < 1.$$

若 $k' = 1$, 则 $k = 2^m, m \geq 2$. 设 $l > 1$ 为奇数, $n = 2^{l+m}$, 则 $n+k = 2^m(2^l+1)$. 不难知道 $2^l \mid l_n, 3 \mid 2^l+1$. 当 $k \geq 4$ 时, $n, n+1, \dots, n+k-1$ 中至少有一个数被 3 整除. 所以

$$r_n \leq \frac{n+k}{3 \cdot 2^m} = \frac{2^l+1}{3}.$$

$$\text{于是 } \frac{M_{n+1}}{M_n} = \frac{r_n}{l_n} \leq \frac{2^l+1}{2^l \cdot 3} < 1.$$

综上所述, 存在无穷多正整数 n , 使 $M_{n+1} \leq M_n$.

本题的证明不易看懂, 其中 l_n 的定义, 表述似有问题. 而使人不易看懂的主要原因就是太抽象化、太符号化, 而不是具体直观,

其中本质的东西因而反被掩盖了.

首先,应当清楚 $M_n = [n, n+1, n+2, \dots, n+k-1]$ 与 $[n+1, n+2, \dots, n+k-1]$ 的关系和差别,通常

$$[n, n+1, \dots, n+k-1] = [n+1, n+2, \dots, n+k-1]$$

与 $[n, n+1, \dots, n+k-1] = n \times [n+1, n+2, \dots, n+k-1]$ 都不成立.

前者只在 n 的因数全被 $[n+1, n+2, \dots, n+k-1]$ “吸收”, 即 $n \mid [n+1, n+2, \dots, n+k-1]$ 时才成立. 后者只在 n 的因数全不被 $[n+1, n+2, \dots, n+k-1]$ 吸收, 即 n 的每个质因数都不是 $[n+1, n+2, \dots, n+k-1]$ 的因数时才成立. 特别地, 在 n 是大于 k 的质因数 p 时, 由于 $(n, n+i) = (n, i)$, 所以 $p \nmid (n+i)$, $i=1, 2, \dots, k-1$, 从而 $p \nmid [n+1, n+2, \dots, n+k-1]$, 上面的第二个等式成立.

对于 $M_{n+1} = [n+1, n+2, \dots, n+k]$ 与 $[n+1, n+2, \dots, n+k-1]$, 有类似的关系成立.

设 $k = 2^m \cdot k'$, $2 \nmid k'$.

若 $k' > 1$, 任取质数 $p > k$, 令 $n = 2^m p$, 则 $1, 2, \dots, k$ 都不是 p 的倍数, 从而 $n+1, n+2, \dots, n+k$ 也都不是 p 的倍数. 因此, p 是 M_n 的因数, 不是 M_{n+1} 的因数. 又

$$n+k = 2^m(p+k') = 2^{m+1} \cdot \frac{p+k'}{2}.$$

2^{m+1} 是 $n+2^m = 2^m(p+1)$ 的因数, $n < n+2^m < n+k$, 所以 2^{m+1} 是 M_n 的因数.

$$\frac{M_n}{M_{n+1}} \geq \frac{p}{\frac{p+k'}{2}} > 1.$$

若 $k' = 1$, 令 $n = 2^{m+l}$, 其中 l 为任一大于 1 的奇数, 易知 $3 \mid 2^l + 1$. 所以

$$n+k = 2^m(2^l+1) = 3 \times 2^m \times \frac{2^l+1}{3}.$$

由于 $k = 2^m \geq 4$, 在 $n+1, n+2, \dots, n+k-1$ 中必有一个数被 3 整除, 又 $n+1, n+2, \dots, n+k = 2^{m+l} + 2^m$ 的分解式中, 因数 2 的最高次幂是 2^m . $n, n+1, \dots, n+k-1$ 的分解式中, 因数 2 的最高次幂是 2^{m+l} , 所以

$$\frac{M_n}{M_{n+1}} \geq \frac{2^{m+l}}{2^m \times \frac{2^l+1}{3}} = \frac{3 \times 2^l}{2^l+1} \geq 1.$$

由于 p, l 有无穷多个, 所以满足

$$M_n > M_{n+1}$$

的 n 有无穷多个.

例 2 求出所有整数 $k \geq 1$, 使得数列 $k, k+1, k+2, \dots, k+99$ 包含的质数个数最多.

解 引理: 当 $k > 11$ 时, $k, k+1, k+2, \dots, k+99$ 中至少有 76 个数被 2, 3, 5, 7, 11 之一整除.

引理的证明: 我们把能被 2, 3, 5, 7, 11 之一整除的所有数写成无穷递增数列的形式, 如果 r 出现在这个无穷数列中, 那么 $r+2310$ 也在其中, 反之也成立 (因为 $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$). 于是, 如果 $r_1, r_2, \dots, r_s$ 表示所有 ≤ 2310 , 且被 2, 3, 5, 7, 11 之一整除的正整数, 那么这些数在 s 个等差数列 $2310t + r_i$ ($i=1, 2, \dots, s, t=0, 1, 2, \dots$) 中出现. 所以只要写出所有能被 2, 3, 5, 7, 11 之一整除且不大于 $2310+100$ 的正整数数列, 并且验证在每 100 个数 $k, k+1, \dots, k+99$ ($1 \leq k \leq 2310$) 中至少有 76 个数在上面的数列中.

所以当 $k > 11$ 时, $k, k+1, \dots, k+99$ 中至多有 24 个素数, 当 $k=2$ 时, 这 100 个数中有 26 个素数, 当 $k=1, 3, 4, 5$ 时, 这 100 个数中只有 25 个素数. 当 $k=6, 7, 8, 9, 10, 11$ 时, $k, k+1, \dots, k+99$ 中至多有 25 个素数.

上面的解答冗长, 而且仍有很多地方语焉不详, 未说清楚, 尤其引理证明中的枚举省略太多. 其实本题可以说得非常具体.

首先,在 $k=2$ 时,数列成为

$2,3,4,5,\cdots,101.$ (*)

其中有 26 个质数,即

$2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,$
 $67,71,73,79,83,89,97,101.$

以下只需证明在 $k>2$ 时,数列中质数的个数不足 26 个. 换句话说,其中合数的个数大于 74 个($k=1$ 时,数列中的质数共 25 个,比 $k=2$ 时少了一个 101).

这时可以列表如下:

数 列	数列中合数个数
2~101	74
3~102 4~103 5~104	75 (2 是质数,3 与 103 都是质数)
6~105 7~106 8~107 9~108	76 (7 与 107 都是质数)
10~109 11~110	75
12~111 13~112 14~113 15~114 16~115 17~116	76
18~117 19~118	77
20~119 21~120	78

接下去只考虑数列中至少为 2, 3, 5, 7 之一的倍数的那些数的个数 m .

当数列的首项跑过 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 121*, 127, 131, 137, 139, 143*, 149, 151, 157, 163, 167, 169*, 173, 179, 181, 187*, 191, 209, 211 (其中打 * 号的数质因数全在 11, 13, 17, 19 或 23 中) 时, m 应增加 1, 除非新添的末项是 121, 127, 131, 137, 139, 143*, 149, 151, 157, 163, 167, 169*, 173, 179, 181, 187*, 191, 209*, 211, 221*, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 247*, 251, 253*, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 289*, 293, 299*, 307, 311, 313. 当这些末项出现时, m 应减去 1, 除非刚去掉的首项是前面所说的 23, 29, ..., 211. 由此不难验证, 始终有 $m \geq 77$.

在数列的首项是 $3 + 210n, 4 + 210n, \dots$ (n 为自然数) 时, 由于 $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$, 所以这时数列 (100 个连续的整数) 中合数个数 ≥ 75 , 从而质数个数 < 26 .

8. 弄清实质(二)

例 1 证明: 存在无穷多个数 a , 使得方程 $[x^{\frac{3}{2}}] + [y^{\frac{3}{2}}] = a$ 至少有 1980 个自然数解 x, y .

证明 对整数 n , 令

$$b_k = [(n^2 + 4k)^{\frac{3}{2}}], c_k = [(4n^2 + 2k)^{\frac{3}{2}}], 1 \leq k \leq 1980.$$

选择 $n > 6 \times 1980^2$ 使得 $n > 6k^2$, 注意到

$$(n^2 + 4k)^3 - (n^3 + 6kn)^2 = 12n^2k^2 + 64k^3 > 0.$$

另一方面,

$$(n^3 + 6kn + 1)^2 - (n^2 + 4k)^3 = 2n^3 + 12kn + 1 - 12k^2n^2 - 64k^3 > 0.$$

因为 $2n^3 > 2n^2 \cdot 6k^2 = 12k^2n^2$, 且 $12kn > 12k \cdot 6k^2 = 72k^3$, 所以 $b_k = n^3 + 6kn$, 且数列

$$b_1, b_2, \dots, b_{1980}$$

是公差为 $6n$ 的等差数列.

同理,

$$(4n^2 + 2k)^3 - (8n^3 + 6kn)^2 = 12k^2n^2 + 8k^3 > 0,$$

$$\text{且 } (8n^3 + 6kn + 1)^2 - (4n^2 + 2k)^3 = 16n^3 + 12kn + 1 - 12k^2n^2 - 8k^3 > 0,$$

$$\text{所以 } c_n = 8n^3 + 6kn.$$

且数列

$$c_1, c_2, \dots, c_{1980},$$

也是公差为 $6n$ 的等差数列, 于是若

$$a = b_1 + c_{1980} = b_2 + c_{1979} = \dots = b_{1980} + c_1 = 9n^3 + 6n^2$$

则原方程至少有 1980 组正整数解 x, y , 因为对 n 的要求仅是 $n > 6 \times 1980^2$, 所以我们能求出无穷多个满足条件的 a .

上面的解答也不易看懂.

解这道题, 我们应先作一些分析, 首先, 不定方程

$$u + v = a$$

中, 如果 u 可取较多的正整数值 (1980 个以上), 那么在 a 足够大时, $v (= a - u)$ 也可取较多的正整数值. 因此, 我们希望 $u = [x^{\frac{3}{2}}]$ 能取较多的正整数值.

如果 $x = n^2$, 那么 $u = n^3$. 如果 x 在 n^2 与 $(n+1)^2$ 之间取值 (不包括 $(n+1)^2$), 那么 u 在 n^3 与 $(n+1)^3$ 间取值. 特别地, 令 $x = n^2 + 4k (k = 0, 1, 2, \dots, 1980)$, 则

$$(n^2 + 4k)^3 = n^6 + 12n^4k + \dots = (n^3 + 6kn)^2 + 12n^2k^2 + 64k^3,$$

并且

$$(n^2 + 4k)^3 = (n^3 + 6kn + 1)^2 - (2n^3 + 12kn + 1 - 12n^2k^2 - 64k^3).$$

对于固定的 k , 当 n 足够大时, 便有

$$n^3 + 6kn < (n^2 + 4k)^{3/2} < n^3 + 6kn + 1.$$

所以

$$u = [(n^2 + 4k)^{3/2}] = n^3 + 6kn.$$

同样,

$$v = [(n^2 + 4(1980 - k))^{3/2}] = n^3 + 6(1980 - k)n.$$

所以, 取 $a = 2n^3 + 6 \times 1980n$, 则方程

$$[x^{3/2}] + [y^{3/2}] = a$$

至少有 1981 个自然数解 x, y ,

$$x = n^2 + 4k, y = n^2 + 4(1980 - k), k = 0, 1, 2, \dots, 1980.$$

由于 n 可以任取 (只要足够大, 使得 $2n^3 + 12kn + 1 > 12n^2k^2 + 64k^3$), 所以满足要求的 a 有无穷多个.

读者可以将我们的解答与原来的解答对比一下, 便知道原来解答中有哪些是多余的“废招”.

例 2 设 x, y 是使 $xy - 1$ 能被质数 1979 整除的整数, 以 (x, y) 为坐标的那些点, 如果有三点在一条直线上, 求证: 这三点中至少有两点, 它们的横坐标之差与纵坐标之差都能被 1979 整除.

解 设三个点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 满足 $x_i y_i = 1 + k_i \cdot 1979, i = 1, 2, 3$, 且都在直线 $ax + by = c$ 上, 这里 $(a, b, c) = 1$.

不妨设 $1979 \nmid b$, 因为

$$ax_i + by_i = c, i = 1, 2, 3.$$

所以

$$a(x_1 - x_i) = b(y_i - y_1), a(x_3 - x_2) = b(y_2 - y_3), i = 2, 3.$$

由 $x_1 y_1 = 1 + k_1 \cdot 1979, x_i y_i = 1 + k_i \cdot 1979$ 得

$$x_i y_i = x_1 y_1 + (k_i - k_1) \cdot 1979.$$

所以

$$\begin{aligned}
(x_1 - x_i) &= by_i \\
&= bx_1(y_i - y_1) - b(k_i - k_1) \cdot 1979 \\
&= ax_1(x_1 - x_i) - b(k_i - k_1) \cdot 1979.
\end{aligned}$$

即

$$(x_1 - x_i)(ax_1 - by_i) = b(k_i - k_1) \cdot 1979,$$

从而 $1979 \nmid (x_1 - x_i)(ax_1 - by_i)$.

故 $1979 \mid x_1 - x_2, 1979 \mid x_1 - x_3, 1979 \mid y_2 - y_3$ 至少有一个成立 (若 $1979 \nmid (x_1 - x_i), i=2,3$, 则 $1979 \mid ax_1 - by_2, 1979 \mid ax_1 - by_3$ 得 $1979 \mid b(y_2 - y_3)$, 由 $p \nmid b$ 得 $1979 \mid y_2 - y_3$).

不妨设 $1979 \mid y_2 - y_3$, 则 $1979 \mid x_2(y_2 - y_3)$, 又 $1979 \mid 1 - x_2y_2, 1979 \mid x_3y_3 - 1$, 将上面三式相加得 $p \mid (x_3 - x_2)y_3$. 所以 $1979 \mid x_2 - x_3$, 于是 $(x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 的横坐标之差与纵坐标之差都能被 1979 整除.

其他情形同样考虑, 于是结论成立.

本题的解答也不很清楚. 我们重新分析一下. 首先, $x_iy_i - 1$ ($i=1,2,3$) 被 1979 整除, 最好用同余式写成

$$x_iy_i \equiv 1 \pmod{1979}. \quad ①$$

因为 1979 是质数, 在 x_i 确定时, 满足上式的 y_i 存在并惟一确定 $\pmod{1979}$, 这是数论中熟知的结论, 因此, 在 $x_i \equiv x_j \pmod{1979}$ 时, 便有 $y_i \equiv y_j \pmod{1979}$. 所以只需要证明存在 i, j ($i \neq j, i, j \in \{1,2,3\}$), 使 $x_i \equiv x_j \pmod{1979}$.

其次, 三点共线这一条件可写成

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

即

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0.$$

两边同乘以 $x_1x_2x_3$, 并利用①得

$$x_2(x_2 - x_1)(x_1 - x_3) - x_3(x_3 - x_1)(x_1 - x_2) \equiv 0 \pmod{1979},$$

即

$$(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \equiv 0 \pmod{1979}.$$

从而(因为 1979 是质数)

$$x_1 \equiv x_2, x_2 \equiv x_3, x_3 \equiv x_1 \pmod{1979}$$

至少有一个成立,证毕.

9. 自己的毛病

我做過不少題,寫過談解題的書,但題目的解答也不是盡善盡美,其中有許多題解得很不高明. 自己的毛病,當然不能掩飾起來,諱疾忌醫. 這裡舉兩個例子.

例 1 證明:如果整數 a 和 b 滿足關係式: $2a^2 + a = 3b^2 + b$, 那麼 $a - b$ 和 $2a + 2b + 1$ 是整數的平方.

本題是波蘭競賽題,載《數學奧林匹克題典》(A1—014)(南京大學出版社,1997),原來我作的解答如下:

已知關係式即

$$(a - b)(2a + 2b + 1) = b^2. \quad ①$$

若 $b = 0$,則 $a = b = 0$,結論顯然成立.

若 $b \neq 0$,則 $a \neq b$. 設 $a = a_1d$, $b = b_1d$, a_1 與 b_1 互質, d 為非零整數,①即

$$(a - b)(2a + 2b + 1) = b_1^2 d^2. \quad ②$$

因為 $(2a + 2b + 1, d) = (1, d) = 1$,

$$\text{所以 } d^2 \mid (a - b), \frac{a - b}{d^2} (2a + 2b + 1) = b_1^2. \quad ③$$

因为 $(\frac{a-b}{d}, b_1) = (a_1 - b_1, b_1) = (a_1, b_1) = 1$, 所以由③得

$$\frac{a-b}{d^2} = \pm 1, 2a + 2b + 1 = \pm b_1^2.$$

但将 $a - b = -d^2$ 代入原关系式得

$$2a^2 - d^2 = 3b^2,$$

约去 d^2 得

$$2a_1^2 - 1 = 3b_1^2, \quad \text{④}$$

左边 $\equiv \pm 1 \pmod{3}$, 因此④不可能成立, 从而

$$a - b = d^2, 2a + 2b + 1 = b_1^2.$$

上面的证明虽然没有错, 却极为愚蠢, 兜了一个很大的圈子.

其实, 得出①后, 即有 $((a, b)$ 表示 a, b 的最大公约数)

$$(b^2, (a - b, 2a + 2b + 1)) = (a - b, 2a + 2b + 1),$$

而

$$(b^2, (a - b, 2a + 2b + 1)) = (b^2, a - b, 4b + 1) = (b, 4b + 1)^2 = 1.$$

所以

$$(a - b, 2a + 2b + 1) = 1.$$

从而由①, $a - b, 2a + 2b + 1$ 都是平方数.

兜圈子的原因即在未能看出借助①, 很容易得出 $(a - b, 2a + 2b + 1) = 1$.

例 2 设一个凸 n 边形中任意三条对角线都不共点, 试问所有对角线将这个 n 边形的内部分成了多少个区域?

本题见我写的《算两次》, 原来解答如下:

设 n_k 表示 n 边形内所分成的区域中 k 边形的个数 ($3 \leq k \leq m$), 所有这些多边形的顶点数同(包括重复的在内)为

$$3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + \cdots + mn_m.$$

另一方面, 每个内部顶点都是两条对角线的交点, 所以是 n 边形内部四个区域的公共顶点, 因而在上述和式中, 每个内部顶点

都重复计数了四次,又 n 边形周界上的每个顶点显然恰为 $n-2$ 个三角形的顶点,故计数了 $n-2$ 次.此外,所有内部顶点与周界顶点中所有可能的四个顶点的组合成一一对应,即为 n 边形周界顶点四元组的个数.从而

$$3n_3 + 4n_4 + \cdots + mn_m = 4C_n^4 + (n-2)n. \quad ①$$

现在我们把所有多边形的角加起来. k 边形各角之和是 $(k-2) \cdot 180^\circ$,所以全部多边形(显然均是凸的)角度之和是

$$n_3 \cdot 180^\circ + n_4 \cdot 360^\circ + n_5 \cdot 540^\circ + \cdots + n_m (m-2) \cdot 180^\circ.$$

上述角度之和还有一个算法:在内部顶点处四个角的和是 360° ,所以所有内部顶点处各角之和为 $C_n^4 \cdot 360^\circ$,在 n 边形周界上诸顶点处各角之和为 $(n-2) \cdot 180^\circ$.于是

$$\begin{aligned} & n_3 \cdot 180^\circ + n_4 \cdot 360^\circ + \cdots + n_m \cdot (m-2) \cdot 180^\circ \\ &= 360^\circ \cdot C_n^4 + 180^\circ (n-2), \end{aligned}$$

即

$$n_3 + 2n_4 + \cdots + (m-2)n_m = 2C_n^4 + (n-2). \quad ②$$

①-②得

$$2n_3 + 2n_4 + \cdots + 2n_m = 2C_n^4 + (n-1)(n-2).$$

从而所求的区域数为 $n_3 + n_4 + \cdots + n_m = C_n^4 + C_{n-1}^2$.

上述解答,当初是怎么想到的,现在已想不起来了.或许是从某本书上抄来的.后来,又有些书从我这里抄去,流传开来.其实有更好的解答如下(在新版《算两次》中已经采用):

将对角线一条一条地去掉.先去掉一条对角线,如果这条对角线的内部(不包括端点)有 k_1 个与其他对角线的公共点,那么这条对角线被分为 k_1+1 段,每一段是两个区域的公共边界,将这条对角线去掉后,区域的个数就减少了 k_1+1 个.再去掉一条对角线,如果这条对角线的内部有 k_2 个与其他(未去掉的)对角线的公共点,那么去掉这条对角线,区域的个数就减少了 k_2+1 个.依此类

推. 对角线全去掉后, 只剩下一个区域, 即原来的多边形, 因此多边形被对角线分为

$$1 + \sum (k_i + 1)$$

个区域. 因为对角线有 $\frac{1}{2}n(n-3)$ 条, 所以

$$1 + \sum 1 = 1 + \frac{1}{2}n(n-3) = C_{n-1}^2.$$

$\sum k_i$ 表示每两条对角线在多边形内部的交点的总数. 每两条在多边形内部相交的对角线, 它们的端点是凸多边形的 4 个顶点, 反过来, 多边形的每 4 个顶点组成一个凸四边形, 它的两条对角线在多边形内部有一个公共点. 所以 $\sum k_i$ 正好等于凸 n 边形的顶点的四元组合的个数, 即

$$\sum k_i = C_n^4.$$

因此, 所求区域的个数为

$$C_n^4 + C_{n-1}^2.$$

10 道 问 题

本章以10道问题为例子,谈谈如何解题.第三章最后一节所说的一些要诀,在这里有具体的印证.



上下求索

我给初中学生出了一道这样的题：

是否有一个凸六边形，它能分成 6 个全等的三角形？

题目太容易了，学生很快就回答说：

正六边形可以分成 6 个全等的三角形。

我进一步问：

是否有一个凸六边形，它能分成 8 个全等的三角形？

学生纷纷画图，试了一会，有人画出来了，图形如图 5-1。

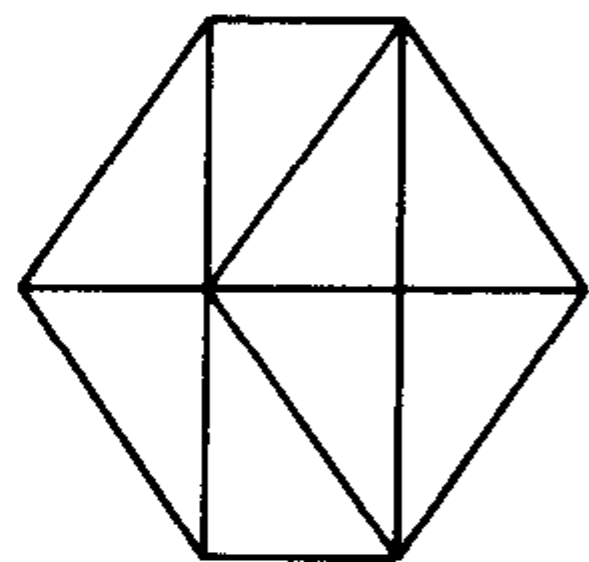


图 5-1

我再问：“将 8 改为 10 呢？”

学生又在正六边的基础上画出图 5-2。

将图 5-1、图 5-2 适当“延长”，可以作出一系列凸六边形，分别能分成

12, 14, 16, 18, ...

个全等的三角形。（但却不能分成 4 个全等的三角形）

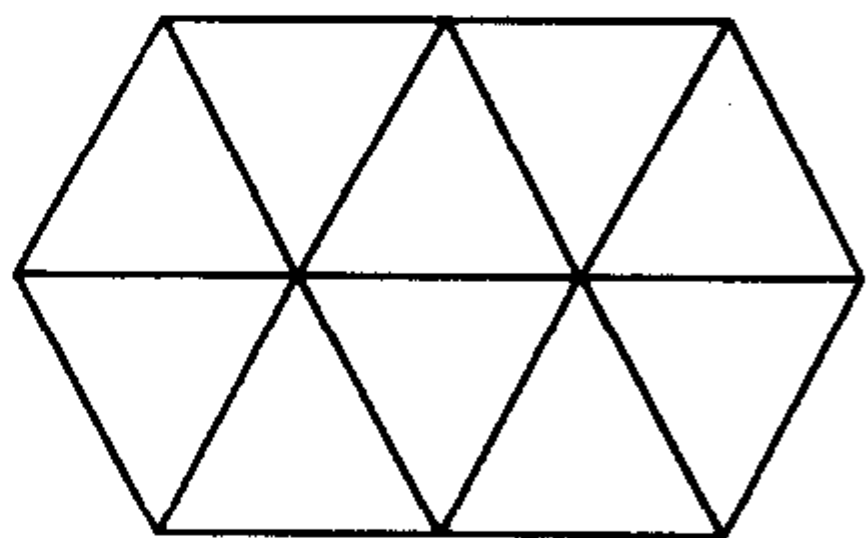


图 5-2

我将问题改为：

“有没有一个凸六边形，它能分成 7 个全等的三角形？”

这里 7 当然也可以改为其他大于 3 的奇数。

问题似乎比偶数的情况困难，学生一时得不出答案，或者得出个别零星的答案（如对 7 或 9），也不便推广到一般的奇数 n 。

回到偶数的情况，重新考虑一下，或许是受到正六边形的影响

或暗示,所作的图形都有上、下两排三角形,因而三角形的个数是偶数,如果改成一排,即只留上面那一排,情况有什么变化呢?

这时三角形的个数可以是奇数个,但整个图形却不是凸六边形,而是凸四边形.

我们设法使凸四边形变为凸六边形,即多出两个“角”来.

能做到吗?

其实不难,只要将那些全等的三角形改成稍为一般的形状,不再是直角三角形或正三角形,就可以得到下图(其中 $\angle ACB > \angle ABC$ 及三角形是锐角三角形,可以保证图形是凸的):

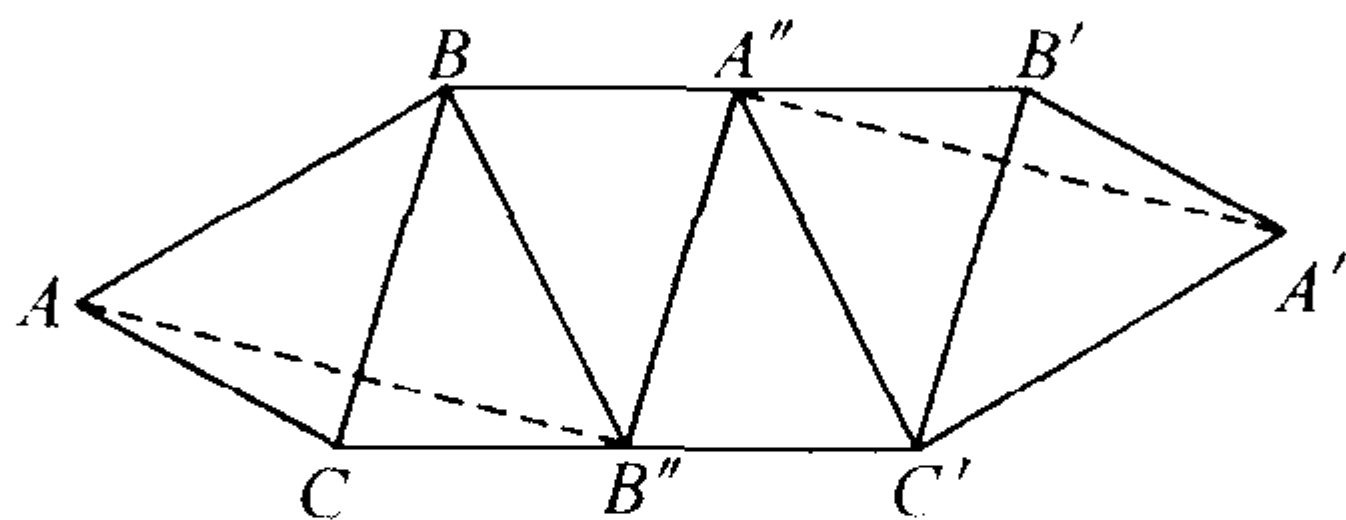


图 5-3

这是一个凸六边形,它可以分为 6 个全等的三角形,将其中平行四边形的个数增加或减少,便可以得出参数为偶数(≥ 4)个全等三角形的凸六边形.

图 5-3 只有“一排”三角形,但三角形的个数仍是偶数个,怎样改成奇数个全等的三角形呢?

这只要在图 5-3 的基础上动点“小手术”.

去掉最右边的两个三角形 $A'B'C'$ 与 $A''B'C'$, 换成一个与 $\triangle A''B''C'$ 关于 $A''C'$ 对称的三角形,这时三角形的个数就成为奇数个,而整个图形仍是凸六边形,即图 5-4.

增加图 5-4 中平行四边形的个数,就可以得出能分为奇数(≥ 5)个全等三角形的凸六边形.

解题就是不断地探索,“路漫漫其修远兮,吾将上下而求索”. 本题所需知识极少,初中生,甚至小学生都可以理解,但不经过一

番努力的探索,却不能完成.

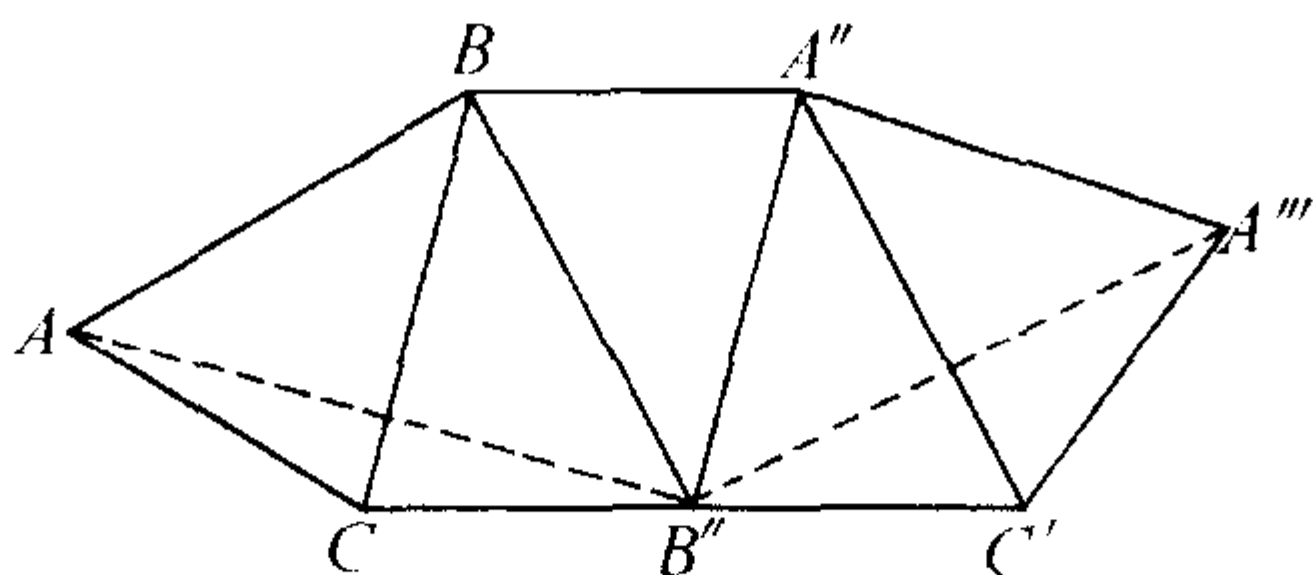


图 5-4

探索法,就是解决问题的万能方法,缺点就是得花时间去探索.这或许也是优点,因为正是亲自探索,使你享受到解题的乐趣.

2. 学思结合

求证:存在无穷多个这样的无穷数列,它的各项都是不同的自然数,并且对每一个自然数 n ,这个数列的前 n 项的和被 n 整除.

这道题,我给一位高中学生做,他很快就做出来了,解法如下:
首先找一个满足要求的数列.正奇数数列

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots \quad \text{①}$$

即为所求,因为前 n 个正奇数的和

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

被 n 整除.

将①的每一项同时扩大 k 倍, k 是任一个自然数,得到的数列

$$k \cdot 1, k \cdot 3, k \cdot 5, \dots \quad \text{②}$$

显然也满足要求.由于 k 可取无穷多个值,我们就得到无穷多个满足要求的数列.

这位同学的解法很好.首先给出一个具体的例子,这个例子是大家常见的.应当说他的解法也是简单自然的.

其次,他发现选出一个例子后,只要将每项都扩大 k 倍($k \in \mathbf{N}$),就得到新的合乎要求的例子.从而“存在无穷多个”的问题化为“存在一个”的问题.这一点反映了他的头脑非常灵活.

我的解法与他完全不同.

首先,任取一个自然数 a_1 ,作为第一项.然后选一个自然数 a_2 与 a_1 有相同的奇偶性,这样的 a_2 当然有无穷多个,我们取 $a_2 \neq a_1$,再取自然数 a_3 ,满足

$$a_3 \equiv -(a_1 + a_2) \pmod{3}$$

也就是 a_3 是 3 的(充分大的)倍数减去 $(a_1 + a_2)$. 这样的 a_3 也有无穷多个(因为 3 的倍数有无穷多个),完全可以使它与 a_1, a_2 均不相同.如此继续下去,如果已有 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$,取自然数

$$a_n \equiv -(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) \pmod{n}$$

并且 a_n 与 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 均不相同.

这样就得到无穷多个(因为 $a_1, a_2, \dots$ 都有无穷多种选择)合乎要求的数列.

与第一种解法相比,这种解法并没有“具体”给出一个数列,却一下子就给出了无穷多个满足要求的数列.数列采用“归纳定义”的方法,显得更为“空灵”、“抽象”,因而也更为“一般”.

如果将问题改一下,要求对每一个自然数 n ,数列的前 n 项的和被 n^2 整除,那么具体的数列就较难给出(当然也能给出来),而后一种解法却依然适用(只需将 $\text{mod } n$ 改为 $\text{mod } n^2$).所以即使会用第一种解法,第二种解法还是值得学习的.

某杂志上提供的解答如下:

设数列的通项为 $a_n = 2an + b$ ($a, b \in \mathbf{N}$),则 $\{a_n\}$ 是等差数列,各项为不同的自然数,前 n 项的和

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = n(an + a + b)$$

是 n 的倍数,所以这样的数列满足要求.

因为 a, b 有无穷多组, 所以满足要求的数列有无穷多个.

这种解法与第一种实质上是一致的, 它似乎比第一种解法一般一些, 但却不如第一种具体, 不如第一种简单自然. 它的一般性也没有多大用处, 不如第二种解法能够真正应用于更一般的情形. 因此, 我们对它的评价不高, 认为它不及前两种解法.

数学教育的目的就是教会思维. 经常解题, 动脑筋思考, 头脑就越来越灵活. 如果又能吸取别人的长处, 努力学习, 见多识广, 学思结合, 那么眼界就更加开阔, 境界也就更高. 反之, 如果不动脑筋, 不解题, 头脑就容易钝化. 如果再不与外界交流, 固步自封, 自以为是, 头脑就会逐渐僵化. 挽救的办法就是赶紧解题. 近来常见到某些健脑产品的广告, 其实服食健脑产品, 效果远不及做几道难易适当的数学题来得好.

逐步逼近

一批学生参加数学竞赛, 试题共 6 道. 已知每道试题恰有 1 000 人答对, 并且对任意两名学生, 至少有 1 道题, 这两个人都未答对. 问至少有多少名学生参加比赛?

先进行粗糙的估计, 猜一猜人数是多少.

人数显然大于 1 000. 因为如果只有 1 000 人, 那么每道题他们都做对了(每道题恰有 1 000 人答对), 但这时就没有两个人都未答对的题.

我们再看看多少人就能满足要求.

如果有 6 000 人, 分为 6 组, 每组 1 000 人. 第 i 组答对第 i 道题 ($i = 1, 2, \dots, 6$), 那么两个条件(每道题恰有 1 000 人答对. 每两个人至少有 1 道题都未答对)都满足. 但每两个人都未答对的题不

只一道(至少4道),所以总人数还可缩小.

将前面的两组合成一组,人数可以减少为3 000.3 000人分为3组,每组1 000人,第1组做对1,2题,第2组做对3,4题,第3组做对5,6题.这时两个条件仍然满足.但每两个人都未做对的仍不止一道(至少2道),人数还可减少.

将刚才的第三组人数减少为500人,同时,第二组中的前500人做对第5题,后500人做对第6题.这样,两个条件仍然满足.第一组中的1个人与第二组中的1个人,两人恰有一道都未解出的题.但第一组与第三组的人或者第二组与第三组的人,都未解出的题仍不止一道,似仍有减少总人数的可能.

再减少500人行不行?上面的(2 500人的)情况启发我们,最好每人做对3道题,同时每两个人做对的题有一道相同(这样每两个人一共做对5道题,有一道题两人都未做出).并且2 000人应分成4组,每组500人.

我们再来试一试.第一组500人解出1,2,3三道题,第二组500人解出1,4,5三道题,第三组500人解出2,4,6三道题,第四组500人解出3,5,6三道题.这样,每道题都恰好有1 000人解出,而且每两个人至少有一道题都未解出.总人数是2 000.

2 000能不能再减少了?

如果人数 $n < 2\,000$,那么

$$3n < 6\,000.$$

所以必有1个人,称为A,解出至少4道题(如果每个人至多解出3道题,那么 n 个人解出的题数的总和至多 $3n$.而另一方面,每道题有1 000个人解出,解出的题数的总和为6 000, $3n < 6\,000$ 产生矛盾).设A解出前4道题.如果A还解出第5(或第6)道题,那么解出第6(或第5)题的人与他没有都未解出的题.所以A只解出前4道题.

解出第5道题的人有1 000,解出第6道题的人也有1 000.由于

$$n < 2\,000,$$

所以必有一人 B, 同时解出第 5、第 6 题.

A 与 B 没有都未解出的题.

因此, 2 000 人不能再减少了. 本题的答案即为 2 000.

解题时, 往往先得出简单粗略的估计或结果, 再以此为基础, 经过修改与校正, 逐步向前逼近. 能一揽子解决问题当然很好, 如果办不到, 上述“蚕食”的办法也是常常采用的. 这也是一种“从简单的做起”的方法.

4. 比赛日程

10 个篮球队进行循环赛(每两个队比赛一场), 每个队每天至多比赛一场. 问至少要多少天才能赛完?

这是一个联系实际应用的问题.

首先, 每个队要与其他 9 个队各赛一场, 即每个队要参加 9 场比赛, 而每个队每天至多赛一场, 所以比赛的天数 ≥ 9 .

有人先算出比赛的总场数为

$$C_{10}^2 = \frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

因为每天至多进行

$$10 \div 2 = 5$$

场比赛, 所以至少要比赛

$$45 \div 5 = 9 \text{ 天}.$$

这种解法显然不及前一种简单, 兜了一个没有必要兜的圈子.

很多人以为做到天数 ≥ 9 就万事大吉了. 其实这才做了一小半, 比较容易的一小半. 我们还必须证明 9 天是足够的, 即整体比

赛可以在 9 天赛完,这决不是显然的.开始一、二天当然可以每天赛 5 场,已经赛过的两个队之间不再比赛.但随着天数的增加,很难保证每天都能赛 5 场(已赛过的两个队之间不再比赛).

必须排出一张比赛的日程表,使比赛得以顺利进行,在第 9 天结束全部比赛.

日程表不容易排.我曾给大学数学系四年级学生做过,也曾给中学老师培训班与教育硕士班的学员做过,能排成的寥寥无几.

不过,表也不是十分难排,只要努力去试,同时动点脑筋,也还是能排成的.

先排第 1 个队.九天比赛如下表

一	二	三	四	五	六	七	八	九
1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	1,10

再排第 2 个队,第一天不必再排(用 $\checkmark$ 表示),以后依次排成

$\checkmark$	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	2,10	2,3

第 3 个队有两天(第二、九两天)不必排.从第三天排起(最后排第一天),可排成

3,5	$\checkmark$	3,6	3,7	3,8	3,9	3,10	3,4	$\checkmark$

接下去排第 4 个队(从第四天排起)、第 5 个队(从第五天排起)

4,7	$\checkmark$	$\checkmark$	4,8	4,9	4,10	4,5	$\checkmark$	4,6

$\checkmark$	5,9	$\checkmark$	$\checkmark$	5,10	5,6	$\checkmark$	5,7	5,8

这时其余队的排法已是必然的,即

6,9	6,10	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	6,7	6,8	$\checkmark$

$\checkmark$	7,8	7,10	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	7,9

8,10	$\checkmark$	8,9	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$

$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	9,10	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$

不难验证这个表符合要求,所以 9 天的确可以赛完.

但上面的表,规律还不很明显,难以推广到一般的(n 个队的)情况.应当给出更有规律的排法,不要满足于一种特殊的解.

为此,第1个队仍照上面的表进行比赛,而其他队的比赛日程更“数学化”一些,即每一天进行比赛的两个队,它们的号码之和均相等.当然这里需要 $\text{mod } 9$,即凡超过9的和均减去9.比如说第一天,安排10与3,9与4,8与5,7与6比赛,每两个比赛的队号码之和都是13,或者 $4(\text{mod } 9)$.第二天则安排2与4,10与5,9与6,8与7比赛,两队号码之和为 $6(\text{mod } 9)$.第三天安排3与5,2与6,10与7,9与8比赛,第四天4与6,3与7,2与8,10与9,第五天5与7,4与8,3与9,2与10,第六天6与8,5与9,4与10,3与2,第七天7与9,6与10,2与5,3与4,第八天8与10,7与2,6与3,5与4,第九天9与2,8与3,7与4,6与5.不难验证这样比赛合乎要求,正好九天赛完.

上面的排法还可以更直观一些,即将第1个队放在圆心,让其余的9个队围着第1个队排成圆(如图5-5).

当第1队与第2队比赛时,10与3,9与4,8与5,7与6捉对比赛.当1与3比赛时,2与4,10与5,9与6,8与7捉对比赛.这样继续下去,每两个关于半径(连结圆心1与另一个队)对称的队捉对比赛.直至每两个队都比赛一场.

这个方法不难推广到 $n = 2k$ 的情况.比赛至少要 $2k - 1$ 天.

$n = 2k + 1$ 的情况与此类似.由于第一天有一个队轮空(只有 k 个对),这个队以后要赛 $2k$ 场,即至少要 $2k$ 天,所以整个比赛至少要 $n = 2k + 1$ 天才能赛完.

为了排出比赛日程,可以增加1个0号队,每个队与0号队赛即意味着轮空.将0号队化为圆心,其余队同成一个圆,采用上面的排法即知 $n = 2k + 1$ 天的确可以赛完.

有规律、便于推广的解法才是好的解法,因为它揭示了问题

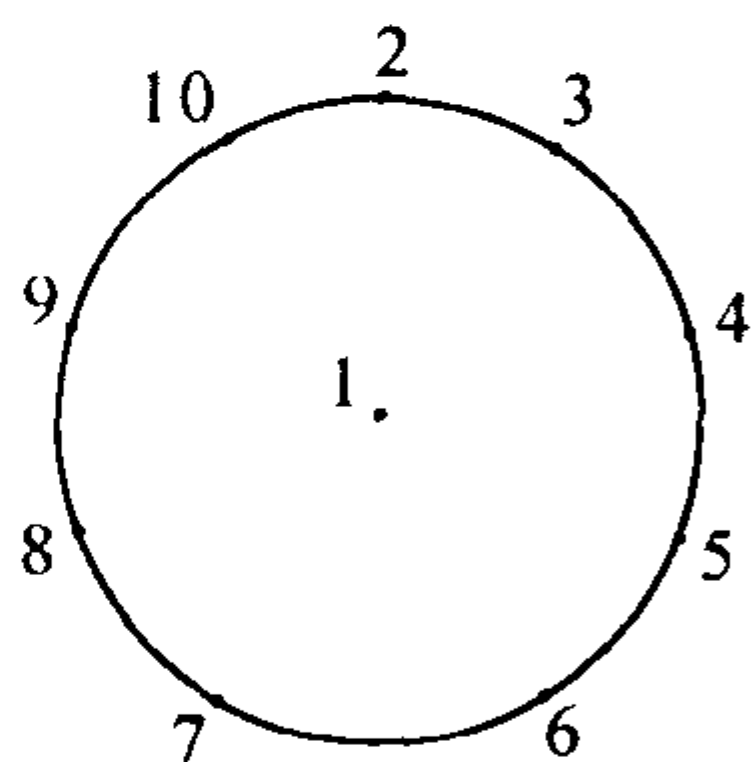


图 5-5

的本质.

本题要排出具体的日程表,这种方法称为构造法.本章第1,2,3节的问题,也都是构造法的例子.究竟如何构造合乎要求的例子(数列、图形、日程表或其他)?这个问题无法笼统地回答,只能具体问题具体分析,通过反复地探索,由简单具体而逐步走向一般(其中可能需要回顾、修改、总结、校正).与构造法有关的问题,最能检验一个人在数学方面的修养,体现他的创造能力.

5. 双轨迹模式

对每个整数 $n \geq 2$, 确定一个函数

$$f(x) = a + bx + c|x - d|,$$

使得

$$f(k) = k + 1, k = 1, 2, \dots, n - 1; \quad ①$$

$$f(n) = 1. \quad ②$$

其中 a, b, c, d 是仅依赖于 n 的常数(即与变数 x 的值无关).

本题 $f(x)$ 需要同时满足几个方面的要求. 一时难以做到, 可以先放弃一部分要求. 例如先放弃 $f(n) = 1$, 只要求

$$f(k) = k + 1, k = 1, 2, \dots, n - 1.$$

这是不难做到的, 一个简单的线性函数

$$f(x) = x + 1$$

就合乎要求.

为了使要求②成立, 应当从 $x + 1$ 中减去一个函数 $g(x)$. 函数 $g(x)$ 在 $x = 1, 2, \dots, n - 1$ 时为 0; 在 $x = n$ 时为 n . 并且 $g(x)$ 的形状应当与 $f(x)$ 的形状类似. 由于

$$c(x - d + |x - d|)$$

在 $x \leq d$ 时, 为 0; 在 $x > d$ 时, 为 $2c(x-d)$. 所以可令

$$g(x) = c(x-d + |x-d|).$$

其中 d 是 $\geq n-1$ 并且 $< n$ 的一个数, 具体数值将在下面定出. c 也是一个待定的系数.

由 $g(n) = n$ 得

$$2c(n-d) = n.$$

因此

$$d = (1 - \frac{1}{2c})n. \quad (3)$$

由于 $d < n$, 所以应取 $c > 0$. 由于 $d \geq n-1$, 所以

$$n-1 \leq (1 - \frac{1}{2c})n,$$

从而

$$c \geq \frac{n}{2}. \quad (4)$$

取 $c = \frac{n}{2}$, $d = n-1$, 这时

$$g(x) = \frac{n}{2}(x - n + 1 + |x - n + 1|),$$

$$f(x) = x + 1 - g(x)$$

$$= x + 1 - \frac{n}{2}(x - n + 1) - \frac{n}{2}|x - n + 1|$$

满足要求.

满足要求的 $f(x)$ 不是惟一的, 取 $c = \frac{n+1}{2}$, $d = \frac{n^2}{n+1}$, 这时

$$f(x) = x + 1 - \frac{n+1}{2}(x - \frac{n^2}{n+1}) - \frac{n+1}{2}|x - \frac{n^2}{n+1}|$$

也满足要求.

一般地, 只要 c 满足④, d 由③给出, 则

$$f(x) = x + 1 - c(x-d) - c|x-d|$$

即满足要求.

在需要满足多个要求时,我们常常先考虑满足其中的部分要求.然后再根据另一些要求进行修正或调整.这可以称为“轨迹相交法”或“双(多)轨迹模式”.过去在几何作图题中经常用到.我们也可以认为这种做法是“从简单的做起”,即将问题的要求去掉一些,变为一个简单得多的问题,再以此为基础,作为滩头阵地或桥头堡,继续向前进攻,直至将敌人消灭.

6. 集成块与组合拳

一位学生问我一道平面几何题:

设四边形 $ABCD$ 内接于圆.
 BA, CD 相交于 P , AD, BC 相交于 Q , AC, BD 相交于 M . O 为圆心. 求证 M 是 $\triangle OPQ$ 的垂心.

P, Q, M 三点是对称的(地位平等),所以本题的结论换成下面的(等价的)说法更好:

O 是 $\triangle MPQ$ 的垂心. ①

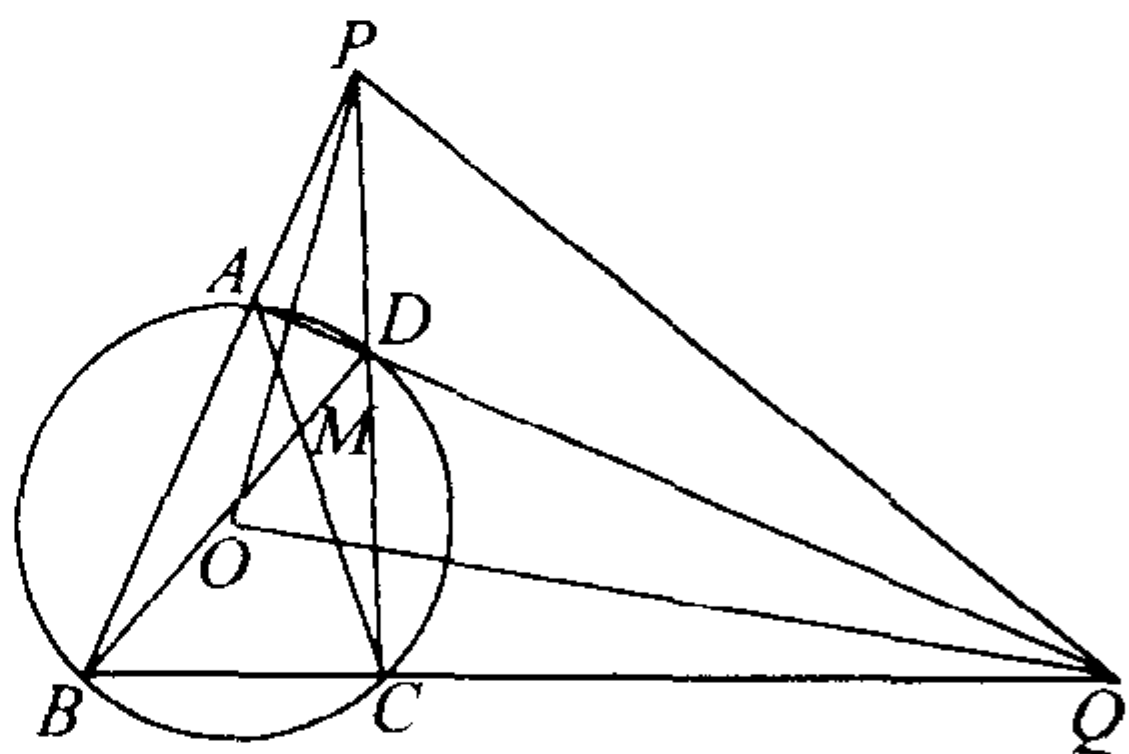


图 5-6

很久未做这样的几何题,一时也不知命题是否正确,于是便先打一个电话请教我的朋友,上海教育出版社的叶中豪先生.叶先生是真正的专家,他听了题目便立即回答我:命题是正确的,而且给出两种解法.

先说第二种,它依赖于一个简单一些的问题(引理):

设圆内接四边形 $ABCD$ 的对边延长线的交点为 P, Q , 则

$$PQ^2 = (P \text{ 对圆的幂}) + (Q \text{ 对圆的幂}). \quad ②$$

这里圆外一个点对于圆的幂指这点向圆所引切线长的平方.

要证明②,当然是将 PQ^2 分成两部分,分别等于 P 对圆的幂与 Q 对圆的幂.

为此,过 P, A, D 作圆交 PQ 于 N . 易知(设已知圆为 $\odot O$)

$QN \times PQ = QD \times QA = Q$ 对 $\odot O$ 的幂.

由于 $\angle PND = \angle BAD = \angle DCQ$, 所以 N, D, C, Q 也是圆,从而

$PN \times PQ = PD \times PC = P$ 对 $\odot O$ 的幂.

以上两式相加即得②.

P 到 $\odot O$ 的幂(切线长的平方),也就是 $OP^2 - R^2$, 其中 R 为 $\odot O$ 半径.

对于 $\odot O$ 内的点 M ,也可以定义它对 $\odot O$ 的幂,即 $OM^2 - R^2$,这个幂是负的(它等于被 M 分为两部分的弦 AC 的两个部分 AM, MC 的乘积的相反数).

在图 5-6 中,同样可证(分别过 P, A, C 与 Q, A, C 作辅助图)

$$PM^2 = (P \text{ 到 } \odot O \text{ 的幂}) + (M \text{ 到 } \odot O \text{ 的幂}) \quad ③$$

$$QM^2 = (Q \text{ 到 } \odot O \text{ 的幂}) + (M \text{ 到 } \odot O \text{ 的幂}) \quad ④$$

现在回到①的证明.

只需证明 $OM \perp PQ$ (同理 $OP \perp MQ, OQ \perp MP$). 这又等价于

$$OP^2 - OQ^2 = MP^2 - MQ^2. \quad ⑤$$

由前面的③、④、⑤式右边 = $(P \text{ 到 } \odot O \text{ 的幂}) - (Q \text{ 到 } \odot O \text{ 的幂})$
 $= (OP^2 - R^2) - (OQ^2 - R^2)$

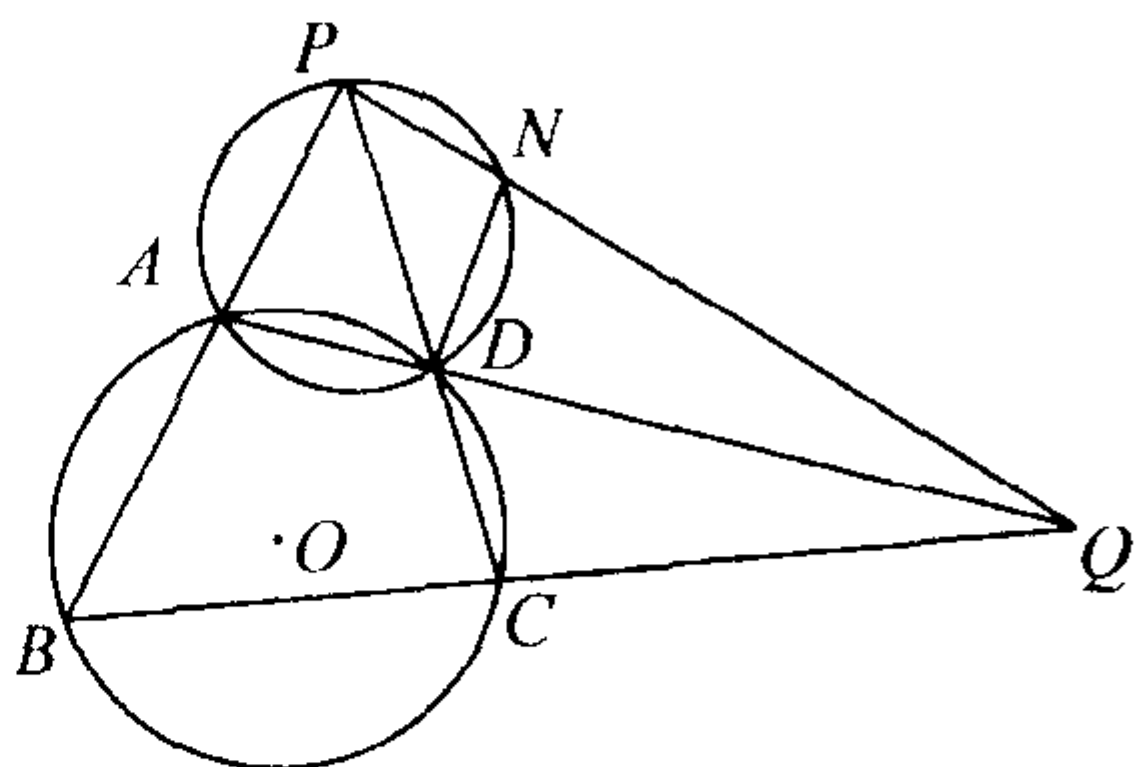


图 5-7

$$= OP^2 - OQ^2.$$

于是①成立.

由上面的证明可以看出,要做一道复杂的问题,往往需要先做一道简单的问题.反过来,简单的题做得很熟,复杂的题也就不难了.对一位老练的解题者来说,很多简单的题,已经融合在一起,像电视机或音箱中的集成块,像围棋中的定式,也像拳击家的组合拳,可以在一刹那间发动连续攻击,不必多费脑筋.这当然要靠平时多注意,多积累,将各种基本套路练熟,化为自己的看家本领.

第一种解法需要更多一点背景知识, $\triangle MPQ$ 是一个自共轭三角形,即每一个顶点是对边的极点,从而这个三角形的垂心是圆心 O .

关于极点、极线、自共轭三角形等概念,请参阅《近代欧氏几何学》(单增译,上海教育出版社 1999 年出版),这里就不多费笔墨了.

7. 算两次

设 n 为奇数,大于 1. $k_1, k_2, \dots, k_n$ 为给定的整数. 对于 $1, 2, \dots, n$ 的 $n!$ 个排列中的任一个排列 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 记

$$S(a) = \sum_{i=1}^n k_i a_i.$$

证明:有两个排列 $b, c, b \neq c$, 使得 $S(b) - S(c)$ 被 $n!$ 整除.

本题看似复杂,其实并不困难.

首先取最简单的情况 $n=3$ 看一看. $1, 2, 3$ 有 $3! = 6$ 种排列, 即 $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)$. 作出 6 个和

$$\begin{aligned} S_1 &= k_1 + 2k_2 + 3k_3, S_2 = k_1 + 3k_2 + 2k_3, \\ S_3 &= 2k_1 + k_2 + 3k_3, S_4 = 2k_1 + 3k_2 + k_3, \\ S_5 &= 3k_1 + k_2 + 2k_3, S_6 = 3k_1 + 2k_2 + k_3. \end{aligned} \quad ①$$

要证明其中有 2 个的差被 6 整除.

具体找出哪两个的差被 6 整除是不容易的, 因为 6 个和地位完全平等, 必须分情况细细讨论, 这种做法难以推广到一般的 n . 正面攻击难以奏效, 还是用反证法为好. 假定没有两个的差被 6 整除. 这时这 6 个和除以 6, 所得余数各不相同, 即分别为 0, 1, 2, 3, 4, 5.

考虑各个个别的和, 不易发现矛盾. 这样的问题必须从整体来考虑, 考虑一个与这 6 个和有关的量, 最简单、最自然的是这 6 个和的和 S .

一方面,

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 \quad ②$$

不是 6 的倍数, 所以 S 不被 6 整除 (除以 6, 余数为 3, 即 $15 \div 6$ 所得的余数).

到目前为止, 我们还没有用到各个和 $S(a)$ 的表达式①. 应当换一个角度, 从这个方面来考察 6 个和的和 S . 由①, 相加得

$$S = 12(k_1 + k_2 + k_3),$$

显然 S 是 6 的倍数.

两方面的结果产生矛盾. 这表明 $S_1, S_2, \dots, S_6$ 中必有两个的差被 6 整除.

一般的情况也是如此. 考虑 $n!$ 个 $S(a)$ 的和 S .

如果对每两个不同的排列 b, c , $S(b)$ 与 $S(c)$ 的差不被 $n!$ 整除, 那么 $n!$ 个 $S(a)$ 除以 $n!$, 所得的余数互不相同, 即分别为 $0, 1, \dots, n! - 1$.

考虑和 $S = \sum_{\text{所有 } a} S(a)$.

一方面, $\text{mod } n!$,

$$S \equiv 0 + 1 + 2 + \cdots + (n! - 1) = \frac{n! (n! - 1)}{2}.$$

其中 $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ 是偶数, 所以 $n! - 1$ 是奇数, $\frac{n! - 1}{2}$ 不是整数, $\frac{n! (n! - 1)}{2}$ 不被 $n!$ 整除, 即 S 不被 $n!$ 整除.

另一方面,

$$S = \sum_{\text{所有 } a} S(a) = \sum_{\text{所有 } a} \sum_{i=1}^n k_i a_i = \sum_{i=1}^n k_i \sum_{\text{所有 } a} a_i.$$

由于 $a_i = 1$ 的 a 有 $(n-1)!$ 个, $a_i = 2$ 的 a 有 $(n-1)!$ 个, $\cdots$, $a_i = n$ 的 a 有 $(n-1)!$ 个, 所以

$$\begin{aligned} \sum_{\text{所有 } a} a_i &= (n-1)! \times (1 + 2 + \cdots + n) \\ &= (n-1)! \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n! \times \frac{n+1}{2}, \end{aligned}$$

$$S = n! \times \frac{n+1}{2} \sum_{i=1}^n k_i.$$

由于 n 是奇数, $\frac{n+1}{2}$ 是整数, 所以 S 是 $n!$ 的倍数.

以上两方面的结果矛盾. 所以必有两个排列 $b, c, b \neq c$, 使得 $S(b) - S(c)$ 被 $n!$ 整除.

本题采用的证法是组合数学中常用的方法, 称为算两次, 即选择一个适当的量 S , 从两个不同的方面考察 S , 再将两个方面所得结果综合起来, 导出所需要的结论.

通常的列方程其实就是一种“算两次”. 两个方面考虑的是同一个量, 所以结果相等, 这就产生了方程. 如果在考虑这个量时, 采用了估计, 那就产生一个不等式. 有时考虑这个量的性质, 也会得到一些关系或性质(如同余、奇偶性、整除等). 假如采用反证法, 那

么两方面的结果互相矛盾才正中下怀.

算两次,是从不同角度看问题的另一种说法.

8.4 平方数与平方式

设 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 为实系数的二次三项式. 如果对一切整数 x , $f(x)$ 都是平方数. 求证: 存在自然数 d 及整数 e , 使

$$f(x) = (dx + e)^2. \quad ①$$

显然, 在①成立时, 对一切整数 x , $f(x)$ 都是平方数. 但反过来, 要证明 $f(x)$ 一定能表成①就不容易了.

一个代数式, 可以表示一些平方数, 但它不一定是平方式. 例如 $x^2 + 9$ 在 $x = 0, \pm 4$ 时都表示平方数, 再如 $x^2 + 4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 11^2$ 可以对很多 x 值表示平方数 (例如 $x = 2 \times 68$ 与 34×76). 但 $x^2 + 9$ 与 $x^2 + 4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 11^2$ 都不是平方式.

本题 $f(x)$ 对一切整数 x , 都是平方数, 从而 $f(x)$ 是平方式, 所以这个“一切整数”是个很重要的条件, 在证明中要充分地、反复地利用.

先要证明 $f(x)$ 的系数都是整数.

取一个特殊的 x 值, $x = 0$, 这时 $f(x) = c$ 是平方数. 所以 $c = e^2$, e 是整数.

然后我们证明 a, b 都是整数.

令 $x = 1, -1$ 得

$$a + b + c = s^2, \quad ②$$

$$a - b + c = t^2, \quad ③$$

其中 s, t 都是整数.

② - ③得

$$2b = s^2 - t^2. \quad (4)$$

所以 $2b$ 是整数. 这时 b 是整数或者 $b = \frac{2h+1}{2}$, 其中 h 为整数.

如果 b 是整数, 那么由②, a 也是整数.

如果 $b = \frac{2h+1}{2}$, 那么由②得

$$a = \frac{2m+1}{2},$$

m 为整数. 令 $x=4$ 得

$$\frac{2m+1}{2} \cdot 4^2 + \frac{2h+1}{2} \cdot 4 + e^2 = s^2. \quad (5)$$

其中 s 是整数, ⑤即

$$8(2m+1) + 4h + 2 = (s+e)(s-e). \quad (6)$$

在 s, e 同奇偶时, $s+e, s-e$ 都是偶数, ⑥的右边被 4 整除, 而左边不被 4 整除, 矛盾. 在 s, e 不同奇偶时, $s+e, s-e$ 都是奇数, ⑥的右边是奇数, 而左边是偶数, 仍然矛盾. 所以 $b = \frac{2h+1}{2}$ 这种情况不可能发生. b, a 均为整数.

现在进入关键的一步: 证明 a 为平方数.

a 显然非负, 否则在 x 很大时, $f(x) < 0$ 不会为平方数(从这里起, 我们要有一点“阶”的概念, 即 x 很大时, x 大于任一固定的常数, 而 x^2 又大于 x).

如果 a 不是平方数, 可设 a 在两个相邻的平方数之间, 即

$$d^2 < a < (d+1)^2.$$

其中 d 为非负整数.

令 $a' = a - d^2$, 则 $0 < a' < 2d+1$. 对于 x 的整数值 n ,

$$\begin{aligned} f(n) &= an^2 + bn + c \\ &= (dn+e)^2 + (a'n + b - 2de)n \end{aligned} \quad (7)$$

是平方数, 记为 s^2 . s 是非负整数. 从而

$$s^2 - (dn+e)^2 = (a'n + b - 2de)n. \quad (8)$$

取 n 为大的质数, 这时 $a'n + b - 2de > 0$, s 是一个大的正数. 由⑦, $s^2 - (dn + e)^2$ 被 n 整除, 从而 $s^2 - e^2 = (s + e)(s - e)$ 被 n 整除. 因为 n 是质数, 所以 $s + e, s - e$ 中有一个被 n 整除. 由于 e 的符号可正可负, 我们取定 e 的符号, 使 $s - e$ 被 n 整除. 这时 $s - (dn + e)$ 是 n 的倍数, 并且

$$(s + (dn + e))(s - (dn + e)) = (a'n + b - 2de)n > 0, \\ s + (dn + e) > 0, \text{ 所以 } s - (dn + e) > 0. \text{ 从而} \\ s - (dn + e) \geq n. \quad \text{⑨}$$

这时由于 $2d + 1 > a'$, n 是大的正数, 所以

$$s + (dn + e) \geq (2d + 1)n + 2e > a'n + b - 2de. \quad \text{⑩}$$

⑨, ⑩相乘得

$$s^2 - (dn + e)^2 > (a'n + b - 2de)n,$$

与 s^2 的定义矛盾.

矛盾表明 a 是平方数.

最后证明①成立.

设 $a = d^2$, d 为非负整数, 与前面类似, 对大的质数 n , 有

$$s^2 = f(n) = (dn + e)^2 + (b - 2de)n. \quad \text{⑪}$$

s 是一个大的正整数, 而 $s - e$ 被 n 整除. 设

$$s - e = kn,$$

k 为正整数.

由⑪,

$$(b - 2de)n = (s - dn - e)(s + dn + e) \\ = (k - d)n((k + d)n + 2e),$$

所以

$$b - 2de = (k - d)((k + d)n + 2e). \quad \text{⑫}$$

⑫式左边是一个常数, 而右边的因数 $(k + d)n + 2e$ 可以随 n 的增大而任意地大, 所以必有 $k = d$ 及 $b = 2de$.

$$\text{于是 } f(n) = (dn + e)^2.$$

回顾一下解题过程,有不少值得注意的地方.

1. 为了证明 a, b 是整数而不是 $a = \frac{2k+1}{2}, b = \frac{2h+1}{2}$, 我们必须利用 $f(x)$ 在 x 为整数 ($x=4$ 或其他值) 时, $f(x)$ 为平方数 s^2 . 由于

$$\frac{x(x+1)}{2} + c^2$$

对任意的 x 的整数值都为整数, 所以仅仅利用 $f(x)$ 为整数是不能推出 a, b 都是整数的. 我们利用了⑤(从而⑥)才得到 a, b 为整数的结论.

2. 在已经证明 $f(x)$ 是整系数多项式后, 问题化为与整数有关的问题. 与整数有关的问题大多用到整除性. 而在整除的问题中, 质数极为重要, 它可以使问题大大简化, 所以我们取 x 为质数 n .

同时, 我们取 n 非常大, 这样⑧的右边大致为 $a'n^2$. 而左边, 因为 n 是质数, 可导出一个因数 $s - dn - e \geq n$; 同时另一个因数 $\geq (2d+1)n > a'n$, 从而产生矛盾. 这里 n 大也是非常重要的, 因为 n 不大不能产生矛盾(开始所举例子 $x^2 + 4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 11^2$ 等, 可以对很多 x 值为平方数).

以上的 1, 2 两点, 可以说是解题时的正确的感觉. 没有这种感觉或理解, 解题就会茫然无绪, 不知路在何方. 所以要注意总结, 注意养成良好的感觉.

谋定而后动

已知抛物线 $y^2 = 2px$, 点 $A(a, b), B(-a, 0)$. 对抛物线上任

一点 M_1 , AM_1 交抛物线于 M_2 , BM_1 又交抛物线于 M_3 . 求证直线 M_2M_3 通过一个定点.

这是一道解析几何的问题. 解析几何的问题看上去不难, 似乎总有路可循, 然而做得不好, 却是非常麻烦的. 有时还不是小麻烦, 简直叫你无法再继续做下去, 因而蒙受失败. 所以, 在动手列式之前, 应当好好规划一下: 有几种方案? 哪一种方案最可行? 选择好的方案, 谋定而后动, 切忌慌不择路.

第一方案. 设 M_1 的坐标为 (h, k) , 可建立起直线 AM_1 的方程(两点式), 再求出 AM_1 与抛物线的交点 M_2 (解方程组), 同样, 可求出 M_3 (解方程组). 再建立直线 M_2M_3 的方程. 最后, 证明 M_2M_3 通过定点.

这个方案的第一个困难在于解方程组. 由于抛物线的方程是二次的. 虽然可用代入法解, 但运算起来却较为麻烦. 但如果注意到消去 y 后的 x 的二次方程已有一根 $x = h$, 那么另一根倒也可用韦达定理简单导出. 可是 M_2 的纵坐标形式相当复杂, M_3 也是如此. 于是, 建立直线 M_2M_3 的方程就成为一件令人望而生畏的工作. 恐怕还是另找一个方案为好.

一个简单的技巧: 抛物线 $y^2 = 2px$ 上的点可用参数形式 $x = 2pt^2$, $y = 2pt$ 表示. 这样, 点 M_i 的坐标可写成 $(2pt_i^2, 2pt_i)$, $i = 1, 2, 3$.

第二方案. 直线 AM_1 过点 M_2 , 即点 $A(a, b)$, $M_1(2pt_1^2, 2pt_1)$, $M_2(2pt_2^2, 2pt_2)$ 三点共线, 将点 M_2 的坐标代入直线 AM_1 的方程中, 就可以解出 t_2 (用 a, b, t_1 表示). 同样, 由 B, M_1, M_3 共线, 可解出 t_3 . 用两点式可写出直线 M_2M_3 的方程, 再将 t_2, t_3 用上面得到的式子代入, 就化为系数为 t_1 的多项式的、 x 与 y 的一次方程. 最后, 将这方程按 t_1 的幂写成

$$t_1^2 \cdot A + t_1 \cdot B + C = 0 \quad (*)$$

的形式. 其中 A, B, C 都是 x 与 y 的一次式. 由 $A=0, B=0, C=0$ 可解出 x, y , 即所说定点的坐标(不论 t_1 取什么值, 这点的坐标都适合(*)).

第二方案每一步都是可行的. 细节上还可稍改一下, 即对于 A, M_1, M_2 三点共线这一条件, 可改为先求 M_1M_2 的方程, 再用 A 点坐标代入. 这样, 三条直线是 M_1M_2, M_1M_3, M_2M_3 , 方程的形式一致(这就是一种对称美).

具体施行如下:

直线 M_1M_2 的方程为

$$\frac{y-2pt_1}{x-2pt_1^2} = \frac{2pt_2-2pt_1}{2pt_2^2-2pt_1^2} = \frac{1}{t_2+t_1}.$$

因为 M_1M_2 过 $A(a, b)$, 所以

$$\frac{b-2pt_1}{a-2pt_1^2} = \frac{1}{t_2+t_1},$$

即

$$t_2 = \frac{a-bt_1}{b-2pt_1}. \quad ①$$

同理(将上式的 a, b 分别换成 $-a, 0$)

$$t_3 = \frac{a}{2pt_1}. \quad ②$$

直线 M_2M_3 的方程为

$$\frac{y-2pt_2}{x-2pt_2^2} = \frac{1}{t_3+t_2},$$

即

$$x = y(t_2+t_3) - 2pt_2t_3.$$

将上面的 t_2, t_3 代入得

$$x \cdot 2pt_1(b-2pt_1) = y(ab - 2pt_1^2 \cdot b) - 2pa(a-bt_1).$$

按 t_1 的幂整理成

$$t_1^2(4p^2x - 2pby) - t_1(2pbx - 2pab) + aby - 2pa^2 = 0.$$

由

$$\begin{cases} 4p^2x - 2pby = 0, \\ 2pbx - 2pab = 0, \\ aby - 2pa^2 = 0, \end{cases}$$

$$\text{得 } x = a, y = \frac{2pa}{b}.$$

所以直线 M_2M_3 通过定点 $(a, \frac{2pa}{b})$.

第二方案(稍加修改), 已经是简单自然的. 其中先讨论直线 M_1M_2 , 而不先讨论 M_1M_3 , 值得注意. 因为 M_1M_2 过 A , A 是一般的点, 将条件①中 a, b 换成 $-a, 0$ 就得到②. 而如果先讨论直线 M_1M_3 就没有这种便利了.

这种先一般后特殊的想法, 启示我们的第三方案: 设 M_2M_3 所过的定点为 $C(c, d)$. 同上可得 M_1M_2 的方程为

$$\frac{y - 2pt_2}{x - 2pt_2^2} = \frac{1}{t_2 + t_1}.$$

由 M_1M_2 过 $A(a, b)$ 得

$$t_1 = \frac{a - bt_2}{b - 2pt_2}, \quad (3)$$

同理, 由 M_2M_3 过 $C(c, d)$ 得

$$t_3 = \frac{c - dt_2}{d - 2pt_2}. \quad (4)$$

因为直线 M_1M_3 过点 $B(-a, 0)$, 所以(在③中将 t_2, a, b 分别改为 $t_3, -a, 0$)

$$a = 2pt_1t_3. \quad (5)$$

将③, ④代入⑤得

$$\frac{a}{2p} = \frac{a - bt_2}{b - 2pt_2} \cdot \frac{c - dt_2}{d - 2pt_2}. \quad (6)$$

⑥是一个恒等式. 比较 t_2^2 的系数与不含 t_2 的常数项(即令 $t_2 \rightarrow +\infty$ 与 $t_2 = 0$)得 $c = a, d = \frac{2ap}{b}$. 即直线 M_2M_3 过定点 $C(a, \frac{2ap}{b})$.

第三方案比第二方案简单一点. 其中定点 C 与 A 取得“平等的”地位.

开展讨论, 往往能获得较多的解法. 一个善于学习的学生或者教师, 可以从别人的解法中吸取营养, 这就是“集思广益”或“教学相长”.

电阻问题

用电阻值分别为 $a_1, a_2, \dots, a_6$ ($a_1 > a_2 > \dots > a_6$) 的 6 个电阻组装成一个如图 5-8 所示的组件. 这些电阻应如何配置, 才能使这个组件的总电阻最小?

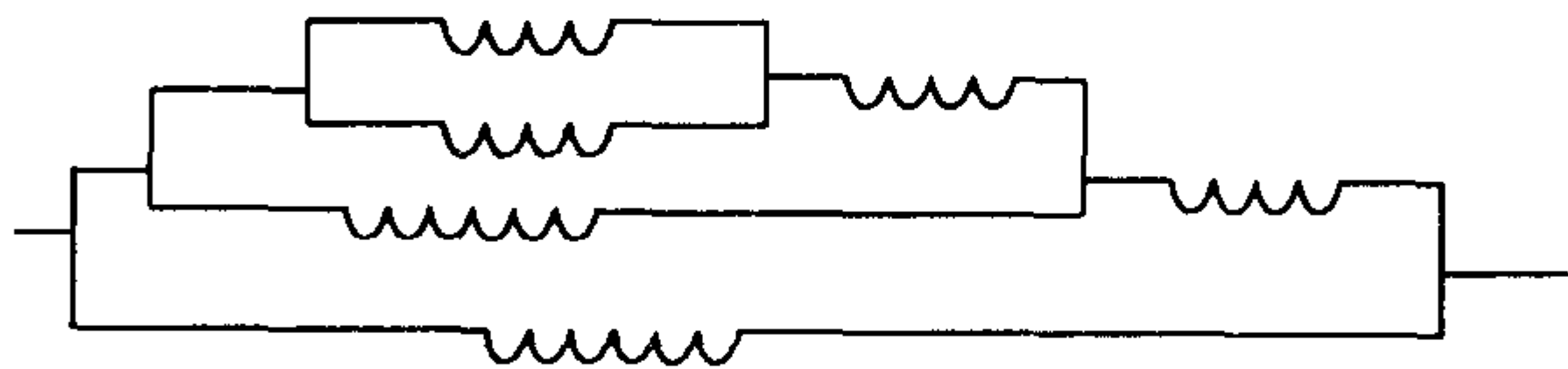


图 5-8

本题是一个联系实际的问题, 图 5-8 比较复杂, 应当先将它“分解”成几种简单的情况, 从简单的情况做起, 将简单的情况研究清楚了, 再进行“组装”.

几个电阻, 如果全部串联或全部并联, 这些电阻的位置可以任意安放, 结果都一样, 但如果既有串联又有并联, 情况就不同了.

最简单的情况是 3 个电阻, 分为两种不同的情况:

(1) 如图 5-9, 总电阻是

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} + R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3$$

$$= \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1 + R_2}.$$

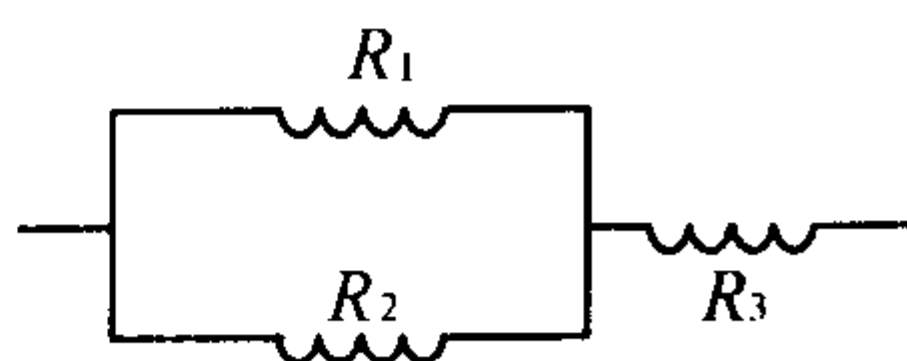


图 5-9

如果将 R_2 与 R_3 对调, 上式的分子不变, 分母则变为 $R_1 + R_3$. 因此, 在图 5-9 的总电阻最小时, $R_2 > R_3$ (否则对调 R_2 与 R_3 , 总电阻将减少).

(2) 如图 5-10, 总电阻是

$$\frac{1}{\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

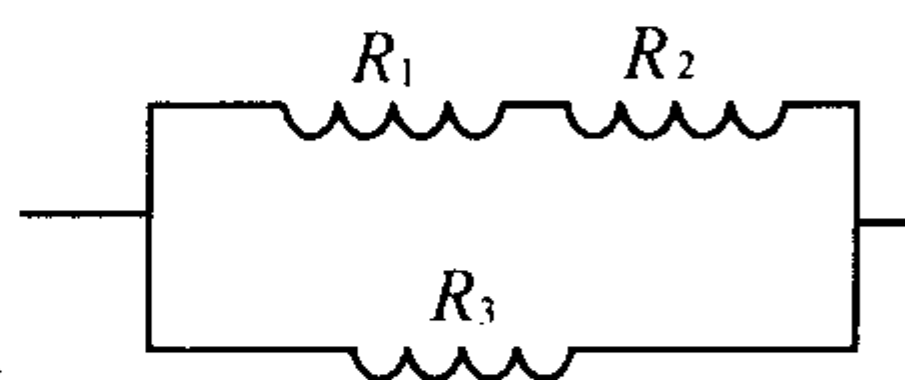


图 5-10

如果将 R_2 与 R_3 对调, 上式的分母不变, 分子中 $R_2 R_3$ 也不变, 而 $R_1 R_3$ 变为 $R_1 R_2$. 因此, 在图 5-10 中的总电阻最小时, $R_2 > R_3$.

简单情况搞清楚了, 就可以解决原来的问题了. 图 5-11 中, 任一段的电阻增加, 总电阻也增加. 因此, 每段电阻都应尽量地小, 由 (1), $R_1 > R_3, R_2 > R_3$.

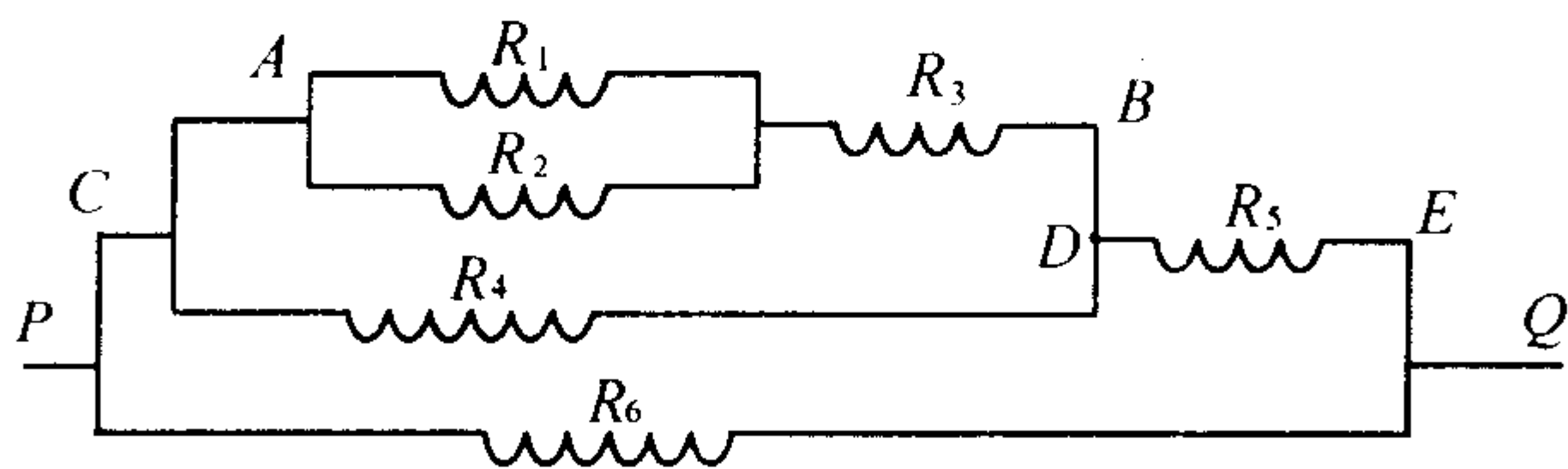


图 5-11

在 CD 段, 由 (2) (将并联的 R_1, R_2 当作一个电阻), $R_3 > R_4$. 在 CE 段, 再由 (1) (将 AB 段上的电阻当作一个电阻), $R_4 > R_5$.

最后, 由 (2), $R_5 > R_6$.

因此,电阻的配置应当如图 5-12.

解题中,将几个电阻当作一个电阻,就是代数中惯用的“用字母表示数或式”,也就是“换元法”.

善于将复杂的情况分解为或化归为简单情况,解题能力就大大长进了.

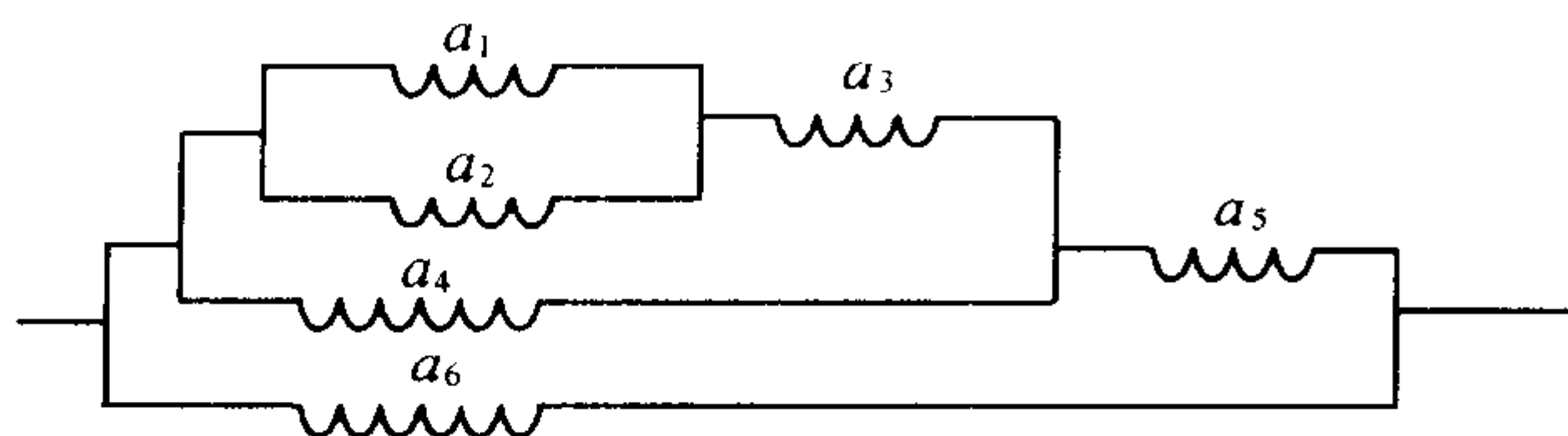
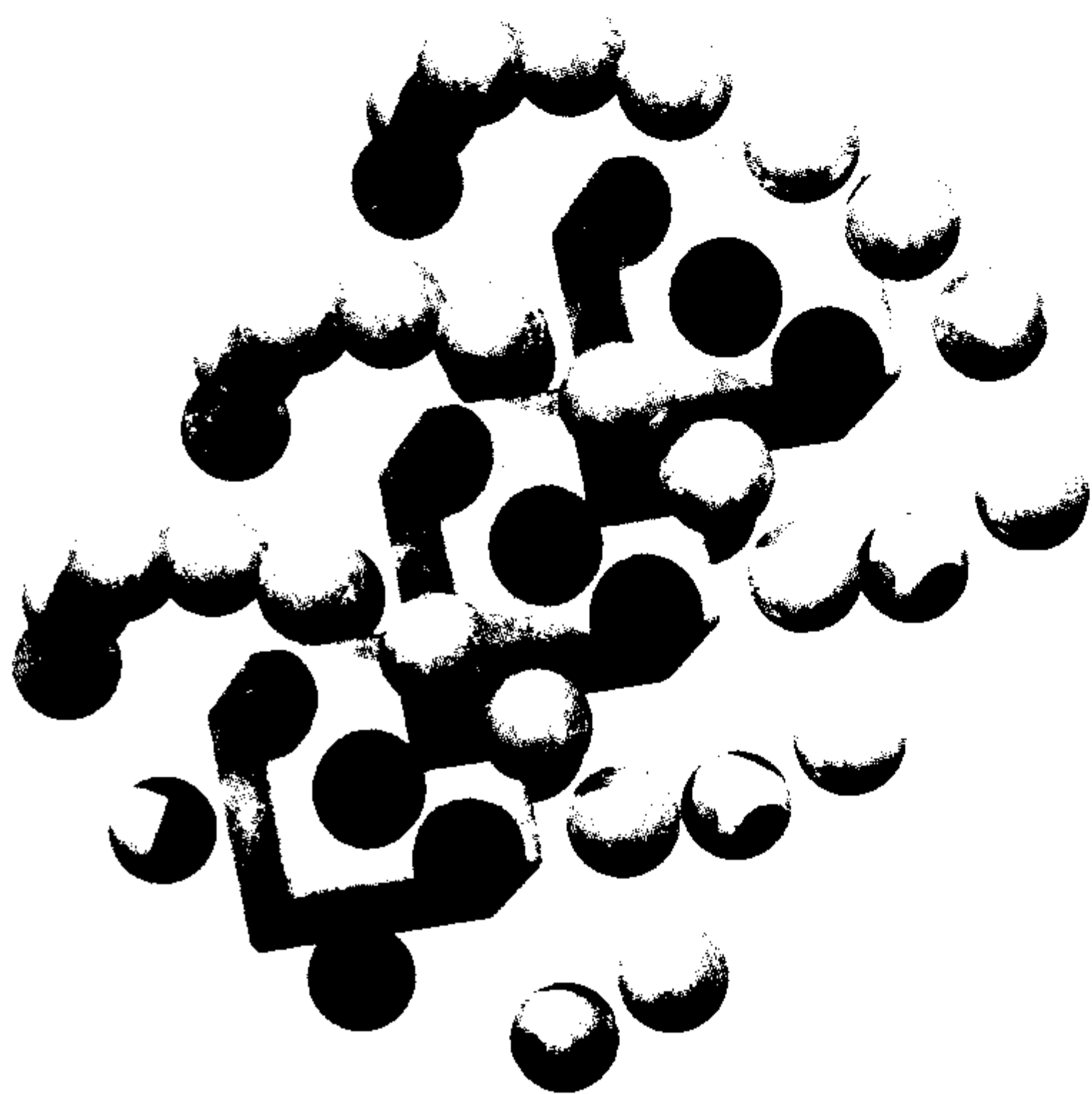


图 5-12

数 学 教 师

本章针对中学数学教师，
谈谈与解题有关的事。



I. 解题的重要性

中学数学教学的首要任务就在于加强解题能力的训练,因此,中学数学教师不仅应当具备较强的解题能力,而且还应当能够指导学生解题.

解题能力的强弱直接影响教师的“威信”,如果学生问你一道题,你做不出来,当然可以老老实实地告诉他:“我也不会做”,但你的威信显然不会增加.如果又有学生问你一道题,你还是不会做,那么你的威信就开始下降.如果这样的情况再出现一次,大概学生以后不会再问你问题,而你的威信也已跌至零点.

反过来,如果每次你都能为学生“解惑”,正确解答学生的问题,那么你的威信必将直线上升.我自己就遇到过这样的事.那还是 1964 年,我刚分到中学教初三代数.有一位同学怯生生地问我:“老师,你会不会做几何题?”(当时代数与几何两门课分开)

“试试看吧!”

她便说出下面的问题:

H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, AD 是高, 延长 AD 交外接圆于 E , 求证 $HD = DE$.

这道题不难,而且我读中学时就曾经做过,于是立即告诉她怎么做:

“连结 CE , CH , 并延长 CH 交 AB 于 F ……”

这位学生带着怀疑的口气打断我:

“老师,你题目有没有听清楚?”

我当然听清了题目,而且接下去就完成了证明.对于我们这样

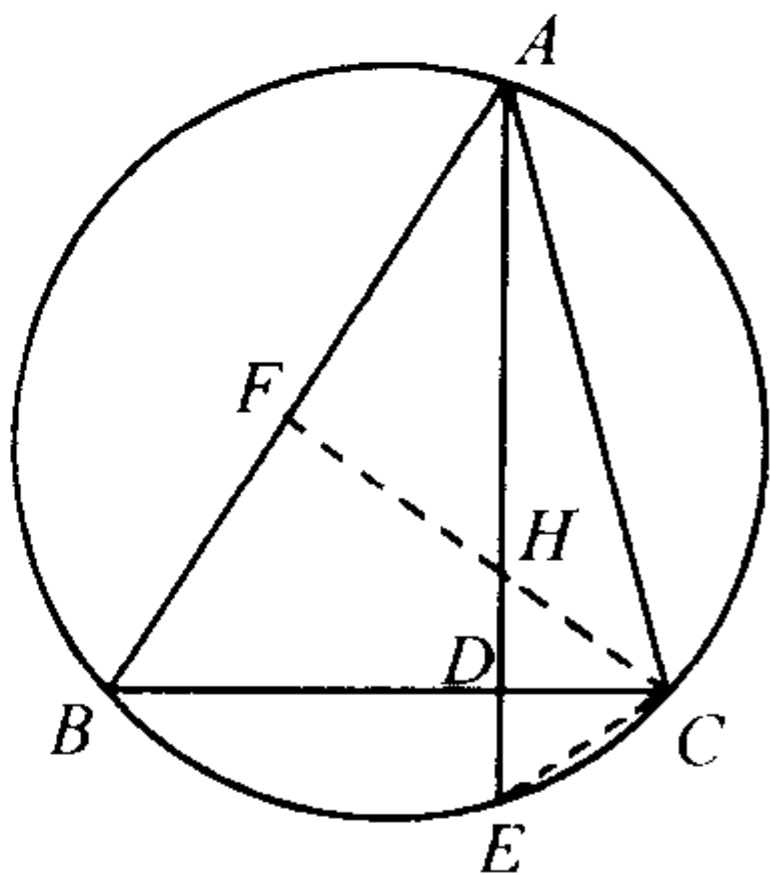


图 6-1

做过很多道题的人,证明几乎是显然的:要证 $HD = DE$,当然要找两个分别以 HD 、 DE 为边的、全等的三角形,这就是图中的 $\triangle CHD$ 与 $\triangle CED$,其中 CD 是公共边, $\angle CDH = \angle CDE = 90^\circ$,只需再找一个条件,当然不是 $HD = DE$,因为这正是要证明的(但也说明如果本题结论成立,那么的确有 $\triangle CHD \cong \triangle CED$,所以这条路是一定对的).由于可利用的角的关系很多,考虑 $\angle DCH$ 与 $\angle DCE$,因为 $\angle DCE = \angle BAH$ (同弦上的圆周角相等),而 $\angle BAH$ 与 $\angle DCH$ 都是 $\angle B$ 的余角,所以, $\angle DCH = \angle BAH = \angle DCE$,这样 $\triangle CHD \cong \triangle CED$, $HD = ED$.

从此以后,我就在这所学校建立了“威信”,“某某老师能够做题”.

当然,教师的威信是靠很多因素形成的.不能仅靠“炫耀”自己,但在有机会时,“炫耀”一下,也不是不应该的.

很多人将教师比做蜡烛——照亮别人,毁灭自己,其实这个比喻并不确当.如果一定要用比喻的话,教师是一盏灯,既照亮别人,同时自己又不断补充能量:充电或者加油.

作为数学教师,最需要加强的是他的数学水平.而数学水平,也就是解题的能力.

在前几章已经说过解题的重要性.但现在,对于解题的重要性,仍然有很多人认识不足,甚至认为教师只需研究数学“理论”,不需要解题.一谈解题,就是“题海战术”.所以不少从事教育的人绝口不提“解题”,真是咄咄怪事.因此,我们不得不再用一节专门谈解题对教师的重要性.

现在的数学教师大多是师范院校数学系毕业的.在大学里学了一些数学课程,但这些课程似乎与未来的职业关系不大,因此很多人(除去准备考研的那一部分)并不努力去学,也没有太大的兴趣与热情.这些课——坦率地说——往往采取“注入式”的办法满堂灌,讲授者惟恐听课人不懂,不仅讲得很详细,而且几乎将

课本或讲稿一字不漏地写在黑板上,听课者也就忙于记笔记,不作任何思考.久而久之,听课人完全失去了学习的主动性与创造性,对所听内容囫圇吞下,不知其所以然.大学里还有一些教育理论等方面的课程,这些课程有的与国内实际情况不甚符合,有的没有太多内容,只是一些需要死记的教条.绝大多数学生厌恶这类课程,认为是白白浪费时间.波利亚的书中曾经说过“数学系给我们的是啃不动的硬牛排,而教育学校则给的是一碗没有肉的白水汤”.可见中外情况类似,不过中国似乎更严重些,因为给学生自己支配的时间更少.

因此,对于多数中学教师或师范毕业生来说,他们最缺乏的是主动的、创造性的数学工作经验,而没有一定的独立思考,能动性和创新精神,也就谈不上才智.才智是运用知识的能力.在数学中,才智就是做问题,找出证明,评议百家,流畅地运用数学语言,及在各种具体场合能够辨认数学概念的能力.

在数学里,才智比起仅仅具有知识更为重要,而且重要得多.中学不仅应当向学生传授知识,而且应当开发他们的才智,他们的独立性、能动性和创新精神.因此,教师更应当具有某种创造性工作的经历.

不能要求一般的教师都去从事某个非常高深的课题的研究.所谓适当水平的创造性工作,对大多数教师来说,就是解题,尤其是解非常规性的数学问题.这种问题并不要求许多超出中学水平的知识,却要求一定程度的(有时要求高度的)精力集中和判断能力,需要发挥某种程度的主动性和创造性.解这种问题时,不仅有机会获得中学数学的全面知识,而且能享受到发现的喜悦.“如果你没有解过这样的问题;如果你没有体验过发现的紧张与胜利;如果,在多年执教后,你还没有在一个学生身上见到这种紧张与胜利,那么,”正如波利亚所说,“去寻找其他的职业吧,别再教数学了.”

2. 教师的素质

教师对学生有很大的影响.

教师应当喜爱自己的专业. 如果一位数学老师自己对于数学毫无兴趣, 那么他的学生也很难对数学产生兴趣.

你要给学生一把火, 你自己就必须是一团火.

教师应当喜爱自己的学生, 应当将他们当作自己的子女或弟妹, 发掘他们的优点, 鼓励他们, 引导他们, 而不是厌恶他们, 歧视他们, 将他们看得一无是处, 甚至讽刺、打击他们.

教师应当有民主的作风, 不应当将自己的意见强加给学生. 应当尊重学生的个性, 让他们自由地、健康地发展, 而不应当按照某种既定的模式来“塑造”学生. 在解题中, 更应多吸取学生的意见, 注意互相交流想法, 教学相长.

教师应当“闻过则喜”. 解题时, 如果有错误或不妥之处, 应公开承认, 服从真理. 对学生的好的、有创造性的解法应当表扬.

教师应当努力继续学习. 由于是一边工作, 一边学习, 学习当然是自学为主, 但在可能情况下, 争取与一些志趣相同的朋友互相切磋.

教师应淡泊名利, 不要将时间浪费到与业务无关的事上.

我认识一位中学老师, 年龄比我大几岁. 由于读书较晚, 只有大专学历. 但他谦虚好学, 律己甚严, 通过自学完成了本科学历, 不仅对高中数学课的内容驾轻就熟, 而且还能辅导学生高中物理. 这位 X 老师, 对学习较差或者转学来的学生耐心辅导, 使得他们能跟上班级. 后来 X 老师身患癌症, 动过手术不久, 又走上讲台, 坚持上课. 他的表率作用, 使班上人人好学上进, 在各种竞赛中多人

获奖,并有一人在国际数学竞赛中获得金牌.高考成绩出色自不在话下.

当然对数学教师,最重要的是他的数学素质,也就是解题能力.尽可能地亲自动手做一些题,这样才能有良好的“题感”,体会到困难之所在.当然,由于时间所限,有时也可以只做一半或只做 $1/3$,甚或完全看解答.

此外,应争取听一些好的数学讲座,看一些好的数学读物,例如人民教育出版社出的《从杨辉三角谈起》《一笔画与邮递线路问题》等等,上海教育出版社的《几何不等式》《趣味的图论问题》《抽屉原则及其他》等等,还有中国青年出版社翻译的《循环级数》《双曲线函数》等等.

与数学无关的事,如一些宴会、会议或打扑克之类,尽量少参加.

应当不断提高在数学方面的鉴赏力,也就是所谓的“识”,这一点下一节我们还要说到.

教师的优势

教师,由于年龄的关系,思维未必有学生敏捷.但是,思维的深度比敏捷更为重要,而在这方面教师是占有优势的.

教师,受过更高的教育,因此站得比学生高,看得也比学生更为深远.他见多识广,知道一道题目的背景或出处,甚至已经做过这道题.他又有很多资料(应当在平时积累,尤其是好的书,应当毫不犹豫地买一本.当然也可以利用学校的图书馆)可以查阅,还可以询问其他数学老师或朋友.

如果由教师来讲题,事先可以做好充分的准备.由于解答已经

知道,可以细细分析,不仅知道解题的步骤,而且知道其中的关键步骤(key step)是什么.因此,完全可以引导学生,根据他们的反应,给以适当的启发或帮助,经过一番共同的努力,完成问题的解答.

虽然知道解答有点像“事后诸葛亮”,但事后诸葛毕竟是诸葛,也仍然需要有很好的才识.

首先,他应有鉴赏能力,知道什么是好的解答.这个标准就是在第一章我们所说的简单自然.如果能有几个解答,他可以加以比较,选定一种最好的(最简单自然的).如果只有一个解答,更需要判别这个解答的优劣.首先是其中有无废招,能否简化.尽可能将解答改得好一些,实在太糟而又无法改好的解答,只有推倒重做,自出机杼去寻求好的解答.

其次,他应有洞察的能力,知道解答的每一步目的是什么:不但知其然,而且知其所以然.这样就能向学生讲清“思路”.

最后,还应当考察一下解法有无普遍性,能否用到其他地方,所得结论能否加强或推广.这种提问题的能力也很重要,也应当注意培养学生在这个方面的能力.

学生可能会提出很多问题(问题越多越好).提问题的,都是动脑筋、有兴趣的,应当表扬他们.有的问题,教师可以立即回答或想一下就回答;有的问题,一时回答不了,可以告诉学生,留待课后研讨,不要怕“丢面子”.有问题是件好事,教师可以从研讨中获益,这就是所谓“教学相长”.

学生也可能提出自己的解答,其中可能有非常好的,事先未见过的解答,应当对他们加以鼓励.当然,由于学生事前没有充分准备,解答可能不完善或者只做了几步就做不下去了.如果教师能帮助他完成或完善解答,那是一件好事.但如果学生所做的解,一时不能判定其对错(尤其是做了几步,不知能否有成功的希望),可用商榷的口吻及时刹车,将问题留到课后讨论,以免损失太多时间.

要保持教师的主导权,不要被学生冗长的解答牵着走.

教师的学识(上面所说的不少内容都属于“识”)比学生高,因此应当有信心指导学生解题,以下各节,我们将用一些实例加以说明.这些例子未必就是最合适的,教师在自己的工作经验中可以搜集到最好的问题.资料的积累也是非常重要的.

4. 理解题意

解题的第一步当然是审题.

教师不仅自己会审题,而且(尤其在向学生讲题时)还应当带领学生审题,提醒他们注意那些应当注意的地方.当然也不可过于“包办代替”,有些时候先不说穿,让学生碰个钉子、吃点苦头,然后再讲,或许反有事半功倍之效.教学是一种艺术,究竟怎样做,完全靠教师的经验、水平、见识,根据情况,审时度势,顺着自然之势加以引导.

例1 已知 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,外心为 O , P 在 BC 上, AP 是高,若 $\angle BCA \geq \angle ABC + 30^\circ$. 证明 $\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$.

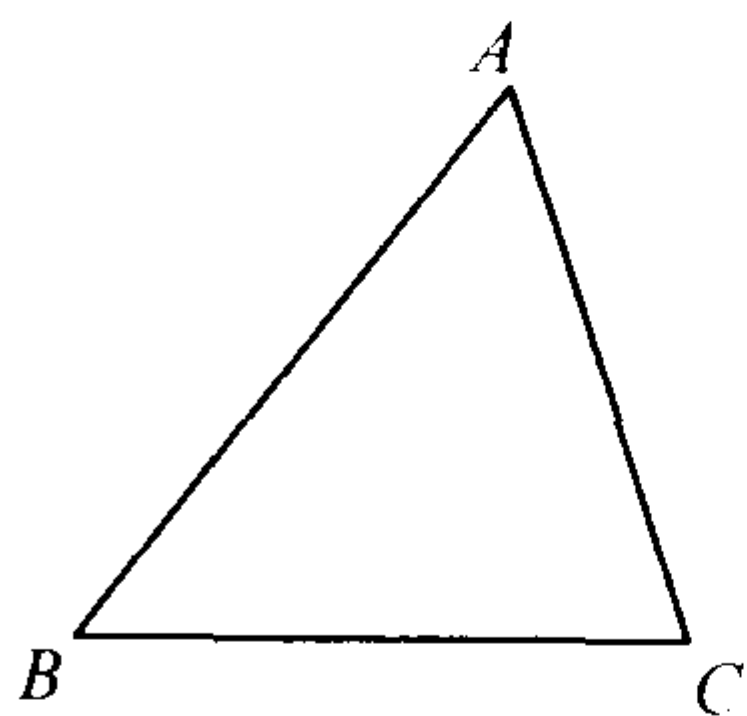


图 6-2

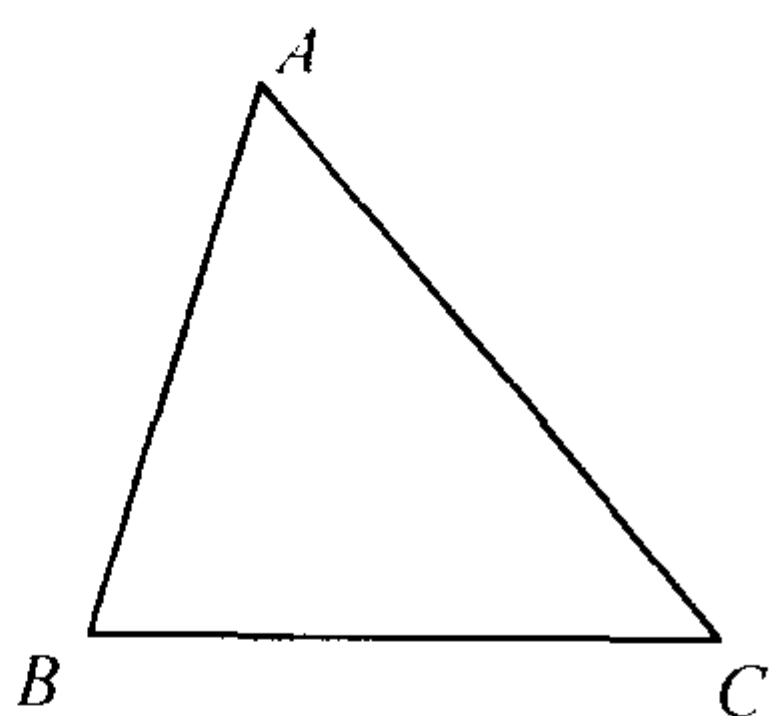


图 6-3

几何问题应当先画一个草图来帮助理解, $\triangle ABC$ 应当如

图 6-2, 而不是如图 6-3. 理由是 $\angle BCA > \angle ABC$, 所以 A 点偏在右边 (确切地说, A 在 BC 的中垂线的右方).

再把外接圆画出来, 其中直径 EF 是 BC 的中垂线, 过 BC 的中点 D.

A 在 EF 右侧表明 $\angle BCA > \angle ABC$, 但这仅是一个粗糙的不等式. 已知条件

$$\angle BCA \geq \angle ABC + 30^\circ \quad ①$$

比这精确, 但在图上如何体现呢?

对已知条件①的理解, 就是解决本题的第一个关键.

现在有外接圆, $\angle BCA$ 的度数就是 $\widehat{BA}$ 的一半, $\angle ABC$ 的度数就是 $\widehat{CA}$ 的一半, 图是关于 EF 对称的, 所以

$$\widehat{BA} - \widehat{CA} = 2 \widehat{EA},$$

从而①即 $\widehat{EA}$ 的度数 $\geq 30^\circ$, 转换成角, 也就是

$$\angle EOA \geq 30^\circ. \quad ②$$

至此, 对已知条件①, 我们已经有了充分的了解, 应当再看一看题目所要证明的结论

$$\angle CAB + \angle COP < 90^\circ. \quad ③$$

其中 $\angle CAB$ 是一个基本的角 (即 $\triangle ABC$ 的角), 而 $\angle COP$ 则较难把握.

$\angle CAB$ 与什么角的和恰好是 90° 呢? 稍想一下就知道

$$\angle DOC = \frac{1}{2} \angle BOC = \angle CAB.$$

所以 $\angle OCD$ 与 $\angle CAB$ 的和恰好是 90° , 这样要证明的③就化为

$$\angle COP < \angle OCD. \quad ④$$

这可以说我们又走过了第二个关键步骤. 要证的④与已有的②似乎相距很远, 如何将它们挂上钩? 这是最后的关键. 我们将一

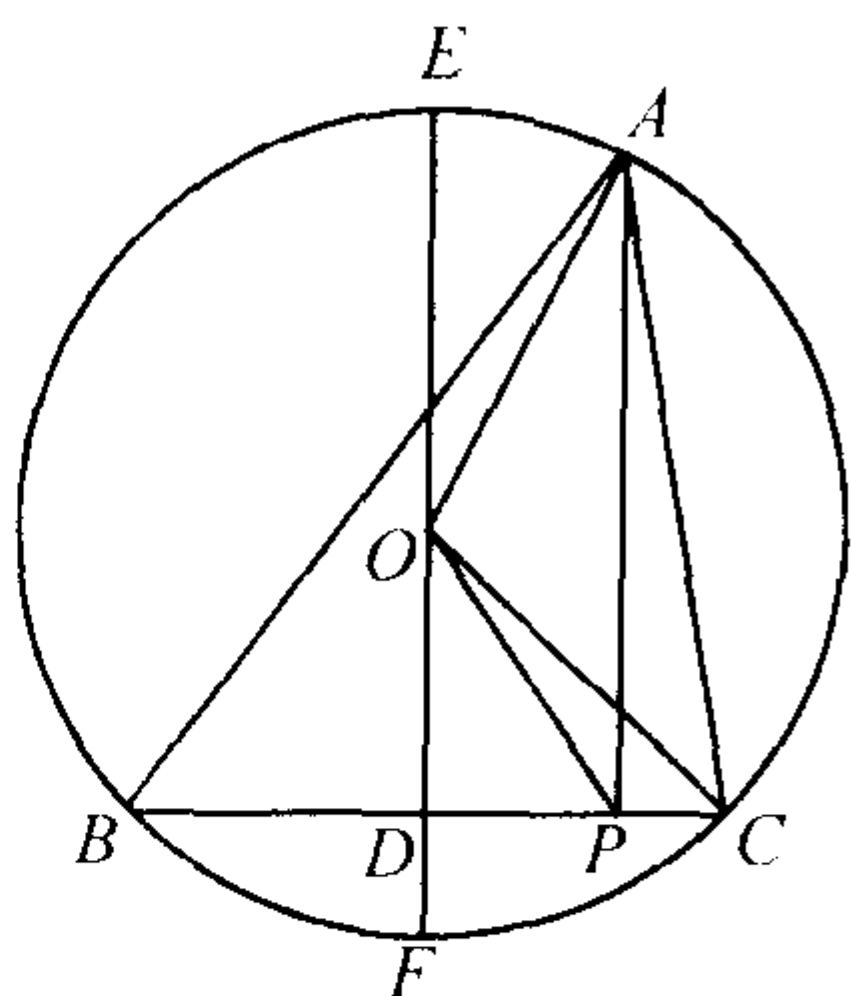


图 6-4

切“关系”集中到 CD 上.

DP 即 A 到 OE 的距离, 由于②,

$$DP \geq \frac{1}{2} OA = \frac{1}{2} OC > \frac{1}{2} CD,$$

所以

$$CP < DP < OP. \quad ⑤$$

由⑤立即得出④.

本题是 2001 年第 42 届 IMO(国际数学奥林匹克)的第一道试题. 有一定难度, 但理解题意是最重要的, 它至少可以帮助我们走过两个关键步骤(只剩下最后一步).

下面一道题同样也应先弄清题意.

例 2 已知 $x_i \in R (i=1, 2, \dots, n; n \geq 2)$ 满足

$$\sum_{i=1}^n |x_i| = 1, \sum_{i=1}^n x_i = 0, \quad ①$$

求证

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{i} \right| \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}. \quad ②$$

(1989 年高中数学竞赛题)

本题出现了绝对值与求和符号 $\sum$.

绝对值是大家熟悉的, 正数绝对值为这数本身, 负数绝对值为这数的相反数, 所以①可写成

$$P - N = 1, P + N = 0. \quad ①$$

其中 P 为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中正数的和, N 为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中负数的和.

由①得

$$P = \frac{1}{2}, N = -\frac{1}{2}. \quad ③$$

求和符号 $\sum$, 在我上中学时, 课本中从未出现过. 第一次在课外书上见到觉得很可怕, 莫测高深, 现在中学教材有统计内容,

$\sum$ 也早为中学生熟悉,不再令人生畏了.

②的左边也可分为两部分,一部分对正数求和,另一部分对负数求和,前者化为 P_1 ,后者化为 N_1 ,显然有

$$P_1 \leq P, N_1 \geq N, \quad (4)$$

及

$$P_1 \geq \frac{P}{n}, N_1 \leq \frac{N}{n}. \quad (5)$$

所以

$$\begin{aligned} P_1 + N_1 &\leq P + \frac{N}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \\ -(P_1 + N_1) &\geq -P - \frac{N}{n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

5. 变更问题

不断地变更问题,直到它变得易于解决(最好化成一个你所熟悉的问题),这是解题的常用方法.从理解题意时,我们就开始这样做.例如上节的例1,我们将③变为等价的④即是如此.

教师应当指导学生作这种变更(转化,也可以称为化归).

例1 已知 $\frac{\sec^3 \theta}{\sec \alpha} - \frac{\tan^3 \theta}{\tan \alpha} = 1$, α, θ 均为锐角,试证 $\frac{\csc^3 \theta}{\csc \alpha} - \frac{\cot^3 \theta}{\cot \alpha} = 1$.

本题为1991年2月号《数学通报》问题栏的问题,这里先给出我们的解答.

首先,将已知条件中的切、割均化为弦,因为我们对弦(正弦与余弦)的了解远胜切、割.这种做法在证明三角恒等式时经常采用.

于是

$$1 = \frac{\sec^3 \theta}{\sec \alpha} - \frac{\tan^3 \theta}{\tan \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \theta} - \frac{\sin^3 \theta}{\sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \theta},$$

两边同乘 $\frac{\cos^3 \theta}{\cos \alpha}$, 再移项得

$$\frac{\sin^3 \theta}{\sin \alpha} + \frac{\cos^3 \theta}{\cos \alpha} = 1. \quad (1)$$

其次, 我们证明由①(α, θ 为锐角)可导出 $\alpha = \theta$. 这样所欲证的结论便成为显然的恒等式 $\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$ 了. 为了做到这点, 注意

$$\frac{\sin^3 \theta}{\sin \alpha} + \sin \alpha \sin \theta \geq 2 \sin^2 \theta. \quad (2)$$

$$\frac{\cos^3 \theta}{\cos \alpha} + \cos \alpha \cos \theta \geq 2 \cos^2 \theta. \quad (3)$$

②与③相加得

$$\frac{\sin^3 \theta}{\sin \alpha} + \frac{\cos^3 \theta}{\cos \alpha} + \cos(\alpha - \theta) \geq 2. \quad (4)$$

结合①得

$$\cos(\alpha - \theta) \geq 1,$$

于是 $\alpha = \theta$.

《数学通报》给出的解答如下:

由已知得
$$\frac{\sec^3 \theta}{\sec \alpha} - \frac{\tan^3 \theta}{\tan \alpha} = \sec^2 \theta - \tan^2 \theta,$$

$$\frac{\sec^3 \theta}{\sec \alpha} - \frac{\tan^3 \theta}{\tan \alpha} = \sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha,$$

即

$$\frac{\sec^2 \theta (\sec \theta - \sec \alpha)}{\sec \alpha} = \frac{\tan^2 \theta (\tan \theta - \tan \alpha)}{\tan \alpha}. \quad (5)$$

$$\frac{\sec^3 \theta - \sec^3 \alpha}{\sec \alpha} = \frac{\tan^3 \theta - \tan^3 \alpha}{\tan \alpha}. \quad (6)$$

易知 $\alpha = \theta$ 时结论显然成立. 若 $\alpha \neq \theta$, 由⑥ $\div$ ⑤整理得

$$\frac{\sec^2 \theta + \sec \theta \sec \alpha + \sec^2 \alpha}{\sec^2 \theta} = \frac{\tan^2 \theta + \tan \theta \tan \alpha + \tan^2 \alpha}{\tan^2 \theta},$$

即
$$\frac{\sec^2 \alpha}{\sec^2 \theta} - \frac{\tan^2 \alpha}{\tan^2 \theta} + \frac{\sec \alpha}{\sec \theta} - \frac{\tan \alpha}{\tan \theta} = 0.$$

所以
$$\left(\frac{\sec \alpha}{\sec \theta} - \frac{\tan \alpha}{\tan \theta}\right)\left(\frac{\sec \alpha}{\sec \theta} + \frac{\tan \alpha}{\tan \theta} + 1\right) = 0.$$

由于 α, θ 为锐角, 得

$$\frac{\sec \alpha}{\sec \theta} - \frac{\tan \alpha}{\tan \theta} = 0,$$

即

$$\frac{\cos \theta}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha \cos \theta}{\cos \alpha \sin \theta} = 0.$$

于是 $\sin \alpha = \sin \theta$, 这与 $\alpha \neq \theta$ 矛盾, 因此 $\alpha = \theta$, 结论成立.

与第一种相比, 这种解答的缺点是明显的. 首先它没有一开始就将切、割化弦(而到最后却又用这一“招”). 其次, 产生⑥, ⑤再相除, 巧诚巧矣, 但为什么要这样做? 从哪里引发这样的念头(恐怕不易想到)? 均无法解释清楚. 而②的目标很明显: 通过不等式消除 $\frac{\sin^3 \theta}{\sin \alpha}$ 的分母, 所以所加的项应当有因子 $\sin \alpha$, 而为了使得出的②的右边为 $\sin \theta$ 的整式, 所加的项当然应为 $\sin \alpha \sin \theta$, ③式也是如此. 用这种方法还可由条件

$$\frac{\sin^{n+2} \theta}{\sin^n \alpha} + \frac{\cos^{n+2} \theta}{\cos^n \alpha} = 1 \quad (\alpha, \theta \text{ 为锐角}, n \text{ 为自然数}) \quad ⑦$$

导出 $\alpha = \theta$:

$$\frac{\sin^{n+2} \theta}{\sin^n \alpha} + \overbrace{\sin \alpha \sin \theta + \sin \alpha \sin \theta + \cdots + \sin \alpha \sin \theta}^{n \uparrow} \geq (n+1) \sin^2 \theta,$$

$$\frac{\cos^{n+2} \theta}{\cos^n \alpha} + \overbrace{\cos \alpha \cos \theta + \cos \alpha \cos \theta + \cdots + \cos \alpha \cos \theta}^{n \uparrow} \geq (n+1) \cos^2 \theta,$$

相加得

$$\cos(\alpha - \theta) \geq 1.$$

于是 $\alpha = \theta$.

有了 $\alpha = \theta$, 立即可推出诸如

$$\frac{\sin^{n+2} \alpha}{\sin^n \theta} + \frac{\cos^{n+2} \alpha}{\cos^n \theta} = 1 \quad (8)$$

之类的等式.

有人认为本题可不导出 $\alpha = \theta$ 而直接得出结论

$$\frac{\csc^3 \theta}{\csc \alpha} - \frac{\cot^3 \theta}{\cot \alpha} = 1, \quad (9)$$

或直接由⑦导出⑧, 我们认为不导出 $\alpha = \theta$ 是不妥的. 因为这一结论体现了问题的实质, 简明、重要: 重要性远超过⑧, ⑨这样的式子 (知道 $\alpha = \theta$ 后, 像⑧, ⑨这样的式子可以写出任意多个). 绕过这个结论等于隔靴搔痒, 没有真正搔到痒处.

变更后的问题可以与原来的问题等价, 也可以比原来的问题更强 (当然必须是结论正确的问题). 上例变为证明 $\theta = \alpha$, 即比原来问题更强.

例 2 已知 a, b, c, d, m 都是实数, 并且 $m \neq -1, a \neq c$, 求证

$$\frac{|ad - bc|}{\sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}} \leq \sqrt{\left(\frac{a + mc}{1 + m}\right)^2 + \left(\frac{b + md}{1 + m}\right)^2}. \quad (1)$$

这是不等式的证明题. 当然需要一点不等式的知识, 特别是最简单的柯西不等式

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 \quad (2)$$

直接从①出发进行证明, 稍有困难. 问题可变更为证明

$$|ad - bc| \leq \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \sqrt{\left(\frac{a + mc}{1 + m}\right)^2 + \left(\frac{b + md}{1 + m}\right)^2}. \quad (3)$$

从③的左边出发仍然有困难. 从右边出发较好, 因为与②比较, $x_1 = a - c, x_2 = b - d$ 可以显然看出. 稍细心一点就知道应取

$y_1 = \frac{b+md}{1+m}$ 而不取 $y_1 = \frac{a+mc}{1+m}$. 因为 $x_1y_1 + x_2y_2$ 应为左边的 $ad - bc$, 如果取 $y_1 = \frac{a+mc}{1+m}$, 那么 $x_1y_1 + x_2y_2$ 就不可能出现乘积 ad . 所以只能取 $y_1 = \frac{b+md}{1+m}$, $y_2 = -\frac{a+mc}{1+m}$. 这时 $x_1y_1 + x_2y_2 = (a-c)\frac{b+md}{1+m} - (b-d)(\frac{a+mc}{1+m}) = ad - bc$ (最后一步应用心算完成), 正好合乎要求.

这个问题虽然极其简单, 却可以说明问题的转换及从何入手等解题时常常遇到的问题.

当然, 对于熟练的解题者, 这道题纯属显然. 反过来说, 动笔之前应先思考, 拟定计划, 像这样的问题, 完全可以想得透彻, 根本不必动笔去做. 直到这类问题都成为显然或显而易见时, 你才算得上是一个熟练的解题者. 这就像下棋一样, 应当算出五步或十步(乃至更多步)的种种变化, 谋定而后动, 不能不断悔棋或者当着对手将走法在棋盘上一一摆出. 教师可以通过提问(不写), 提高学生在这方面的能力.

6. 从何入手

从何入手, 大概是解题最难的地方.

在第二章, 我们已经说过: 从简单的做起, 这是入手的不二法门. 这里再举一些例子.

例 1 已知 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是 n 个正数, 满足

$$a_1 a_2 \cdots a_n = 1, \quad \text{①}$$

求证

$$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geq 3^n. \quad \textcircled{2}$$

(1989 年全国高中数学竞赛题)

这道题如何措手? 可以先看一个特殊情况, 即 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$, 它们显然满足①, 而且使不等式②成立, 实际上, 这时②恰好是等式.

举这个特例并非无聊的举动, 它告诉我们②中等号可以成立, 所以左边不能缩得太小(决不能采用严格的不等式). 其次, 它告诉我们平均看来, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 大致与 1 相当.

如果用不等式 $2+a_i\geq 2\sqrt{2a_i}$, 那么

$$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geq (2\sqrt{2a_1})(2\sqrt{2a_2})\cdots(2\sqrt{2a_n})=(2\sqrt{2})^n.$$

然而 $(2\sqrt{2})^n < 3^n$, 这表明左边缩得太多, 而且

$$2+a_i\geq 2\sqrt{2a_i} \quad \textcircled{3}$$

的等号仅在 $a_i=2$ 时才成立. 在上面已经说过平均看来 a_i 大致与 1 相当, 所以用③是不合适的, 应当改用

$$2+a_i=1+1+a_i\geq 3\sqrt[3]{a_i}. \quad \textcircled{4}$$

④中三项之和, 两项 1, 一项 a_i 与 1 相当, 在 $a_i=1$ 时④成为等式. 所以这样做显然胜过③. 事实上

$$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geq (3\sqrt[3]{a_1})(3\sqrt[3]{a_2})\cdots(3\sqrt[3]{a_n})=3^n.$$

正好达到所要的目标②.

这题需要一点有关不等式的知识, 即三个正数的算术平均不小于它们的几何平均. 但更需要的是一种良好的数学感觉, 知道 a_i 平均看来与 1 相当, 而不是与 2 相当. 所以不宜将 a_i 与 2 直接作平均, 而应当将 2 拆为 $1+1$ 再与 a_i 合起来作三项的平均.

例 2 设 x 为实数, 在 $|x|\leq 1$ 时, 化简

$$||\cdots||x|-1|-1|-\cdots-1|-1|(n \text{ 个 } 1) \quad \textcircled{1}$$

①中有 $n+1$ 次取绝对值, 颇为复杂, 但只要耐心地从简单的做起, 不难发现规律:

$$||x| - 1| = 1 - |x|,$$

$$|||x| - 1| - 1| = |1 - |x| - 1| = |x|,$$

$$|||x| - 1| - 1| - 1| = ||x| - 1| = 1 - |x|,$$

...

由此可见, ① = $\begin{cases} |x|, & n \text{ 为偶数,} \\ 1 - |x|, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$

数学归纳法是一种常见的方法. 很多问题, 都是从简单的做起, 发现规律再用归纳法证明.

例 3 设 $|x| \leq n+1$, 求证

$$\underbrace{||\cdots||x| - 1| - \cdots - 1| - 1|}_{n \uparrow 1} \leq 1. \quad ①$$

问题与非负整数 n 有关, 这样的问题正好用数学归纳法.

$n=0$ 时, 结论显然(条件是 $|x| \leq 1$, 而①也是 $|x| \leq 1$). $n=1$ 的情况也不难验证(但没有验证的必要. 奠基用 $n=0$ 已经足够).

假设在 $|x| \leq k$ 时,

$$\underbrace{||\cdots||x| - 1| - \cdots - 1| - 1|}_{k-1 \uparrow 1} \leq 1, \quad ②$$

则在 $|x| \leq k+1$ 时,

$$-1 \leq |x| - 1 \leq k.$$

所以

$$||x| - 1| \leq k.$$

令 $y = |x| - 1$, 则 $|y| \leq k$, 所以由归纳假设,

$$\underbrace{||\cdots||y| - 1| - \cdots - 1| - 1|}_{k-1 \uparrow 1} \leq 1,$$

即①对于 $n = k+1$ 成立.

因此, ①对一切非负整数 n 均成立.

①的另一种证法是注意 $a \geq 0$ 时,

$$0 \leq x \leq a+1 \Rightarrow |x-1| \leq a,$$

所以

$$|x| \leq n+1 \Rightarrow ||x|-1| \leq n \Rightarrow ||x|-1|-1| \leq n-1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow$$
$$|\cdots| \underbrace{||x|-1|-1|-\cdots-1|}_{n \uparrow 1} \leq 1 \quad ①$$

这比用归纳法更简单. 当然这其实也是“从简单的做起”.

再看一个更复杂的、有关绝对值的问题.

例 4 设 x 为实数, n 为非负整数, 考虑

$|\cdots||x|-1|-\cdots-1|-1|$ (共 $2^n+2^{n-1}+\cdots+2+1$ 个 1)

与

$$||\cdots||x|-2^n|-2^{n-1}|-\cdots-2|-1|.$$

可以验证:

$$||x|-1| = ||x|-1| \quad (n=0), \quad ①$$

$$||x|-1|-1|-1| = ||x|-2|-1| \quad (n=1). \quad ②$$

①是显然的. ②需要分情况讨论.

在 $|x| \geq 3$ 时, ②的两边都是 $|x|-3$.

在 $2 \leq |x| < 3$ 时, ②的两边都是 $3-|x|$.

在 $1 \leq |x| < 2$ 时,

$$\text{②式左边} = ||x|-1-1|-1| = |2-|x|-1| = |x|-1,$$

$$\text{②式右边} = |2-|x|-1| = |x|-1,$$

所以②式成立.

在 $|x| < 1$ 时, ②的两边都是 $1-|x|$.

于是, 可以猜测

$$\underbrace{|\cdots||x|-1|-\cdots-1|-1|}_{2^n+2^{n-1}+\cdots+2+1 \uparrow 1}$$
$$= ||\cdots||x|-2^n|-2^{n-1}|-\cdots-2|-1|. \quad ③$$

但随着 n 的增大, 要验证③显然越来越困难, 我们应当用数学归纳法来证明.

奠基已经完成(只需要验证 $n=0$ 时, ③成立. $n=1$ 不是必需

的).

假设③式在 n 换成较小的非负整数时成立, 考虑 n 的情况.

如果 $|x| \geq 2^{n+1}$, 那么③式两边都等于

$$|x| - 2^n - 2^{n-1} - \cdots - 2 - 1.$$

如果 $|x| < 1$, 这时由例 2 结果 ($2^n + \cdots + 2 + 1$ 是奇数),

③式左边 $= 1 - |x|$.

而

③式右边 $= 2^n - |x| - 2^{n-1} - \cdots - 2 - 1 = 1 - |x|$,

所以③式成立.

设 $1 \leq |x| < 2^{n+1}$, 这时必有非负整数 k , 使 $2^k \leq |x| < 2^{k+1}$ ($k \leq n$) 令

$$y = |x| - 2^k,$$

则 $0 \leq y < 2^{k+1} - 2^k = 2^k \leq 2^n$,

$$|x| = 2^k + y = 2^n - 2^{n-1} - \cdots - 2^k + y,$$

$$\begin{aligned} \text{③式左边} &= \underbrace{|\cdots| |y-1| - 1| - \cdots - 1|}_{2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2^{k+1} + \cdots + 2^n \uparrow 1} \\ &= \underbrace{|\cdots| |z-1| - 1| - \cdots - 1|}_{2^{k+1} + \cdots + 2^n \uparrow 1}, \end{aligned} \quad \text{④}$$

其中 $z = \underbrace{|\cdots| |y-1| - 1| - \cdots - 1|}_{2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 1}$. 由于 $0 \leq y < 2^k$ 即

$|y| < (2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 1) + 1$, 根据例 3 结果, $0 \leq z \leq 1$, 再根据例 2 结果 ($2^{k+1} + \cdots + 2^n$ 为偶数) 及④,

③式左边 $= z$. ⑤

$$\begin{aligned} \text{③式右边} &= ||\cdots| |2^n - |x| - 2^{n-1}| - \cdots - 2| - 1| \\ &= ||\cdots| 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^k - y - 2^{n-1}| - \cdots - 2| - 1| \\ &= \cdots = ||\cdots| 2^k - y - 2^k| - \cdots - 2| - 1| \\ &= ||\cdots| y - 2^{k-1}| - \cdots - 2| - 1|. \end{aligned}$$

由归纳假设, 上式即等于 z .

因此, ③式对 n 成立.

这样,对一切非负整数 n , ③式成立.

例 4 是一个复杂的问题,遇到这样的问题,我们应当先去做较为简单的例 2 与例 3. 例 2 与例 3 做好了,再来做例 4.

2. 用不同的观点看问题

这一点在第二章也已经说过. 同一个问题,可以用不同的观点去看. 就像庐山,“横看成岭侧成峰,远近高低各不同”. 你还可以跳出圈子,坐飞机到天上鸟瞰,大饱眼福.

教师见多识广,可以指导学生用不同的观点看问题. 有时候,一道困难的问题,换一个角度看,就变得十分容易.

例 1 已知 x, y 都是实数, $x^2 + y^2 = 1$, 求 $u = x + y$ 的取值范围.

本题宜采用数形结合的观点. 条件 $x^2 + y^2 = 1$ 表明点 (x, y) 在单位圆周上变动.

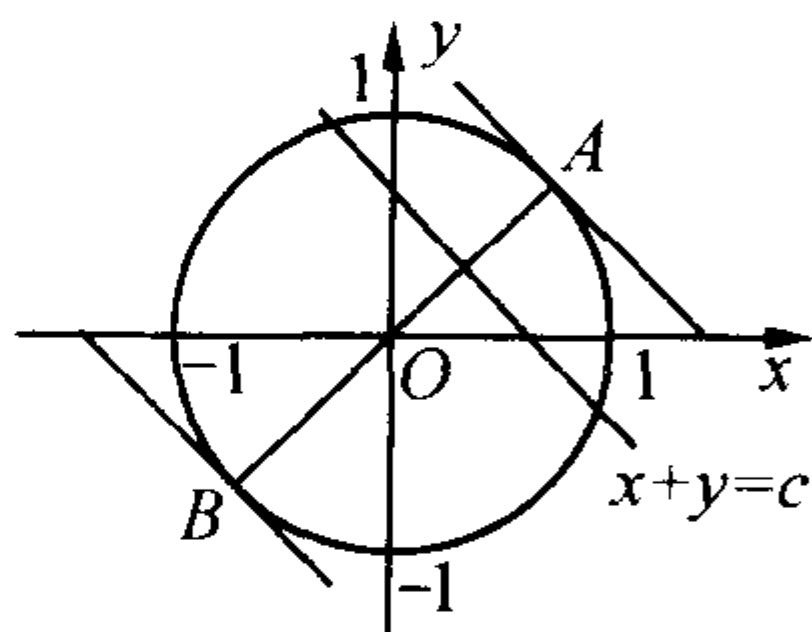


图 6-5

$x + y = c$ (c 常数) 则是倾斜角为 $\frac{3}{4}\pi$ 的直线. 显然在直线与圆相切时取得最大值与最小值. 切点 A, B , 坐标分别为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. 从而 $-\sqrt{2} \leq u \leq \sqrt{2}$.

当然,也可用柯西不等式得出:

$$u^2 = (x + y)^2 \leq (1^2 + 1^2)(x^2 + y^2) = 2.$$

例 2 已知 $2x + y \geq 1$, 求 $y^2 - 2y + x^2 + 4x$ 的最小值. 本题也以用数形结合的方法为好.

首先 $y^2 - 2y + x^2 + 4x = (x+2)^2 + (y-1)^2 - 5$, 所以

$$y^2 - 2y + x^2 + 4x = C \quad (C \text{ 为常数}) \quad ①$$

是以 $(-2, 1)$ 为圆心, 以 $\sqrt{5+C}$ 为半径的圆, 即

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5+C. \quad ②$$

条件 $2x+y \geq 1$ 即

$$2(x+2) + (y-1) \geq 4. \quad ③$$

圆心 $O'(-2, 1)$ 显然不满足③. 因此, 圆②在与③相切时半径

最小. 这时半径是 $\frac{4}{\sqrt{2^2+1^2}}$.

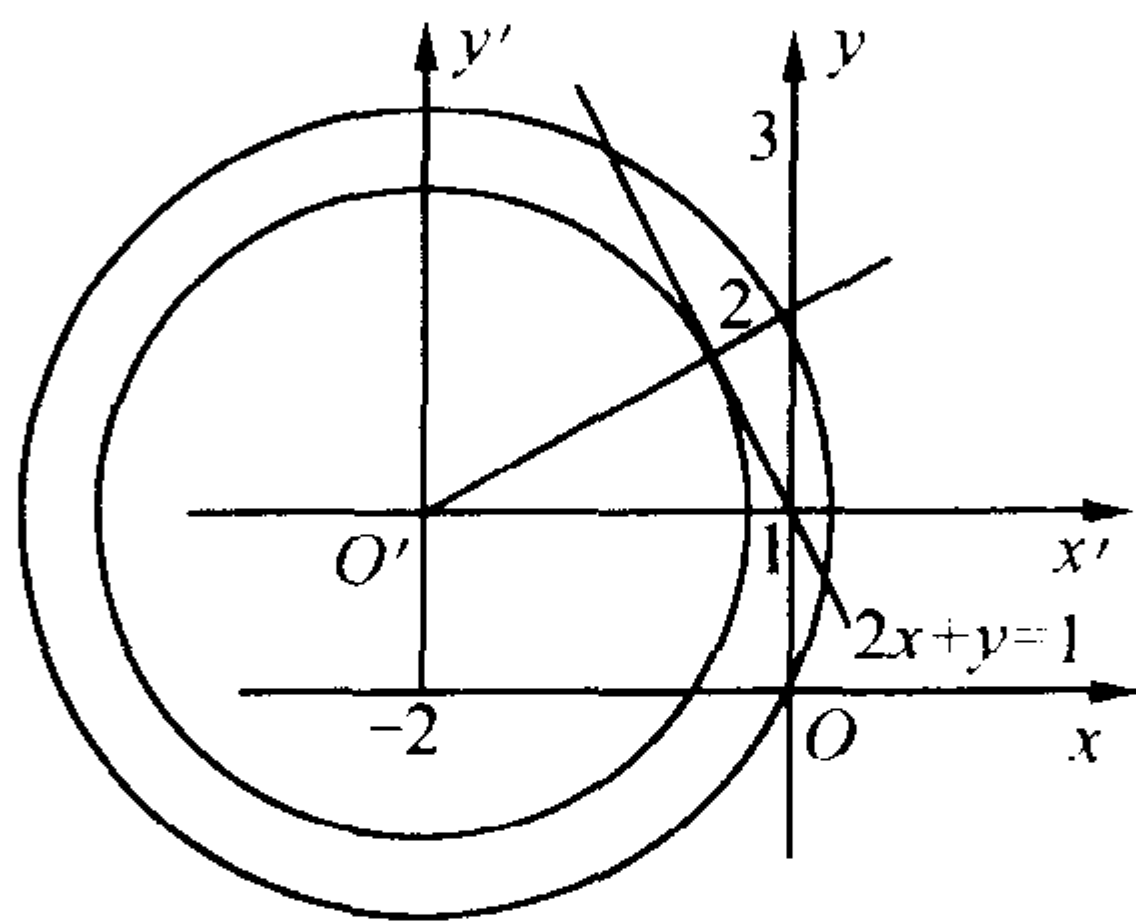


图 6-6

所以最小值为 $C = \left(\frac{4}{\sqrt{2^2+1^2}}\right)^2 - 5 = -\frac{9}{5}$.

例 3 已知 a, b 为实数, 均不超过 1, 并且

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} = 1. \quad ①$$

求证

$$a^2 + b^2 = 1. \quad ②$$

本题解法很多. 我们先用向量的观点看一看这个问题.

容易看出 $A(a, \sqrt{1-a^2}), B(b, \sqrt{1-b^2})$ 在单位圆

$$x^2 + y^2 = 1 \quad ③$$

上. 但很多人却忽略了点 $C(\sqrt{1-b^2}, b), D(b, -\sqrt{1-b^2})$ 也在

这个圆上(这就是所谓“盲点”,明明近在眼前,却视而不见).

①表明向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$ (O 是原点) 的数量积为 1. 这当然意味着 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 重合(夹角为 0). 因此 $a = \sqrt{1-b^2}, b = \sqrt{1-a^2}$, 从而②成立.

①也表明向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}$ 的向量积的模是 1 (或换一说法: $\triangle OAD$ 的面积为 $\frac{1}{2}$). 所以 OA 与 OD 垂直, 从而 $a = \sqrt{1-b^2}, \sqrt{1-a^2} = b$, ②成立.

纯代数的解法可用柯西不等式:

$$\begin{aligned} 1 &= (a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2})^2 \\ &\leq (a^2 + (\sqrt{1-a^2})^2)(b^2 + (\sqrt{1-b^2})^2) = 1. \end{aligned}$$

所以中间的 $\leq$ 应为等号, 从而

$$\frac{a}{\sqrt{1-b^2}} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{b}.$$

将上式平方并用比的性质得

$$\frac{a^2}{1-b^2} = \frac{1-a^2}{b^2} = \frac{a^2 + (1-a^2)}{(1-b^2) + b^2} = 1.$$

即②成立.

几何证题中, 动的观点很重要. 例如下面一道传统题, 早在许莼舫先生《几何定理与证题》一书中就曾介绍过, 其解法有 10 余种, 下面的解法或许是新的.

例 4 如图 6-7, 在 $\triangle ABC$ 的两边 AB 和 AC 上向外作正方形 $ABEF$ 和 $ACGH$, 证明 BC 边上的高 AD 平分 FH .

将 $\triangle ADB$ 绕 A 点依顺时针方向旋转 90° , 成为 $\triangle AD_1F$. 将 $\triangle ADC$ 绕 A 点依逆时针方向旋转 90° , 成为 $\triangle AD_2H$. AD_1, AD_2 都与 AD 垂直而且相等, 所以 D_1, A, D_2 三点共线, 而且 A 是 D_1D_2 的中点.

FD_1, HD_2 都与 BC 垂直, 因而都与 AD 平行, AD 过梯形 FD_1D_2H 的一腰 D_1D_2 的中点, 又与底平行, 因而它必平分另一腰 FH .

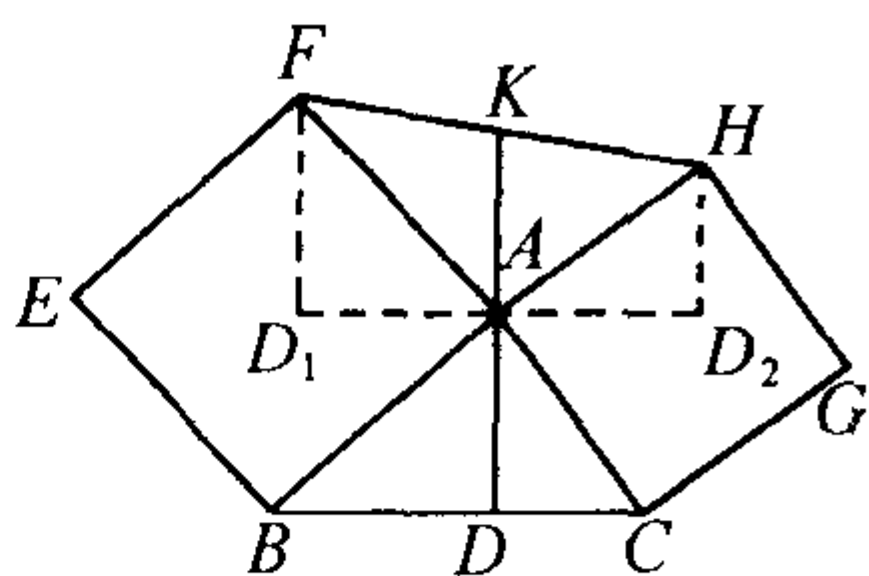


图 6-7

正三角形、正方形等图形, 常常启示我们运用旋转去处理问题. 例 4 即是如此.

例 5 已知 a, b, c 是三角形的三条边. 求证方程 $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ 没有实数根.

解 方程的判别式

$$\begin{aligned}\Delta &= (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2 \\ &= a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2.\end{aligned}$$

问题就等价于:

已知 a, b, c 是三角形的三条边, 求证

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 < 0. \quad ①$$

如果你能看出

$$2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

就是 $16\Delta^2$ (Δ 表示三角形的面积), 那么问题就迎刃而解了 (熟知

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ 其中 } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

例 6 设 A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角, 且

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin A & \cos A \\ 1 & \sin B & \cos B \\ 1 & \sin C & \cos C \end{vmatrix} = 0, \quad ①$$

求证 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

本题利用行列式的性质及三角函数的变换也可得出结论, 但更简单的还是利用几何意义.

①表明三点 $(\sin A, \cos A), (\sin B, \cos B), (\sin C, \cos C)$ 共

线.

另一方面, $\sin^2 A + \cos^2 A = \sin^2 B + \cos^2 B = \sin^2 C + \cos^2 C = 1$, 表明这三个点都在单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上.

但一条直线与一个圆至多有两个不同的公共点, 所以上述三点中必有两点相同, 比如前两个点相同. 从而 $A = B$, $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

观点, 对解析几何的问题往往是重要的. 如果能从较高的观点来看问题, 可以省去很多的计算.

例 7 设 $c < a < b$, 过定点 $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ 分别引直线 l 、 m , 交抛物线 $y^2 = x$ 于四点. 若这四点共圆, 求 l, m 的交点 P 的轨迹.

本题的解法很多. 比较简单的方法是用二次曲线束.

解法一 设 l, m 的方程分别为

$$y - kx + ka = 0, \quad (1)$$

$$y - k'x + k'b = 0, \quad (2)$$

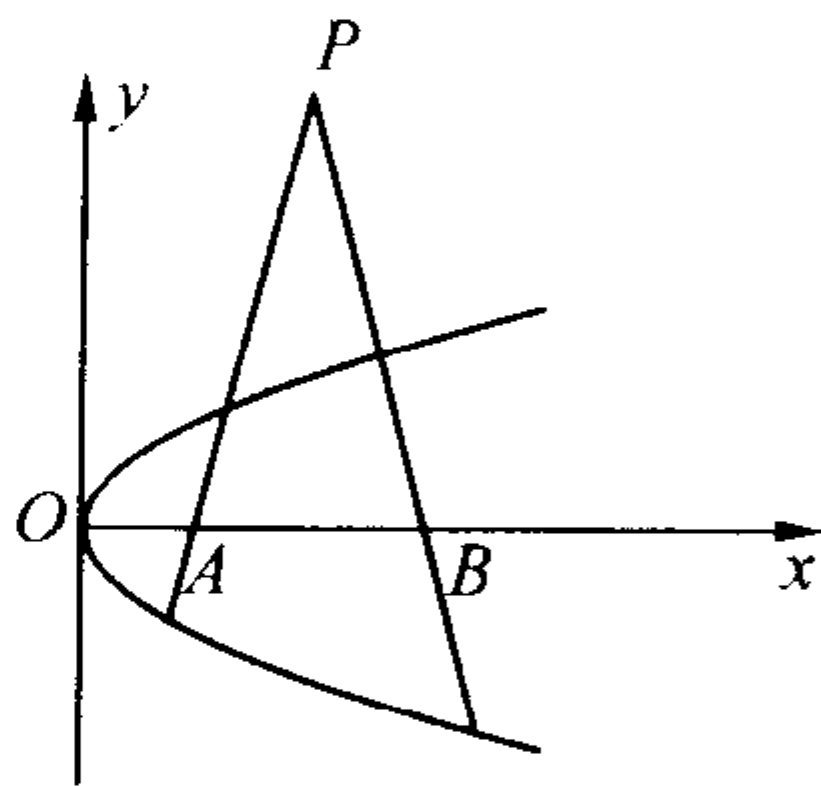


图 6-8

则过 l, m 与抛物线 $y^2 = x$ 的四个交点的二次曲线为

$$y^2 - x + \lambda(y - kx + ka)(y - k'x + k'b) = 0. \quad (3)$$

这曲线表示圆时, xy 项系数为 0, 即

$$k + k' = 0. \quad (4)$$

由①, ②, ④消去参数 k, k' , 得

$$\frac{y}{x - a} = (k = -k') \frac{y}{b - x}. \quad (5)$$

即

$$x = \frac{a + b}{2}. \quad (6)$$

因此所求轨迹是线段 AB 的垂直平分线.

反之, 对直线⑥上任一点, 由⑤定出 k, k' , 直线①, ②与抛物

线 $y^2 = x$ 的交点在③上. 只要取 $\lambda = -\frac{1}{1+k^2}$, 这时③的 x^2, y^2 项系数相等, xy 项数为 0, 因而表示圆, 所以⑥上每一点符合要求. 只有点 $(\frac{a+b}{2}, 0)$ 例外, 相应的 k, k' 均为 0, ③表示直线 $x=0$ (半径为无穷大的圆), 这点可作为轨迹的极限点.

解法二 设过四个交点的圆为

$$x^2 + y^2 + cx + dy + f = 0. \quad (7)$$

对于某个 λ ,

$$x^2 + y^2 + cx + dy + f + \lambda(y^2 - x) = 0, \quad (8)$$

表示两条直线 l, m .

由于⑧即

$$x^2 + (1+\lambda)y^2 + (c-\lambda)x + dy + f = 0, \quad (9)$$

其中无 xy 项, 它表示的直线应为

$$(x + \sqrt{(1+\lambda)}y + g)(x - \sqrt{-(1+\lambda)}y + h) = 0, \quad (10)$$

所以 l, m 的斜率互为相反数, 即

$$\angle PAB = \angle PBA,$$

P 点的轨迹为线段 AB 的垂直平分线.

两种解法相比, 后一种解法更为轻灵, 计算极少, 而且突出了本质: xy 项系数为 0.

8. 拟定与实现计划

教师如果已经知道解答, 可以帮助学生去拟定方案. 如果不知道解答, 当然也可以根据自己的经验, 提出一些建议, 帮助学生拟定计划. 并且, 对学生的计划也可以作出适当的评价, 如好或不好,

可行或不可行,有无其他的或更好的方案.

没有计划,当然是很糟糕的,但抱定一个计划一成不变也未必妥当.根据实际情况,在实施计划的过程中,可以作适当的修改或变更.当然,如果发现原来的计划不可行,“此路不通”,也应当抛弃原来的计划,不必坚持这条道路.

应尽量多设想几个计划,加以比较.

例 1 在直角三角形 ABC 中, CM 是斜边 AB 上的中线,若 AC, CM, BC 成等比数列,求 $\angle CMB$.

本题条件甚多,从已知条件出发可设 AC, CM, BC 分别为 aq^2, aq, a . 这时 $AM = MB = MC = aq$.

利用勾股定理可以定出 q (a 无需定出也不可能定出. 因为可将 a 任意放大或缩小,得出相似的 $\triangle ABC$ 仍然符合条件,所以为简单起见,就设 $a = 1$ 也无不可), 这样再在 $\triangle CMB$ 中用余弦定理即可求出 $\angle CMB$.

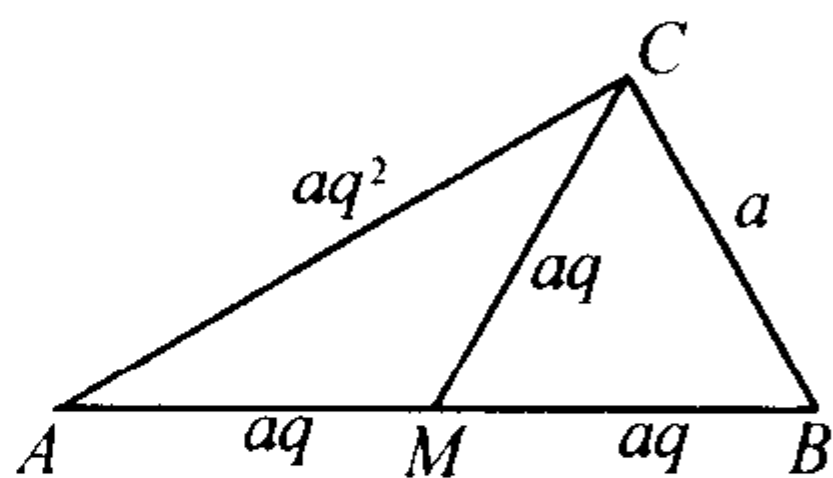


图 6-9

上述计划完全可以实现. 不过,还可考虑有无其他方案,如有几个方案,应从中选取一个最佳方案,做起来事半功倍.

为此,注意 $\angle CMB = 2\angle A$,而在直角三角形 ABC 中, $\sin A$ 、 $\cos A$ 均可直接由定义给出,再利用 $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$ 便可定出 $\angle CMB$.

后一个方案更好一些. 事实上,

$$\sin \angle CMB = 2\sin A \cos A = 2 \cdot \frac{a}{2aq} \cdot \frac{aq^2}{2aq} = \frac{1}{2},$$

从而

$$\angle CMB = \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \frac{5\pi}{6}.$$

这一方案不需要先去求 q 的值.

不过,如果不允许用二倍角公式(初中教材无此内容),那么只得走前一条路,即由

$$(aq^2)^2 + a^2 = (2aq)^2,$$

得

$$q^4 + 1 = 4q^2,$$

从而

$$(q^2 - 2)^2 = 3,$$

$$q^2 = 2 \pm \sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned}\cos \angle CMB &= \frac{(aq)^2 + (aq)^2 - a^2}{2aq \cdot aq} \\&= \frac{2q^2 - 1}{2q^2} = 1 - \frac{1}{2(2 \pm \sqrt{3})} \\&= 1 - \frac{2 \mp \sqrt{3}}{2} \\&= \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

从而

$$\angle CMB = \frac{\pi}{6} \text{ 或 } \frac{5\pi}{6}.$$

在上述过程中,只需求出 q^2 ,无需求出 q .此外,如将 a 作为 1,显然更简单一些.

当然还会有其他方案,如有人利用面积去做,但不及上面解法简单、自然.

例 2 证明:对所有正实数 a, b, c ,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1. \quad \textcircled{1}$$

(本题是 2001 年第 42 届 IMO 的第 2 题)

首先注意在 $a = b = c = 1$ 时,等号成立.这一特例应放在心中.

其次,每个分式的“阶”都是“零次”,即分子是1次,分母的被开方式是2次,开平方后即算成1次,所以分式是0次.这种分式可令

$$A = \frac{bc}{a^2}, B = \frac{ca}{b^2}, C = \frac{ab}{c^2}. \quad (2)$$

将①化为

$$\frac{1}{\sqrt{1+8A}} + \frac{1}{\sqrt{1+8B}} + \frac{1}{\sqrt{1+8C}} \geq 1, \quad (3)$$

其中 A, B, C 为正数,并且

$$ABC = 1. \quad (4)$$

③是在条件④成立时的不等式(当然①也是有条件的: a, b, c 为正数.但这样的条件通常不当作额外的条件).在 $A = B = C = 1$ 时等号成立.

③比①简单些,但并非实质性的变更.困难依然:③与①均有分母,如何“去分母”?

如果用柯西不等式,可以去分母:

$$(\sqrt{1+8A} + \sqrt{1+8B} + \sqrt{1+8C}) \left(\frac{1}{\sqrt{1+8A}} + \frac{1}{\sqrt{1+8B}} + \frac{1}{\sqrt{1+8C}} \right) \geq 9. \quad (5)$$

但要由⑤导出③还必须有

$$(\sqrt{1+8A} + \sqrt{1+8B} + \sqrt{1+8C}) \leq 9. \quad (6)$$

而⑥是不成立的,因为 A 可以任意地大.所以用柯西不等式去分母是一条死路,得另觅办法(知道一条路是死的也是一种收获,你不必再在这方面去费脑筋).

其实最简单的办法就是直接去分母,③两边同乘 $\sqrt{(1+8A)(1+8B)(1+8C)}$,化原式为等价的

$$\sum \sqrt{(1+8B)(1+8C)} \geq \sqrt{(1+8A)(1+8B)(1+8C)}, \quad (7)$$

再平方去掉一些根号,得到等价的

$$\begin{aligned} & \sum (1+8B)(1+8C) + 2\sqrt{(1+8A)(1+8B)(1+8C)} \cdot \\ & \sum \sqrt{1+8A} \geq (1+8A)(1+8B)(1+8C). \end{aligned} \quad (8)$$

化简为

$$\sqrt{(1+8A)(1+8B)(1+8C)} \sum \sqrt{1+8A} + 4 \sum A \geq 255. \quad (9)$$

注意 $ABC=1$, 所以

$$\sum A \geq 3 \sqrt[3]{ABC} = 3,$$

$$\sum AB \geq 3 \sqrt[3]{A^2 B^2 C^2} = 3.$$

$$\begin{aligned} (1+8A)(1+8B)(1+8C) &= 1+8\sum A+64\sum AB+512 \geq \\ &1+24+64 \times 3+512=9^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(1+8A)(1+8B)(1+8C)} \sum \sqrt{1+8A} \\ & \geq 3((1+8A)(1+8B)(1+8C))^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} \geq 3 \times 9^2 = 243. \end{aligned}$$

从而⑨成立. ①亦成立.

上面的计划就是用最普通的方法将不等式化为尽可能简单的⑨, 然后利用 $ABC=1$ 及平均不等式导出结果.

这是一个训练学生基本运算的好题. 计划简单(但简单的东西却也未必想到), 在教师的帮助下, 实现也不困难.

技巧

在解题中, 教师应传授学生一些基本技巧, 尤其是那些简单实用的技巧. 当然教师自己首先要掌握这些技巧, 这需要平时留心积

累,不断总结,不断实践.

例1 对所有的实数 x 及 $1 \leq t \leq \sqrt{2}$ 均有 $(x + t^2 + 2)^2 + (x + at)^2 > \frac{1}{8}$, 求实数 a 的取值范围.

一位同学先将原式化为 $Ax^2 + Bx + C > 0$ 的形式, 然后得出必有 $\Delta = B^2 - 4AC < 0$. 这条思路毫无疑问是正确的. 但他的演算却很麻烦:

首先展开得

$$x^2 + t^4 + 4 + 4x + 2xt^2 + 4t^2 + x^2 + 2atx + a^2t^2 - \frac{1}{8} > 0,$$

即

$$2x^2 + (4 + 2t^2 + 2at)x + t^4 + 4t^2 + a^2t^2 + \frac{31}{8} > 0.$$

$\Delta < 0$ 即

$$(2 + t^2 + at)^2 < 2(t^4 + 4t^2 + a^2t^2 + \frac{31}{8}).$$

展开得

$$4 + t^4 + a^2t^2 + 4t^2 + 4at + 2at^3 < 2t^4 + 8t^2 + 2a^2t^2 + \frac{31}{4},$$

化简得

$$t^4 + 4t^2 + a^2t^2 - 2at^3 - 4at + \frac{15}{4} > 0. \quad \textcircled{1}$$

下一步怎么做? 有点困难.

这么麻烦实属自找. 毛病在哪里呢?

首先, 既作为 x 的多项式, $t^2 + 2$ 应当作为一个常数, 不作为两项. 这样作为 x 的多项式展开时清楚、方便. 其次, 应采用心算, 逐一写出二次项、一次项、常数项. 因此由原式得

$$2x^2 + 2(t^2 + 2 + at)x + (t^2 + 2)^2 + a^2t^2 - \frac{1}{8} > 0.$$

$\Delta < 0$ 即

$$(t^2 + 2 + at)^2 < 2((t^2 + 2)^2 + a^2 t^2 - \frac{1}{8}).$$

仍将 $t^2 + 2$ 作为一项, 上式左边展开后是形如 $c^2 + 2cd + d^2$ 的三项, 与右边的 $2(c^2 + d^2)$ 合并后恰好成为 $(c - d)^2$, 这也应当用心算完成. 从而得

$$(t^2 + 2 - at)^2 > \frac{1}{4}. \quad \textcircled{2}$$

②显然比①简单清楚!

本题答案是 $a > \frac{7}{2}$ 或 $a < \sqrt{6}$.

例2 将 $a^4 + 4^4 + (a - 4)^4$ 分解因式.

如果直接 $(a - 4)^4$ 展开, 项数较多, 不易看出规律. 我们设 $a - 2 = b$, 那么原式为 $(b + 2)^4 + (b - 2)^4 + 4^4$, 这就整齐多了. 展开可得

$$\begin{aligned} (b + 2)^4 + (b - 2)^4 + 4^4 &= 2(b^4 + 24b^2 + 2^4) + 4^4 = \\ 2(b^4 + 24b^2 + 9 \times 2^4) &= 2(b^2 + 12)^2, \end{aligned}$$

即

$$a^4 + 4^4 + (a - 4)^4 = 2((a - 2)^2 + 12)^2 = 2(a^2 - 4a + 16)^2.$$

这样的技巧在下例中也会用到.

波利亚说:“一个想法使用一个技巧, 经过多次使用就可成为一种方法.”看来, 上面所说的简单技巧也可算作一种方法.

这些简单的技巧或方法用得娴熟, 大有用处. 十八般武艺样样精通, 固然很好. 但是, 样样都只知皮毛, 那还不如程咬金(正史上称为程知节), 他虽然只会三板斧, 却能攻关斩将. 真正把几种基本的技巧或方法掌握好了, 也就能解决很多问题.

例3 求证方程

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x - a)^2} = \frac{1}{b^2} \quad \textcircled{1}$$

(其中 a, b 为非零实数) 的根的虚部 v 一定满足

$$|v| \leq \min\left(\frac{|a|}{2}, \frac{|b|}{2}\right). \quad (2)$$

采用上例中所说的方法(或技巧)不难证明这一结论.

设 $x = y + \frac{a}{2}$, ①变为比较对称(整齐)的形式:

$$\frac{1}{(y + \frac{a}{2})^2} + \frac{1}{(y - \frac{a}{2})^2} = \frac{1}{b^2}. \quad (3)$$

由于 a 为实数, y 的虚部仍然是 v . 为避免分数运算, 记 $\frac{a}{2} = c$. 化简③得

$$y^4 - 2(b^2 + c^2)y^2 + c^4 - 2b^2c^2 = 0. \quad (4)$$

从而

$$y^2 = b^2 + c^2 \pm \sqrt{b^4 + 4b^2c^2}. \quad (5)$$

如果 $b^2 + c^2 \geq \sqrt{b^4 + 4b^2c^2}$, 这时⑤的根都是实数, 即虚部 $v = 0$, ②式显然成立.

如果, $b^2 + c^2 < \sqrt{b^4 + 4b^2c^2}$ 即 $(c^2 < 2b^2)$, 这时⑤有两个实根及两个纯虚数根, 实根的虚部为 0, 当然满足②. 对于纯虚数根 $\pm vi$, 由⑤

$$v^2 = \sqrt{b^4 + 4b^2c^2} - b^2 - c^2.$$

因为

$$\sqrt{b^4 + 4b^2c^2} - b^2 - c^2 \leq \sqrt{(b^2 + 2c^2)^2 - b^2 - c^2} = c^2 = \frac{a^2}{4},$$

并且

$$\begin{aligned} \sqrt{b^4 + 4b^2c^2} - b^2 - c^2 &= \sqrt{\left(\frac{5}{4}b^2 + c^2\right)^2 - \left(\frac{3}{4}b^2 - c^2\right)^2} - b^2 - c^2 \leq \\ &\frac{5}{4}b^2 + c^2 - b^2 - c^2 = \frac{b^2}{4}. \end{aligned}$$

所以②成立.

如果说在平面几何中,常见的图形是三角形,那么在代数中,最常见的函数就是二次三项式 $ax^2 + bx + c (a \neq 0)$,而一元二次方程的根也就是相应的二次三项式的零点.因此,中学里二次三项式的问题很多,值得细加研究.

例 4 已知 $a \neq 0, k \neq 0$,

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ①$$

有两个实根,求证

$$ax^2 + bx + c + k(2ax + b) = 0 \quad ②$$

也有两个实根,其中有一个并且也只有一个在①的两个根之间.

为了证明这个结论,我们先把问题简化,设 $u = x + \frac{b}{2a}$,则①成为

$$u^2 - d = 0. \quad ③$$

其中 $d > 0$ (可以具体算出 $d = \frac{4ac - b^2}{4a}$,但我们并不需要用这个表达式),②成为

$$u^2 + 2aku - d = 0. \quad ④$$

它的判别式

$$\Delta = 4a^2k^2 + 4d > 0.$$

所以④有两个实数根 u_1, u_2 , 并且

$$u_1 u_2 = -d < 0.$$

因此

$$u_1^2 - d = -2aku_1$$

与

$$u_2^2 - d = -2aku_2$$

异号. 这就表明 u_1, u_2 中恰有一个在③的两根之间.

由于 $u = x + \frac{b}{2a}$ (也就是说 u 轴就是由 x 轴平移,使得 $-\frac{b}{2a}$ 成为原点而得到的),所以方程②有两个实根,并且恰有一个实根

在①的两根之间.

10. 不必“为技巧而技巧”

技巧重要,但技巧是为解题服务的,不必“为技巧而技巧”.在解题中根本用不上的技巧就当收起来,朴实无华往往是最高的技巧.例如本章第8节例2,那道IMO的不等式证明,我们只用了最普通的变形就达到了目标.

例1 解分式方程 $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = 0$.

解 方程两边同乘 $x(x-2)(x+2)$ 得

$$2x - (x+2) + (x-2)(x-4) = 0.$$

即

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

$$x_1 = 2, x_2 = 3.$$

经检验只有 $x = 3$ 是原方程的根.

又解 因为 $\frac{2}{x^2-4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right)$,

$$\frac{1}{x(x-2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right),$$

$$\frac{x-4}{x(x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{4}{x(x+2)} = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x},$$

所以,原方程化为

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right) + \left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} \right) = 0,$$

即

$$\frac{1}{2} \left(\frac{5}{x+2} - \frac{3}{x} \right) = 0.$$

解得 $x = 3$.

后一种解法用到将分式表示为部分分式的技巧,似乎很高明,效果却是“西望长安——不见家(佳)”,没有什么好处.这种纯属炫耀技巧的解法不值得介绍.仍应以通常的解法(即前一种解法)为正解.

例2 已知 $x + y + z = xyz$, 求证:

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} = \frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}. \quad ①$$

这道题,不少书上的解法都是利用三角函数.或许它本是从三角中产生的,但我实在看不出①为什么非用三角函数来证,也想不出怎样用三角函数来证.这个代数恒等式应当有代数的证法.代数的证法更直接,更自然.不必“为技巧而技巧”,搞花哨而不实用的解法.

代数的解法首先是“去分母”,将①改成等价的等式

$$\sum x(1-y^2)(1-z^2) = 4xyz. \quad ②$$

这是我们采用记号 $\sum$ 表示轮换式的和,即

$$\sum x = x + y + z,$$

$$\sum xy = xy + yz + zx,$$

$$\sum x^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\sum x(1-y^2)(1-z^2) = x(1-y^2)(1-z^2) + y(1-z^2)(1-x^2) + z(1-x^2)(1-y^2),$$

等等.

设 $x + y + z = a$; $\sum xy = b$, $xyz = c$, 易知 u 的三次多项式

$$(u-x)(u-y)(u-z) = u^3 - au^2 + bu - c.$$

所以三次方程

$$u^3 - au^2 + bu - c = 0 \quad ③$$

有三个根 x, y, z . 将它们分别代入③, 然后相加得

$$\sum x^3 - a \sum x^2 + ba - 3c = 0. \quad ④$$

④是对所有 x, y, z 都成立的等式. 在本题中 $c = a$, 所以④变成

$$\sum x^3 - a \sum x^2 + ba - 3a = 0. \quad ⑤$$

现在回到②. ②式左边

$$\begin{aligned} &= \sum (x + xy^2z^2 - xy^2 - xz^2) \\ &= \sum x + \sum ayz + \sum x^3 - \sum x(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= a + ab + \sum x^3 - (x^2 + y^2 + z^2) \sum x \\ &= a + ab + \sum x^3 - a \sum x^2. \end{aligned}$$

由⑤及上式,

$$\text{②式左边} = 4a = 4xyz = \text{②式右边}.$$

因此①式成立.

注意①式仅有的限制是 x, y, z 均不为 ± 1 , 它们可以是任意的(不等于 ± 1)复数. 而用三角函数, 在中学阶段, 必须限制 x, y, z 为实数.

如果将条件 $x + y + z = xyz$ 改为

$$\sum xy = 1, \quad ⑥$$

①式仍然成立. 在 $xyz \neq 0$ 时, 可以利用上面的结果: 设 $x' = \frac{1}{x}, y' = \frac{1}{y}, z' = \frac{1}{z}$, 则条件⑥成为

$$x' + y' + z' = x'y'z',$$

所以

$$\frac{x'}{1-x'^2} + \frac{y'}{1-y'^2} + \frac{z'}{1-z'^2} = \frac{4x'y'z'}{(1-x'^2)(1-y'^2)(1-z'^2)}.$$

将 $x' = \frac{1}{x}, y' = \frac{1}{y}, z' = \frac{1}{z}$ 代入上式便得到①.

在 $xyz = 0$ 时,不妨设 $x = 0$,⑥成为

$$yz = 1. \quad ⑦$$

而①成为

$$\frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} = 0. \quad ⑧$$

由于⑦,

$$\frac{y}{1-y^2} = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z^2}} = \frac{z}{z^2-1} = -\frac{z}{1-z^2},$$

所以⑧成立,即这时①也成立.

当然,也可以利用④(其中 $b = 1$)及前面的方法来证明,请读者自己完成.

II. 简单自然

教师应有很高的鉴赏能力,解法应力求简单自然.看到书本上或学生的解法中有多余的“废招”,应当指出这些“废招”是要不得的,必须删去.当然自己的解法也应总结,去掉那些不尽如人意的地方.

应当提倡学生对解法进行评议.著名数学家厄尔迪什(P. Erdős, 1913—1996)曾说过:

“上帝有一本书,好的解法全在那本书上.”

希望我们的解法都在“那本书上”.

其实上帝是没有的,那本书就是由我们以及其他人的优雅解

法组成的一本大书.我们正在写这本书.

例1 已知 $(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$,求证 x, y, z 成等差数列(1979年高考题).

这道题不难,奇怪的是,很多人的解法中多了不少废招.一位说:先构造方程

$$(x-y)t^2+(z-x)t+(y-z)=0, \quad ①$$

另一位则说构造方程

$$t^2+(z-x)t+(x-y)(y-z)=0 \quad ②$$

更好:因为已知条件即方程判别式为0,所以方程有等根,而②的两根为 $x-y$ 与 $y-z$.从而可以得出 $x-y=y-z$ 即 x, y, z 成等差数列.

还有人将已知条件化成 y 的二次方程

$$4y^2-4(x+z)y+(x+z)^2=0.$$

再解出 $y=\frac{x+z}{2}$.从而 x, y, z 成等差数列.

其实这种用方程与判别式的解法正如小说《连城诀》303页所说“好像巧妙,其实笨得不得了”.

正确的解法如下:

如果将 $x-y, y-z$ 分别记作 a, b ,那么题目条件就是 $(a+b)^2=4ab$.即

$$(a-b)^2=0,$$

从而 $a=b$,也就是 x, y, z 成等差数列.

这样,仅用到初一的知识就解决了问题.

问题要证明 $a=b$,而关键则是看出 $x-z=a+b$.

类似的问题很多,如

设 a, b, c 都是实数,求证

$$(b-c)^2 \geq (a-2b)(2c-a).$$

这题又有人想去造方程(养成不良习惯以后,改正很难),其实

应令 $x = a - 2b, y = 2c - a$, 原式等价于一个极普通的不等式

$$\frac{1}{4}(x+y)^2 \geq xy.$$

(不难化成 $(x-y)^2 \geq 0$).

有很多谈解题技巧的书, 作者本人是否真正懂得解题的技巧, 令人怀疑.

不禁想到金庸的那本小说《连城诀》, 经过几番挫折, 书中主角狄云终于领悟到:

“自己随手刺出去的剑招, 其实比师父所教希奇古怪, 花巧百端的剑法实用得多.”

所以那些谈解题的书, 最好少看, 还是自己的解法最妙. 人, 应当有这样的信心.

例2 已知 $a \neq b$ 是方程 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 的两个根, 不解方程, 求 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}$ 的值.

这道题不难, 大多数学生都会利用韦达定理知道

$$\begin{cases} a+b=4, & \text{①} \\ ab=1. & \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{然后, } \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} &= \frac{a+b+2}{(a+1)(b+1)} \\ &= \frac{a+b+2}{ab+a+b+1} = \frac{4+2}{1+4+1} = 1. \end{aligned} \quad \text{③}$$

有人认为更好的解法是只用 $ab=1$ 即有

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = \frac{ab}{a+ab} + \frac{1}{b+1} = \frac{b}{b+1} + \frac{1}{b+1} = 1. \quad \text{④}$$

这样的解法当然很巧, 但较特殊, 缺乏普遍性, 不提也罢. 过分强调技巧, 会造成一般学生丧失信心, 甚或连基本方法也掌握不了. 教学还是应当面对大多数学生, 讲基本的、大路的解法, 不要多走“小路”. 想抄捷径反而迷了路, 不如老老实实走一条保险的大道.

其实④也未必更好, 尤其是第一步将 1 变为 ab , 巧诚巧矣, 但

不自然.还不如在③中,由

$$\frac{a+b+2}{ab+a+b+1} = \frac{a+b+2}{1+a+b+1} = 1$$

得到结果,同样没有利用 $a+b$ 的值,但却自然得多.

对学生,不要教得过细,教得过细则容易使学生缺乏主动性,拿到题目不知如何措手.教解题方法,更是宜粗不应细,讲清基本思想即可.过细的技巧,应由学生自己去挖掘,去领悟.

例3 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列,如果

$$a_1 + a_2 + a_3 = 18, \quad \text{①}$$

$$a_2 + a_3 + a_4 = -9, \quad \text{②}$$

且 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 的值等于().

A. 8 B. 16 C. 32 D. 48

(1989年理科高考题)

问题即求无穷递缩等比数列的和 S , 因为

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

所以应由①,②定出 a_1 与 q .

由② $\div$ ①即得 $q = -\frac{1}{2}$, 代入①得

$$a_1 = \frac{18}{1+q+q^2} = 24.$$

所以 $S = \frac{24}{1+\frac{1}{2}} = 16$, 即应选(B).

上面的解法很好,因为定出 a_1, q , 即可得出结果.而①,②实质上也只含两个未知数 a_1, q ($a_k = a_1 q^{k-1}$, 所以 a_2, a_3, a_4 都可用 a_1, q 来表示), 所以可由它们解出 a_1, q . 这种解法极其自然,而且适用范围甚广.

有人认为可由 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 导出

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{S_n}{1-q^n}, \quad (3)$$

特别地

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{S_3}{1-q^3}. \quad (4)$$

而 $S_3 = 18$ 为已知, 所以求出 $q = -\frac{1}{2}$ 后, 不必求 a_1 , 即可由④得出 $S = \frac{18}{1 - (-\frac{1}{2})^3} = 16$.

这种做法虽然省去了求 a_1 , 但需要推出④式, 其难度比求 a_1 为高. 不如迳求 a_1 , 既普通又更具普遍性. 所以用④固然似很技巧, 但却较为生僻. 对一般学生而言, 与其记住这一“技巧”, 不如不记, 减轻他们的负担.

况且, 求 a_1 并非像某位作者所说“是较繁重的一步”. 如果先不计算, 那么由

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{18}{(1-q)(1+q+q^2)} = \frac{18}{1-q^3}$$

得出与用④同样的结果, 丝毫没有增加计算量.

常用的方法, 正如我们每天吃饭或面, 虽然平淡, 却不可或缺. 故意捣弄些新奇的花样, “有哗众取宠之意, 无实事求是之心”, 不宜提倡. 学风, 仍以纯朴为正. 解题方法, 我们已多次说过, 以简单自然为上.

例 4 在复平面上, 一个正方形的四个顶点按照逆时针方向依次为 Z_1, Z_2, Z_3, O , 其中 O 是原点, Z_2 对应的复数为 $Z_2 = 1 + \sqrt{3}i$, 求 Z_1, Z_3 对应的复数 (1995 年理科高考题).

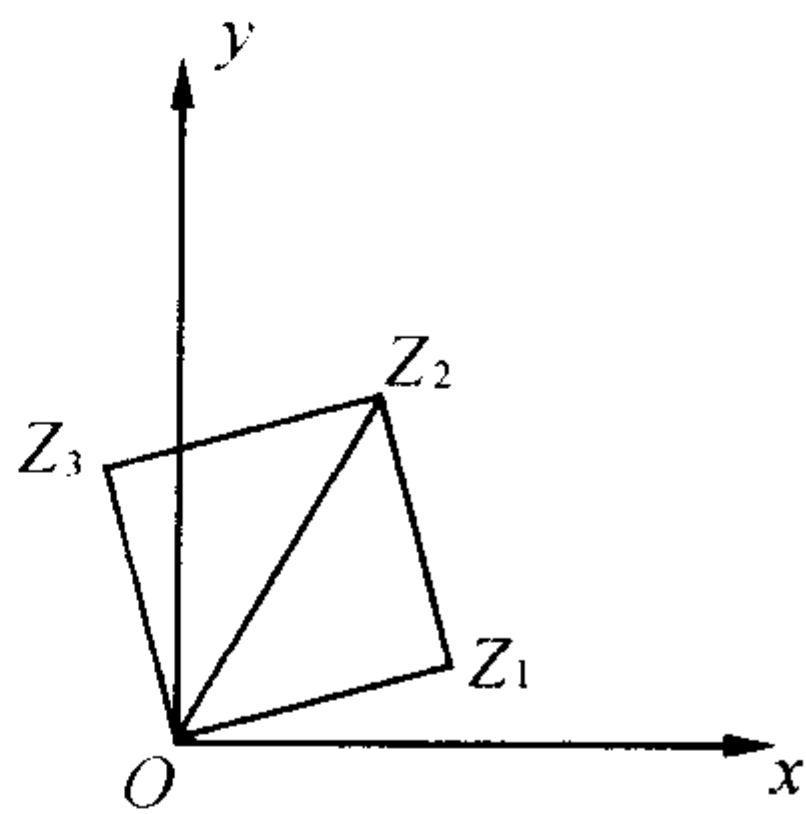


图 6-10

解 由复数乘法的几何意义, Z_1 点

对应的复数为

$$\begin{aligned}Z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{3}i)(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})) \\&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{3}i)(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) \\&= \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i.\end{aligned}$$

Z_3 点对应的复数为

$$\begin{aligned}Z_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{3}i)(\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4}) \\&= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{3}i)(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) \\&= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i.\end{aligned}$$

这种解法正正规规,可谓“大路解法”.

有人认为这种解法不够技巧,苦心孤诣想出第二种解法:
由复数的几何意义,有

$$\begin{cases} z_1 + z_3 = z_2 + 0 = 1 + \sqrt{3}i, \\ z_3 - z_1 = i(z_2 - 0) = -\sqrt{3} + i. \end{cases}$$

解这方程得

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i, \\z_2 &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i.\end{aligned}$$

两种解法相比,前一种简单、自然,大多数学生都能想到.后一种较难想到,而且未必比前一种更好.勉强要学生掌握第二种解法毫无必要,弄得不好,就像邯郸学步那样,学生反而连原来会的解法也搞忘了.

有人争辩道,第二种解法体现了方程观点(上升为代数观点):

“为了求两个未知数,我们来建立两个方程;为了建立方程,我们用到复数运算的几何意义.这种解题思考带有普遍意义.”

然而不然,如果每个未知数都可以用算术的方法直接求出(像第一个解法那样),那又何必去建立方程?算术的解法是最基本的解法.算术观点与方程观点(或代数观点)相比,并无高下之分,只看哪一种处理问题更简单方便(这当然由具体问题确定,不同问题用不同方法处理).不需建立方程时,硬要建立方程,其实是愚蠢的做法.

而且,本题的两个方程并不容易想到,至少对大多数学生是这样.常常见到一些解题者孤芳自赏,以为自己的解答好得不得了.其实他自己想了很久方才得出,别人与他思路不尽相同,很难认为他的解法简单、自然.上面的后一种解法即是如此.如果说带有普遍意义,恐怕倒是第一种,凡是与旋转有关的问题均可采用(第二种在列第二个方程时,也用了乘 i 即逆时针旋转 90° ,这正说明第一种解法是普遍适用的).

例 5 设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列, S_n 是其前 n 项和,证明

$$\frac{\lg S_n + \lg S_{n+2}}{2} < \lg S_{n+1}.$$

(1995 年理科高考题)

这道题绝大多数学生都会将对数去掉,化为证明不等式

$$S_n S_{n+2} < S_{n+1}^2. \quad ①$$

有人认为应进一步化为

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} > \frac{S_{n+2}}{S_{n+1}}, \quad ②$$

然后由

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{a_1 + qS_n}{S_n} = \frac{a_1}{S_n} + q,$$

看出数列 $b_n = \frac{S_{n+1}}{S_n}$ 是递减的(因为 $a_n > 0$, 所以 S_n 递增, $\frac{a_1}{S_n} + q$ 递减), 即②成立.

这样解当然不坏. 但认为选择①来证明而不化为②的学生“缺乏数学审美经验”, 那就过于武断了.

因为由

$$S_n S_{n+2} = S_{n+1} S_{n+2} - a_{n+1} S_{n+2} < S_{n+1} S_{n+2} - a_{n+1} q S_{n+1} = S_{n+1}^2$$
得出①成立.

这种做法比证②还要简单, 而且也很优美.

有时不同的解法很难分出优劣, 见仁见智均可, 不要随意批评别人不懂审美.

例 6 已知 $0 < a, b, c, d < 1$, 求证

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) > 1-a-b-c-d.$$

如果将左边展开再证, 显然比较麻烦. 采用数学归纳法不仅简单, 而且结果远为一般. 即设 $0 < x_i < 1, i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2$, 则

$$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n) > 1-x_1-x_2-\cdots-x_n. \quad ①$$

在 $n=1$ 时, ①成为等式, 而如果有

$$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n) \geq 1-x_1-x_2-\cdots-x_n. \quad ②$$

则在 $0 < x_{n+1} < 1$ 时,

$$\begin{aligned} & (1-x_1)\cdots(1-x_n)(1-x_{n+1}) \\ & \geq (1-x_1-x_2-\cdots-x_n)(1-x_{n+1}) \\ & = 1-x_1-\cdots-x_n-x_{n+1}+x_1x_{n+1}+\cdots+x_nx_{n+1} \\ & > 1-x_1-\cdots-x_n-x_{n+1}, \end{aligned}$$

因此②时一切 $n \geq 2$ 成立.

本题当然可用 $n=2$ 来奠基, 上面的证法只是稍作变通而已.

如果用 $n=2$ 奠基, 那么

$$(1-x_1)(1-x_2) = 1-x_1-x_2+x_1x_2 > 1-x_1-x_2,$$

再用上面的归纳同样得出结论.

注意不论如何奠基, x_1, x_2 只需为正数, 并不需要它们小于 1, 其他的 x_i 则需要小于 1 [如果 x_1, x_2, x_3 均大于 1, 那么在 $x_1 = x_2 = x_3 = a$ 很大时就有

$$(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) = 1-3a+3a^2-a^3 < 1-3a,$$

即此时①不再成立].

有人认为上面所说“麻烦”并不“显然”. 理由是经展开移项得出的 7 个正项

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd + abcd$$

抵消 4 个负项

$$-abc - abd - acd - bcd$$

十分容易:

$$ab(1-c) + ad(1-b) + ac(1-d) + bc(1-d) + bd + cd + abcd > 0.$$

这位朋友的运算能力很强, 而且眼光敏锐, 但他的意见我们无法苟同. 因为与上面的归纳法相比, 这种解法显然比较麻烦, 而且只处理了 $n=4$ 的特殊情况; 归纳法则是一般结论. 两者的高下也是显然的.

聪明的人, 不仅自己会想方设法解决问题, 而且善于吸取他人的长处, 取长补短. 如果不服善, 总认为自己的解法最好, 那就不易进步. 笔者就曾遇到一个学生, 常有独到的解法, 但却不屑向别人学习, 久而久之就逐渐落伍了.

12. 关于一题多解

我们提倡从各种不同角度来观察一个问题, 产生多种解法. 但是, 任何事情都应适可而止, 不管什么题目, 一味地追求多种解法,

勉强凑数,矫揉造作,那就不好了.解法仍应以简单、自然为上,即使有多种解法,也应分清优劣,择善而从,这也是有无见识或见识高低的差别.在这方面教师也应给学生正确的指导.

例 1 设 a, b, x, y 都是正数,并且

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (1)$$

求证

$$\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2} + \sqrt{a^2y^2 + b^2x^2} \geq a + b. \quad (2)$$

不等式的证明,往往是利用不等式的性质,不断改变不等式的形状,得到一些等价的或较强的不等式,直到出现一个容易证明的不等式.

第一种解法就是这样,将②两边平方得到不等式

$$a^2x^2 + b^2y^2 + 2\sqrt{(a^2x^2 + b^2y^2)(a^2y^2 + b^2x^2)} + a^2y^2 + b^2x^2 \geq a^2 + 2ab + b^2. \quad (3)$$

注意到②式两边都是正的,所以由③开平方也可以得到②.因此②与③是等价的不等式,经过化简及变形又得到

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow \sqrt{(a^2x^2 + b^2y^2)(a^2y^2 + b^2x^2)} \geq ab, \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow (a^2x^2 + b^2y^2)(a^2y^2 + b^2x^2) \geq a^2b^2, \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow a^4x^2y^2 + a^2b^2(x^4 + y^4) + b^4x^2y^2 \geq a^2b^2, \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2b^2x^2y^2 + a^2b^2(x^4 + y^4) \geq a^2b^2, \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2y^2 + x^4 + y^4 \geq 1,$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 \geq 1.$$

最后一个不等式显然成立.所以②成立.

其中④两边都是正数,所以由⑤可以推出④.⑥中 $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$,所以由⑦可以推出⑥,⑦是比⑥稍强的不等式.

第二种解法也是利用不等式的基本性质,将②作一些变形;对有关代数式也进行一些恒等变形,化简.

题中 a, b 地位对称,不妨设 $a \geq b$.

虽然可在②两边平方,但由于②式左边比右边复杂,也可先移项,将②化为较为均衡(左、右各有一个根式)的等价的不等式

$$\sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2} - b \geq a - \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}. \quad (8)$$

由分子有理化,⑧即

$$\frac{a^2 y^2 + b^2 x^2 - b^2}{\sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2} + b} \geq \frac{a^2 - (a^2 x^2 + b^2 y^2)}{a + \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}}. \quad (9)$$

利用①,可知⑨的左边分子为 $(a^2 - b^2)y^2$,⑨的右边分子也为 $(a^2 - b^2)y^2$,于是⑨等价于

$$a + \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2} \geq \sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2} + b. \quad (10)$$

⑩其实很容易证明(千万不要自找麻烦去平方):

$$a = \sqrt{a^2 y^2 + a^2 x^2} \geq \sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2}, \quad (11)$$

$$\sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2} \geq \sqrt{b^2 x^2 + b^2 y^2} = b. \quad (12)$$

⑪,⑫相加即得⑩,从而②成立.

注意⑩式中四项的大小,便得到⑪,⑫.应当冷静地保持这种“大或小”的感觉,切忌不分青红皂白,一味蛮干.

第三种解法是利用几何图形.

在梯形 $ABCD$ 中,底 $AB = a$, $CD = b$. 对角线互相垂直,相交于 E .

$\angle ACD = \theta$, 并且 $\sin \theta = x$. 易知

$$\cos \theta = y, CE = b \cos \theta = by, DE = b \sin \theta = bx,$$

$$AE = a \cos \theta = ay, BE = a \sin \theta = ax,$$

$$AD = \sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2}, BC = \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2}.$$

设 AD 、 BC 中点分别为 F 、 G , 连结 EF , EG , FG , 易知

$$EF = \frac{AD}{2}, EG = \frac{BC}{2}, FG = \frac{AB + CD}{2}.$$

而

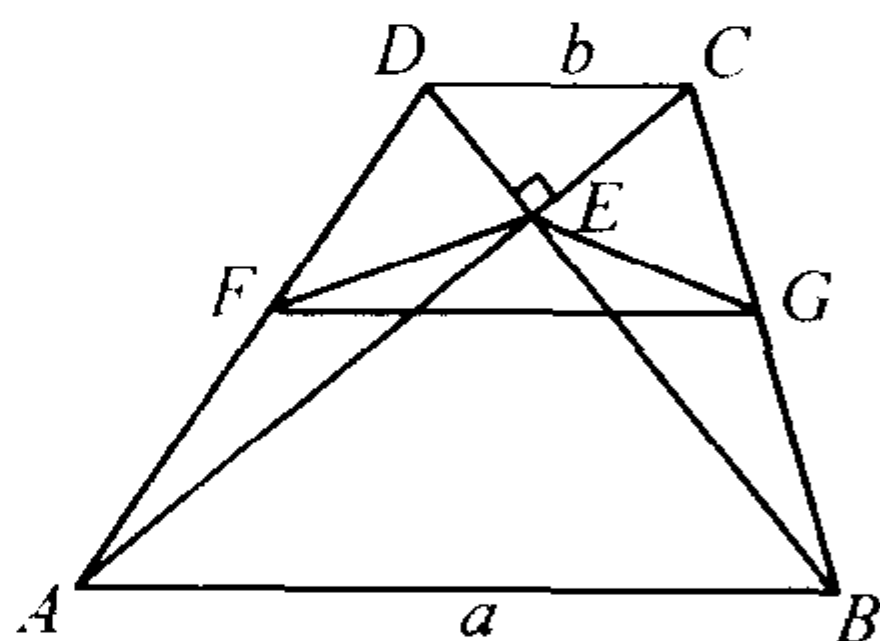


图 6-11

$$EF + EG \geq FG,$$

所以

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2} \geq \frac{a+b}{2}.$$

即②成立.

第四种解法是利用复数. 熟知复数的和的模不大于这些复数的模的和, 所以

$$\begin{aligned} & |ax + byi| + |ayi + bx| \\ & \geq |ax + byi + ayi + bx| \\ & = |(a+b)(x + yi)| \\ & = (a+b)\sqrt{x^2 + y^2} \\ & = a + b. \end{aligned}$$

这也就是②.

以上四种解法, 以复数的解法(第四种)最为简单.

例 2 已知 $|a| < 1, |b| < 1$, 求证

$$\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1.$$

在一本书上, 这道题有十几种解法, 真可怕! 例如(号码已重新编排)

解法 1 $|a| < 1$ 知, 存在 $\lambda_1 > 0$, 使

$$a = \frac{1 - \lambda_1}{1 + \lambda_1},$$

同理存在 $\lambda_2 > 0$, 使

$$b = \frac{1 - \lambda_2}{1 + \lambda_2},$$

从而

$$\frac{a+b}{1+ab} = \frac{\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_2} + \frac{1-\lambda_2}{1+\lambda_1}}{1 + \frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1} \cdot \frac{1-\lambda_2}{1+\lambda_2}} = \frac{1-\lambda_1\lambda_2}{1+\lambda_1\lambda_2}.$$

由 $\lambda_1\lambda_2 > 0$ 知 $|\frac{a+b}{1+ab}| < 1$.

解法 2 引进函数

$$F(x) = \frac{1-x}{1+x},$$

则有 $x > 0 \Leftrightarrow |F(x)| < 1$.

取 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 使

$$a = F(x_1), b = F(x_2).$$

(即令 $x_1 = \frac{1-a}{1+a}, x_2 = \frac{1-b}{1+b}$)

不难验证 $\frac{a+b}{1+ab} = F(x_1x_2)$, 但 $x_1x_2 > 0$, 所以

$$|F(x_1x_2)| < 1,$$

即

$$|\frac{a+b}{1+ab}| < 1.$$

解法 3 引进函数

$$f(x) = \lg \frac{1-x}{1+x},$$

其定义域为 $(-1, 1)$. 因为 $a, b \in (-1, 1)$, 且

$$f(a) + f(b) = f(\frac{a+b}{1+ab}).$$

上式左边有定义, 所以右边也有定义, 即

$$|\frac{a+b}{1+ab}| < 1.$$

解法 4 设 $c = \frac{a+b}{1+ab}$, 则

$$(1+ab)c - (a+b) = 0.$$

作一次函数 $g(x) = (1+ab)x - (a+b)$, 这是增函数.

$$\text{因为 } g(-1) = -(1+a)(1+b) < 0,$$

$$g(1) = (1-a)(1-b) > 0,$$

所以 $g(-1) < g(c) < g(1)$ ①, 由 $g(x)$ 为增函数得

$$-1 < c < 1.$$

解法 5 作一次函数

$$f(x) = \frac{x + (a+b)}{1+ab},$$

$$\text{取 } x_1 = -(1+ab) - (a+b) = -(1+a)(1+b) < 0,$$

$$x_2 = (1+ab) - (a+b) = (1-a)(1-b) > 0.$$

因为 $f(x_1) = -1, f(x_2) = 1$, 而 $f(x)$ 是增函数, 所以由 $x_1 < 0 < x_2$ 得

$$-1 = f(x_1) < f(0) < f(x_2) = 1.$$

解法 6 设 $x = \frac{a+b}{1+ab}$, 则

$$\frac{x-1}{x+1} = -\frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)} < 0.$$

解法 7 设 $x = \frac{(1+a)(1+b) - (1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b) + (1-a)(1-b)}$, 则经化简即

知 $x = \frac{a+b}{1+ab}$. 另一方面, 又有

$$x = \frac{1 + (-1) \cdot \frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}}{1 + \frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}}.$$

这表明正是 x 分 -1 与 1 为定比 $\lambda = \frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)} > 0$, 所以 $-1 < x < 1$.

解法 8 $(\frac{a+b}{1+ab} + 1)(\frac{a+b}{1+ab} - 1)$

$$= -\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{(1+ab)^2} < 0.$$

说实在话,前5种解法,我根本想不到,“像是(从魔术师的)帽子里跑出一只兔子”.虽然每种解法读者都可以验证其正确性,但却不知道为什么要这样做,因而也无法学会.不过,也不需要去学,因为这些解法似乎技巧很高,却像水浒传中八十万禁军教头王进所说“都是花棒,只好看,上阵无用”.

那么这道题如何解呢?关键在什么地方呢?

关键即在如何去掉绝对值符号(上面的解法均认为 a, b 是实数,我们也先作这样假定.复数情况留到后面讨论).这有两种办法:

解法9 因为 $|a| < 1, |b| < 1$,所以 $1+ab > 0, |1+ab| = 1+ab$,而分子 $|a+b|$ 则可能为 $a+b$,也可能为 $-(a+b)$.前一种情况,原不等式 $|\frac{a+b}{1+ab}| < 1$ 即等价于 $a+b < 1+ab$.显然

$$1+ab-(a+b)=(1-a)(1-b) > 0.$$

后一种情况,原不等式等价于 $-(a+b) < 1+ab$,而

$$1+ab-[-(a+b)]=(1+a)(1+b) > 0.$$

所以不论哪一种情况,原不等式均成立.

这种解法简单朴素,似拙实巧,而且易学好懂,比起上面那几种“呕心呕肝”,故弄玄虚的解法好得多.

其中所说后一种情况,如果将 $-a, -b$ 换成 a, b ,那么 $\frac{-a-b}{1+ab}$ 就换成 $\frac{a+b}{1+ab}$,即化为前一种情况,所以可以省去.

解法10 用平方来去掉绝对值也是常用的办法,即原不等式等价于

$$\frac{(a+b)^2}{(1+ab)^2} < 1.$$

因为

$$(1+ab)^2-(a+b)^2=1+a^2b^2-a^2-b^2=(1-a^2)(1-b^2)>0.$$

所以原不等式成立.

由于平方后得到一个由加减乘除运算产生的有理式,它比含绝对值的式子易于处理.这也就是统计学中更多地采用方差 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, 而不采用标准差 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$ 的缘故.

解法 10 也是简单明快的解法.上面的解法 8 与解法 10,实际上是同一种解法,只不过前者利用平方差公式,后者则是直接展开.

现在考虑问题的推广.

设 a, b 都是复数, $|a| < 1, |b| < 1$. 证明

$$\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1.$$

这里 $\bar{a}$ 是 a 的共轭数(本题原来就是复分析的一道习题,后来被移入中学,特别是 a, b 为实数的情况,曾作为第十五届莫斯科数学竞赛题).

这时解法 9 不再适用,解法 10 需改为与共轭数相乘,即原不等式等价于

$$\frac{a+b}{1+ab} \cdot \frac{\bar{a}+\bar{b}}{1+a\bar{b}} < 1.$$

与解法 10 类似,

$$\begin{aligned} & (1+\bar{a}b)(1+a\bar{b})-(a+b)(\bar{a}+\bar{b}) \\ &= 1+|a|^2|b|^2-|a|^2-|b|^2 \\ &= (1-|a|^2)(1-|b|^2) > 0. \end{aligned}$$

所以原不等式成立.

注意 $|a|^2$ 与 $|a|$ 有很大的不同,前者可以“打开”,写成 $a\bar{a}$,而后者则无法用 $a, \bar{a}$ 的有理式表示.

本题的不等式也可写成(即将记号 a 与 $\bar{a}$ 互换)

$$\left| \frac{\overline{a} + b}{1 + ab} \right| < 1.$$

但不能像实数情况仍写成

$$\left| \frac{a + b}{1 + ab} \right| < 1.$$

因为取 $a = b = ri, 0 < r < 1$, 则在 $r \rightarrow 1$ 时

$$\left| \frac{a + b}{1 + ab} \right| = \frac{2r}{1 - r^2} \rightarrow +\infty.$$

从上面的解法还可以看出, 如果 $|a|, |b|$ 同时大于 1, 那么仍有 $\left| \frac{a + b}{1 + ab} \right| < 1$, 如果 $|a|, |b|$ 一个大于 1, 另一个小于 1, 则不等号方向相反的不等式 $\left| \frac{a + b}{1 + ab} \right| > 1$ 成立. 如果 $|a|, |b|$ 中有一个为 1, 那么 $\frac{a + b}{1 + ab} = 1$.

另一种推广是增加字母的个数. 我们知道 $a + b, ab$ 是两个字母 a, b 的基本对称函数, 也就是多项式

$$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$$

中各项的系数或系数的相反数. 如果有三个字母 a, b, c , 那么 $a + b + c, ab + bc + ca, abc$ 是基本对称函数, 即多项式

$$(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc$$

中各项的系数或系数的相反数. 类似于原不等式, 在 a, b, c 均为实数, 且绝对值均小于 1 时, 我们有

$$\left| \frac{a + b + c + abc}{1 + ab + bc + ca} \right| < 1.$$

更一般地, 对于实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 在绝对值均小于 1 时, 有不等式

$$\left| \frac{S_1 + S_3 + \dots}{1 + S_2 + S_4 + \dots} \right| < 1. \quad \textcircled{1}$$

这里 $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots, S_n$ 是 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的基本对称函数, 即

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) = x^n - S_1 x^{n-1} + S_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n S_n.$$

由于令 $x = 1$ 得

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n) = 1 - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^n S_n,$$

令 $x = -1$ 得

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) = 1 + S_1 + S_2 + \cdots + S_n,$$

所以①式即

$$\left| \frac{A - B}{A + B} \right| < 1. \quad \text{②}$$

其中 $A = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)$,

$B = (1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n)$.

显然 A, B 均正, 所以 $|A + B| = A + B > A, B$ 之差 $|A - B|$, 即①, ②均成立.

上面的解法 7 实质上即这种解法 ($n = 2$ 的情况), 但解法 7 没有用明显成立的不等式②, 却兜了圈子说 x 分 -1 与 1 为定比 λ , 令人费解.

更不可思议的是一位作者竟然想到令

$$\theta = \arctan \frac{(1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n)}{(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)},$$

然后由 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 得 $-1 < \tan(\frac{\pi}{4} - \theta) < 1$, 再由

$$\tan(\frac{\pi}{4} - \theta) = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} = \frac{(1 + a_1) \cdots (1 + a_n) - (1 - a_1) \cdots (1 - a_n)}{(1 + a_1) \cdots (1 + a_n) + (1 - a_1) \cdots (1 - a_n)}$$

导出②.

兜了一个大圈子.

13. 探索法

解题必须探索. 如果题是自己解出来的, 那么体会应非常深刻, 正好可以将这个过程(经过适当加工)向学生介绍, 如果题不是自己解出来的, 经验较为间接, 但在吸收整理以后, 一位优秀的教师也能非常生动地(就像自己亲自做的一样)向学生介绍. 当然, 如果自己解出来更好一些. 不过, 教师的“演技”也非常重要. 这是另一个话题, 本书没有篇幅来讨论了.

下面是几道 2001 年第 42 届 IMO 的试题(其中第 1, 2 题已分别在本章第 4 节与第 8 节说过). 这份试题, 我未见到解答, 自己做了一遍, 可以说说探索的过程.

例 1 在 $\triangle ABC$ 中, AP 平分 $\angle BAC$, P 在 BC 上, BQ 平分 $\angle ABC$, Q 在 CA 上. 已知 $\angle BAC = 60^\circ$, $AB + BP = AQ + QB$, $\angle ABC$ 的角有哪些可能?

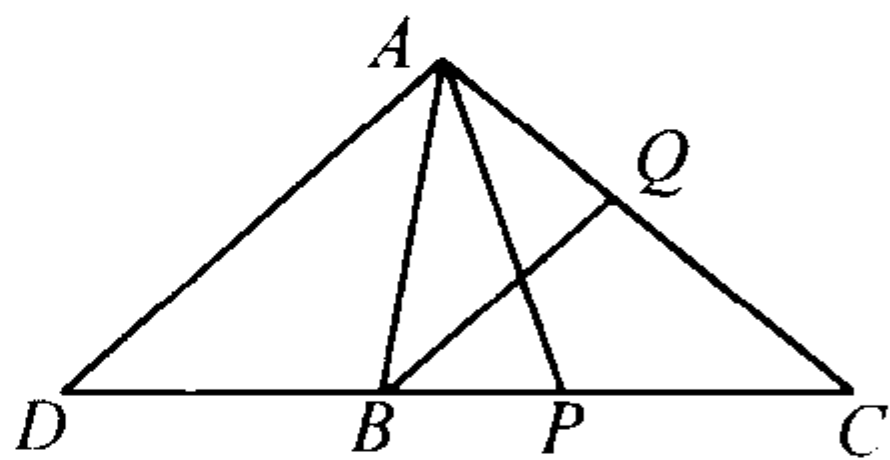


图 6-12

本题当然先画一个图.

先考虑几何的解法, 延长 CB 到 D , 使 $BD = BA$, 则 $PD = AB + BP$, 但 $AQ + QB$ 无法简单地用一条线段表示.

几何的解法遇到困难, 转而考虑利用三角.

设 $\angle ABQ = \alpha = \angle QBC$, 又不妨设 $AB = 1$, 则对 $\triangle ABQ$, $\triangle ABP$ 应用正弦定理, 并利用已知条件得

$$1 + \frac{\sin 30^\circ}{\sin(2\alpha + 30^\circ)} = \frac{\sin \alpha + \sin 60^\circ}{\sin(\alpha + 60^\circ)}. \quad (1)$$

将①恒等变形得(其中特殊角 30° 的函数不要去碰)

$$\frac{\sin 30^\circ}{\sin(2\alpha + 30^\circ)} = \frac{\cos \frac{\alpha - 60^\circ}{2}}{\cos \frac{\alpha + 60^\circ}{2}} - 1 = \frac{2\sin \frac{\alpha}{2} \sin 30^\circ}{\cos \frac{\alpha + 60^\circ}{2}},$$

即 $2\sin \frac{\alpha}{2} \sin(2\alpha + 30^\circ) = \cos \frac{\alpha + 60^\circ}{2}. \quad (2)$

两边同乘 $2\cos \frac{\alpha}{2}$ (为了去掉 $\frac{\alpha}{2}$ 的函数) 得

$$2\sin \alpha \sin(2\alpha + 30^\circ) = 2\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha + 60^\circ}{2},$$

积化和差得

$$\cos(\alpha + 30^\circ) - \cos(3\alpha + 30^\circ) = \cos(\alpha + 30^\circ) + \cos 30^\circ.$$

从而

$$\cos(150^\circ - 3\alpha) = \cos 30^\circ. \quad (3)$$

因为 $0^\circ < 2\alpha < 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, 所以

$$-30^\circ < 150^\circ - 3\alpha < 150^\circ.$$

由③得

$$150^\circ - 3\alpha = 30^\circ,$$

$$\alpha = 40^\circ,$$

于是 $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle ACB = 40^\circ$.

本题的困难在于三角式的恒等变形, 从②导出③. 现在教材不要求学生记忆三角公式, 这样的题目可能很难做好了.

严格说来, 还要证明 $\angle ABC = 80^\circ$, $\angle ACB = 40^\circ$ 的确是解. 由于上面的过程均可逆, 这一点当然成立. 几何的证明也不难, 仍用上面的图, 延长 CB 到 D , 使 $BD = BA$, 则易知

$$\angle D = 40^\circ, \angle DPA = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ,$$

$$\angle DAP = 180^\circ - 70^\circ - 40^\circ = 70^\circ.$$

所以

$$AB + BP = DP = AD = AC = AQ + CQ = AQ + BQ.$$

例 2 21 名女生与 21 名男生参加一次数学竞赛, 每个选手至

多解出 6 道题,对每一个女生与每一个男生,至少有一道题,他们两人都解出.证明必有一道题,至少被 3 个女生与 3 个男生解出.

本题的难度比上题大得多,探索过程也较长.

首先,我们想给出一个较为直观的解释.

如果男生、女生都用点表示,那么左边 21 个点(表示男生),右边 21 个点(表示女生).左边的任一点与右边的任一点之间至少连一条线,并标上一个数 i ,表示相应的男生与女生同解出第 i 道题,这样的线至少有 21×21 条.

但这样的图用于解题还不方便,因为各线上的数即题号很不清楚,每道题是哪些人做出来也不清楚.为此,我们将图修改如下:

设有 n 道题(n 现在不知道是多少).在左、右之间加 n 个点表示这 n 道题.设第 i 道题有 b_i 个男生做出, g_i 个女生做出.我们就在中间的第 i 个题向左连 b_i 条线,向右连 g_i 条线.这样得出的图像一条“蜈蚣”,只不过它的“脚尖”可能与中央(至多)6 个点相连.

将左边的一条腿与右边的一条腿配对,这样的对共有 $\sum_{i=1}^n b_i g_i$ 条,显然

$$\sum_{i=1}^n b_i g_i \geq 21 \times 21. \quad \textcircled{1}$$

我们证明由①可导出结论.换句话说(换个角度看),如果结论不成立,将与①产生矛盾.

为什么用反证法假设结论不成立呢?因为结论不成立时, b_i 与 g_i 中至少有一个小于 3,这样 $\sum b_i g_i$ 就可以估算.

在 $b_i = 2$ 或 $g_i = 2$ 时,

$$b_i g_i = 2(b_i + g_i - 2).$$

在 $b_i = 1, g_i \geq 2$ 时

$$b_i g_i = g_i \leq 2(b_i + g_i - 2).$$

在 $g_i = 1, b_i \geq 2$ 时, 上式同样成立.

于是, 恒有

$$b_i g_i \leq 2(b_i + g_i - 2), \quad (2)$$

除非 $b_i = g_i = 1$, 或者 b_i, g_i 中有一个为 0.

如果 $b_1 = g_1 = 1, b_2 = g_2 = 1$, 那么我们将第 1, 2 两题合并为第 2 题, 这题被 $b_2' = 2$ 个男生, $g_2' = 2$ 个女生解决. 这时题目中的条件不受影响. 因此①应当仍然成立(i 从 2 到 n , b_2, g_2 改为 b_2', g_2'). 所以不妨假定至多有一个 i 使 $b_i = g_i = 1$, 同样在 b_i 或 $g_i = 0$ 时, 可将第 i 道题取消. 于是由于②

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n b_i g_i &\leq \sum_{i=1}^n 2(b_i + g_i - 2) + 1 \times 1 \\ &= 2 \sum b_i + 2 \sum g_i - 4n + 1. \end{aligned}$$

而每个人至多做出 6 道题, 所以左边的脚数

$$\sum b_i \leq 6 \times 21.$$

同样

$$\sum g_i \leq 6 \times 21.$$

于是

$$21 \times 21 \leq 24 \times 21 - 4n + 1,$$

从而

$$n \leq 16.$$

这是一个“阶段性成果”, 表明这条路是可行的. 但仍需继续努力.

由于 $b_i > 2$ 与 $g_i > 2$ 不能同时成立, 所以使 $b_i > 2$ 的 i 的个数或者使 $g_i > 2$ 的 i 的个数中, 至少有一个 ≤ 8 . 不妨设为前者, 并且 $i = 1, 2, \dots, k; k \leq 8$. 这时 $g_1, g_2, \dots, g_k \leq 2$, 所以

$$g_1 + g_2 + \dots + g_k \leq 2k < 20.$$

上式表明至少有一个女生, 没有做前 k 道题. 即与她做同一

题 i 的男生数 $b_i \leq 2$. 而她至多做 6 道题, 所以与她做过同一题的男生数 $\leq 6 \times 2 = 12$. 与已知矛盾.

本题在估计 $b_i g_i$ 时, $b_i = g_i = 1$ 是一种例外, 但不影响大局. 实际解题时我先将它忽略, 以免干扰主线, 然后再仔细处理一下 (如上面所说将两题并成一题, 消除这种现象). 在得出 $n \leq 16$ 后, 一时不知如何再前进一步, 后来想出按照腿数 b_i 是否 > 2 将题目分类. 得出至少有一女生没有做第一类 ($b_i > 2$) 的题. 但这时我竟然忘记这位女生至多解 6 道题的条件. 不过感觉上, 我始终认为路是正确的, 只是还要细想. 果然, 再想一想便迎刃而解. 所以只要坚持, 成功就在不远的前面向你招手.

14. 加阶梯

一道问题解不出来, 可能是因为有一个较为简单的问题没有做好. 反过来, 如果那个较为简单的问题解决了, 这个问题也就随之解决.

这另一个问题, 可以写成“引理”的形式, 我们称它为提示或阶梯. 一位教师, 在学生解不出题的时候, 可以根据情况, 给予适当提示, 加一、两级阶梯, 帮他登上楼去.

例 1 已知 m, n 都是正整数, $m < n$, 求证

$$(1+m)^n > (1+n)^m. \quad ①$$

如果这道题学生做不出, 可以先加一个小题: 设 i 为正整数, $i \leq m$, 求证

$$n^i P_m^i > m^i P_n^i. \quad ②$$

这就成了 2001 年的一道高考题 (理工农医类). 大概当时出题者就担心: 直接证①, 学生无法下手. 所以赶紧设置一个台阶, 以免

招致各方面(学生、教师、家长、行政官员)的责难.

②不难证:

$$\begin{aligned}\frac{P_m^i}{m^i} &= \frac{m(m-1)\cdots(m-i+1)}{m^i} \\ &= (1-\frac{1}{m})(1-\frac{2}{m})\cdots(1-\frac{i-1}{m}) \\ &< (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{i-1}{n}) \\ &= \frac{P_n^i}{n^i}.\end{aligned}$$

有了②这个阶梯,①也就不难证:

$$\begin{aligned}(1+m)^n &= \sum_{i=0}^n C_n^i m^i = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} P_n^i m^i > \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!} P_n^i m^i \\ &> \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!} P_m^i n^i \\ &= (1+n)^m.\end{aligned}$$

设置阶梯,减低了问题的难度,可以使更多的同学能够获得成功,这是好的一面.但对于力求上进的同学,也应当让他们做一些难度较大的题目,以得到锻炼与提高.就像很小的孩子需要喂饭,甚至嚼烂了才喂给他吃,但不能老是靠人喂,这样是永远也长不大的.而且,增加阶梯往往限制了思维,只剩下“华山一条道”.例如本题,要证①本来也可用数学归纳法:

在 $n=m$ 时,显然

$$(1+m)^n = (1+n)^m. \quad ③$$

假设在 $n \geq m$ 时已有

$$(1+m)^n \geq (1+n)^m, \quad ④$$

则

$$(1+m)^{n+1} \geq (1+n)^m (1+m). \quad ⑤$$

而在 $n \geq m$ 时,

$$\begin{aligned}
\frac{(1+n+1)^m}{(1+n)^m} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^m \\
&= \sum_{i=0}^m C_m^i \left(\frac{1}{n+1}\right)^i \\
&< \sum_{i=0}^m \frac{m(m-1)\cdots(m-i+1)}{(n+1)^i} \\
&< \sum_{i=0}^m 1 \\
&= m+1.
\end{aligned}$$

所以

$$(1+m)^{n+1} > (1+n)^m \cdot \frac{(1+n+1)^m}{(1+n)^m} = (1+n+1)^m.$$

于是在 $n > m$ 时, ①成立.

本题还可通过讨论函数 $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ 的单调性得出(更一般的)结论.

所以阶梯不宜多加,“不愤不启,不悱不发”,直到学生实在想不出来的时候,才适当地“点拨”一下,这才是教学的艺术.

例2 已知圆内接四边形 $A_1A_2A_3A_4$. H_1, H_2, H_3, H_4 分别为 $\triangle A_2A_3A_4, \triangle A_3A_4A_1, \triangle A_4A_1A_2, \triangle A_1A_2A_3$ 的垂心. 求证 H_1, H_2, H_3, H_4 四点共圆.

本题可加一个引理:

在 $\triangle A_2A_3A_4$ 中, 设 H_1 为垂心, O 为外心, D 为 A_3A_4 中点, 则 $A_2H_1 = 2OD$.

引理是常见的, 不难证明.

由此引理, $A_2H_1 \parallel A_1H_2$ (均等于 $2OD$), 从而 H_1 与 A_1, H_2 与 A_2 关于 A_1H_1 的中点(也是 A_2H_2)的中点 P 中心

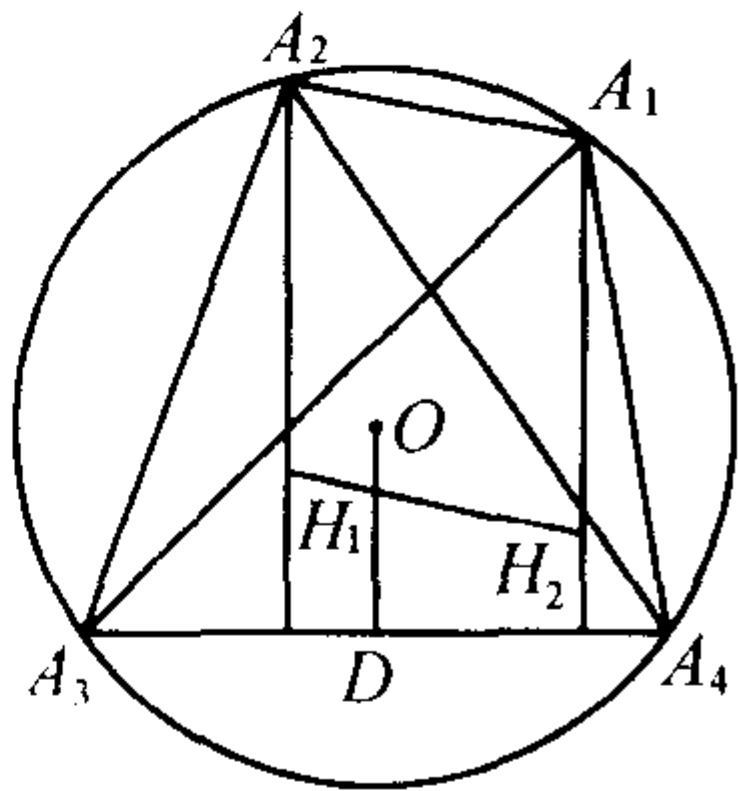


图 6-13

对称.

同理 H_3 与 A_3 , H_4 与 A_4 也都关于 P 中心对称. 四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 与 $A_1A_2A_3A_4$ 关于 P 中心对称, 因此也共圆. 而且这圆与 $\odot O$ 全等, 圆心 Q 与 O 关于 P 中心对称.

例 3 设 a, b, c, d 为整数, $a > b > c > d > 0$. 设

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c),$$

证明 $ab + cd$ 不是质数.

本题是 2001 年 IMO 的第 6 题, 有相当的难度. 教师可给学生适当的提示.

一是引入新字母. 令 $x = ac + bd$, $y = ab + cd$. 不难算出

$$x + y = (a + d)(b + c),$$

$$y - x = (a - d)(b - c).$$

令 $u = a + d$, $v = a - d$, $w = b + c$, $t = b - c$, 则已知与结论可写成什么?

显然已知即

$$uw - vt = 2(u + t)(w - v)$$

可化简为

$$v(t + 2u) = w(u + 2t). \quad ①$$

而要证 $y = \frac{1}{2}(uw + vt)$ 不是质数.

其次提示: 假设 y 为质数, 那么 v, w 必互质, u, t 也必互质. 再利用①可得

$$v = \frac{1}{3}(u + 2t), w = \frac{1}{3}(t + 2u).$$

从而 $u - v = w - t$ 与 $c > d$ 矛盾.

提示不必过细. 可以笼统含混一点, 细节留给学生补充.

反过来, 拆去楼梯可以增加难度. 参见命题部分.

15. 非数学因素

解题不仅是一种智能活动,而且很多非数学因素,或者叫做非智力因素在解题的过程中也起着重要甚至是决定性的作用.在这方面,教师也应注意对学生的培养.

解题时必须全神贯注,全身心地投入.

也许有极少数天才可以“手挥五弦,目送飞鸿”、“一手画圆,一手画方”,但绝大多数人在同一时间只能做好一件事情.

“不专心致志则不得焉”.有些学生在做作业的时候,吃东西、听音乐、看电视,思想不集中,这样时间花得多,作业也做不好.久而久之,形成坏的习惯.而坏的习惯一旦形成后,就很难改正.

好的学生,做作业时思想高度集中,“三下五除二”,很短的时间就把作业做好了,然后再吃东西、听音乐、看电视,或从事其他活动.“学习时学习,玩的时候玩”,结果是学得好,玩得也痛快.

读题,就需要聚精会神.第三章第7节已经说过题目的条件与结论应当强记,应当用自己的语言改编.

解题,更需要全力以赴.即使是常规题,也需要开动脑筋想一想:有哪一条路可走?有哪一个例子可套?(最好能想一想有没有更好的解法)选好路线之后,仍应小心翼翼,在计算或推理中不可出错.有时“走错一步,满盘皆输”,所以切不可粗枝大叶,掉以轻心(这也是一种需要从小培养的“习惯”).

思想不集中,就容易出错,而且会一错再错.做错了推掉重来,显然比一次做好花的时间要多.应当力求一次做好,不要老是改来改去.

如果有可能,应争取家长的配合,给学生一个较好的读书环

境.假如周围电视声、麻将声等响成一片,要专心致志就很困难.

总结,不仅要仔细检查有无计算错误,更要对推理与文字叙述反复推敲.随着年级的升高,推理与表达的重要性越来越突出,在这两方面应更加注意.

很多学生的书面表达能力奇差,常常希望“说一说算了,不写了”.教师应当严格要求,自己作出表率,将重要的推理过程写得条理分明,无懈可击,而且指定某些题目,要求学生认真地写出解答,必要时写在黑板上,由教师加以修正(包括数学推理的严谨,文字的顺畅,甚至错别字、标点符号与字的笔顺),特别是一些组合数学的问题.应当通过教师的训练,能“想得清楚,说得明白,写得干净”.

应当帮助学生建立信心,鼓励他们大胆尝试.

英国女诗人罗赛蒂(C.Rossetti, 1830—1894)有一首小诗,名字就叫“我想试试(I'll Try)”:

The little boy who says “I'll try”,
Will climb to the hill-top.
The little boy who says “I can't”,
Will at the bottom stop.
“I'll try” does great things every day,
“I can't” gets nothing done;
Be sure then that you say “I'll try”,
And let “I can't” alone.

这首诗(中译见第一章第3节)很好,可以向学生推荐.

“自古成功在尝试”.当然,一次尝试未必就完全成功,往往需要反复多次尝试.应当告诉学生,“失败是成功之母”.

解一道复杂的题,得有耐心.

可以告诉学生,其他同学,甚至教师本人做这道题时,也曾花费很多时间,走过不少弯路.就当像敲矿石(参见第二章3)那样,

反复地敲,不断地转换角度敲,最终总会敲下一块或将整个矿石击碎.

要告诉学生,解题是对人的意志的一种考验.越是困难,越要坚持下去.一道难题,通过坚持不懈的努力,到了朝思暮想,不解出来就寝食不甘的地步,必然会有好的想法冒出来,胜利或许就在再坚持一下的努力之中.

当然,根据学生的情况,教师可以在适当的时候,给予适当的帮助,如一两句提示,或者,如前面所说的,增加一两级阶梯.

对学生取得的进展,应当给予勉励,让他知道自己正在一步一步地逼近最终目标.

关于非智力因素,需要一本大书来讨论,它不是本书的重点,所以我们只在这一节简略地提一下,波利亚也有很多论述,我们摘录几段他的语录作为本节的结束:

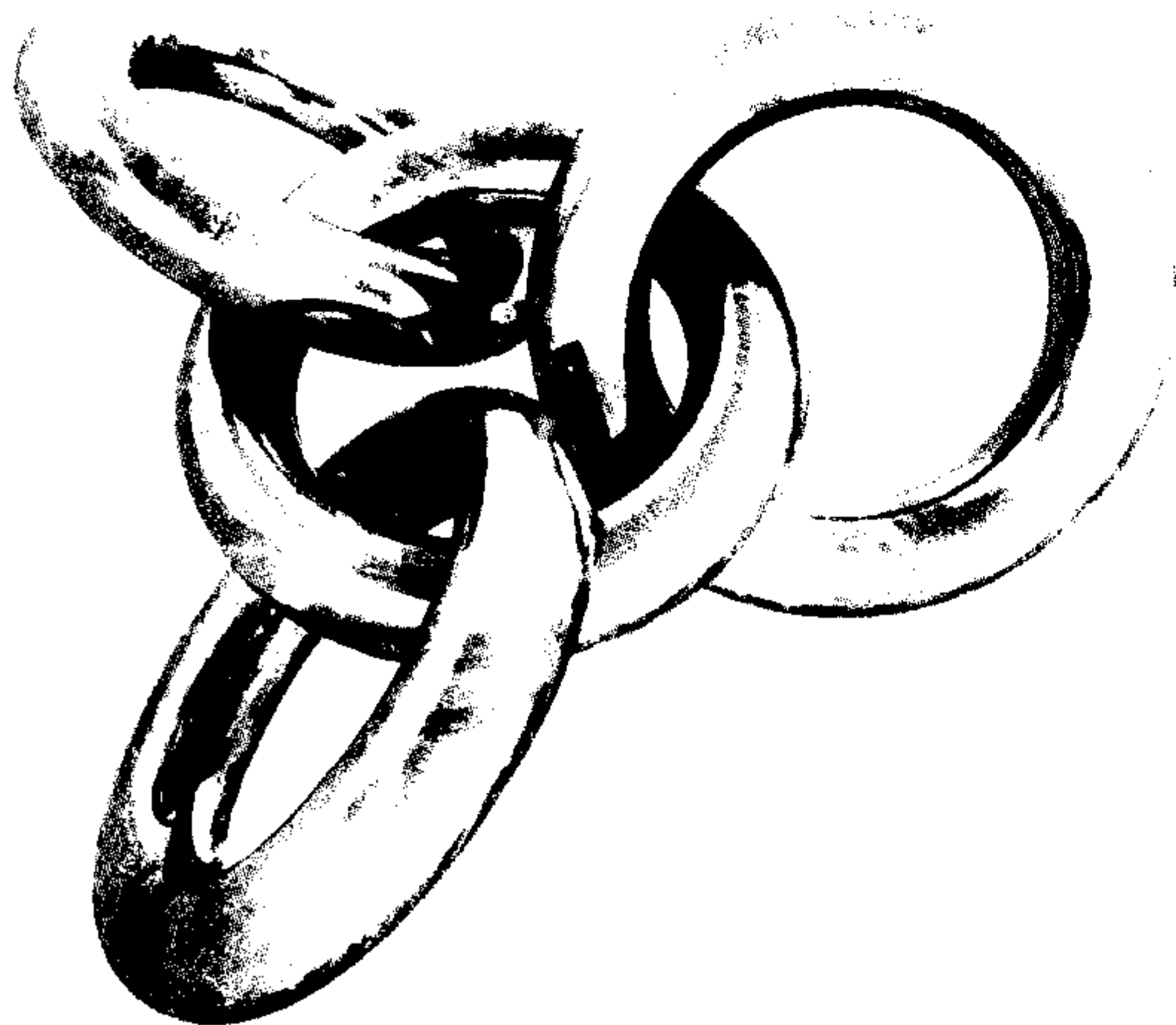
“聪明的解题者,首先要力争尽可能彻底而又清楚地了解题目,可是仅仅了解还不够,他必须全神贯注于这道题,他必须渴望得到解答.”

“认为解题纯粹是一种智能活动是错误的,决心与情绪所起的作用很重要.半心半意和懒洋洋地做一件事情,对于在课堂上做代公式的题可能足够了.但是,去求解一个严肃的科学问题,则需要坚强的意志,才能成年累月地含辛茹苦和百折不挠.”

“教学生解题是意志的教育.当学生求解那些对他来说并不容易的题目时,他学会了败而不馁,学会了赞赏最微小的进展,学会了等待主要的念头,学会了当主要念头出现后全力以赴.如果学生在学校里没有机会尝尽为求解而奋斗的喜怒哀乐,那么,他的数学教育就在最重要的地方失败了”.

谈谈命题

数学的问题太多了，所以“命题容易解题难”，但编制符合一定要求的新题，也还是要花费不少劳动的，本章就谈一谈命题。



1. 关于题库

数学习题,已有成千上万,因此有人建立试题库,认为这样做就可以一劳永逸.

建立试题库,的确是个好做法.需要题目时,就可以调一批出来,但“一劳永逸”却未必.

首先,像高考这样竞争激烈的考试(至少在短期内考试方式还看不到有重大的改变),学生完全可以发扬“愚公精神”,“每天挖山不止”.这样题库中的题即使再多,也会被学生做完或基本做完.如果增加题库中的题量,那么学生将做更多的题,负担更重.所以像高考这样的考试,不宜采用题库中的题,否则对做过与未做过的考生,显然不尽公平.

即使是普通考试或练习,完全依赖题库也不是好办法.因为这样做将使教师丧失主动性,不能有针对性地出题.而“因材施教”乃是一个重要的教育原则,切不可弃之不顾.

有些领导认为采用题库命题,可以增加“客观性”.甚至以此作为检查教师工作、防范教师泄漏考题的重要措施.其实这种客观性,由于缺少教师的主动性,弊多益少.校方既然聘请了教师,就应该尊重教师,信任教师.如果连命题权也要抓在自己手中,哪里谈得上尊重与信任!这真是“外行领导内行”.

因材施教是一件辛苦的事.不可能“一劳永逸”,将所有各届学生都一律对待.“劳”,其实也是一种乐趣.常教常新,年年岁岁均有不同,正表现了一名优秀教师的进取精神,所以在可能时,应当编制一些新题,不断有所前进.

当然,陈题(如果有题库更好)也应当充分利用,尤其基础部分

的题,大多可用陈题,不必新编.一来减轻工作量,二来避免临时编凑数据而产生的失误.即使是全国高中竞赛,我以为一试也应以基本题为主,不妨用一些陈题,照顾大多数学生.有几年竞赛的命题,每一道都有创意,单独看来很不错,但合在一起,学生就吃不消了.

编制新题的方法我们将在以下几节介绍.由于常规问题,有关资料(尤其是复习资料或配套练习)汗牛充栋,所以重点放在竞赛题或稍带竞赛意味的问题.

2. 处处留心

处处留心皆学问.平时只要留意用数学眼光观察,就能编出许多数学问题.

例如 1997 年世界杯足球预选赛,亚洲 A 组有沙特、伊朗、中国、卡塔尔、科威特五支劲旅参赛,很多球迷都看了实况转播,非常关心比赛的成绩.成绩表就可以引出下面的数学题.

例 1 五支足球队,每两队赛一场.每场胜的队得 3 分,负的队得 0 分,踢平则两队各得 1 分.赛完后,四支球队的总分分别为 8,7,4,1,问第五支球队至多得几分?

本题的五支球队共赛 $\frac{5 \times 4}{2} = 10$ 场,如无平局,则总分为 $3 \times 10 = 30$,如有一场平局,则总分减少 1 分,因此关键在弄清平局至少有几场.

将 8,7,4,1 分拆成 3 与 1 的和(3,1 的个数之和不超过 4):

$$8 = 3 + 3 + 1 + 1,$$

$$7 = 3 + 3 + 1,$$

$$4 = 3 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1,$$

$$1 = 1.$$

其中只有 4 有两种不同的分拆法.

从分拆可以看出,四支球队在比赛中的分数至少出现 5 个 1, 因此整个比赛至少有 3 场踢平,从而总分至多为 $30 - 3 = 27$,第五队得分至多为

$$27 - 8 - 7 - 4 - 1 = 7$$

分.

做到这里,问题才解决了一半.我们还应当列一张成绩表或画一个比赛图,说明第五个队确实可以得 7 分.为此,将得分为 a 的球队用 $\textcircled{a}$ 表示,若 $\textcircled{a}$ 胜 $\textcircled{b}$ 则画一条由 $\textcircled{a}$ 到 $\textcircled{b}$ 的向量,若 $\textcircled{a}$ 与 $\textcircled{b}$ 踢平,则在 $\textcircled{a}$, $\textcircled{b}$ 间连一条线.

图 7-1 表明第五个队可以得到 7 分.

问题还没有完,我们还可以问一问:第五支球队至少得几分? 答案是 5 分.

还有没有问题了? 稍想一下,又产生一个新的问题:第五支球队能得 6 分吗?

答案是能得 6 分,而且得 6 分的情况不只一种.

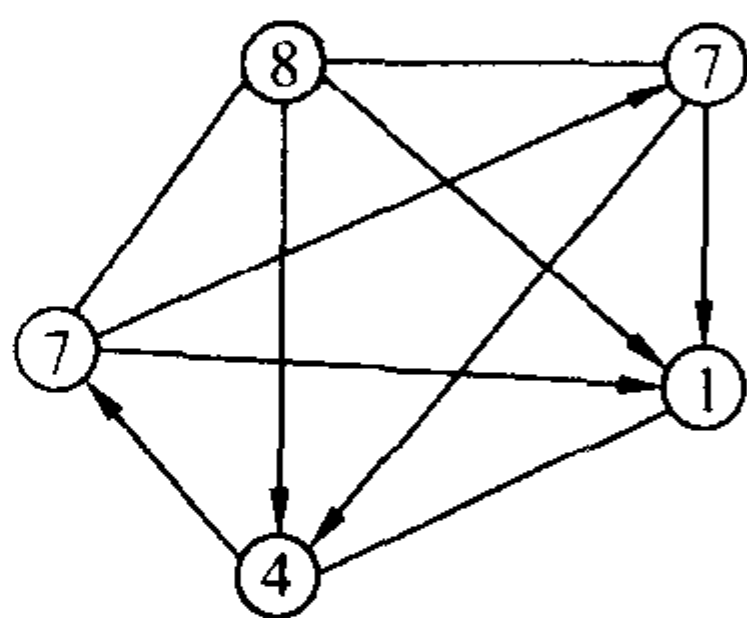


图 7-1

有一次乘电梯,想到这样的问题.

例 2 一高 25 层的建筑,有一部电梯,除在一层停外,如果只在第 25 层停,那么最不利值(即一个人需要上或下的层数的最大值)是多少? 如果仍然只停一次,停在哪层能使最不利值最小? 如果楼有 100 层,电梯除在一层停外,还停 4 次,那么应停在哪儿层能使最不利值最小?

问题不难. 第一个答数是 12. 第二个答数是 17. 第三个答数是 23, 45, 67, 89.

更一般地,中途停 n 次,那么就将 m 层建筑($m - 1$ 层楼梯)分成 $2n + 1$ 段,每段长应相等或接近相等.

还可以考虑“加权”，比如约定上一层楼相当于下两层楼。

有一次见到邻居小孩玩一种游戏：20 个方块分别标有 1, 2, …, 20. 排成一个圈，方块可以在圈上移动. 每连续 4 个方块可以颠倒顺序(简称颠倒)，如 1, 2, 3, 4 变为 4, 3, 2, 1(图 7-2).

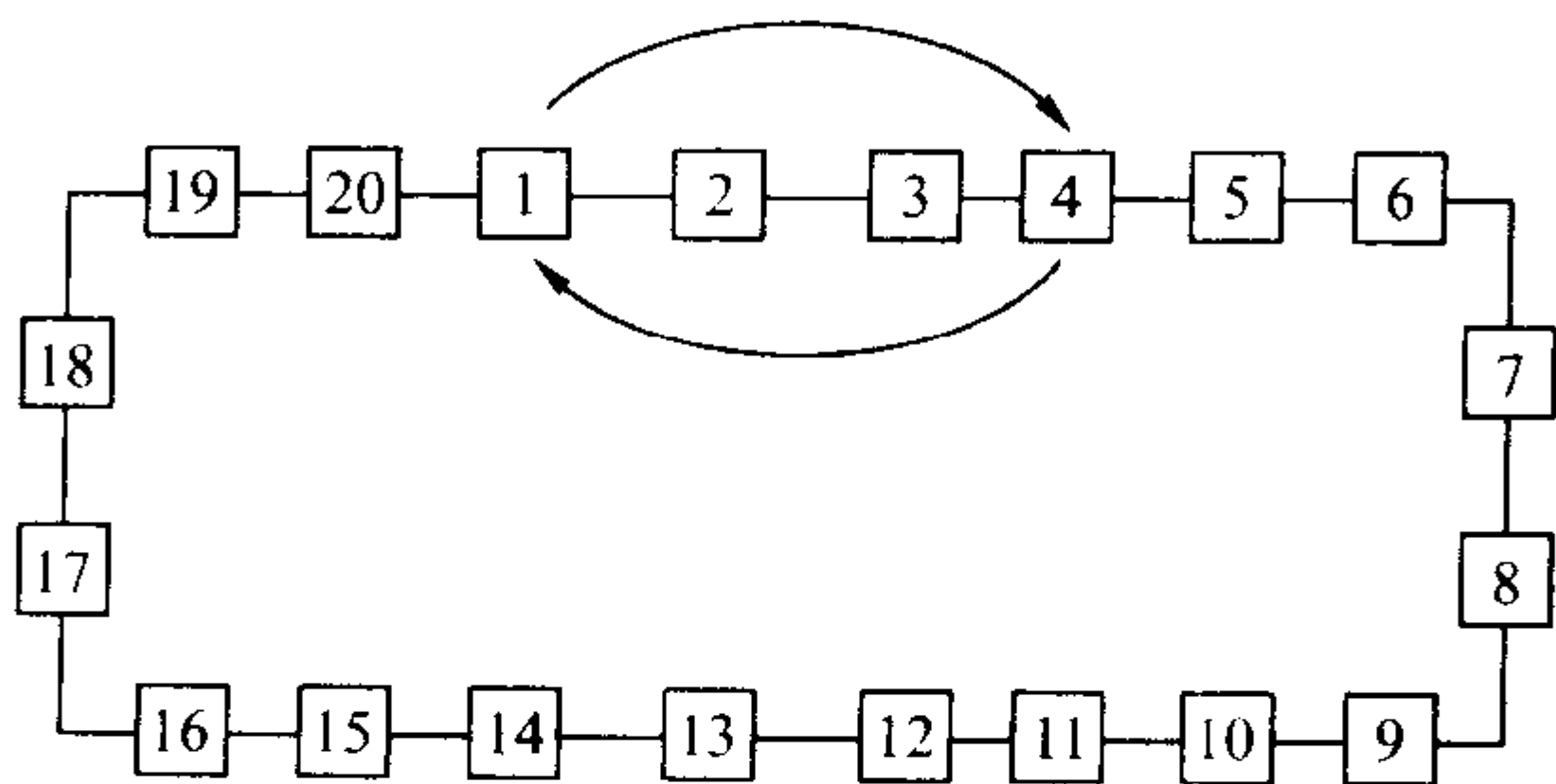


图 7-2

于是，便想到下面的数学问题：

例 3 如果原来的 20 个方块是依照数的大小顺序排列，能不能经过有限多次颠倒，将它的次序变成 5, 1, 2, …, 20？变成 6, 1, 2, …, 20？如果原来只有 19 个方块依照数的大小排列，能不能经过有限多次颠倒，变成 6, 1, 2, …, 19？

第一个问题不难回答. 用箭头表示一次颠倒，称为一步. 通过尝试，不难得出(作者曾在深圳市罗湖区作过试验，很多同学都能得出下面的结论)：

$$12345 \rightarrow 15432 \rightarrow 34512 \rightarrow 32154 \rightarrow 51234.$$

可总结一下：每一个数(例如 5)，可以通过 4 次颠倒，向前移 4 位，这 4 步，我们简记为 $\xrightarrow{4}$.

采用这种方法，将 6 向前移 4 位，再移 4 位，…，这样共移六次(24 步)，在方块数为 20 时，如图 7-3，最后次序变成 6, 1, 2, …, 20.

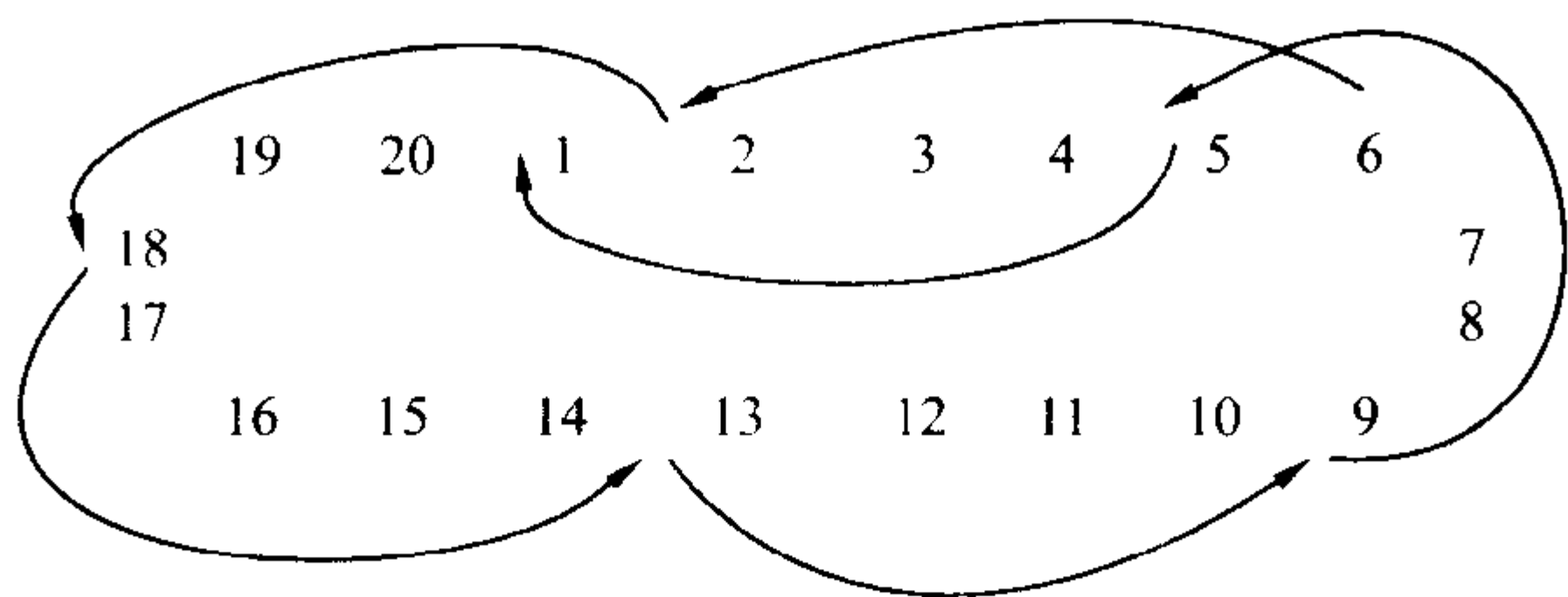


图 7-3

第三个问题,答案则是不能.原因是“每次颠倒不改变逆序个数的奇偶性”.这里一个逆序是指一有序数对 (a_i, a_j) ,它们是数列(排列)

$$a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n$$

的两项, a_i 排在 a_j 前面($i < j$),但却有 $a_i > a_j$.

例如

$$4, 3, 2, 1 \quad \text{①}$$

中, $(4, 3), (4, 2), (4, 1)$ 都是逆序, $(3, 2), (3, 1), (2, 1)$ 也都是逆序.数列①中共有 6 个逆序.

$a_1, a_2, \dots, a_{19}$ 排在一个圆圈上.如果作为数列

$$a_1, a_2, \dots, a_{19} \quad \text{②}$$

有 m 个逆序,那么将 a_{19} 放在前面作为数列

$$a_{19}, a_1, a_2, \dots, a_{18} \quad \text{③}$$

时,与②相比,有 18 个有序数对,即 $(a_1, a_{19}), (a_2, a_{19}), \dots, (a_{18}, a_{19})$ 顺序改变了,因而逆序个数是 m 加上或减去一个偶数.所以③与②逆序个数的奇偶性相同.因此,对 19 个排在一个圆圈上的数,可以说它是偶排列或奇排列(即逆序个数是偶数或奇数),而对 20 个排在圆圈上的数,则没有奇、偶排列之分.

每一次颠倒,将 a_1, a_2, a_3, a_4 变成 a_4, a_3, a_2, a_1 ,其中有六对

数顺序改变,所以 a_1, a_2, a_3, a_4 与 a_4, a_3, a_2, a_1 这两个排列同为奇排列或同为偶排列,即颠倒不改变排列的奇偶性.

$1, 2, \dots, 19$ 是偶排列,而

$$6, 1, 2, \dots, 19 \quad \textcircled{4}$$

是奇排列(有五个逆序即 $(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)$), 所以不能通过颠倒将 $1, 2, \dots, 19$ 变为 $\textcircled{4}$.

前两问实际表明每一个数都可以移到最前面,因而每一种 $1, 2, \dots, 20$ 的排列都可以经过颠倒变为另一种排列. 这里 $1, 2, \dots, 20$ 可以改为 $1, 2, \dots, n$. n 为任一正偶数.

在 n 为奇数时, $1, 2, \dots, n$ 经颠倒可以变成的排列都是偶排列,而且偶排列都可以经颠倒从一种变为另一种,奇排列也都可以经颠倒互相变来变去. 但奇排列不能经颠倒变为偶排列,偶排列也不能经颠倒变为奇排列.

例 3 已经很难. 其中含着大学代数中逆序, 奇、偶排列等概念. 而且还进了一步: 排在圆周上的数列, 其奇、偶性能否 well define? 这是通常奇、偶排列的推广. 解题的方法, 前两问是构造, 最后一问则是反证. 第二问还用第一问作引理. (如撤掉第一问, 第二问的难度显然增加) 然而, 这样的题小学生也能够理解, 甚至能完成其中一部分.

扑克牌, 很多人都会玩, 花样挺多. 看别人打牌, 也可以编出数学题来.

例 4 甲、乙、丙三人手里都有牌. 每张牌上写一个自然数, 不超过 100. 同一个人手中的牌, 点数(即所写的数)各不相同. 如果甲手中的任一张牌与乙手中的任一张牌, 点数相加的和都不等于丙手中任一张牌的点数, 那么三个人的牌合在一起至多多少牌?

不难举出牌的总数为 201 的例子:

甲、乙各有 100 张牌, 丙只有一张点数为 1 的牌.

或者

甲、乙各有点数 $25 \sim 100$ 的牌,丙有点数 $1 \sim 49$ 的牌.

要证明 201 张为最多则需要一点推理能力:

设甲的牌中,最小点数为 a . 如果丙有一张大于 a 的牌 b , 那么乙就没有点数为 $b - a$ 的牌. 所以丙的大于 a 的牌与乙的牌合在一起至多 100 张. 丙的不大于 a 的牌与甲的牌合在一起至多 101 张. 所以三人的牌合在一起至多 201 张.

本题不难推广成如下形式: 设有 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的三个子集 A, B, C . 如果对任一 $a \in A, b \in B$, 均有 $a + b \in C$. 那么 $|A| + |B| + |C|$ 的最大值是多少?

下面的问题也是日常生活中常见的.

例 5 m 盏灯, 其中有 n 盏开着, 每次可拉 1 个或拉几个开关(个数不限). 问至少拉几次, 才能保证关掉所有的灯? 注意由于所有开关放在一起, 事先不清楚哪盏灯用哪个开关.

$n = m$ 时, 拉一次即可. $n < m$ 时, 问题颇为困难.

设至少需拉 $f(m, n)$ 次, 答案是

$$f(m, n) = \begin{cases} 1, & \text{若 } n = m. \\ 1 + [\log_2 m], & \text{若 } 0 < n < m. \end{cases}$$

其中 $[x]$ 是天花板函数, 即不小于 x 的最大整数.

易知 $f(m+1, n) \geq f(m, n)$ (再增加一个开关已明的灯, 需拉的次数不会减少), 即 f 是 m 的增函数. 又 $f(m, n) = f(m, m-n)$ (将亮作为不亮, 不亮作为亮, 对 $m-n$ 盏灯亮的情况作为 n 盏灯亮处理, 但最后一步则采取相反行动: 该关的才拉开开关关掉. 从而 $f(m, m-n) \leq f(m, n)$. 同理 $f(m, n) \geq f(m, m-n)$).

先设 $m = 2^k$, 对 k 进行归纳. $k = 0$ 时结论显然. 设结论对 $k-1$ 成立, 考虑 2^k 盏灯. 第一次先拉 2^{k-1} 个开关. 根据结果可将 2^k 盏灯分为两组, 前一组由已拉的 2^{k-1} 个开关控制, 后一组由另外

2^{k-1} 个开关控制.

由归纳假设,每组经 $1 + (k - 1) = k$ 次即可全部关掉.而实行时可将两组该拉的开关放在一起同时拉,所以 $k + 1$ 次即可将灯全部关掉.

另一方面,若第一次先拉 j 个开关,则灯分为两组,前一组由已拉的 j 个开关控制,后一组由另外 $2^k - j$ 个开关控制.两组中必有一组的灯(及开关)数 $\geq 2^{k-1}$ (而且在一般情况,这组灯不全开也不全关),从而由 f 对 m 的单调性,至少需 k 次才能保证全部关掉.所以至少需 $k + 1$ 次才能保证把 2^k 盏灯全部关掉.

若 $2^k \geq m > 2^{k-1}$,第一次拉过后,仿照上面所成两组中必有一组的灯数 $> 2^{k-2}$,同样由归纳假设($m = 3$ 不难奠基)至少要拉 k 次才能全部关掉.另一方面, $f(m, n) \leq f(2^k, n) = 1 + k$.

上面的证明实际上也给出了一种关灯的程序.

有趣的是除非灯全亮着(即 $n = m$),否则拉的次数与 n 无关.

从日常生活中还可编出很多代数或几何方面的问题.这样的例子在很多文献资料中均可找到,我们就从略了.

3. 旧瓶新酒

改造旧题,翻出新花样,是编题时常有的方法之一.这样的例子甚多.

例 1 某市有 n 所中学,第 i 所中学派出 c_i 名学生 ($1 \leq c_i \leq 39, 1 \leq i \leq n$) 来到体育馆观看球赛,总人数 $\sum_{i=1}^n c_i = 1990$.看台上每一横排有 199 个座位.同一学校的学生必须坐在同一横排,问至

少要安排多少个横排才能保证学生全部坐下？(1990 年全国高中竞赛题)

这道题的叙述较为啰嗦，其中字母、符号有点吓人(至少小学生看不懂). 我将它稍为改造一下，便可出给小学生做了.

体育馆的看台上，每一排有 199 个座位. 每所小学至多派 39 名代表，共有代表 1 990 名. 问至少要安排多少排，才能保证小学代表全部坐下，并且同一学校的代表都坐在同一排？

这种改编只是文字上的. 就数学内容而言，仍是原来的题目，下面的改编就是迥不相同的新题了.

体育馆的看台上，每一排有 199 个座位. 现安排 11 排给小学代表坐. 每所小学至多派 39 名代表，并且同一学校的代表必须坐在同一排. 小学代表的总数至多多少才可保证一定能坐下？

1 900 名代表，11 排就不一定能(按照所说要求)坐下，这在第三章第 11 节中已经说过.

困难在于证明 1 899 名代表一定能按照所说要求坐下，这比原题的难度大得多.

假设 11 排不够安排，我们证明代表总数一定 $\geq 1\,900$ ，换言之，11 排可以安排 1 899 名代表. 这样的证明方法与这样假设是颇为奇特有趣的.

将学校按代表的多少排序，先安排人数多的学校，自第一排开始安排，每排至少可以安排 5 所学校. 11 排都排完后再继续考虑能否再排入一些学校(如果能排当然尽可能安排人数多的学校并尽可能安排在前面)，直至无法加入. 这时，

$$(\text{每排人数}) + (\text{剩下任何一个学校人数}) \geq 200. \quad \textcircled{1}$$

如果有 10 排人数均 ≥ 170 ，那么由①总人数

$$\geq 170 \times 10 + 200 = 1\,900.$$

如果有某两排人数均 ≤ 169 ，那么前一排的前 5 个学校中人数最少的 ≤ 33 人 ($34 \times 5 > 199$). 从而后一排至少坐 6 个学校 ($33 \times$

$6 < 199$). 由于①, 剩下的任何一个学校的人数
 $\geq 200 - 169 = 31$.

所以上面所说至少坐 6 个学校的那一排, 人数
 $\geq 31 \times 4 = 186 > 169$.

矛盾!

所以实际上只可能有前一种情况发生. 此时总人数至少为 1 900.

用类似手法可以得出 12 排至多可安排 2 069 名代表.

我们的结果可记成 $(39, 199, 11) = 1\,899$, 及 $(39, 199, 12) = 2\,069$. 很自然地会有 $(m, n, l) = ?$ 这个问题留给读者自己讨论.

改造可以是将原来结论加强.

例 2 在一游戏中, 先走者将平面上 1 点染红, 后走者将平面上 10 个未染的点染绿. 然后, 先走者将平面上未染的 1 点染红, 后走者将平面上 10 个未染的点染绿. 如此继续下去, 如有 3 个红色点成正三角形, 则先走者胜, 后走者能否阻挡先走者获胜?

答案是后走者无法阻挡先走者获胜. 很自然地, 我们会追问一句“先走者至少几步就一定能获胜?”这就形成一个新的问题. 解法比原题要细致一些.

首先, 甲(先走者)染 1 个点当然无法取胜, 如果甲染 k 个点 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 时还无法取胜, 这里 $k \leq 5$, 那么当甲染点 A_{k+1} 时, 所可能产生的、新的正三角形 $A_{k+1}A_iB$ ($1 \leq i \leq k$) 至多 $2k$ 个 (A_i 有 k 个, 对每个 i , B 有两种选择). 由于 $2k \leq 10$, 所以乙(后走者)可以阻挡甲取胜. 所以甲至少染 8 个点才可能取胜.

另一方面, 甲可在一条直线上任取 6 点 A_i ($1 \leq i \leq 6$), 这直线不妨设为 x 轴, 6 点坐标

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_6.$$

设 A_i 及乙取的点到原点 O 的距离不超过 R (或者换句话法:

以 O 为圆心,充分大的长 R 为半径将所有已经染色的点都包含在内). 在 x 轴上取 A_7 ,使它的横坐标 x_7 大于 $2R$.

这时,有 12 个点 B ,每一个可与某个 $A_i (1 \leq i \leq 6)$ 及 A_7 组成正三角形. 由于 $A_1, \dots, A_7$ 共线,这些 B 互不相同,并且

$$OB > A_7B = A_7A_i = OA_7 - OA_i > 2R - R = R.$$

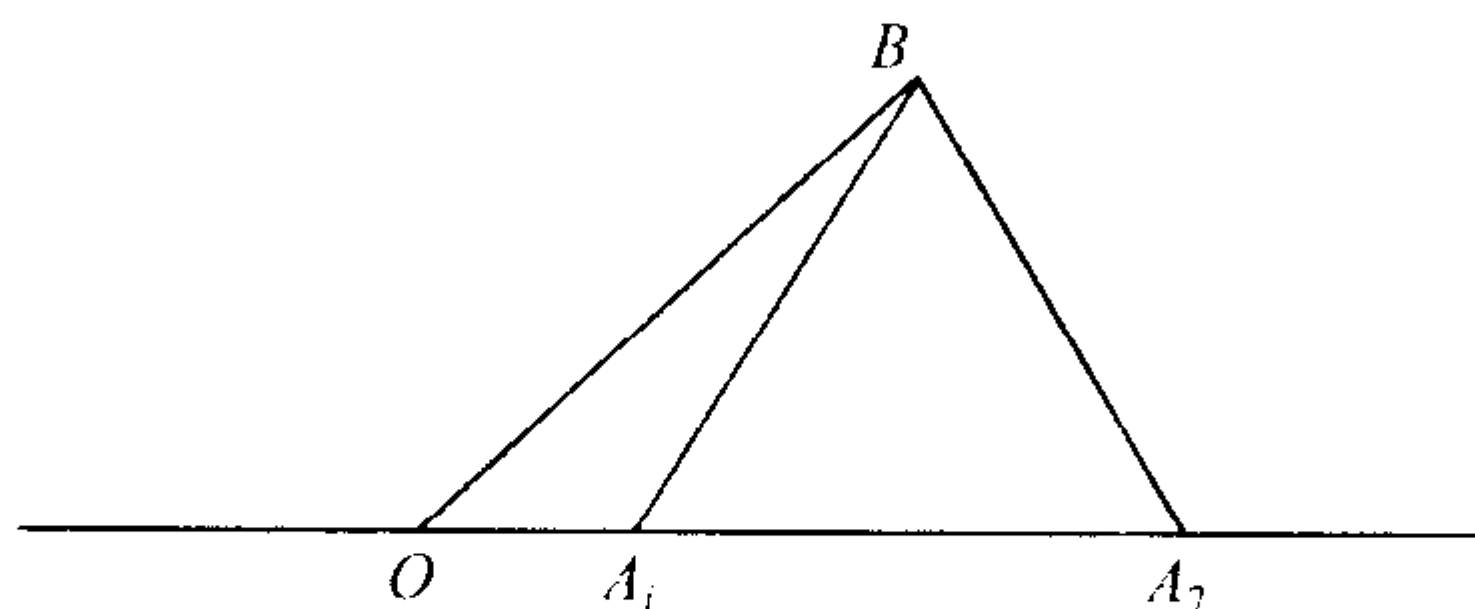


图 7-4

所以这些 B 是未染色的点.

因为 B 的个数多于 10, 所以乙无法阻挡甲在下一步获取胜利.

改造可以是原题的推广.

例 3 一个心烦的学生走过一个大厅, 大厅中有一排关着的柜子, 柜子从 1 到 1 024 编号. 他打开 1 号柜, 之后朝前走交替地碰或者打开每一个关着的柜子. 当他走到大厅的末端, 他转过身重新往回走, 打开遇到的第一个关着的柜子, 之后朝前走交替地碰或者打开每一个关着的柜子. 这学生按这方式来来回回地走来走去, 直到每一个柜子都打开, 他打开的最后一个柜子的号码是什么?

本题答案为 342. 数 1 024 可推广为 4^n , 相应的答案为 $\frac{2+4^n}{3}$. 更一般地, 应当将 1 024 推广为正整数 n . 此时难度大大增加.

如果采用二进制, 设

$$n = a_k \cdot 2^k + a_{k-1} \cdot 2^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot 2 + a_0,$$

其中 $a_i \in \{0, 1\}$, $0 \leq i \leq k$, 并且 $a_k = 1$, 那么答案是 $n - n'$, 其中 n' 与 n 相比较, 是由 n 去掉头即 $a_k \cdot 2^k$, 从右数起, 奇数位数字 $a_0, a_2, \cdots$ 不变, 偶数位数字 $a_1, a_3, \cdots$ 变为 $1 - a_1, 1 - a_3, \cdots$ 所得的数. 例如 $n = 1024 = 2^{10}$, 则

$$n' = 0 + 1 \times 2 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^7 + 0 \times 2^8 + 1 \times 2^9,$$

$$n - n' = 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2 = 342.$$

证明可用归纳法. 设答案为 b_n . 注意有递推关系

$$b_{2n+1} = b_{2n},$$

$$b_{4n} = 4b_n - 2,$$

$$b_{4n+2} = b_{4n} + 2.$$

利用递推关系及归纳假设甚易得出结论(困难在总结出上述结论).

改造可以是原有结论的完善.

例 4 一个 $n \times n$ 的方阵, 如果它的元素取自集合

$$S = \{1, 2, \cdots, 2n-1\}$$

且对于每个 $i = 1, 2, \cdots, n$, 它的第 i 行和第 i 列中的所有元素合起来恰好是 S 中的所有元素. 证明:

(a) 不存在 $n = 1997$ 阶的银矩阵.

(b) 有无限多个 n 的值, 存在 n 阶银矩阵. (第 38 届国际数学奥林匹克试题)

本题的(a)可推广为不存在 n 阶的银矩阵, n 为大于 1 的奇数.

(b) 只要求构造出无限多个银矩阵. 可以用归纳的方法造出 2^k 阶银矩阵, 从而解决(b). 原题的标准答案即是如此.

很自然地,会想到是否在 n 为正偶数时, n 阶银方阵均存在? 只有回答了这个问题,结论才算得上完善.

设 $n = 2k$. 我们在主对角线(自左上至右下)上放 n 个 $2n - 1$. 在主对角线下方放 $1 \sim n - 1$, 上方放 $n \sim 2n - 2$. 下三角的放法如下:

每一位置 (i, j) , 即第 i 行第 j 列, 由一对不相等的数 i, j 组成, $1 \leq j < i \leq n$. 共有 $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ 个位置. 将它们分成 $n - 1$ 组, 每组 $n/2$ 个. 如果同一组中的 $n/2$ 个 (i, j) 恰好是 $1, 2, \dots, n$ 的两两配对, 那么将这 $n - 1$ 组分别称为第 $1, 2, \dots, n - 1$ 组, 并且第 t 组的 $n/2$ 个位置全写上 t ($1 \leq t \leq n - 1$).

上三角与下三角关于主对角线对称. 如果在位置 (i, j) 放 t , 那么就在对称的位置 (j, i) 放 $(2n - 1) - t$. 这样, 对每个 i ($1 \leq i \leq n$), 在第 i 行与第 i 列出现的元素各不相同, 因而所得的矩阵是银方阵.

剩下的问题是: 有无上述的分组存在? 这实际上就是下面的问题: “ $2k$ 名学生, 每天分成 k 对出去散步. 如果每人每天的伴侣都不相同, 这散步至多能持续多少天?”

由第五章第 4 节我们知道散步可以持续 $2k - 1$ 天. 第 t 天的 k 对学生就是上面所说的 $\frac{n}{2}$ 个 (i, j) , $1 \leq j < i \leq n$, $1 \leq t \leq n - 1$.

银方阵与散步问题有如此巧妙的联系, 十分有趣.

新的解法也会产生新的问题.

例 5 试问: 当且仅当实数 $x_0, x_1, \dots, x_n$ ($n \geq 2$) 满足什么条件时, 存在实数 $y_0, y_1, \dots, y_n$, 使得

$$z_0^2 = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 \quad ①$$

成立, 其中 $z_k = x_k + iy_k$, i 为虚数单位, $k = 0, 1, \dots, n$. 证明你的结论(1997 年全国高中竞赛题).

本题的①相当于方程组

$$\begin{cases} x_0 y_0 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n, & \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x_0^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 & \text{③} \end{cases}$$

有实数解.

如果方程组有实数解,那么由柯西不等式

$$x_0^2 y_0^2 = (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(y_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x_0^2). \quad \text{④}$$

令

$$A = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x_0^2, \quad \text{⑤}$$

则由④得

$$A(A + x_0^2 + y_0^2) \geq 0. \quad \text{⑥}$$

由于 $A + x_0^2 + y_0^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_0^2 \geq 0$, 等号仅在 $x_1 = \cdots = x_n = y_0 = 0$ 时成立, 此时由③ $x_0 = y_1 = \cdots = y_n = 0$. 所以由⑥得

$$A(A + x_0^2 + y_0^2) \geq 0. \quad \text{⑦}$$

⑦是必要条件. 下面证明它也是充分条件, 即在⑦成立时, 方程组②, ③一定有解. 证法不止一种. 标准答案如下:

若 $A = 0$, 则取 $y_k = x_k (k = 0, 1, \cdots, n)$.

若 $A > 0$, 则 $x_1, \cdots, x_n$ 不全为 0, 不妨设 $x_n \neq 0$. 取 $y_k = 0, k = 0, 1, \cdots, n-2$. 方程组变为

$$\begin{cases} y_{n-1}^2 + y_n^2 = A, & \text{②'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n = 0, & \text{③'} \end{cases}$$

从而

$$y_{n-1} = \frac{\sqrt{A} x_n}{\sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2}}, y_n = \frac{-\sqrt{A} x_{n-1}}{\sqrt{x_{n-1}^2 + x_n^2}}.$$

由于方程组中只有两个方程②, ③, 未知数却有 $n+1$ 个 ($y_0, y_1, \cdots, y_n$). 所以有 $n-1$ 个未知数可以适当选定, 问题并不太困难. 如果其中某一个, 例如 y_0 已经在事先给定, 困难反而增大 (因为不能随意选择了). 问题变为:

试问:当且仅当实数 $x_0, y_0, x_1, \dots, x_n, (n \geq 2)$ 满足什么条件时,存在实数 $y_1, \dots, y_n$ 使得(1)成立?

条件仍为 $A \geq 0$. 必要性同前,充分性可用归纳法. $n = 2$ 时,由

$$\begin{cases} x_0 y_0 = x_1 y_1 + x_2 y_2, & \textcircled{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0^2 + A = y_1^2 + y_2^2, & \textcircled{9} \end{cases}$$

可导出另一个一次方程

$$x_2 y_1 - x_1 y_2 = \sqrt{A(A + x_0^2 + y_0^2)}. \quad \textcircled{10}$$

(只需证明有解,所以根号前只取正号即足够.)

由⑧,⑩得

$$y_1 = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{vmatrix} \sqrt{A(A + x_0^2 + y_0^2)} & -x_1 \\ x_0 y_0 & x_2 \end{vmatrix},$$

$$y_2 = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{vmatrix} x_2 & \sqrt{A(A + x_0^2 + y_0^2)} \\ x_1 & x_0 y_0 \end{vmatrix}.$$

对一般的 $n > 3$,可令 $x_2' = \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2}$,由 x_0, y_0, x_1, x_2' 及上面的结果,有 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2' = x_2' + iy_2'$ 满足

$$z_0^2 = z_1^2 + z_2'^2. \quad \textcircled{11}$$

再利用归纳假设,由 $x_2', y_2', x_2, \dots, x_n$,得出有 $z_k = x_k + iy_k, k = 2, 3, \dots, n$ 满足

$$z_2'^2 = z_2^2 + z_3^2 + \dots + z_n^2. \quad \textcircled{12}$$

综合⑪,⑫即得结论.

新的解法当然也适用原来的问题,但原来的解法显然不能用于新拟的问题,所以后者的难度大大超过前者.

例 6 8×8 的正方形中任写 64 个自然数,然后施行如下的操作:任取一个 3×3 或 4×4 的子正方形,将其中每个数加 1,能否经过若干次操作,使每个数成为 10 的倍数?

(全苏数学竞赛赛题)

原解答采用计数论证. 严镇军教授曾问我此题解法, 我想到如下的方法:

将棋盘染色, 如图 7-5 所示.

涂有阴影的方格共 24 个, 可以使这 24 个方格中的数的和 S 为奇数.

每次操作不改变 S 的奇偶性, 所以在 S 为奇数时, 不可能经过若干次操作, 使棋盘中每一个数都变成 10 的倍数.

本题的操作还可以增加一种: 任取一个 2×2 的子棋盘, 将其中每个数加 1 (4×4 的子棋盘显然由 4 个 2×2 的子棋盘组成, 因而可用这种新的操作代替).

增加这种操作后, 原来的计数论证法已不再适用, 但上面的染色法仍然适用, 所以产生一个更难的新的问题:

在 8×8 的棋盘的每个方格中任写一个自然数, 然后施行以下的操作: 任取一个 2×2 或 3×3 的正方形子棋盘, 将其中每个数加 1. 能否经过若干次操作, 使棋盘中每一个数都成为 10 的倍数?

幸而我事前未看到原题的解答, 否则多半不会去动脑筋想出上述的新解答(染色法), 也不会编造出上述的新题.

曾肯成先生命题时常设想出多种解法, 然后再变易题目, 将其他通道一一堵上, 只留下一条道路. 像曾先生这样的命题高手, 现在很难见到了.

改造旧题, 是命题的一种办法, 但未必是最好的办法, 更不是惟一的办法. 好、坏的标准在于有无新思想、新方法. 如果思想、方法依旧, 只是数据更动, 变得更加繁琐, 这样的改编实在无聊得很. 旧瓶装新酒, 酒应当是新酿的好酒, 不能是劣酒、假酒. 这种命题方法的最大缺点在于瓶子是旧的, 能够容纳的新思想有限. 西方的谚

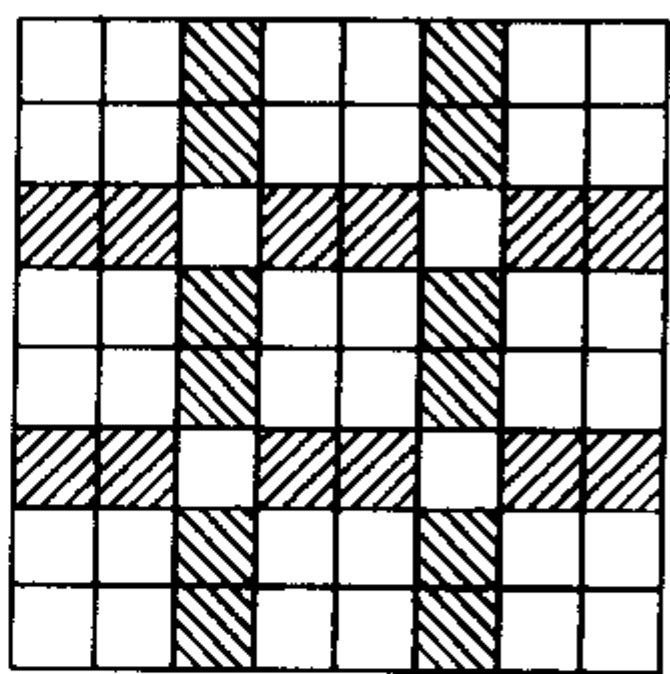


图 7-5

语是“No man put the new wine into old bottles”.不过这里的 bottles 不能译作瓶子,而应当译作皮袋,原文出自《圣经·马可福音》第二章 22 节,译文为“也没有人把新酒装在旧皮袋里,恐怕酒把皮袋裂开,酒和皮袋就都坏了.只有把新酒装在新皮袋里”.所以编造新题的最好方法还不是改造旧题,而是要从自己或别人的科研中去汲取营养.参看第 4 节源头活水.当然,如果正巧碰到一道题目可以改编,也不妨偶尔为之.学养比较高的人,能够点铁成金,翻出新花样来,但不可陷在这里面.有人不做科研,不读书刊,专在改造旧题上花功夫,仿佛贾岛一样“两句三年得,一吟双泪流”,自以为这是顺理成章的一条捷径,其实境界不算很高,虽也能编出几道题来,但日久地长就难免干枯,捉襟见肘了.更有些人知识面较窄,出的题往往偏于某一种类型,年年岁岁在单一的类型中“深挖洞”,越挖越偏、越怪,这种命题方法不值得提倡.

4. 源头活水

“问渠哪得清如许,为有源头活水来.”

数学问题,尤其是有竞赛意味的问题,不断推陈出新,层出不穷,其问题在于有两个源头,一个是实际生活.生活中不断产生新问题,这在处处留心一节中已经说过.另一个则是科学研究.研究中产生的问题可以“稀释”为中、小学的问题,这正体现了数学的不断普及.

例 1 在任意 6 个人中,或者有三个人互相认识,或者有三个人互不相识.

这是 Ramsey 定理的最简单的情况,现在已成为每一本竞赛课程中必不可缺的例题.而且,以这道题为标志,组合数学与图论

的知识与问题源源不断地流向中、小学课外读物与各种竞赛.

例 2 证明在单位球上两两距离 ≥ 1 的点不超过 14 个.

这个问题来自著名的格里高利—牛顿的十三个球猜测. 可以证明在单位球上两两距离 ≥ 1 的点至多 12 个. 但这个结论太难, 是一篇论文的内容, 将 12 减弱为 14 就可以作为中学竞赛题了.

本题可利用面积来证, 以每一点为极作一球冠, 球冠高为 $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以球冠面积为 $2\pi(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$. 这些球冠互不重叠, 所以总面积 $\leq$ 球面面积 4π . 从而球冠个数

$$\leq 4\pi \div 2\pi(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 4(2 + \sqrt{3}) < 15.$$

即已知点的个数 ≤ 14 .

这题曾给北京 97 年准备参加冬令营的选手作为练习, 反映是: 不容易.

格里高利(D. Gregory, 1661—1708) 1694 年与牛顿讨论星球相互吸引的问题. 由于星球间距离很大, 可以假定每颗星是一个点, 并且各点之间的距离不等. 对每一点(每颗星)A, 有一点 B 到 A 的距离小于其他点到 A 的距离, 将 A 与 B 连结起来. 问每一点至多与几个点相连? 这个问题可化为例 2:

如果 C, B 均与 A 相连, 不妨设 $CA > BA$.

这时, C, A 相连不是因为 C 到 A 的距离小于其他点到 A 的距离, 而是因为 A 到 C 的距离小于其他点到 C 的距离, 所以 $CB > CA$.

在 $\triangle ABC$ 中, CB 为最大边, 所以 $\angle CAB > 60^\circ$. 以 A 为圆心作一单位球, 与 AB, AC 等分别交于 B' , C' 等(图 7-6), 则由于 $\angle CAB > 60^\circ$, 所以 B' , C' 等间的距离均大于 1. 问题即变为在单位球上至多有多少点两两的距离 ≥ 1 ?

如果过每个这样的点作一个单位球与球 A 相切, 那么这些球

互不重叠. 牛顿认为这样的球至多 12 个, 而格里高利则猜测也可以有 13 个. 这就是著名的 13 个球的问题.

再如著名的挂谷 (Kakeya) 问题: 一根长为 1 的线段旋转 360° , 它扫过的面积至少是多少? 从这个问题, 我们可以编出若干简单的问题如下.

例 3 线段 AB 与 CD 平行而且相等. 将 AB 移到与 CD 重合, AB 扫过的面积至少是多少?

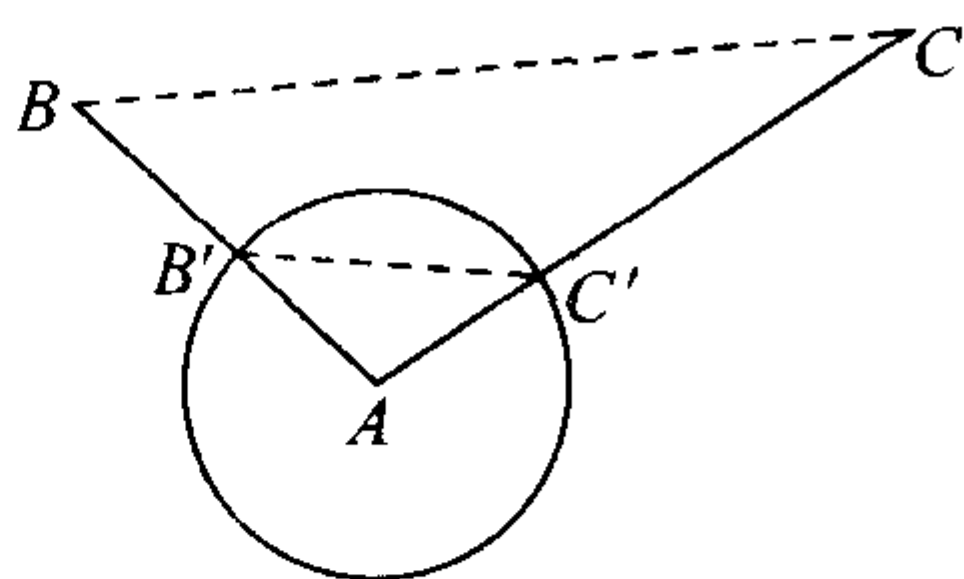


图 7-6

很多人认识最小面积就是平行四边形的面积, 其实大谬不然.

正确的答案是 AB 扫过的面积可以任意地小. 事实上, 如图 7-7, 先将 AB 绕 A 转过 ϕ 变为 AB' . 直线 AB' 与 CD 不平行, 设它们相交于 C' . 将线段 AB' 沿所在直线移动, 直至 A 与 C' 重合. 再绕 C' 旋转 ϕ (方向与上次旋转相反), AB 就落到直线 CD 上了. 最后沿直线 CD 移动, 直至 AB 与 CD 重合.

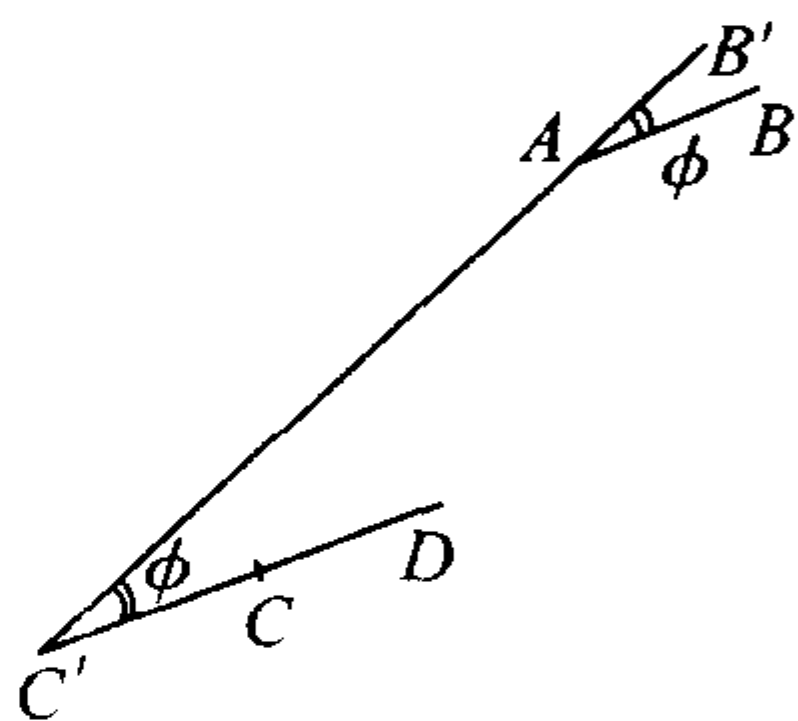


图 7-7

在上述过程中, AB 扫过的面积是 2 个扇形, 如果 ϕ 是以弧度制计算的, 那么

$$\text{扫过面积} = AB^2 \times \phi.$$

由于 ϕ 可以任意小, 所以 AB 扫过的面积也可以任意小.

图 7-7 在两线平行同位角相等这一定理中曾出现过, 用到这里大概有点出乎意料.

例 4 线段 $AB = 1$, 在 AB 上取一点 O , $OA = a$, 绕 O 点将 AB 旋转半周, 所扫过的面积的最小值是多少?

这个问题不难. AB 扫过的面积是

$$\frac{\pi}{2}(a^2 + (1-a)^2).$$

在 $a = \frac{1}{2}$ 时取最小值 $\frac{\pi}{4}$.

我在研究数论函数 $d(n)$ 的性质时,发现一个著名的 Heath-Brown 引理有一部分可以叙述成如下的问题并且用归纳法就可以证明.

例 5 证明对任意自然数 $n \geq 2$, 存在自然数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, 满足

$$a_j - a_i = (a_i, a_j), 1 \leq i < j \leq n.$$

这里 (a_i, a_j) 表示 a_i 与 a_j 的最大公约数.

在 $n = 2$ 时,取 $a_1 = p, a_2 = 2p, p$ 为奇素数即可.假设命题对 n 成立.令 M 为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的任一公倍数,则 $n + 1$ 个数

$$M, M + a_1, M + a_2, \cdots, M + a_n$$

满足要求.

在研究库拉托夫斯基定理的推广时,发现下面的问题.

例 6 设 $\mathbf{N}$ 为自然数集. $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{N}$. 用 $g(\mathbf{A})$ 表示 $\mathbf{A}$ 在 $\mathbf{N}$ 中的补集 $\mathbf{N} - \mathbf{A}$. 又令

$$f(\mathbf{A}) = \{a : a \text{ 可表为 } \mathbf{A} \text{ 中若干个数的积}\},$$

($\mathbf{A}$ 中的数也都算作积,因而都在 $f(\mathbf{A})$ 中)称为 $\mathbf{A}$ 生成的集.证明从任一集 $\mathbf{A}$ 出发,采用函数 g, f 及其复合,至多产生 14 个不同的集.举出一个恰好产生 14 个集的 $\mathbf{A}$.

本题的解法是完全初等的,但并不容易,请参见拙著《十个数学问题》(上海教育出版社),这里不再重复.

科研中产生的初等问题极多.美国、俄罗斯等国都有人将这方面的问题介绍到中、小学,我国热心于这一件事的人还不多.真要搞好命题工作,仅靠闭门造车,改造旧题是不够的,必须引入这一

股源头活水,方能生意盎然.

3. 可上可下

一个问题,经过适当改造,可以用于不同年级.

例 1 25 块奶酪,重量不等,能否将其中一块切成两块,然后分装在甲、乙两个袋中,每袋 13 块,切成的两块不在同一袋中,并且两袋中奶酪的重量相等?

这道题可供初中或高中学生做.改得具体一点:

“5 块奶酪,重量分别为 100,52,34,30,26(克),能否将其中一块切成两块,然后分装在甲、乙两袋中,每袋 6 块,……(与上面相同)?”

那么,这道题也可给小学生做,甚至给小学低年级的学生做.如果其中所给数据不全为整数(有分数、小数),或者奶酪重量之和不是偶数,小学低年级学生就无法做了,可供小学生高年级选用.

例 2 一个正方形被分成 25 个正方形,其中恰有 24 个边长为 1.求原正方形的面积.

这题可供初中生做.正方形可改为正方体,成为高中生的一道题:

“一个正方体被分成 99 个正方体,其中恰有 98 个边长为 1.求原正方体的体积.”

这里 99,98 可改为 n 与 $n-1$.要求“对哪些 n ,问题有解”,这就变成一个更难的问题了.

在源头活水那节已经说过许多研究成果(如 Ramsey 定理)的特殊情况可以“下放”到中小学.一般说来,一个高年级的问题如果减低难度,增加一些“阶梯”,或者特殊化、具体化,就可以“稀释”成

低年级的问题.反之,低年级的问题,也可抽去一些阶梯,加强难度,或者一般化,或者增加知识,成为高年级的问题.

例 3 一圆的水平直径上移 a , 竖直直径上移 b , 这两条线将圆分成四部分. 最大一份与最小一份的面积和记为 S_1 , 另两份的面积和记为 S_2 . 求 $S_1 - S_2$.

这个问题稍变一下就成为:

一圆圆心为 (a, b) , 圆在一、三象限的面积和为 S_1 , 在二、四象限的面积和为 S_2 , 求 $S_2 - S_1$.

两题类似, 答案均为 $4ab$, 但后者增加了“坐标”、“象限”等名词, 而且 a, b 不一定是正数.

例 4 作若干条竖线, 上端分别标 A, B, C , 下端分别标 C, B, A . 在两条相邻的竖线之间添加横的线段. 规定从竖线的上端出发, 向下行, 遇到拐弯时必须拐弯. 问至少要添几条横线才能从上端的 A, B, C 分别行到下端的 A, B, C ?

如图 7-8, 添 3 条横线即可. 我们可以增加竖线的条数使问题加难. 更一般地, 对 n 条竖线, 上端为 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 下端为 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的任一排列, 至少要添几条横线, 才能从每个上端的 A_i 行到下端的 A_i ($1 \leq i \leq n$)? 这个问题, 高中乃至大学学生未必能很快解出. 而原来的问题, 小学生也可以胜任, 不感到困难.

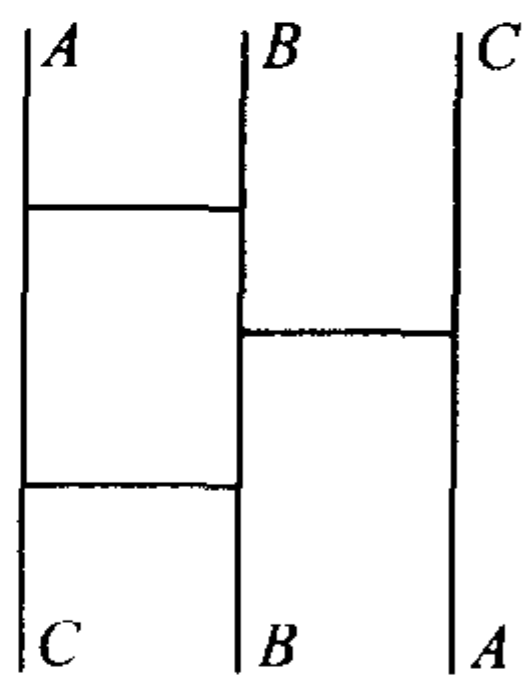


图 7-8

有些问题, 解法不止一种. 可以将题目稍加变化, “堵上”一些解法.

例 5 已知 a, b 为正整数, 并且 $a^2 + b^2$ 被 ab 整除, 求证 $a = b$.

本题有一种解法如下: 令

$$a^2 + b^2 = kab, k \in \mathbf{N},$$

则 $\frac{a}{b}$ 是方程

$$x^2 - kx + 1 = 0 \quad ①$$

的有理根, 因而①的判别式

$$\Delta = k^2 - 4$$

是平方数. 由 $k^2 - 4 = h^2$ 得 (注意 $k + h, k - h$ 同奇偶)

$$\begin{cases} k + h = 2, \\ k - h = 2, \end{cases}$$

所以 $k = 2, a = b$.

这种解法需要应用二次方程①的判别式. 如果将条件“ $ab \mid a^2 + b^2$ ”改为“ $a^2b \mid a^3 + b^3$ ”, 这种方法就失效了, 因为 $\frac{a}{b}$ 是三次方程

$$x^3 - kx + 1 = 0 \quad ②$$

的正有理根, 无法用二次方程的判别式. 但熟知整系数方程

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a = 0,$$

若有有理根 $\frac{p}{q}$ (p, q 为互质整数), 则 $p \mid a_0, q \mid a_n$. 所以, ②只有一个正有理根, 即 1, 从而 $a = b$.

这一方法也适用于原来的问题.

例 6 求证 1997^{17} 不能表示成若干个连续自然数的立方和.
本题有人利用

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

来解. 但如果将“立方和”改为“9 次方的和”, 那么这种方法就难以成功了.

应当采用同余来解: 一方面,

$$1997^{17} \equiv 2^{17} \equiv 2^5 \equiv -4 \pmod{7}.$$

另一方面, 不难算出下表

$$\begin{array}{c|c} n & 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots \\ n^3 & 0, 1, 1, -1, 1, -1, -1, \dots \pmod{7} \end{array}$$

$\{n^3 \pmod{7}\}$ 成周期数列, 所以连续自然数的立方和 $\equiv 0, 1, 2, -1, -2 \pmod{7}$.

从以上两方面立即得出 $1\,997^{17}$ 不能表示成若干个连续自然数的立方和.

完全同样, $1\,997^{17}$ 也不能表示成若干个连续自然数的 9 次方的和.

堵上一些解法, 显然使难度增加. 这是一种“向上”的手法.

与之相反的, 是增加阶梯, 将一个大题拆成许多小题, 减少难度.

例 7 考虑从正整数集 $\mathbf{N}$ 到自身的函数 f . 已知对所有 $s, t \in \mathbf{N}$,

$$f(t^2 f(s)) = s(f(t))^2.$$

求 $f(1\,998)$ 的最小的可能值.

本题可分成许多步骤或小题, 先证明

$$(i) f(f(s)) = s(f(1))^2.$$

$$(ii) f(f(1)) = (f(1))^2.$$

$$(iii) f \text{ 单, 即 } f(s_1) = f(s_2) \text{ 将导出 } s_1 = s_2.$$

$$(iv) f(r^2 s) f^2(1) = f(s) f^2(r).$$

其次, 对于 $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ 的函数 f , 如果对所有 $r, s \in \mathbf{N}$, (iv) 成立, 证明对所有 $r, s \in \mathbf{N}$

$$(i) f^2(r) = f(r^2) f(1).$$

$$(ii) f(1) \mid f(r).$$

$$(iii) f(rs) = f(r) f(s) / f(1).$$

再次,对上面的 $f(r)$,令 $F(r) = \frac{f(r)}{f(1)}$,证明

(i) $F(r)$ 是从 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的单映射.

(ii) $F(1) = 1$.

(iii) $F(rs) = F(r)F(s)$.

(iv) $F(F(s)) = s$.

还可提出这样的问题:设 $F(r)$ 是满足(i)、(ii)、(iii)、(iv)的函数,证明对每个质数 p , $F(p)$ 的值 q 一定是质数,并且 $F(q) = p$,应怎样定义 F ?

最后,对所定义的满足(i)~(iv)的 F 及任意的 $f(1)$,证明由 $f(r) = f(1)F(r)$ 定义的 $f(r)$ 满足原题所有条件,从而得出

$$f(1998) = f(1)F(2)F^3(3)F(37)$$

的最小可能值为 $1 \times 3 \times 2^3 \times 5 = 120$.

如果一道复杂的题(如例7)解不出来,那么必有一个或一些比较容易的问题(如上面所列的各个小问题)解不出来或没有解好.反过来,如果每个小问题都解决了,那么复杂的题也就不难解决了.因为它不过是一些小题串在一起.优秀的教师,可以在学生解题遇到困难时,给予恰到好处好处的提示,帮助学生克服困难.但提示也不宜太多,太多就索然无味了.

善于将一道复杂的题分解为许多小题(即关键步骤),不仅吃透了这道题,而且也不会感到题目匮乏,这也是命题的一个重要方法.

6. 苦心孤诣

有时需要根据某种要求进行编题,这好像语文中出了题目再

写文章,限制比较大.但命题高手,依然能够编出一些好题.

例 1 某市,如果一个人以他的住所画一个半径为 R 的圆,圆中 85% 以上的居民都比他矮,他就可以称为“伟人”.如果以他的住所画一个半径为 r 的圆,圆中 90% 以上的居民都比他高,他就可以称为“矮子”.这里 R, r 都可以由你随意选定.问这城市是否可以有 95% 以上的居民既是“伟人”又是“矮子”?

解 先考虑一条直线,上面有一些人,从左到右,一个比一个矮,而彼此的距离不断增加.使得除开始的 9 个人外,每一个人到他左面的人的距离小于到他右面的人的距离(具体地说,设第 n 个人在 a_n 处——即距某个原点的距离为 a_n ,取 a_{n+1} 使 $a_{n+1} > 2a_n - a_1$ 即可).这样,除去开始的 9 个人,其余的人都是矮子.人数足够多时,矮子可占 99% 以上.

然后考虑一条条的平行线.每条线上,高矮及位置情况均相同,并且都按照上面所说的,每一条线上,99% 的人为矮子.使平行线之间的距离大于同一条直线上任两个人的距离.这样,就不影响“99% 的人为矮子”的结论.

使每一条平行线的人都比上一条平行线上的人高,并且每一条平行线的人与上面的平行线上的人的距离小于这平行线到下一条平行线的距离(由于下一条平行线可以自由地,在前面的平行线确定后,再加以选择.这总是可以做到的).这样,自第 9 条线起,每一个人都是“伟人”.

由于平行线可不断增加,所以总可以使 95% 以上的居民既是矮子,又是伟人.

“直线是一维的,平面是二维的”.这是一个众所周知的简单事实.到了高手手中,却编成了例 1 这样绝好的题.

序,也是一个重要的数学概念.日本小学生数学竞赛就围绕“序”编了一道好题(著名数学家、菲尔兹奖获得者广中平佑亲自担

任日本小学生数学竞赛委员会的理事长).

例 2 如图 7-9, 黑色与白色的卡片各十张, 分别写有数字 0 到 9, 甲、乙、丙、丁 4 个人每人面前放 5 张卡片, 标有数字的一面面向自己, 并按照从小到大的顺序自左向右排列; 对两张数字相同的卡片, 将白的放在黑的右面. 问

(1) 白 9 是哪一张卡片?

(2) 黑 1 是哪一张卡片?

(3) 白 5 是哪一张卡片?

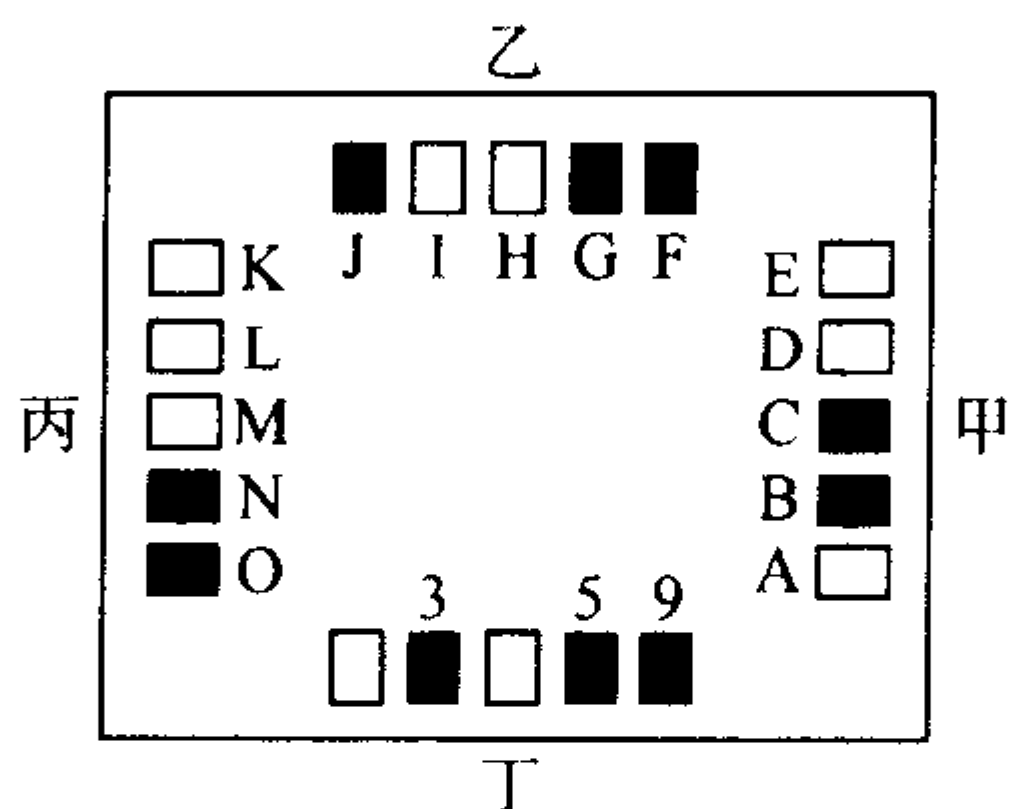


图 7-9

解 (1) 白 9 不能排在任一张卡片的左面, 所以它只能是 E.

(2) 黑 0 不能在任一张卡片右面, 所以它是 F. 同理, 黑 1 是 G.

(3) 去掉已知的 7 张卡片: 白 9, 黑 9, 黑 5, 白 3, 黑 3, 黑 1, 黑 0, 再考虑剩下的 11 张.

显然白 8 是 D (理由同 (1)). 白 7 的右面只可能有一张黑卡片, 因此白 7 是 I, 黑 8 是 J. 同理白 6 是 H.

现在还剩下八张卡片需要确定: 四张白的, 号码为 5, 4, 2, 1; 四张黑的, 号码为 7, 6, 4, 2.

N 的左面有 3 张白卡片, 所以它不能是黑 4 或黑 2, 从而 N 是黑 6, O 是黑 7, C 是黑 4, B 是黑 2, A 是白 1.

最后, M, L, K 分别为白 5, 白 4, 白 2.

有些问题,含有诱人上当的陷阱(在“脑筋急转弯”这类游戏中常常遇到).

汀汲湘先生就曾设计了两个谜语:

1. 外圆内方, tong 的, 打一物.

年轻的朋友不太熟悉这件东西, 老一辈的人立即知道这是铜钱. 原先作为货币使用, 后来成为游戏的工具(如用来缝毽子), 现在也有人收藏.

2. 外方内圆, tie 的, 打一物.

这就很难猜了. 由于第一个谜语的影响, 大家都会往铁(tiě)制品这方面想, 谜底却是膏药. 这种膏药现在也少见了, 日本的国旗曾被称为膏药旗, 形状大体相近. 膏药当然是贴(tiē)的. 这里的 tie 是第一声的贴, 而不是第三声的铁.

两个谜语中, 第一个完全是“诱敌之兵”, 先给你点甜头尝尝, 实际上将你的思路引到错误的方向. 这样, 第二个谜语就成为难题了.

笔者也曾编过一个数学问题, 仿效汀先生的风格. 问题如下:

例 3 设 x, y 都是若干个有理数的平方和, 证明

(1) $x + y$ 是若干个有理数的平方和.

(2) xy 是若干个有理数的平方和.

(3) $y \neq 0$ 时, $\frac{x}{y}$ 是若干个有理数的平方和.

(4) $x > y$ 时, $x - y$ 是若干个有理数的平方和.

这里“若干个”不一定是相同的个数.

第(1)问很显然, 设

$$x = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2,$$

$$y = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2,$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都是有理数, 则

$$x + y = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2 + b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$$

是 $m+n$ 个有理数的平方和.

第(2)问也不难. 设同(1), 则

$$xy = \sum_{i=1}^m a_i^2 \sum_{j=1}^n b_j^2 = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i b_j)^2$$

是 mn 个有理数的平方和.

第(3)问就不容易了. 沿着(1), (2)两问的思路是走不通的, 必须“悬崖勒马”, 重找新路.

首先注意每个正有理数都可以写成 $\frac{p}{q}$ 的形式, 其中 p, q 都是正整数, 而

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \frac{pq}{q^2} = \frac{1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2 (\text{共 } pq \text{ 个 } 1^2)}{q^2} \\ &= \left(\frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{q}\right)^2 \end{aligned}$$

是 pq 个有理数的平方和. 因此, 每个正有理数都可以表示成若干个有理数的平方和, 而 $0=0^2$ 也是有理数的平方和. 于是, 非负有理数 都是若干个有理数的平方和.

问题中的条件“ x, y 都是若干个有理数的平方和”无大用处, 只是说明 x, y 都是非负有理数(从而 $x+y, xy, \frac{x}{y}, x-y$ 也都是非负有理数), 如此而已, 岂有它哉!

这类设有陷阱的问题不宜作为考题. 不应故意“坑害”学生(现在有些似是而非的选择题, 命题者就有“居心不良”的嫌疑). 但在课外活动可以偶一为之. 有些研究工作(如复变函数中的比勃巴赫猜测, 不少人在估计系数至小数后几位)就是误入歧途, 直到不再坚持走错误的道路, 才迎来了胜利的曙光.

还有检查学生定势思维的题, 如前面已说过的第三章第7节例4, 很多学生都立即想到判别式(我在不少地方试验过, 屡试不爽).

不过,好的题多数还是像第4节所说,从科研中自然而然地产生.苦心孤诣,也能造出一些题来,但用力较多,不易见好,一不留心,还会出错.

7. 小心出错

自编的题,可能会有疏漏甚或错误.如用作试题,更要特别小心,不仅应当拟好解答,而且应当有未见过解答的人(最好多于1个),再去做一遍.务求万无一失.

例1 某水池装有编号为1,2,3,4,5,6,7,8,9的9个进水管,已知所开水管号与水池灌满的时间如下表:

水管号	1,2	2,3	3,4	4,5	5,6	6,7	7,8	8,9	9,1
时间(小时)	2	4	8	16	32	64	128	256	256

问9个水管一齐开,多少小时灌满水池?

解 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{256} = 1,$

所以如果9个水管的两倍一齐开,1小时灌满水池.9个水管一齐开,2小时灌满水池.

解答并没有问题,但检查一下,1,2两管齐开,2小时就可以灌满,而现在9管齐开,仍然是2小时才可以灌满.这显然有悖常理.因此题中数据必然有错.如果保持原来数据,那么9个水管中,有的为进水管,有的为出水管.

设各水管单开灌满水池的时间分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_9$ (小时), 则

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} = \frac{1}{16} \\ \frac{1}{x_5} + \frac{1}{x_6} = \frac{1}{32} \\ \frac{1}{x_6} + \frac{1}{x_7} = \frac{1}{64} \\ \frac{1}{x_7} + \frac{1}{x_8} = \frac{1}{128} \\ \frac{1}{x_8} + \frac{1}{x_9} = \frac{1}{256} \\ \frac{1}{x_9} + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{256} \end{cases}$$

可解出 $x_1 = \frac{256}{43}$, $x_2 = \frac{256}{85}$, $x_3 = -\frac{256}{21}$, $x_4 = \frac{256}{53}$, $x_5 = -\frac{256}{37}$,
 $x_6 = \frac{256}{45}$, $x_7 = -\frac{256}{41}$, $x_8 = \frac{256}{43}$, $x_9 = -\frac{256}{42}$.

所以,水管 3,5,7,9 应当是出水管.

例 1 不可用作小学试题. 对于初中学生,由于有负数概念,将“出水管”解释为“负若干小时灌满水池的进水管”,虽然可以勉强说得通,但不如径直指出有的是进水管,有的是出水管.

例 2 如图 7-10, $\odot O_1, \odot O_2$ 相交于 P, Q , 过 Q 作 $\odot O_1$ 的切线交 $\odot O_2$ 于 A . 直线 AP 交 $\odot O_1$ 于 B , AO_2 交 $\odot O_1$ 于 C, D , 交 $\odot O_2$ 于 E , 并且 $\frac{PC}{PD} = \frac{CE}{DE}$. 求证:

(1) $\angle CPE = \angle DPE$.

$$(2) AQ^2 - AP^2 = PC \cdot PD.$$

解 (1) 过 E 作 PC 的平行线交 PD 于 F .

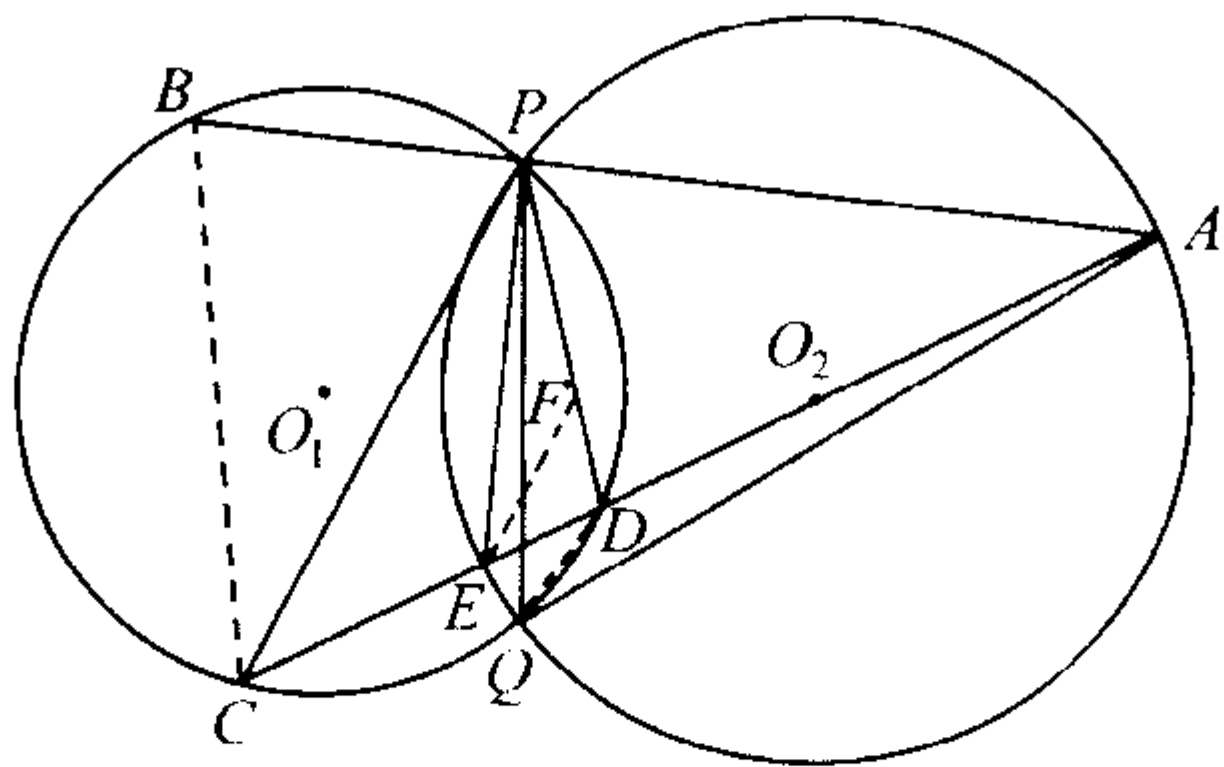


图 7-10

易知 $\frac{DF}{FP} = \frac{DE}{CE} = \frac{PD}{PC} = \frac{DF}{EF}$, 从而 $FP = EF$, $\angle FPE = \angle FEP = \angle CPE$.

$$(2) AQ^2 - AP^2 = AP \times AB - AP^2 = AP \times PB.$$

由 $\angle APE = 90^\circ$ 及 (1), $\angle APD = \angle CPB$. 又 $\angle ADP = \angle CBP$. 所以 $\triangle APD \sim \triangle CPB$, $AP \times PB = PC \times PD$.

这道题, 依照所拟的解答, 看不出有什么错误. 但如果沿另一条途径“切入”, 就会发现 $\angle CPE$ 与 $\angle DPE$ 不可能相等.

事实上, 连公共弦 PQ (两图相交时, 公共弦几乎是一定要连的辅助线) 与 DQ , 则

$$\begin{aligned} \angle CPE &= \angle PED - \angle PCD = \angle PQA - \angle PQD \\ &= \angle DQA = \angle DPQ < \angle DPE. \end{aligned}$$

所以, 人为添加的条件 $\frac{PC}{PD} = \frac{CE}{DE}$ 是不成立的.

这道题是某市的中考题. 考完后反应强烈, 议论纷纷, 命题者也觉得压力很大, 痛哭流涕. 可见命题必须慎之又慎.

问题的难度, 也需要找一些人 (最好是不知解答的人) 做一做才能正确地确定.

例3 如图 7-11, 已知凹四边形 $ABCD$, $\angle A = \angle B = \angle D = 45^\circ$, 求证 $AC = BD$.

从命题者所拟的解答看, 本题非常艰难. 实际上却并非如此, 只需延长 BC 交 AD 于 E , 由 $\angle A = \angle B = 45^\circ$, 立得 $\angle E = 90^\circ$, $AE = BE$. 再由 $\angle D = 45^\circ$, $\angle E = 90^\circ$ 得 $CE = DE$. 因此 $\triangle AEC \cong \triangle BED$, $AC = BD$. 可见这只是一个极普通的初中问题.

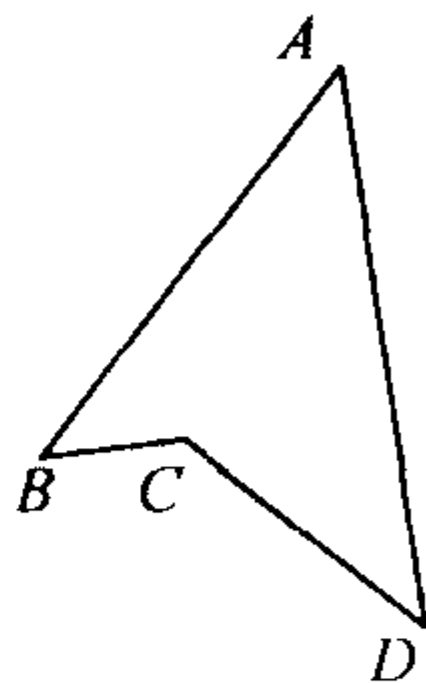


图 7-11

本题见《首届全国数学奥林匹克命题比赛精选》, 关于此书, 我曾写过一篇长评, 见《中等数学》1993 年第 6 期.

例4 设曲线 C 的方程是 $y = x^3 - x$, 将 C 沿 x 轴、 y 轴正向分别平行移动 t, s 单位长度后得曲线 C_1 .

(I) 写出曲线 C_1 的方程.

(II) 证明曲线 C_1 与 C 关于点 $A(\frac{t}{2}, \frac{s}{2})$ 对称.

(III) 如果曲线 C 与 C_1 有且仅有一个公共点, 证明 $s = \frac{t^3}{4} - t$ 且 $t \neq 0$.

解 (I), (II) 略.

(III) 因为曲线 C 与 C_1 有且仅有一个公共点, 所以方程组

$$\begin{cases} y = x^3 - x \\ y = (x - t)^3 - (x - t) + s \end{cases}$$

有且仅有一个解.

消去 y , 整理得

$$3tx^2 - 3t^2x + (t^3 - t - s) = 0. \quad ①$$

这个关于 x 的一元二次方程有且仅有一个根, 所以 $t \neq 0$ 并且根的判别式

$$\Delta = 9t^4 - 12t(t^3 - t - s) = 0.$$

即

$$\begin{cases} t \neq 0, \\ t(t^3 - 4t - 4s) = 0. \end{cases}$$

$$\therefore s = \frac{t^3}{4} - t \text{ 且 } t \neq 0.$$

本题是 1998 年高考数学试题(理工农医类). 上面是命题组提供的解答. 这个解答稍嫌麻烦. 其实由曲线 C 与 C_1 有且仅有一个公共点及 (II), 便可推出这个公共点一定是对称中心, 即点 $A(\frac{t}{2}, \frac{s}{2})$: 因为公共点 M 关于点 A 的对称点 N 也是两条曲线的公共点, 所以 M, N 必须与 A 重合. 这样点 $A(\frac{t}{2}, \frac{s}{2})$ 在曲线 C 上, 所以

$$\frac{s}{2} = (\frac{t}{2})^3 - \frac{t}{2},$$

$$\text{即 } s = \frac{1}{4}t^3 - t.$$

如果 $t=0$, 那么 $s=0$. 这时 C_1 即 C , 而两条重合的曲线有无穷多个公共点(曲线上每一点都是公共点). 因此必有 $t \neq 0$.

命题组的解答将 (III) 与 (I), (II) 割裂, 似不合原题命题的意旨, 我怀疑这是一道借用的陈题.

此外, 命题组的解答, 关于 $t \neq 0$ 的部分是不正确的. $t \neq 0$, (1) 才是一元二次方程, 不能倒过来说 (1) 是一元二次方程(从何而知?), 所以 $t \neq 0$.

题目的区分度更是一件很难判定的事. 难一些, 通常区分度也大一些, 但题目过难, 谁也做不出, 区分度就变为 0 了. 试前, 难易程度, 区分度往往只能凭经验大概估计. 试后才可以根据数据精确算出. 这虽然是“事后诸葛”, 但日积月累, 也就有了丰富的经验, 估计也就八九不离十了.

试题的覆盖率, 没有考虑的必要. 因为任何一个知识点都有被

考到的可能性,从长期讲,机会均等.并不需要年年都要覆盖 85% 乃至 90% 以上.过于强调覆盖率就造成各年试题面目相近,增加命题的困难,可谓“作茧自缚”.

8. 问题的背景

不了解问题的背景,解法往往不能做到简单自然.

作为教师,他应比学生高出一筹.尤其是教师读过大学,理应知道很多问题的背景.

有人认为大学里学的数学在中学教育中完全用不上,这种观点当然是不对的.且不说大学教育能使教师的素质提升、眼界开阔,至少能使教师把握许多问题的背景.所谓“完全用不上”,并非真正用不上,而只是没有能很好地将大学知识与中学问题有机地联系起来.

下面举一些例子,说明了解问题的背景是如何有用.

例 1 甲、乙、丙三种货物.若购甲 3 件,乙 7 件,丙 1 件,共需 3.15 元.若购甲 4 件,乙 10 件,丙 1 件,共需 4.20 元.问:购甲、乙、丙各一件共需几元?

设甲、乙、丙每一件各需 x, y, z 元.问题要求出 $x + y + z$ 的值,根据题意,

$$\begin{cases} 3x + 7y + z = 3.15, \\ 4x + 10y + z = 4.20. \end{cases}$$

三个未知数,却只有两个方程,因而想解出 x, y, z 是不可能的.但求不出 x, y, z ,并不意味着没有办法求出 $x + y + z$.事实上将第一个方程乘 3 减去第二个方程乘 2,便得出

$$x + y + z = 3.15 \times 3 - 4.20 \times 2 = 1.05.$$

问题的背景是三维向量 $(3, 7, 1)$ 与 $(4, 10, 1)$ 可以生成向量 $(1, 1, 1)$. 学过线性代数的人不难将

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 4 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

用行的初等变换化成“行梯形”, 即第一行第一个数为 1, 第二行第二个数为 1. 第一行第二个数与第二行第一个数均为 0,

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

这样, 可由 $(3, 7, 1)$ 与 $(4, 10, 1)$ 生成的全部三维向量是

$$(a, b, \frac{3a-b}{2}) \left(= a(1, 0, 3/2) + b(0, 1, -1/2) \right)$$

的形式, 其中 a, b 为任意数. 特别地, 在 a, b 均为 1 时得到 $(1, 1, 1)$.

取 $a=2, b=4$, 我们就可以问购甲 2 件, 乙 4 件, 丙 1 件共需几元?

从上面的初等变换可以得出

$$\begin{aligned} (1, 3, 0) &= (4, 10, 1) - (3, 7, 1), \\ (0, -2, 1) &= (3, 7, 1) - 3(1, 3, 0) \\ &= 4(3, 7, 1) - 3(4, 10, 1), \\ (0, 1, -\frac{1}{2}) &= -2(3, 7, 1) + \frac{3}{2}(4, 10, 1), \\ (1, 0, \frac{3}{2}) &= (1, 3, 0) - 3(0, 1, -\frac{1}{2}) \\ &= -\frac{7}{2}(4, 10, 1) + 5(3, 7, 1). \end{aligned}$$

所以

$$(a, b, \frac{3a-b}{2}) = \frac{-7a+3b}{2}(4, 10, 1) + (5a-2b)(3, 7, 1).$$

在 $a=2, b=4$ 时,有

$$(2, 4, 1) = -(4, 10, 1) + 2(3, 7, 1)$$

即将方程组的第一个方程乘 2 减去第 2 个方程便得出

$$2x + 4y + z = 3.15 \times 2 - 4.20 = 2.10.$$

当然,在很多情况,结果都可以通过观察直接凑出(也应该如此).但作为学过大学代数的人,不可不知道上述背景及一般的结论.

例 2 化简

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

解 上式是 x 的多项式 $f(x)$, 次数 ≤ 2 . 显然, $f(a) = f(b) = f(c) = 1$. 而由多项式恒等定理, 两个次数 $\leq n$ 的多项式, 如果在 $n+1$ 个不同的点, 两个多项式的值均对应相等, 那么这两个多项式恒等. 因此, $f(x) = 1$ 为恒等式. 即上式为 1.

在第一章第 6 节例 4, 我们做过这道题. 如果知道多项式恒等定理, 那么这道题就成为显然了.

例 3 求方程

$$5x^2 + 6xy + 2y^2 - 14x - 8y + 10 = 0 \quad \text{①}$$

的所有实数解.

本题的方程是二元方程, 因而解通常是不定的, 即有无穷多个. 从几何观点说, ① 是一条二次曲线, 通常上面有无穷多个点 (x, y) , 即①有无穷多解. 而现在要求它的所有实数解, 暗示①是点或虚椭圆的方程, 换句话说, ①式左边可化成平方和的形式. 这应当能通过配平方的方法实现.

从解析几何观点, 问题即以椭圆的主轴为坐标轴, 但这种方法计算往往比较复杂.

从代数观点, 这种二次形的配方可以用常规的 Lagrange 配方法完成, 这种方法容易掌握:

首先将有 x 的项放在一起,配方,即

$$\begin{aligned}& 5x^2 + 6xy + 2y^2 - 14x - 8y + 10 \\&= 5x^2 + 2x(3y - 7) + 2y^2 - 8y + 10 \\&= 5x^2 + 2x(3y - 7) + \frac{1}{5}(3y - 7)^2 + 2y^2 - 8y + 10 - \frac{1}{5}(3y - 7)^2 \\&= \frac{1}{5}(5x + 3y - 7)^2 + \frac{1}{5}(y^2 + 2y + 1) \\&= \frac{1}{5}(5x + 3y - 7)^2 + \frac{1}{5}(y + 1)^2.\end{aligned}$$

为避免分数运算,可以先将方程(1)两边先乘以 5,然后再配方.

学过大学代数的人,如果竟认为“像本例这样的问题,无论如何也无法配成平方”,对此束手无策,那大学代数岂不是白学了?反过来说,学一点稍高一点的东西并不是没有用的.

例 4 已知 a, b, c, d, k 都是实数, $|k| < 2$, 并且

$$a^2 + b^2 - kab = 1, \quad (1)$$

$$c^2 + d^2 - kcd = 1. \quad (2)$$

求证

$$|ac - bd| \leq \frac{2}{\sqrt{4 - k^2}}. \quad (3)$$

本题不太容易.要获得简单、自然的解法必须对①,②,③的意义有所认识.

①,②当然表示点 $A(a, b), B(c, d)$ 都在椭圆

$$x^2 + y^2 - kxy = 1 \quad (4)$$

上(因为 $|k| < 2$, 所以④不是双曲线,也不是抛物线).由于 c, d 的对称性,点 $C(d, c)$ 也在这椭圆上.

③的左边 $|ac - bd|$ 是什么东西?很多人没有弄清楚就贸然动手,结果当然难以游刃有余.如果将它写成

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ 1 & d & c \end{vmatrix} \text{ 的绝对值}$$

就会发现它是 $\triangle OAC$ (O 是原点) 的面积的两倍. 问题的实质就是求这面积的最大值. ③式右边当然就是这最大值的两倍.

熟悉向量积的人更应当一眼就看出这一几何背景. 当然, $|ac - bd|$ 不是向量 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ 而是 $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}$ 的模. 只需先将点 (c, d) 换成点 (d, c) , 这点小小的狡狴, 骗不了解题经验丰富的人, 但却也会使许多 green hand 上当.

方程④不是标准的椭圆方程, 需要作坐标旋转, 使椭圆的主轴成为坐标轴. 设这时椭圆方程为

$$lx^2 + my^2 = 1. \quad (5)$$

则由基本不变量可知

$$lm = 1 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{4 - k^2}{4} \quad (6)$$

[如不熟悉坐标变换的基本不变量, 直接将④变为 $\frac{2-k}{4} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{2+k}{4} \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$ 也可得出⑥].

于是 $\triangle OAC$ 的面积的两倍

$= |ac - bd| = |a'c' - b'd'|$ $[(a', b'), (d', c')]$ 是 A, C 的新坐标]

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{lm}} |\sqrt{l}a' \cdot \sqrt{m}c' - \sqrt{m}b' \cdot \sqrt{l}d'| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{lm}} (la'^2 + mb'^2)^{1/2} (ld'^2 + mc'^2)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{lm}} = \frac{2}{\sqrt{4 - k^2}}. \end{aligned}$$

如果纯用几何意义(不用上面的柯西不等式)亦可注意对单位圆

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (7)$$

上任两点 A', C' ,

$\triangle OA'C'$ 的面积的两倍 $\leq OA' \times OC' = 1$. 经“压缩”(两轴压

缩系数分别为 $\sqrt{l}, \sqrt{m}$), ⑦变为⑤, $\triangle OA'C'$ 变为 $\triangle OAC$, 所以

$$|ac - bd| = \triangle OAC \text{ 面积的两倍} \leq \frac{1}{\sqrt{lm}} = \frac{2}{\sqrt{4 - k^2}}. \quad \textcircled{8}$$

当然完全不顾背景, 纯从代数变形考虑也有简单的证法:
首先注意不等式③即

$$1 \geq \frac{4 - k^2}{4} (ac - bd)^2. \quad \textcircled{9}$$

(这一步是去掉“绝对值”, 改用平方, 参见第六章第12节例2解法10). 由于①, ②, 上式即

$$(a^2 + b^2 - kab)(c^2 + d^2 - kcd) - \frac{4 - k^2}{4} (ac - bd)^2 \geq 0. \quad \textcircled{10}$$

(这一步是化为 a, b, c, d 的齐次式, 消去非齐次性) 为了证明⑩, 计算⑩的左边, 我们相信它是个平方式. 事实上

$$\begin{aligned} \textcircled{10} \text{的左边} &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac - bd)^2 + k^2 abcd + \\ &\quad \frac{k^2}{4} (ac - bd)^2 - kab(c^2 + d^2) - kcd(a^2 + b^2) \\ &= \frac{k^2}{4} (ac + bd)^2 - kab(c^2 + d^2) - kcd(a^2 + b^2) + \\ &\quad (ad + bc)^2 \\ &= \left(\frac{k}{2} (ac + bd) - (ad + bc) \right)^2 \end{aligned}$$

这种代数做法不过三步, 也是简单、自然的解法, 只不过很多人不肯下“死功夫”去做(尤其最后一步), 因而失之交臂, 像一位作者所批评的“由于意志的脆弱而浪费了一个成功的思路”.

就解题而言, 这种纯代数的证法更为简单直接, 但就数学而言, 则前一种做法, 包括的内容远远超过后者, 它并非故意兜圈子, 而是说清问题的来源与背景知识.

又如下面的例子:

例5 已知 $\varphi + \theta, \varphi - \theta$ 都不是 π 的整数倍, 并且

$$a \cos \theta + b \sin \theta = c, \quad (1)$$

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi = c, \quad (2)$$

求证

$$\frac{a}{\cos \frac{\theta + \varphi}{2}} = \frac{b}{\sin \frac{\theta + \varphi}{2}} = \frac{c}{\cos \frac{\theta - \varphi}{2}}. \quad (3)$$

这道题并不难,但很多杂志上的解法均冗长而不自然.解这道题,应当知道对于三元方程组

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z = 0. \end{cases} \quad (4)$$

虽然不能定出未知数 x, y, z , 却可定出 $x:y:z$. 事实上, 将④作为 x, y 的方程, 用 Cramer 法则

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 z & B_1 \\ -C_2 z & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{(-z) \cdot \begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},$$

$$y = \frac{(-z) \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}},$$

所以

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \quad (5)$$

⑤是一个很容易记忆的公式(当然,需要分母的三个行列式均不为0),相当有用,值得记住.

于是,由①,②(视 a, b, c 为 x, y, z)得

$$\frac{a}{\begin{vmatrix} \sin \theta & 1 \\ \sin \theta & 1 \end{vmatrix}} = \frac{b}{\begin{vmatrix} \cos \theta & 1 \\ \cos \varphi & 1 \end{vmatrix}} = \frac{c}{\begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix}},$$

即

$$\frac{a}{2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\varphi-\theta}{2}} = \frac{b}{2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\varphi-\theta}{2}} = \frac{c}{2\sin\frac{\varphi-\theta}{2}\cos\frac{\varphi-\theta}{2}}.$$

从而③成立.

知道问题的背景,好处很多.但不知道背景也没有关系,特别是学生.应当鼓励他们发扬“初生牛犊不怕虎”的精神.恰恰由于不知道背景,可能通过自己的努力,找到不同的证明或独立地证明了定理.“背景”并不神秘.

9. 不适当的问题

考试或竞赛,题目应当考核学生的知识与能力,不应当出那些没有多少数学思想的“偏题、怪题”.

例1 如果二次根式 $^a+b\sqrt{9a}$ 和 $\sqrt{a+8b}$ 是同类二次根式,那么 a, b 的值是_____.

这是某市1999年的中考试题.

原解答如下:

由二次根式与同类根式的意义得

$$\begin{cases} a+b=2, & \text{①} \\ 9a=a+8b. & \text{②} \end{cases}$$

解得

$$a=1, b=1.$$

所以答案是 $a \cdot b = 1$.

本题的答案显然是不完整的.例如 $a=2, b=0$.那么条件全部满足($^a+b\sqrt{9a} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$, $\sqrt{a+8b} = \sqrt{2}$ 是同类二次根式).而

$a \cdot b = 0$. 即使 a, b 都代表正数, 答案仍不惟一. 理由如下:

假定 $a + b = 2$. 这时 $\sqrt{9a}$ 与 $\sqrt{a + 8b}$ 为同类根式的条件是

$$\frac{a + 8b}{a} = m^2. \quad (3)$$

其中 m 是正有理数 ($m = 1$ 时, ③化为②), 所以有方程组

$$\begin{cases} a + b = 2, \\ a + 8b = m^2 a, \end{cases}$$

不难解出

$$a = \frac{16}{m^2 + 7}, b = \frac{2(m^2 - 1)}{m^2 + 7}. \quad (4)$$

其中 m 是大于 1 的有理数. 例如 $m = \frac{4}{3}$, 那么

$$a = \frac{144}{79}, b = \frac{14}{79}, a \cdot b = \frac{2016}{6241}.$$

当然 $a + b$ 还可以是一个大于 2 的偶数 (例如 $a + b = 4$, a 为有理数的平方), 这时情况更为复杂, 产生出很难解的不定方程. 本来是一道小题, 为了它大动干戈, 很不值得.

严格说来, 原来的解答不仅不完整, 而且也不正确. 因为 $a = b = 1$ 时,

$$\sqrt[3]{9a} = 3, \sqrt{a + 8b} = 3$$

都不是二次根式. 在①中, $m^2 + 7$ 如果是有理数的平方 (例如 $m = \frac{27}{4}$), 那么 $\sqrt[3]{9a}$ 也不是二次根式.

由此可见, 像例 1 这样的问题, 要得出完整、正确的答案是相当困难的.

同类根式, 这样的概念, 在数学中并不特别重要, 只需一般了解即可, 不值得过分强调. 现在初中教材只讨论二次根式, 即使在高中, 也很少有涉及根指数 ≥ 3 的根式, 更不讨论根指数为字母或未知数的根式. 在数学中, 也见不到这种问题. 所以像例 1 这样的

试题是很不合适的,既超出教材的范围,在数学中也没有什么意义,纯属人为编造,自寻烦恼.出题者自己对有关概念(同次根式、同类根式、最简根式)似乎也未搞清.这类问题作为教学研究,可以提出来讨论一番,但决不适宜作为中考试题.

例 2 如图 7-12,在凸四边形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $AD = 2$, $DC = 1$, $AC = BD$. 设 $BC = x$, 求 x 的取值范围.

命题者提供的答案是 $1 < x < 4$.
但一位同学认为应当是 $1.5 < x < 4$.
理由如下:

设 $AC = BD = y$, 则由 $\triangle DCB$ 、 $\triangle ACB$ 得

$$y - 1 < x,$$

及

$$4 - y < x.$$

两式相加得

$$3 < 2x.$$

所以 $x > 1.5$.

另一方面,由 $\triangle ACD$,

$$y < 1 + 2 = 3.$$

由 $\triangle BCD$,

$$x < y + 1 < 4$$

因此, $1.5 < x < 4$.

究竟哪个答案正确?

问题出在对“ x 的取值范围”的理解上.

一种理解是“ x 的值只能在这个范围内取(不能在这个范围外取)”,这就是“必要性”(或“完备性”).命题者是这样理解的,那位同学也是这样理解的.后者的结果要精确一些.

另一种理解是不但“ x 只能在这个范围内取值”,而且“这个范

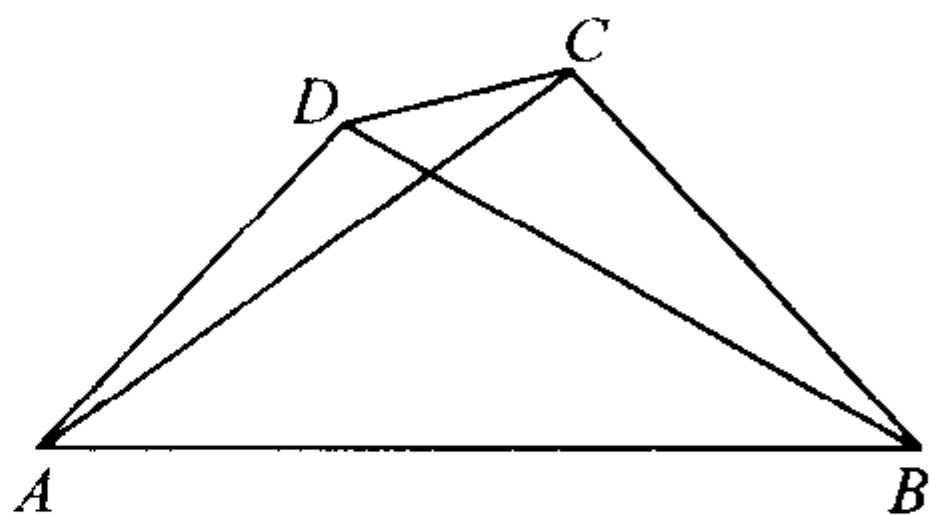


图 7-12

围内的值, x 都可以取到”, 即“必要而且充分”(完备而且纯粹). 这是正确的理解. 按照这样理解, $1 < x < 4$ 显然是不对的. 因为 1 至 1.5 这段值 x 根本不可能取到.

正确的答案是

$$a - 1 < x < \sqrt{8.5} = 2.9 \cdots$$

其中 a 是方程

$$u^3 + u^2 - 5u - 12 = 0$$

的惟一的实根, 约为 $2.6 \cdots$ (解法见本节末的注). 但不用连续函数的性质, 本题大概很难证实 $(a - 1, \sqrt{8.5})$ 中的值 x 全能取到. 因此像这种“求取值范围”的问题, 不宜作为中学的问题.

此外, 题中涉及三次多项式. 关于函数性质(如单调性)的研究, 也以采用微积分更为简明, 不宜过早地“深挖洞”, 在讲授微积分以前采用一些特殊的技巧去讨论.

还有一些无聊的问题, 多半是一些“教育家”为了攻击别人或推行自己的观点而编制的测试题. 下面是一个“经典的”例子.

例 3 在一条船上有 26 头绵羊与 19 头山羊, 问船长的年龄是多少?

船长的年龄当然无法求出. 为了应付考官, 学生只能随便说一个数充作答案, 有些教育家便据此指责学生与学生的老师. 认为这是应试教育的不良后果, 其实出这种试题的“教育家”才是应当受谴责的, 他们如果不是浅薄无知, 便是别有用心. 否则无法解释他们为什么要编制这种幼稚可笑的题目.

【注】例 2 的解法如下:

设 $\angle BDA = \alpha$, $\angle CDA = \beta$. 显然 $\alpha < \beta < \pi$.

在 $\triangle BAD$ 中, 由余弦定理得

$$4^2 = 2^2 + y^2 - 4y \cos \alpha. \quad \textcircled{1}$$

又由 $\triangle BCD$,

$$x^2 = 1^2 + y^2 - 2y \cos(\beta - \alpha)$$

$$\begin{aligned} &< 1^2 + y^2 - 2y \cos(\pi - \alpha) \\ &= 1 + y^2 + 2y \cos \alpha, \end{aligned}$$

②

利用①消去 $\cos \alpha$ 得

$$\begin{aligned} x^2 &< 1 + y^2 + \frac{1}{2}(2^2 + y^2 - 4^2) \\ &= \frac{1}{2}(3y^2 - 10). \end{aligned}$$

由 $\triangle ACD$, 显然 $y < 1 + 2 = 3$, 所以

$$x < \sqrt{\frac{1}{2}(3 \times 3^2 - 10)} = \sqrt{8.5}.$$

另一方面, 在 $\triangle ACD$ 中,

$$y^2 = 2^2 + 1^2 - 4 \cos \beta > 5 - 4 \cos \alpha,$$

利用①消去 $\cos \alpha$ 得

$$y^3 - 4^2 > 5y - 2^2 - y^2,$$

即

$$y^3 + y^2 - 5y - 12 > 0.$$

对多项式 $u^3 + u^2 - 5u - 12$ 进行讨论. 在 $0 < u < 2$ 时,

$$u^3 + u^2 - 5u - 12 = u(u^2 + u - 5) - 12$$

$$< 2(2^2 + 2 - 5) - 12 < 0.$$

而在 $u > 2$ 时, $u^2 + u - 5$ 严格递增而且为正, 所以 $u^3 + u^2 - 5u - 12$ 严格递增. 由于 $u = 3$ 时,

$$u^3 + u^2 - 5u - 12 > 0,$$

所以 $u^3 + u^2 - 5u - 12$ 有一个惟一的正根 a 在 2 与 3 之间. 不难算出 $a = 2.6 \cdots$ (因为 $u = 2.6$ 时, $u^3 + u^2 - 5u - 12 < 0$; 而在 $u = 2.7$ 时, $u^3 + u^2 - 5u - 12 > 0$).

这样, 我们得出

$$a - 1 (< y - 1) < u < \sqrt{8.5}. \quad \text{③}$$

③不但比 $1.5 < x < 4$ 精确, 而且的确是 x 的取值范围, 即区间 $(a - 1, \sqrt{8.5})$ 中的每一个值, x 都能取得. 要证实这一点, 可以

先放宽 β 的限制, 允许 $\beta = \pi$ 及 α , 这时四边形已变成退化的四边形. 前者 $y = 3$, 而图形成为图 7-13, 不难算出这时 $\cos \alpha = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \times 2 \times 3}$, $x = \sqrt{8.5}$.

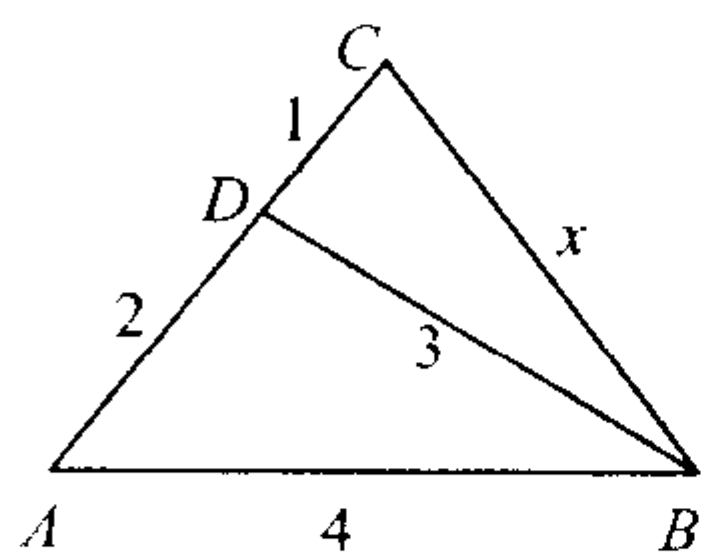


图 7-13

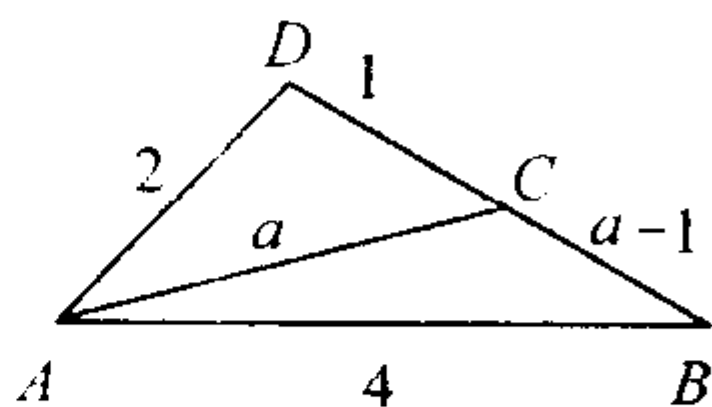


图 7-14

后一种情况 $y = a$, $x = a - 1$ (图 7-14).

当 y 在 $[a, 3]$ 上变化时,

$$\alpha = \arccos \frac{2^2 + y^2 - 4^2}{4y},$$

$$\beta = \arccos \frac{1^2 + 2^2 - y^2}{4}$$

都是 y 的连续函数 (α 由 $\arccos \frac{2^2 + a^2 - 4^2}{4 \times a}$ 减至 $\arccos \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{4 \times 3}$, β 由 $\arccos \frac{1^2 + 2^2 - a^2}{4}$ 增至 π), 所以

$$x = \sqrt{1^2 + y^2 - 2y \cos(\beta - \alpha)}$$

也是 y 的连续函数, 从而取遍区间 $[a - 1, \sqrt{8.5}]$ 中的所有值. 增加限制 $\beta \neq \alpha$ 及 $\beta \neq \pi$, 即 $y \neq a$ 及 $y \neq 3$ 后, x 取遍 $(a - 1, \sqrt{8.5})$ 中的值.

10. 小题大做

我不赞成所谓标准化考试. 这种考试纯粹由选择、填空组成. 用于考外语, 不失为一种好手段, 用于考数学, 则大为不妥. 因为学生的思维过程完全看不到, 教师无从发现学生存在什么问题, 也就无法予以指导纠正.

有的学生认认真真, 花了很多时间做一道选择题或填空题, 方法完全正确, 只在最后一步发生错误, 甚至是填写时弄错了(当然也是不该发生的), 结果一分没有. 而另一位同学可能根本不懂, 胡乱写一个答案, 却由于运气好, 居然蒙对了. 这实在太不公平. 不仅不公平, 而且容易养成图侥幸、不严谨的坏风气.

有些选择、填空题似小实大, 真做起来很不容易.

例1 设 $a - b = 2 + \sqrt{3}$, $b - c = 2 - \sqrt{3}$, 则 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ 的值是_____.

填空题常可“猜出”答案. 如本题, $b = -\sqrt{3}$, $a = 2$, $c = -2$ 显然适合已知条件, 这时

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 3a^2 + b^2 = 15.$$

假如本题的答案是惟一的, 那么这答案当然就是 15. 不过, 我们并不知道答案是惟一的, 所以严格说来, 还得另想办法去解.

问题不算太难, 应将原式改用 $a - b$, $b - c$ 表示, 从式子的对称性看, 还应当用到 $c - a$, 而

$$c - a = -(a - b) - (b - c) = -4.$$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \\ &= \frac{1}{2}[(2 + \sqrt{3})^2 + (2 - \sqrt{3})^2 + 4^2]\end{aligned}$$

$$= 2^2 + 3 + \frac{1}{2} \times 4^2$$

$$= 15.$$

上面的特例可以帮助我们检验解答的正确性,所以“猜出”答案是有好处的.但不应当满足于猜出答案,所以这种题最好不要用作填充题.

例2 设 A, B, C 为平面上任意三个不同的点, P 为平面 ABC 上的任一点(可以与 A, B, C 相同), 则 $\frac{PA}{BC} + \frac{PB}{CA} + \frac{PC}{AB}$ 的最小值是_____.

很容易猜到在 A, B, C 组成正三角形, P 为这三三角形中心时, $\frac{PA}{BC} + \frac{PB}{CA} + \frac{PC}{AB}$ 取最小值, 最小值为 $\sqrt{3}$.

但证明这一结论却是非常困难的事. 这样一道“小题”, 非得大做一番. 解法如下:

设 P, A, B, C 的复数表示分别为 u, x, y, z , 则

$$\frac{(u-y)(u-z)}{(x-y)(x-z)} + \frac{(u-z)(u-x)}{(y-z)(y-x)} + \frac{(u-x)(u-y)}{(z-x)(z-y)} = 1.$$

(即第一章第6节例4)

取模得

$$1 \leq \frac{PB \cdot PC}{AB \cdot AC} + \frac{PC \cdot PA}{BC \cdot AB} + \frac{PA \cdot PB}{AC \cdot BC}.$$

而对于非负实数 a, b, c ,

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \\ &= \frac{1}{2}(a^2+b^2) + \frac{1}{2}(b^2+c^2) + \frac{1}{2}(c^2+a^2) + 2(ab+bc+ca) \\ &\geq 3(ab+bc+ca), \end{aligned}$$

所以

$$\frac{PA}{BC} + \frac{PB}{CA} + \frac{PC}{AB}$$

$$\geq \sqrt{3} \left(\frac{PB \cdot PC}{AB \cdot AC} + \frac{PC \cdot PA}{BC \cdot AB} + \frac{PA \cdot PB}{AC \cdot BC} \right) \\ \geq \sqrt{3}.$$

因为在 $\triangle ABC$ 为正三角形, P 为中心时,等号成立,所以 $\sqrt{3}$ 是最小值.

由此看来,这道“小题”,实在不小.我们费了大力才证明结论成立.

事情还未到此结束,有不少内容需要继续讨论.

首先,等号是否仅在 $\triangle ABC$ 为正三角形, P 为中心时成立?

由复数 $\frac{(u-y)(u-z)}{(x-y)(x-z)}, \frac{(u-z)(u-x)}{(y-z)(y-x)}, \frac{(u-x)(u-y)}{(z-x)(z-y)}$ 的辐角相同得出

$$\angle PDB = \angle PEC = \angle PFA.$$

其中 D, E, F 分别为 PA, PB, PC 与 BC, CA, AB 的交点(图7-15),于是 B, D, P, F 共圆, D, P, E, C 共圆, E, A, F, P 共圆.从而 $BD \times BC = BP \times BE = BF \times BA$, A, F, D, C 也共圆.所以 $\angle FEA = \angle FPA = \angle CPD = \angle CED$, $\angle FEP = \angle FAP = \angle FCD = \angle DEP$.于是 $\angle BEA = 90^\circ$, BE 是高.同理, AD, CF 也是高.

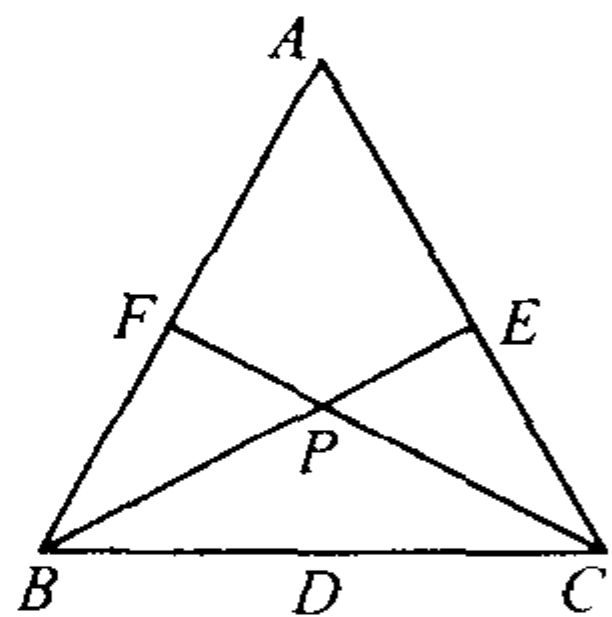


图 7-15

又由 $\frac{PA}{BC} = \frac{PB}{CA} = \frac{PC}{AB}$ 得出

$$\frac{2R \cos A}{2R \sin A} = \frac{2R \cos B}{2R \sin B} = \frac{2R \cos C}{2R \sin C}.$$

其中 R 为外接圆半径(易知外心到 BC 的弦心距为 $R \cos A$,并且是 PA 的 $\frac{1}{2}$),所以 $A = B = C$. $\triangle ABC$ 是正三角形,而 P 为中心.

于是,当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形, P 为中心时, $\sum \frac{PA}{BC}$ 取最小值 $\sqrt{3}$.

其次, 如果 $\triangle ABC$ 已经给定, 那么 P 点在何处, 才能使 $\sum \frac{PA}{BC}$ 为最小?

更一般地, 设 l, m, n 为非负实数, P 点在何处时, $\sum l \cdot PA$ 最小?

这是一般的费马问题, 解起来也不很容易.

像例 2 这样的填充题, 实在是一道真正的大题. 这样的“小题”需要大做, 根本不应当作为填充题.

7.1 一道试题的编制

1978 年夏天, 中国科学技术大学少年班招生, 希望能编一些有新意的问题, 当时我编了一道题目, 在这里介绍一下.

考虑一个三棱锥 $P-ABC$. PQ 为高, PD, PE, PF 为斜高, 则

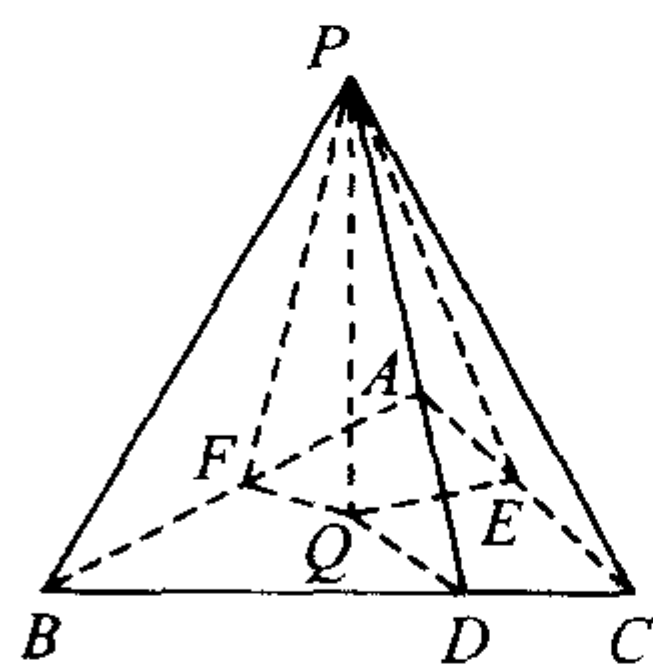


图 7-16

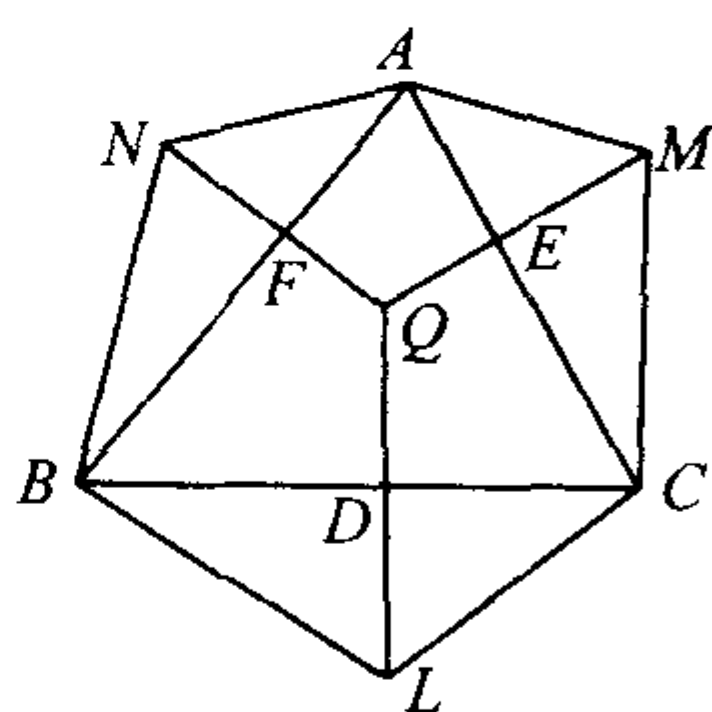


图 7-17

QD, QE, QF 分别与 BC, CA, AB 垂直. 如果将棱锥自 PA, PB, PC 剪开, 铺平, 得图 7-17. 其中, QL, QM, QN 分别与 BC, CA, AB 垂直, 并且 $AM = AN, BN = BL, CL = CM$ (L, M, N 三点即原来的 P 点).

于是,我们得到一道平面几何的问题:

在 $\triangle ABC$ 所在平面上一点 Q ,作 BC, CA, AB 的垂线 QL, QM, QN . 如果 $AM = AN, BN = BL$,求证 $CL = CM$.

这道题难倒了不少考生. 其实所用知识极少. 由于其中有垂线,应当想到勾股定理.

由勾股定理

$$AN^2 - BN^2 = AQ^2 - BQ^2, \quad ①$$

$$BL^2 - CL^2 = BQ^2 - CQ^2, \quad ②$$

$$CM^2 - AM^2 = CQ^2 - AQ^2, \quad ③$$

三式相加并利用已知条件得

$$CM^2 - CL^2 = 0. \quad ④$$

即 $CM = CL$.

答案公布后,不少学生感叹:“没想到勾股定理还能这样用!”

后来在教师培训班上讲这道题,有人提出将 AM, AN 折起来成为三面角,由于 $AM = AN$,所以 M, N 成为同一点 P . 由于 $BN = BL$,所以将 $\triangle BLC$ 折起来时, L 也与 P 重合. 这样自然有 $CL = CM$.

这一想法当然很好. 但我们所编的问题已经脱离了原来的立体图形. 如果图 7-17 确实由图 7-16 而来,那么应有

$$\angle NAB + \angle CAM > \angle BAC \quad ⑤$$

等等(三面角 $A-PBC$ 的两个面角之和大于第三个). 而我们的问题并没有假定⑤这样的式子存在,所以 AM, AN 折起来未必能成三面角(例如 $\angle NAB, \angle CAM$ 均小于 $\angle BAC$ 的 $\frac{1}{2}$). 从而上面折叠的想法虽然很好,却是不能奏效的.

问题还可以推广一下:设 $A_1A_2\cdots A_n$ 是凸 n 边形,自点 Q 作各边的垂线 $QB_1, QB_2, \cdots, QB_n$. 如果 $A_1B_n = A_1B_1, A_2B_1 = A_2B_2, \cdots, A_{n-1}B_{n-2} = A_{n-1}B_{n-1}$,求证 $A_nB_{n-1} = A_nB_n$.

证明仍然用勾股定理. 将 n 个等式

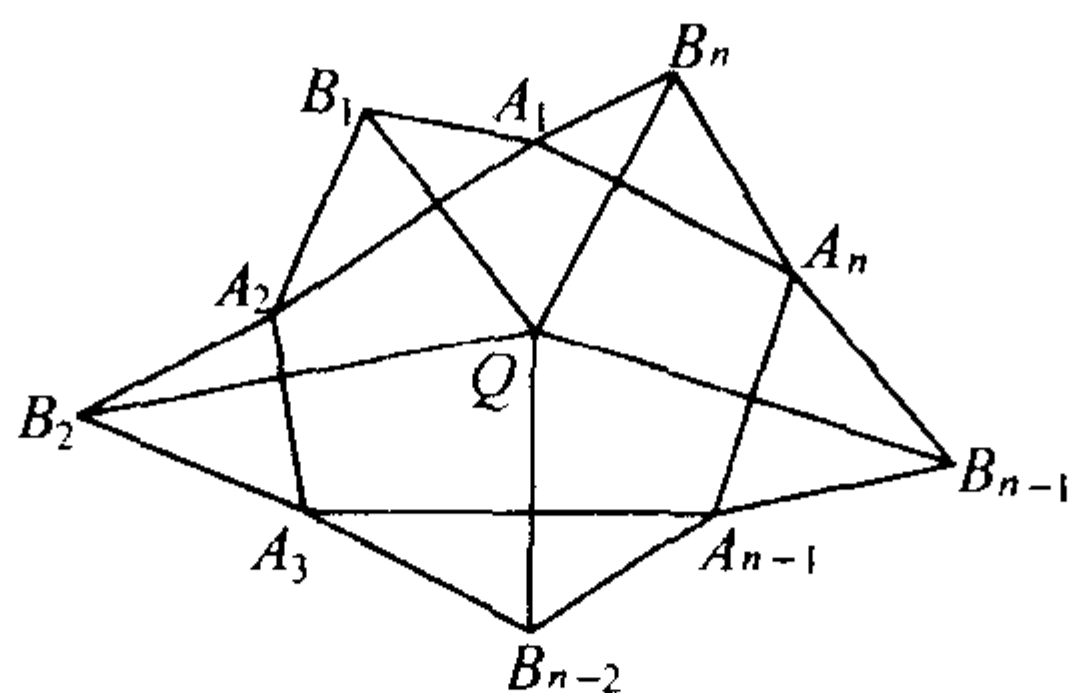


图 7-18

$$A_1 B_1^2 - A_2 B_1^2 = A_1 Q^2 - A_2 Q^2,$$

$$A_2 B_2^2 - A_3 B_2^2 = A_2 Q^2 - A_3 Q^2,$$

⋮

$$A_{n-1} B_{n-1}^2 - A_n B_{n-1}^2 = A_{n-1} Q^2 - A_n Q^2,$$

$$A_n B_n^2 - A_1 B_n^2 = A_n Q^2 - A_1 Q^2$$

相加即得结论.

这个多边形的题目, 好似周游世界, 转了一圈又回到出发点 A_1 .

关于将等式改为不等式的推广, 参见拙著《几何不等式》(上海教育出版社 1980 年出版).

最近见到一个颇为有趣的定理: 如果 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1 B_1 C_1$ 正交, 那么 $\triangle A_1 B_1 C_1$ 也与 $\triangle ABC$ 正交.

所谓 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1 B_1 C_1$ 正交, 即自 A, B, C 分别向 $B_1 C_1, C_1 A_1, A_1 B_1$ 所引的三条垂线交于一点 P . 因此要证明的结论就是自 A_1, B_1, C_1 分别向 BC, CA, AB 所引的三条垂线交于一点.

证法与上面的类似, 仍然采用勾股定理. 设 A_1, B_1 分别向 BC, CA 所引垂线交于一点 Q .

由已知,

$$\begin{aligned} & (AB_1^2 - AC_1^2) + (BC_1^2 - BA_1^2) + (CA_1^2 - CB_1^2) \\ &= (PB_1^2 - PC_1^2) + (PC_1^2 - PA_1^2) + (PA_1^2 - PB_1^2) = 0, \end{aligned} \quad ⑥$$

所以

$$(C_1B^2 - C_1A^2) + (B_1A^2 - B_1C^2) + (A_1C^2 - A_1B^2) = 0, \quad ⑦$$

即

$$C_1B^2 - C_1A^2 + (QA^2 - QC^2) + (QC^2 - QB^2) = 0,$$

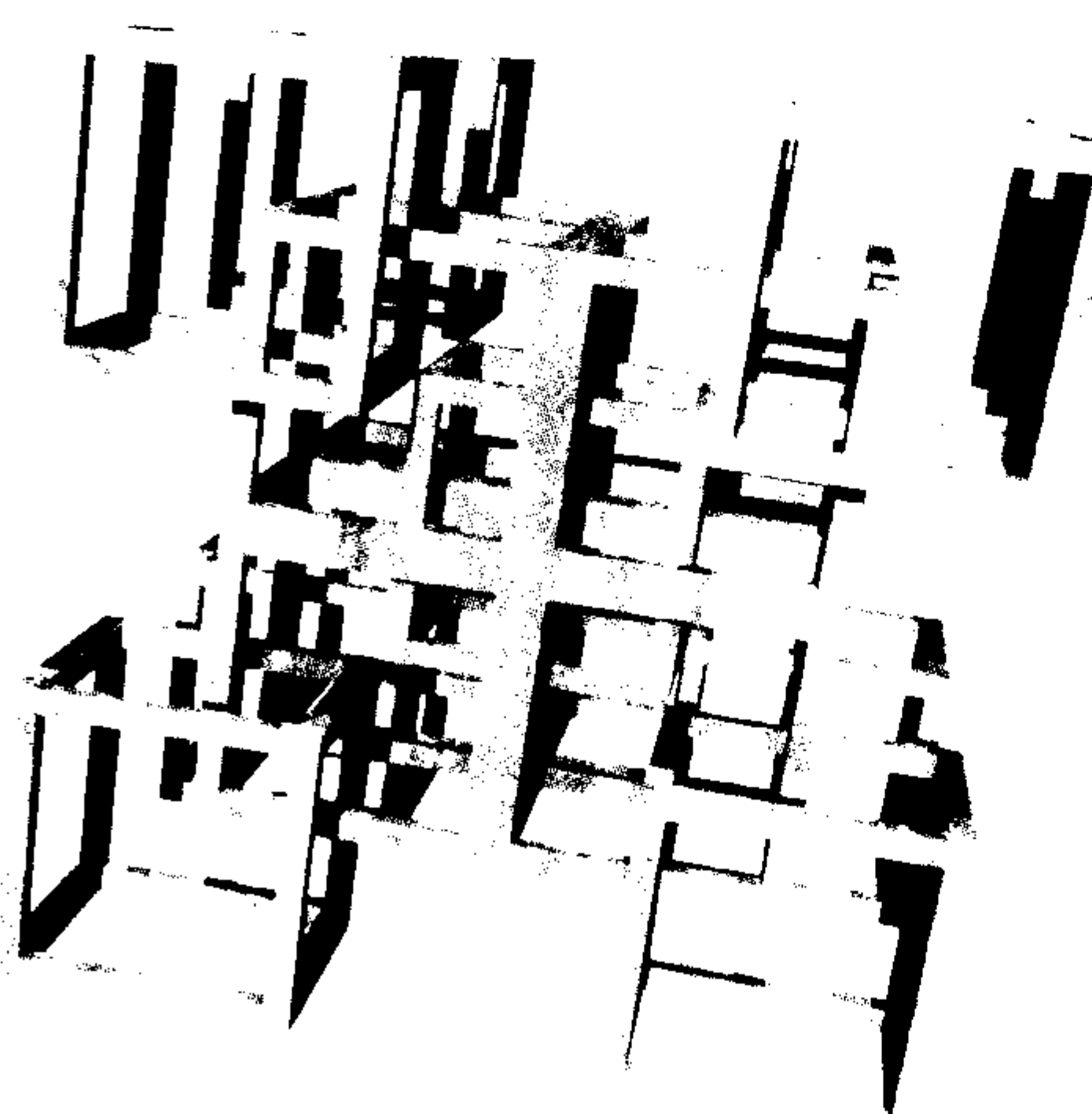
所以

$$C_1B^2 - C_1A^2 = QB^2 - QA^2, \quad ⑧$$

从而 $QC_1 \perp AB$, 结论成立.

波利亚及其解题理论

本章简要介绍波利亚及其解题理论，当然，介绍反映了我们的理解。同时，由于篇幅所限，介绍也不够全面，如有可能，读者最好找他的原著来读。



1. 波利亚的生平

乔治·波利亚 (George Polya, 1887. 12. 3—1985. 9. 7) 是 20 世纪的一位重要的数学家, 更是一位伟大的教育家.

他诞生于匈牙利的布达佩斯. 小时候兴趣广泛, 喜欢海涅的诗, 喜欢学习语言. 数学方面并不算突出, 曾经参加匈牙利数学竞赛, 即爱未斯 (Loránd Eötvös) 男爵的考试, 但未交卷 (爱未斯男爵是匈牙利的教育部长. 在他的领导下, 开始了全国性的数学竞赛, 以选拔有才能的学生. 这种考试, 人们称之为爱未斯男爵的考试).

1905 年, 波利亚以优异的成绩从布达佩斯的预科学校毕业, 取得免费升入布达佩斯大学的资格. 他的母亲希望他继承父业, 成为法律系教授. 但他在法律系只读了一个学期, 便觉得枯燥无味, 不愿再继续学下去. 他读过达尔文的《进化论》, 对生物很有兴趣. 他的大哥哥 Eugene 比他大 11 岁, 是一个著名的外科医生 (胃手术的标准做法即冠以他的名字), 却反对他学习生物. 因此波利亚转而学了两年语言与文艺, 并通过考试, 取得资格证书, 可以教拉丁文与匈牙利文. 但他终生未使用过这一证书.

当时布达佩斯大学有很多著名教授. 前面提到的爱未斯男爵就是波利亚的物理老师. 而号称匈牙利数学之父的费叶尔 (Leopold Fejér, 1880—1959) 更吸引了众多的年轻人. 波利亚喜欢哲学, 但一位哲学教授说服他: “学习数学与物理可以帮助人理解哲学.” 于是他在哲学、数学、物理学三者之间徘徊, 最后选定数学作为终身职业. 理由是 “学物理, 我不够好. 学哲学, 我又太强, 数学在这两者之间.”

1910—1911 年, 波利亚在维也纳大学深造 (当时奥地利与匈

牙利合称奥匈帝国). 1912 年回到布达佩斯大学并取得博士学位. 博士论文的题目是《概率演算中的一些问题及与之有关的一些定积分》. 当时布达佩斯还没有其他人研究概率. 概率论专家 Feller 甚至认为波利亚是世界上第一个使用“中心极限定理”这一术语的人. 1912—1914 年, 在德国哥廷根大学; 1914 年春, 在法国巴黎大学从事学习与研究. 在此期间, 他会见了一大批著名数学家, 如克莱因(Felix Klein, 1849—1925), 希尔伯特(David Hilbert, 1862—1943), 龙格(Carl Runge, 1856—1927), 兰道(Edmund Landan, 1877—1938), 阿达玛(Jacques Hadamard, 1865—1963).

1914 年, 应胡尔维茨(Adolf Hurwitz, 1859—1919)之邀, 到瑞士苏黎世理工学院(简称 ETH)任教, 直至 1940 年.

在第一次世界大战期间, 他因腿的缘故(在踢足球中受过伤, 向内屈折)免服兵役. 但后来需兵甚急, 征他入伍. 他受罗素和平主义的影响拒服兵役, 从此很多年不能返回匈牙利.

1918 年, 他加入瑞士籍并与瑞士姑娘史黛拉(Stella Vera Weber)结婚. 史黛拉出生于瑞士说法语的部分, 是一位物理教授的女儿. 波利亚工作的地方与家则在瑞士说德语的部分. 后来到英、美, 当然又说英语, 几种语言在家中地位平等, 符合他对语言的兴趣.

1920 年升为副教授, 1928 年任教授. 在此期间, 他与柏林大学的舍贵(Gabor Szegő, 1895—1985)合作, 完成两卷《数学分析中的定理和问题》, 1925 年由 Springer-Verlag 出版社出版. 1924 年, 由于哈代(Godfrey Hardy, 1877—1947)的推荐, 获得洛克菲勒基金赞助, 在英国牛津新学院与剑桥三一学院度过一年, 并与哈代, 李特伍德(John Littlewood, 1885—1977)开始合作, 后来完成《不等式》一书, 1934 年由剑桥大学出版社出版.

20 世纪 30 年代, 波利亚访问过巴黎的庞加莱研究所, 美国普林斯顿大学与斯坦福大学. 1940 年, 第二次世界大战即将爆发, 波利亚决定离开战云笼罩的欧洲, 移居新大陆. 先在布朗大学任教两

年,后应好友舍贵之邀,受聘于斯坦福大学(其时舍贵任数学系系主任).

1953年,波利亚在斯坦福大学退休.但他仍从事数学研究,并且热心于数学教育,特别是中学教师的培训.

波利亚对解题理论进行了系统、深入的研究.在去美国之前,就构思《怎样解题》(How to Solve It),哈代认为美国人喜欢标题为“*How to*”的书,预言这书会取得成功.果然这本书自1945年由普林斯顿大学出版,至今已印刷了数百万册,并至少译成17种文字.1954年出版了《数学与合情推理》(我国的一种译本译为《数学与猜想》)两卷.1962年出版《数学的发现》第一卷,1965年出版第二卷.这些著作奠定了波利亚在教育方面的领导地位,成为万众仰止的一代宗师.

波利亚是美国国家科学院院士,法国巴黎科学院通讯院士,匈牙利科学院院士,1980年被国际数学教育大会选为荣誉主席.

1985年9月7日,波利亚在美国加利福尼亚去世,享年97岁.

波利亚的教育论著(一)

波利亚一生的论文与专著约300种,其中教育论著有《怎样解题》,《数学与合情推理》(两卷),《数学的发现》(两卷),还有40篇左右的文章.

波利亚在他的教育论著中,指出应当给学生“以适合他们程度的问题去引起他们的好奇心,并且用一些吸引人的问题来帮助他们解题”.波利亚认为这样做“会引起学生们对独立思考的兴趣并教给他们一些方法”.

波利亚认为“在数学中,才能比仅仅掌握一些知识要重要得多。”他又说“什么是数学才能呢?数学才能就是解题能力——不仅能解决普通的问题,而且能解决需要某种程度的独立思考、判断力、独创性和想象力的问题”。

波利亚强调指出“中学数学教学的首要任务就是加强解题能力的训练”。

波利亚的这一观点道出了数学教育的核心,具有划时代的意义,影响极为深远。尤其在美国,自80年代起,即将解题作为学校数学教育的中心。

波利亚的所有教育著作也都是围绕解题来讨论的,它们构成了最系统、最深入的解题理论,每一个从事数学教育的人应当反复研读,深入领会。

怎样提高解题能力?波利亚明确指出“解题是一种实践性的技能,就像游泳、滑雪或弹钢琴一样,只能通过模仿和实践来学到它”,“你想学会游泳,你就必须下水,你想成为解题的能手,你就必须去解题”。

因此,大量的练习是必须的。波利亚对此非常重视。在他的几乎所有的著作中,都列举了很多例题,并配有相当数量的问题供读者练习。他与舍贵合著的《数学分析中的定理和问题》,便是一本精心编制的习题集,影响极大,被誉为“造就了两代数学家”。

我国从事实际教育工作的中、小学教师都知道解题的重要性,都知道大量练习是必须的。根据他们自己的经验体会,早就提出“精讲多练”的正确口号(据我所知,大学也非常重视“习题课”。文化大革命前,北大数学力学系的数学分析课,讲授与习题课就各占4个课时)。可是一些不在教育一线工作的教育理论家或行政管理人员却对此缺乏认识,甚至横加反对。

有人认为强调解题就是搞“题海战术”。其实要学会一种技能都得反复练习。比如弹钢琴,跳芭蕾,打乒乓或学书法,不反复练习

行吗?在勤学苦练方面有很多万口传颂的故事.为何多做几道数学题就变成罪过了呢?其实上面所举的波利亚与舍贵的《数学分析中的定理与问题》就是一本“题海”.我们并不赞同无限制地做重复的练习(如将一个字抄上几百遍).但必要的重复也是不可缺少的.当前的现状是中学课本上的练习数量与质量都大为不足,因此数学质量受到严重的影响.

也有人认为强调解题会增加学生负担,不利于素质教育.其实,学习就必须有适当的“压力”.一点压力都没有是不行的.我国教育工作者一贯重视幼教,重视打好基础.所以我国的数学教育一直优于西方国家.张奠宙先生曾列举两个方面的“双料冠军”:

(1)我国在中学生奥林匹克数学竞赛中连获总分第一名(1980,1990,1992,1993).

(2)1988年举行的国际教育进展评价(IAEP)的结果表明,在对21个国家和地区的13岁学生的测试中,中国大陆学生的数学得分率列第一位(80),我国台湾地区和韩国并列第二(73),苏联(70),西欧北美诸国均在60分左右.

切不可“自毁长城”,降低基础教育的水准去迎合洋人.学生应当以学为主.要减轻学生负担,应当减少许多与学业无关的社会活动,减少那些必须死记硬背的“三分无用、七分歪曲”的不为学生喜爱的“伪科学”.至于数学,是一门真学问,必须花功夫,花大力气才能学会.

有人忌讳解题这个词.他们搬出一个不中不西的名词“问题解决”,还撰文论说“问题解决”与“解题”有本质的不同.其实他们所说的“问题解决”与“解题”根本就是同一个英文词组“Problem Solving”.

也有人强调要解决实际问题.他们忘记中、小学是打基础的阶段.要解决真正的实际问题,需要较多的实际知识与社会经验,也需要较多的其他学科(物理、化学、生物等等)的知识.这些是中、小

学生所不具备的,也无法具备.因此应当放到大学或大学之后再去解这方面的问题,不要勉强中、小学生超越现阶段去做力所难及的事情.

中、小学阶段,应当多解数学学科的问题,养成他们对科学的爱好,学会思考,特别是学会数学地思考.

波利亚的教育论著(二)

本节介绍波利亚的著作《怎样解题》.

在序言中,作者指出解题可以“引起你的好奇心”,“并享受到发现的喜悦”,“在易塑的青少年时期,这样的体验会使你养成善于思维的习惯,并在你心中留下深刻的印象,甚至会影响到你一生的性格”.

接着作者给出一张“怎样解题”表(见本书第三章第6节),然后围绕这张表进行讨论.

这本书全书分成四部分.

第一部分“在教室中”与第二部分“怎样解题——一段对话”,都很简短,主要对表的意义及怎样使用进行阐述.

全书的重点在第三部分“探索法小词典”.

在这一部分,作者“复兴”了“探索法(heuristic)”.这是古代希腊数学家以及笛卡儿(Descartes, 1596—1650)、莱布尼兹(Leibniz, 1646—1716)、波尔查诺(Bolzano, 1781—1848)等数学家都曾经提及或者深入研究过的方法.

波利亚书中的“探索法”有两个方面的含义.

一方面,指用有启发性的、合乎情理(似真的)但未必严格的方法来获得(猜出)结果.这样的“探索法”更多地用在提出问题与发

现结果方面(这当然是非常重要的),而不是直接用于解题.波利亚在另一部著作《数学与合情推理》(科学技术出版社的译本译为《数学与猜想》),进一步地阐述了这个方面.对这方面的含义,或许译为“启发式”更为合适.

常用的“启发式”的推理有类比、归纳等等.

类比常用于发现结论.例如三角形的三条中线交于一点,这点称为三角形的重心(它将每条中线分为 $1:2$).由空间与平面的类比,我们自然会想到下面的结论.

“四面体的每个顶点与对面重心相连,这四条连线交于一点”.(甚至还可以猜出这一点将每条连线分为 $1:3$).

当然类比并不是证明,波利亚指出“如果把这种猜测的似真性当作肯定性,那将是愚蠢的.但是忽视这种似真的猜测将是同样愚蠢甚至是更为愚蠢的”.

从特殊例子猜出一般规律,这就是归纳法,不仅在其他科学中,在数学中也是常用的.这样的例子极多,但数学中还要对所得的结论进一步给出严格的证明或者举出反例予以推翻.

波利亚指出“直观的洞察可能远远超前于形式逻辑的证明”.“尽可能形式地证明我们所直观看到的,以及尽可能直观地看出我们所形式证明过的,这是一种增能智力的练习”.

探索法的另一方面是指通过探索、尝试或试验,逐渐找出解题的途径.在这个意义上说,探索法是解任一道题所必须使用的方法.当然,有些问题很容易找到解法,而有些问题却很难,“路漫漫其修远兮,吾将上下而求索”.

在解题表中,最困难的在于拟定计划,即找到解题的突破口.怎样找到突破口?没有万能的方法,只能采用探索、尝试或试验的方法.或者说,如果有万能的方法,那就是“探索法”.

怎样探索?

在这一部分中,波利亚介绍了很多方法.如“你能重新叙述这

个问题吗?”,“分解与重新组合”,“倒着干”与分析等等.前面所说的类比、归纳等等方法,不仅可以发现结论,同样也有助于探索解题途径.

波利亚这一部分中还指出在探索的过程中有“进展的标志”.他指出不仅有“可清晰表达的标志”,而且还有“不太能清晰表达的标志”:如“它看来良好”或者“它不那么好”.或许是波利亚在这本书中第一个说到“感觉”,他指出“在原始的或模糊的表达后面,有一种不会错的感觉,我们自信地跟随它前进并且它常常引导我们到正确的方向”.波利亚还说:“如果这种感觉很强烈并且是突然发生的,我们称之为灵感.”

探索法其实就是“永远随着你的灵感——但不能全信”.

在《数学的发现》中,波利亚对于感觉有更多的论述.

在这一部分,波利亚还指出“决心与情绪所起的作用很重要”,“教学生解题是意志的教育”,“如果学生在学校里没有机会尝尽为求解而奋斗的喜怒哀乐,那么他的数学教育就在最重要的地方失败了”.

波利亚是一位开拓者,是建立解题理论的第一人,他的论述,可能会有一些搞“教育理论”的“专家”认为不够系统,甚至缺乏“理论深度”.其实,波利亚的解题理论博大精深,远远超出那些“专家”的智力水平.他的理论又非常联系实际,其中有很多非常精辟、独到的见解.我们常常见到的那种空洞无物,只是堆砌名词的“理论体系”,波利亚是不屑去建立的.

关于探索法的两个方面,波利亚没有分开讨论,而且波利亚首先是一位数学家,所以他对第一个方面(用于发现)讨论得更多.但对于中、小学师生,或者第二个方面(用于解题)的讨论更为需要.

本书的第四部分,也是最后部分,是“问题、提示、解答”.它“提供读者附加的练习机会”.其中有不少有趣的问题,如第(1)个问题:

一只熊,从点 P 开始,向正南走一里,然后改变方向,向正东走一里.接着,它再向左转,向正北走一里,恰好到达它所出发的 P 点.问这熊的颜色是什么?

这道题不像第七章第 9 节例 3 那种无聊的、问牧师年龄的问题,而是既有数学意义,又有实际背景(这熊的出发点只能是北极,因而是一只白色的北极熊).

4. 波利亚的教育论著(三)

本节介绍波利亚的著作《数学的发现》第一卷.

这一卷分为两个部分,第一部分是数学模式.

波利亚所说的模式不是题型,而是解题方法的模式.讲题型是很有用的,但不宜过分强调题型,不宜将题分为太细的“型”,否则会造成学生生搬硬套的负面影响,束缚了他们的创造力.所以波利亚虽然在解题表中问过“你以前见过它吗?你是否见过相同的问题而形式稍有不同?”,但他并不讨论题型,而且上面所说的问题也是对付比较简单的题目的,只供初学解题的人参考.

模式同样不宜过多,有些人介绍不等式的证法就举出十多种,实在令人眼花缭乱,不知所从.波利亚从大处着眼,只举了四种在数学中真正极为有用的模式.

第一章介绍“双轨迹模式”,这在传统的几何尺规作图中极为有用,也称为“轨迹相交法”.现在几何作图已不限制以尺规为工具,因而很少出现作图题,但双轨迹乃至多轨道模式仍不失为一种重要的解题方法.它可以理解为在要求满足多种要求时,先考虑一下仅满足其中一个(或部分)要求,情况会怎样?然后再将这些考虑的结果综合起来.

第二章介绍笛卡儿模式,也就是初等代数的常用方法,如引入字母,列方程组(解)应用题.当然笛卡儿原来的计划是企图提出解题的通用方法,他的方案是:

第一,将任何种类的问题化归为数学问题;

第二,将任何种类的数学问题化归为代数问题;

第三,将任何代数问题化归为单个方程的求解.

正是由于他的这种想法,发明了解析几何,很多几何问题可以用解析法(代数方法)来处理.但不等于说这样做就可以万事大吉,它只是将几何的困难转化为代数的困难,但它至少提供给我们一种新的视角,我们可以用不同的观点来看问题.

第三章介绍递归.从简单特殊的情况做起是发现规律的好方法,也是解题的好方法.

第四章介绍叠加,它也是“组合特殊情况以得出一般情况的解”.

第二部分是一般方法,其中第六章“扩大眼界”推广了前面所说的模式,第五章“问题”对问题及其分类进行了讨论,其余内容则纳入第二卷.

5. 波利亚的教育论著(四)

笛卡儿曾冥思苦索找一个能解所有问题的通用方法,莱布尼兹曾非常清楚地叙述了完善解法的思想.然而,对于通用的完善解法的探索,并不比寻找能点石成金的点金石更有成效.但波利亚指出“即使向那个不可及的理想跨出小小的几步,也还是可以打开你的思路并提高你解题的能力”.他谦虚地说“第二部分正是简述了为此理想而跨出的微小几步”.

这第二部分“一般方法”，除去两章在第一卷外，其余八章构成第二卷。其中妙语连珠，精彩纷呈，特别是对“探索法”作了深入的讨论。

在第十三章中作了很好的总结：

合理性，绝不要做违反你感觉的事，但也应当不带任何偏见地去查看那些支持你的计划或反对你的计划的种种说得清楚的理由。

经济，但不预加限制，尽可能离题近些，要做好情况要我们走多远就走多远的准备。

坚持，但有变化。要紧紧抓住已考查过的点子不放，直到找到了某些有用的启示为止。但也要努力去考查某些还没有被开发过的土地，并从中抓住某些有用的启示。

择优规则。

困难少的应先于困难多的。

较熟悉的应先于不怎么熟悉的。

与问题有较多共同点的条款应先于与问题有较少共同点的条款。

整体应先于部分，主要部分应先于其他部分，较近的部分应先于较远的部分。

在以前解过的问题中，与现在的问题有同一类型未知量的问题，应先于其他的解过的问题。

与现在要证明的定理有同样结论的过去已证明过的定理应先于其他的已证明过的定理。

与所提问题等价的问题应先于那些较强的或较弱的问题，而后者又先于其余的问题，或双侧变形应先于单侧变形，单侧变形又应先于联系更松散的变形。

本书的最后一章是“关于学，教，和学教”，其中亦有许多发人深省的议论，如“教学是艺术”，“教师十诫”等等。