

目 录

1	从用火柴摆正方形说起	(1)
1.1	8 根火柴能摆成几个正 方形?	(1)
1.2	100 根火柴最多能摆成 多少个正方形?	(4)
1.3	数列求和	(8)
1.4	正方形的面积	(11)
1.5	问题成串	(13)
2	一堂生动的复习课	(19)
2.1	类比	(20)
2.2	抽象概括	(21)
2.3	逆向思维	(22)
2.4	整体转化法	(26)
2.5	等积变换法	(27)
2.6	特殊化	(30)
2.7	移动辅助线法	(31)

2.8	一般化·····	(33)
2.9	组合·····	(36)
3	局部与整体·····	(40)
3.1	回顾·····	(40)
3.2	定理与思路分析·····	(42)
3.3	矩形法·····	(43)
3.4	拼补法·····	(46)
3.5	V形法·····	(48)
3.6	平移法·····	(50)
3.7	逆向倍增线段法·····	(53)
3.8	局部转化法·····	(55)
4	三角形内角平分线性质定理的证明与演变·····	(57)
4.1	定理与思路分析·····	(58)
4.2	等量代换法·····	(59)
4.3	线段旋转法·····	(61)
4.4	平行线法·····	(64)
4.5	等比代换法·····	(65)
4.6	演变出的新问题·····	(67)
5	比例线段问题与面积法·····	(76)
5.1	一道竞赛题·····	(76)
5.2	等量代换法·····	(78)
5.3	倍折法·····	(78)
5.4	等比代换法·····	(79)
5.5	比值算法·····	(82)

5.6	平行线法	(85)
5.7	面积法	(88)
5.8	关于面积法的思考	(89)
5.9	命题的演变	(91)
6	几何动态	(104)
6.1	什么叫几何动态?	(104)
6.2	统一在圆幂定理之中	(105)
6.3	勾股定理的一种推广	(109)
6.4	动静结合	(114)
6.5	极端情况	(118)
6.6	整体审视	(120)
7	由变动图形位置想开来	(124)
7.1	变动直线的位置	(124)
7.2	广义角	(133)
7.3	变动圆的位置	(137)
7.4	换一个角度看问题	(143)
7.5	变中的不变量	(148)
8	变动点的位置	(153)
8.1	关于等腰三角形的一个命题	(153)
8.2	关于三角形中线长的命题	(160)
8.3	关于两个三角形面积之比	(164)
9	从不等式到排序问题	(175)
9.1	一个不等式	(175)
9.2	排序原理	(178)

9.3	排序原理的应用	(183)
9.4	排序问题	(191)
10	函数法	(198)
10.1	函数观点和方法	(198)
10.2	构造函数法	(200)
10.3	建立变量等式	(208)
10.4	参数法	(209)
11	切西瓜中的数学问题	(214)
11.1	理想化与一般化	(214)
11.2	一组类似问题	(216)
11.3	观察与猜想	(218)
11.4	验证与分析	(219)
11.5	由特殊到一般	(220)
11.6	由平面到空间	(221)
12	人、熊过河问题	(223)
12.1	图形化	(223)
12.2	数字化	(226)
12.3	类似问题	(228)
12.4	拓广	(231)



从用火柴摆正方形说起

小小的火柴盒里面也有大学问,比如用火柴摆图形,就是一件非常有趣的事.

一天,张老师拿了一些火柴分给陈思、郭思惠和王兆敏三位同学,然后提出了一系列问题.三位同学边动手边思考,在思维的王国里尽情地遨游,真正尝到数学美的甘甜.

1.1 8根火柴能摆成几个正方形?

张老师把火柴分给学生,然后提出如下问题.

张老师(以下简称师):“8根火柴能摆成几个正方形?”

陈思(以下简称陈):“可以摆成1个或两个.”[图1.2(a),(b)]

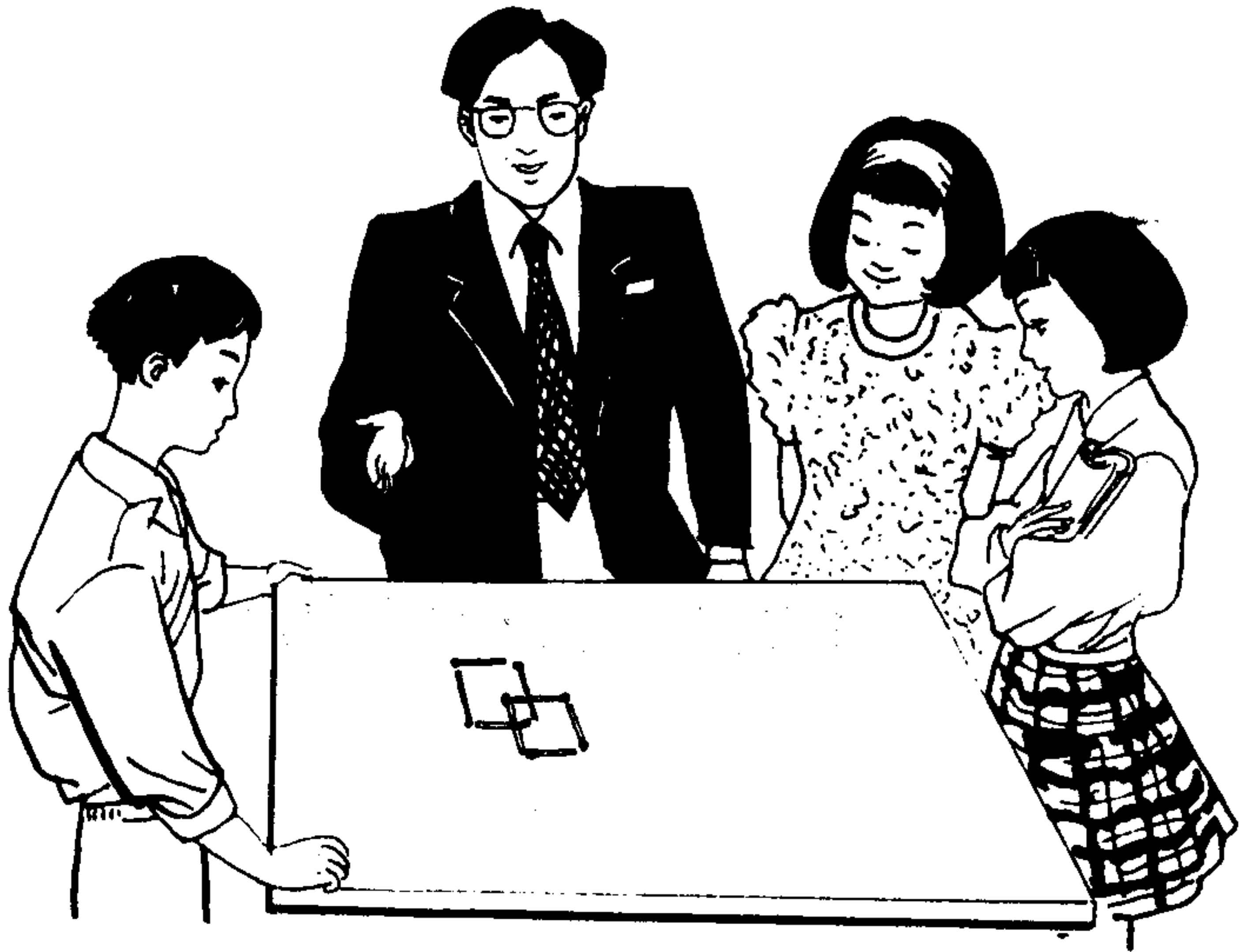
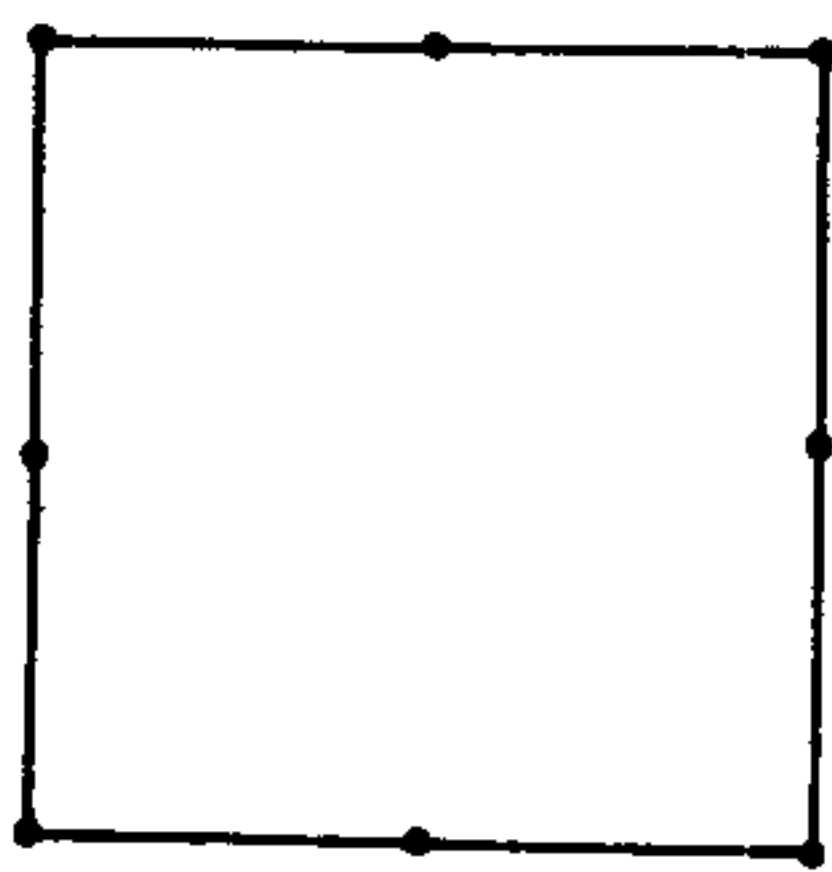
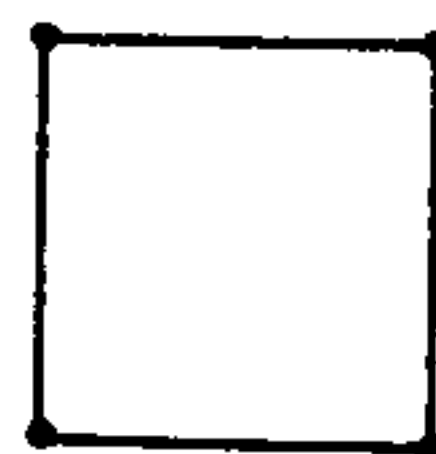
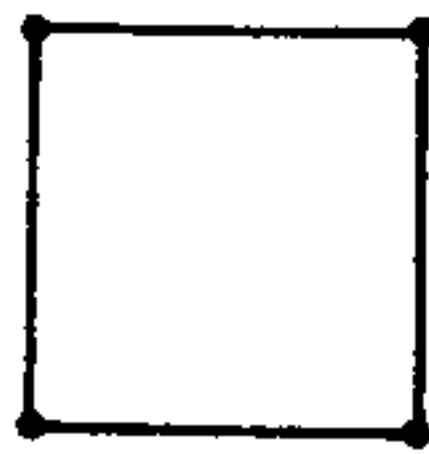


图 1.1

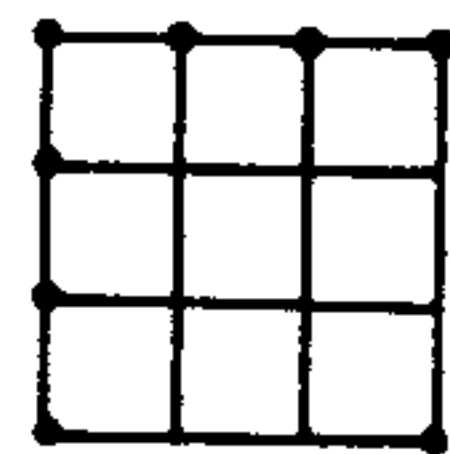
郭思惠(以下简称郭):“可以摆成 9 个.”[图 1.2(c)]



(a)



(b)



(c)

图 1.2

师:“还有不同的看法吗?”

同学们沉默。

师：“好，我再问一个问题，4根火柴能摆成几个正方形？”

郭：“4根火柴能摆成一个正方形。”

师：“如果在这个正方形上再加上两根火柴，能摆成几个正方形？”

王兆敏(以下简称王)：“又增加了4个小正方形，再加上原来那个大正方形，一共是5个正方形。”

师：“那么8根火柴就只能摆成9个正方形吗？”

郭：“噢！我想起来了，再加上外框那个大正方形，共有10个正方形。”

师：“1个大正方形，9个小正方形，看看还有没有遗漏的？”

郭：“没有了。”

师：“再想想看，还有没有比大的小、比小的大的正方形？”

郭：“对了，还有4个不大不小的正方形。这样，像图1.2(c)这样的摆法，一共有14个正方形。”

师：“对了，这就是 $1+4+9=14$ 。除了上面三种摆法外，还有其他的摆法吗？不妨在图1.2(b)的基础上，再试试看。”

同学们一边摆着火柴，一边思考着怎么在图1.2(b)的基础上再摆出新的花样出来。

师：“如果一个正方形不动，动另一个，看有什么结果？”

陈思同学恍然大悟，一种喜悦油然而生：“能摆出3个正方形。”(图1.3)

郭思惠、王兆敏同学都感到，这个问题真有意思。原来还

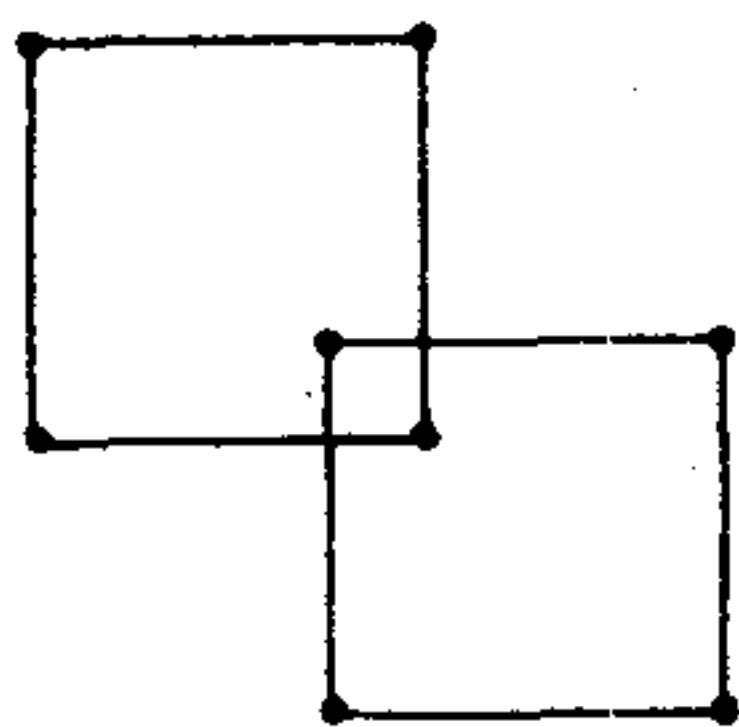


图 1.3

能组合成这一个小正方形,真是太妙了!

师:“这样一来,得到几个答案?”

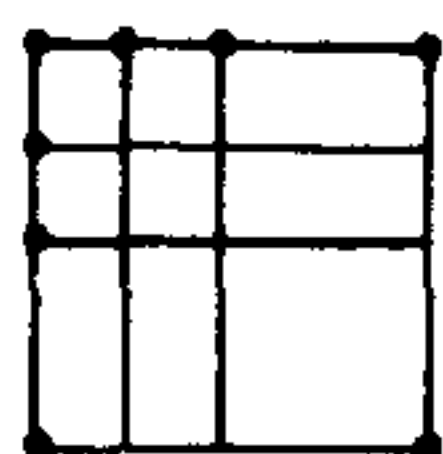
王:“1,2,3,14,得到4个答案。”

师:“是否还有其他的答案?大家可在图 1.2(c)的基础上再试试看。”

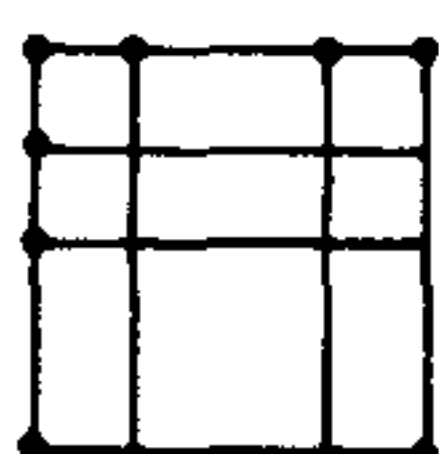
这时三位同学将目标集中在图 1.2(c)上,思考着怎样才能摆出新花样来。

师:“如果外框那4根火柴不动,动框内4根火柴,看有什么结果?”

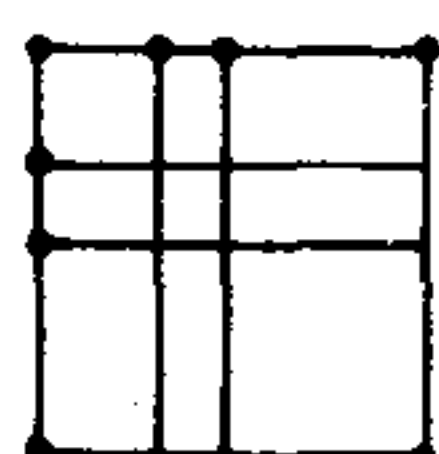
三位同学移动着火柴,一会儿又摆出新的花样出来。在图 1.4 中,(a)有10个正方形,(b)有9个正方形,(c)有8个正方形,(d)有6个正方形。



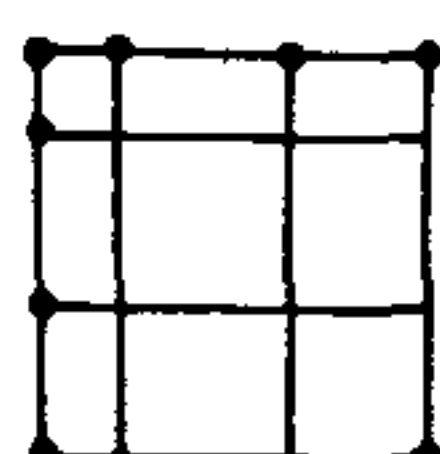
(a)



(b)



(c)



(d)

图 1.4

1.2 100 根火柴最多能摆成多少个正方形?

师:“如果问题变为8根火柴最多能摆成多少个正方形,应该怎样回答?”

郭:“最多能摆成14个正方形。”

师:“如果火柴不是8根,而是100根,那么最多能摆成多

少个正方形呢?”

三位同学默然无语.

师:“为了回答这个问题,我们可以先将问题一般化,考虑 $2n$ 根火柴最多能摆成多少个正方形. 对于这个一般问题,又需要退一步去考虑,我们可先看一些特殊的例子,然后再进行归纳,找出一般规律. 为此先考虑 $n=2,3,4,5$ 的情况.”

陈:“当 $n=2$ 时,有 4 根火柴,这时只能摆 1 个正方形.”

郭:“当 $n=3$ 时,有 6 根火柴,这时最多能摆成 5 个正方形.”

王:“当 $n=4$ 时,有 8 根火柴,刚才已说过,最多能摆成 14 个正方形.”

陈:“当 $n=5$ 时,有 10 根火柴,这时最多能摆成的正方形数为:1 个最大的正方形,4 个次大的正方形,9 个次小的正方形,16 个最小的正方形. 一共有 $1+4+9+16=30$ 个正方形.”

师:“那么,让我们分析一下所得到的结果,上述结果可列成表 1.1.”

表 1.1

n	$2n$	最多能摆成的正方形数	
2	4	1	=1
3	6	$1+4$	=5
4	8	$1+4+9$	=14
5	10	$1+4+9+16$	=30
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

师:“表 1.1 又可以写成表 1.2.”

表 1.2

n	$2n$	最多能摆成的正方形数	
2	4	1^2	$=1$
3	6	1^2+2^2	$=5$
4	8	$1^2+2^2+3^2$	$=14$
5	10	$1^2+2^2+3^2+4^2$	$=30$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

陈：“通过表 1.2，我们很容易猜想：一般说来，当火柴为 $2n$ 根时，其最多能摆成的正方形的个数为 $1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2$ 。”

师：“这个猜想是否正确，你能证明吗？”

郭：“像这样的问题，一般是用数学归纳法证明的。我试着把证明写出来。”

下面就是郭思惠写出的证明：

(1) 当 $n=2$ 时，结论显然成立。

(2) 假设当 $n=k$ 时结论成立，则 $2k$ 根火柴最多能摆成的正方形的个数为

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2.$$

那么，当 $n=k+1$ 时，由归纳假设，这 $2(k+1)$ 根火柴最多能摆成的正方形的个数为

$$\begin{aligned} & 1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2+1+3+5+\cdots+(2k-1) \\ & = 1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2+k^2. \end{aligned}$$

从而，当 $n=k+1$ 时结论也正确。

综合(1)，(2)可知，对任意的自然数 $n(n\geq 2)$ ，上述结论都正确。

王：“归纳假设后面的式子

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k-1)^2 + 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1)$$

似不大好理解。”

郭：“让我们换一个角度，借助图形来说明上述证明过程. 如图 1.5 所示，设用 $2k$ 根火柴摆成的正方形记为 $A_0 A_{k-1} C_{k-1} B_{k-1}$ ，用 $2(k+1)$ 根火柴摆成的正方形记为 $A_0 A_k C_k B_k$. 设 $A_0 A_k C_k B_k$ 的边长为 l ，则取 l/k 为 1 个单位长. 假设

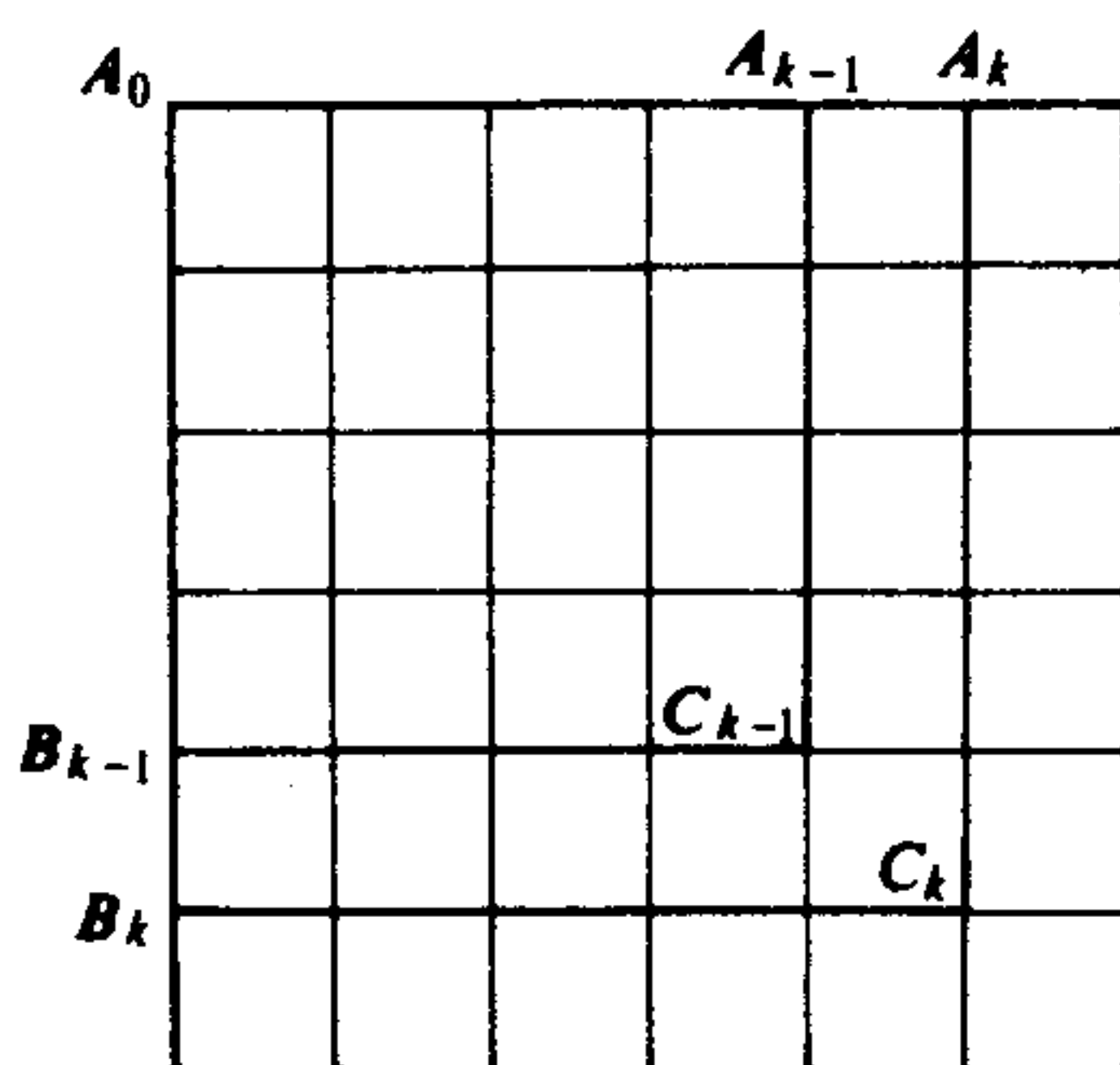


图 1.5

当 $n=k$ 时结论成立，即
正方形 $A_0 A_{k-1} C_{k-1} B_{k-1}$ 中的正方形个数 $= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k-1)^2$. 那么，当 $n=k+1$ 时，由归纳假设，

$$\begin{aligned} & \text{正方形 } A_0 A_k C_k B_k \text{ 中的正方形个数} \\ &= \text{正方形 } A_0 A_{k-1} C_{k-1} B_{k-1} \text{ 中的正方形个数} + \text{图形 } A_{k-1} \\ & \quad C_{k-1} B_{k-1} B_k C_k A_k \text{ 与正方形 } A_0 A_{k-1} C_{k-1} B_{k-1} \text{ 组合成的正} \\ & \quad \text{方形个数} \\ &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k-1)^2 + \text{组合成边长为 } k \text{ 的正方形} \\ & \quad \text{个数} + \text{组合成边长为 } k-1 \text{ 的正方形个数} + \text{组合成边} \\ & \quad \text{长为 } k-2 \text{ 的正方形个数} + \cdots + \text{组合成边长为 } 1 \text{ 的正} \\ & \quad \text{方形个数} \\ &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (k-1)^2 + 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) \end{aligned}$$

$$=1^2+2^2+3^2+\cdots+(k-1)^2+k^2.$$

师：“这样一来，就可以利用上述方法，计算出 $2n$ 根火柴最多能摆成的正方形的个数. 不过，这样计算太麻烦，下面介绍一个简洁公式，即 $n-1$ 个数的平方和可以用下式来计算：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1).$$

利用这一公式就可以迅速地计算出 100 根火柴最多能摆成多少个正方形了。”

王：“把 $n=\frac{100}{2}$ 代入公式，可得

$$\frac{1}{6}\left(\frac{100}{2}-1\right)\times\frac{100}{2}\times\left(2\times\frac{100}{2}-1\right)=40425(\text{个}).”$$

1.3 数列求和

师：“上面的计算中用到的那个求和公式是如何得来的呢？它既不是等差数列求和，又不是等比数列求和. 在形式上，它与等差数列前 n 项和 $1+2+3+\cdots+n$ 有些类似. 大家都知道，用拼补法，我们推得了

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

那么，能否用其他方法推得这一结果呢？为此我们分析一下上述等式的特点. 等式的右边是一个关于 n 的二次函数式，等式的左边是关于 n 的一次函数式. 由于是求和，因此与项数有关，而项数一定是关于 n 的一次式. 所以我们可以通过等式左边所提供的信息，推知它是一个关于 n 的二次式. 虽然数列求和公式的具体形式不知道，但我们能够通过给定的信息很快

判断出它所具有的函数类型,进一步再确定这一函数的具体形式.而这可以通过下列方法来实现.设

$$1+2+3+\cdots+n=An^2+Bn+C.$$

由于 A, B, C 是三个待确定的系数,所以需要建立一个三元一次方程组.当 $n=1, 2, 3$ 时,有

$$\begin{cases} A+B+C=1, \\ 4A+2B+C=3, \\ 9A+3B+C=6. \end{cases}$$

解上述方程组,得 $A=B=\frac{1}{2}, C=0$,故有

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

我们这里所用的方法称为‘待定系数法’.在我们待解决的问题中,如果可以确定所求结果为含有若干待定系数的表达式,便可由此建立某些恒等式,然后再通过恒等变形或代换来确定其系数,从而获得问题所要求的结果.

用待定系数法解题的步骤可以总结如下:

第一步,假定一个含有待定系数的恒等式;

第二步,根据恒等式的性质列方程组;

第三步,解方程组,求出待定系数.

这里所用到的恒等式的性质有如下两条:

(1)若 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

$$=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n,$$

则有

$$a_0=b_0, \quad a_1=b_1, \quad \cdots, \quad a_n=b_n.$$

(2)若 $f(x)=g(x)$, 则用这两个函数公共定义域内的任一值代替 x , 等式恒成立.

下面我们试着用待定系数法求 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$.”

王:“我觉得在这个式子中, 由于一般项为 n 的二次函数, 和式又与项数有关, 故可推知其结果必为 n 的三次函数. 按照老师刚才讲过的方法, 可设

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=An^3+Bn^2+Cn+D.$$

由于 A, B, C, D 为 4 个待定系数, 故需要建立 4 个方程, 组成一个四元一次方程组. 考虑 $n=1, 2, 3, 4$ 时的情况, 得

$$\begin{cases} A+B+C+D=1, \\ 8A+4B+2C+D=5, \\ 27A+9B+3C+D=14, \\ 64A+16B+4C+D=30. \end{cases}$$

解此方程组, 得

$$A=\frac{1}{3}, \quad B=\frac{1}{2}, \quad C=\frac{1}{6}, \quad D=0,$$

所以有

$$\begin{aligned} 1+2^2+3^2+\cdots+n^2 &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

师:“很好, 大家想想是不是还有其他方法呢?”

经过一番思考, 陈思又想出了如下的递推法来推导上述数列前 n 项和的求和公式:

利用 $f(x)=x^3$ 逐差叠加. 因为

$$f(k+1)-f(k)=(k+1)^3-k^3,$$

当 k 分别取 $n, n-1, n-2, \dots, 3, 2, 1$ 时, 得到

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1,$$

$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1,$$

$$(n-1)^3 - (n-2)^3 = 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1,$$

.....

$$3^3 - 2^3 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1,$$

$$2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1.$$

将上述 n 个等式两边分别相加, 得

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - 1 &= 3[n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 2^2 + 1^2] \\ &\quad + 3[n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1] + n. \end{aligned}$$

整理得

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

师:“这个方法也非常巧妙. 这个问题的其他推求方法这里就不再继续讨论了, 关于数列求和问题我们先告一段落. 刚才我们讨论了用火柴摆正方形的问题, 下面我们来讨论这类正方形的面积问题.”

1.4 正方形的面积

师:“如果规定 1 根火柴的长度为单位长度, 那么用 8 根火柴摆成的正方形, 其中最大的正方形面积是多少? 最小的正方形面积又是多少呢?”

郭:“最大的正方形面积为 4, 最小的正方形面积为 $1/9$.”

师:“其他同学还有什么别的看法吗?”

同学们都默然不语.

师：“大家看一下图 1.3，中间的这个小正方形面积是多少？”

陈：“一定比 1 小。”

师：“它的边长可以是多少？”

王：“它的边长可以是单位长的 $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, 等等。”

师：“也就是说，其边长可以是 $(0, 1]$ 之间的任何一个数，大家想想包括不包括零呢？”

王：“不包括。”

师：“对，那么有没有最小的正方形？”

陈：“没有最小的正方形。”

师：“为什么？”

陈：“是否可以这样解释，不管任意给定一个多么小的数，例如 $\frac{1}{1000}$ ，我们总可以找到比它更小的数，比如 $\frac{1}{10000}$ ， $\frac{1}{100000}$ 等作为这个正方形的边长，因此找不到一个边长最小的正方形。”

师：“很好！如果按照所摆成的正方形的大小来区分，试问：用 8 根火柴能摆成多少个正方形？”

王：“无穷多个。”

师：“对，完全正确。这有限的 8 根火柴竟能摆出无穷多个正方形！由有限产生出无限，无限又蕴含在有限之中，数学就是这样出奇地美！大家能否将各种各样的正方形的边长与其面积的关系写成函数表达式呢？”

陈：“如果用 x 表示正方形的边长， S 表示其面积，那么有

$S = x^2$.”

师：“ x 的取值范围是什么？”

王：“就我们用火柴摆正方形这个问题来说， x 的取值范围是 $0 < x \leq 1, x = 2$.”

师：“在我们的问题中，正方形面积与边长的函数关系的完整表述应该怎样写？”

陈：“可以写为

$$S = x^2, x \in \{(0, 1], 2\}.$$

1.5 问题成串

师：“我们的问题是用火柴摆正方形，由此想开来，用火柴还可以摆出其他图形吗？”

郭：“可以.”

师：“还能摆出哪些类型的图形？”

郭：“还可以摆出三角形、长方形、平行四边形、菱形、梯形、多边形.”

师：“假设一根火柴为 1 个单位长，用 8 根火柴首尾衔接，能否组成单位面积为 3 的图形？”

陈：“可将 8 根火柴组成一个长方形，如图 1.6(a) 所示.”

师：“还有其他的摆法吗？不妨在图 1.2(a) 的基础上考虑一下，比如将图形移动一下.”

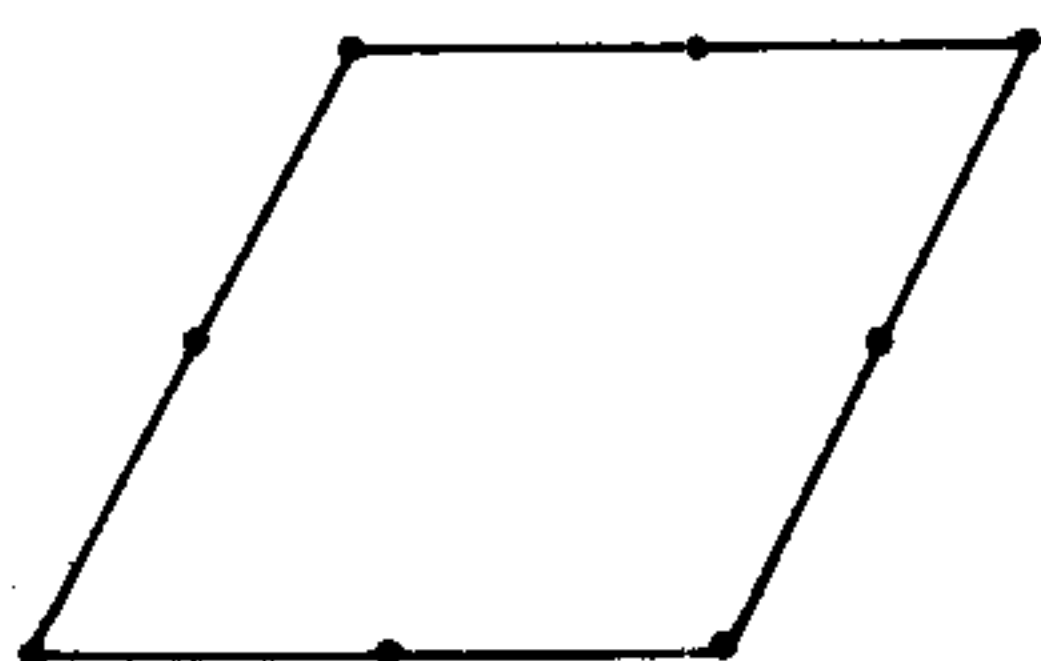
王：“我知道了，将图形 1.2(a) 平移成平行四边形（菱形），且使其高等于 $\frac{3}{2}$ ，则该平行四边形的面积为 3 [图 1.6 (b)].”

师：“如果移动的火柴再少一些，会出现什么情况呢？”

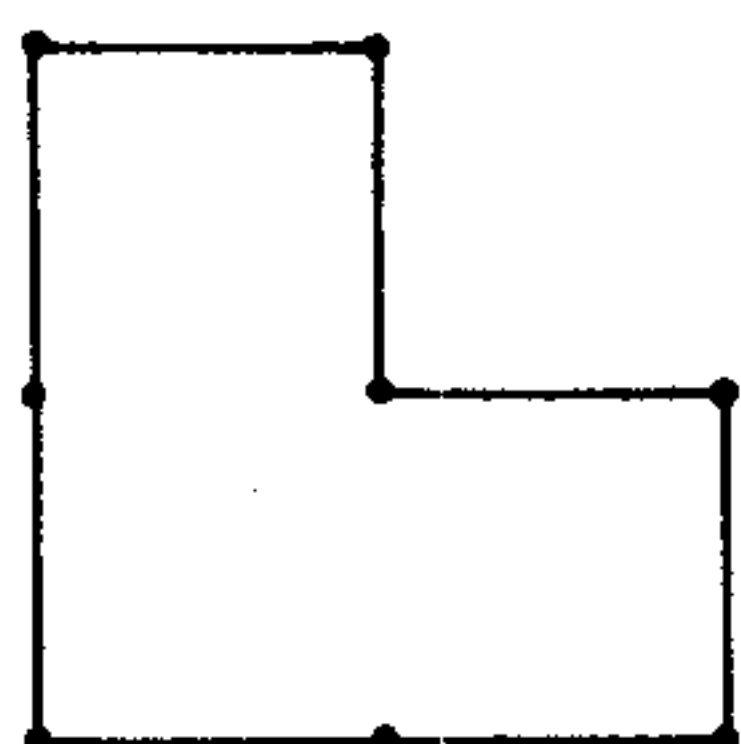
郭：“老师这一说，我想起来了，只要在图 1.2(a)上移动两根火柴，就可得出面积为 3 的图形[图 1.6(c)].”



(a)



(b)



(c)

图 1.6

师：“图 1.6(a)的边长排列为 1313，如果这 4 个边换一种方式排列，可否组成面积为 3 的四边形？”

陈：“4 个边长可排列为 1133，这时边长 1 与边长 3 的夹角设为 α ，则面积

$$S = 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times 3 \sin \alpha = 3 \sin \alpha.$$

易知当 $\alpha = 90^\circ$ 时，面积为 3[图 1.7(a)].”

师：“用 8 根火柴，还能组成其他类型的四边形吗？”

王：“其边长还可排列为 1232，这时，边长首尾衔接的顺序关系有两种：1232[图 1.7(b)], 1322[图

1.7(c)]. 在图(b)中，面积

$$S = 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2^2 - 1} + 1 \times \sqrt{2^2 - 1} = 2\sqrt{3}.$$

面积大于 3，可将此图形连续变动，使其面积越来越小，直至变成面积为 3 的图形.

在图(c)中，边长 1 与边长 3 垂直，这时，其面积

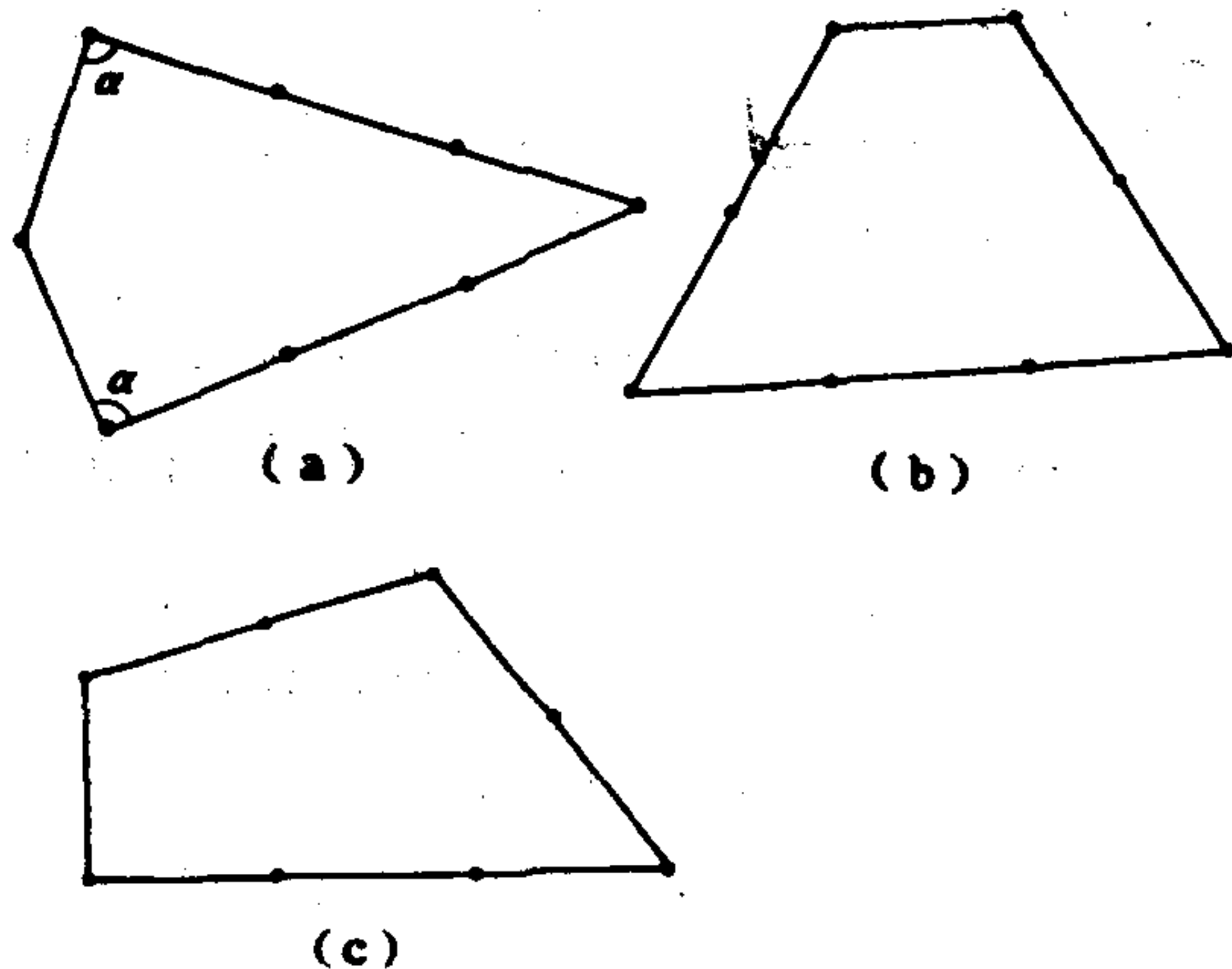


图 1.7

$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 + \frac{\sqrt{1^2 + 3^2}}{2} \times \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{1^2 + 3^2}}{2} \right)^2}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{15}}{2}.$$

面积大于 3, 可将图形(c)连续变动, 直至变成面积为 3 的图形。”

师: “用 8 根火柴能摆成五边形吗? 如果能的话, 能摆成怎样的五边形?”

陈: “用 8 根火柴可以摆成五边形, 其边长的顺序分别为 11123, 11213, 11222, 12212.”

师: “若用 8 根火柴摆成六边形、七边形、八边形, 边长的顺序又是怎样呢?”

王: “用 8 根火柴摆成六边形, 其边长的顺序分别为

111113, 111122, 111212, 112112; 若摆成七边形, 边长顺序为 1111112; 若摆成八边形, 边长顺序则为 11111111.

郭: “以上这些图形其面积都可以大于 3, 然后将图形连续变动, 便可使其面积等于 3.”

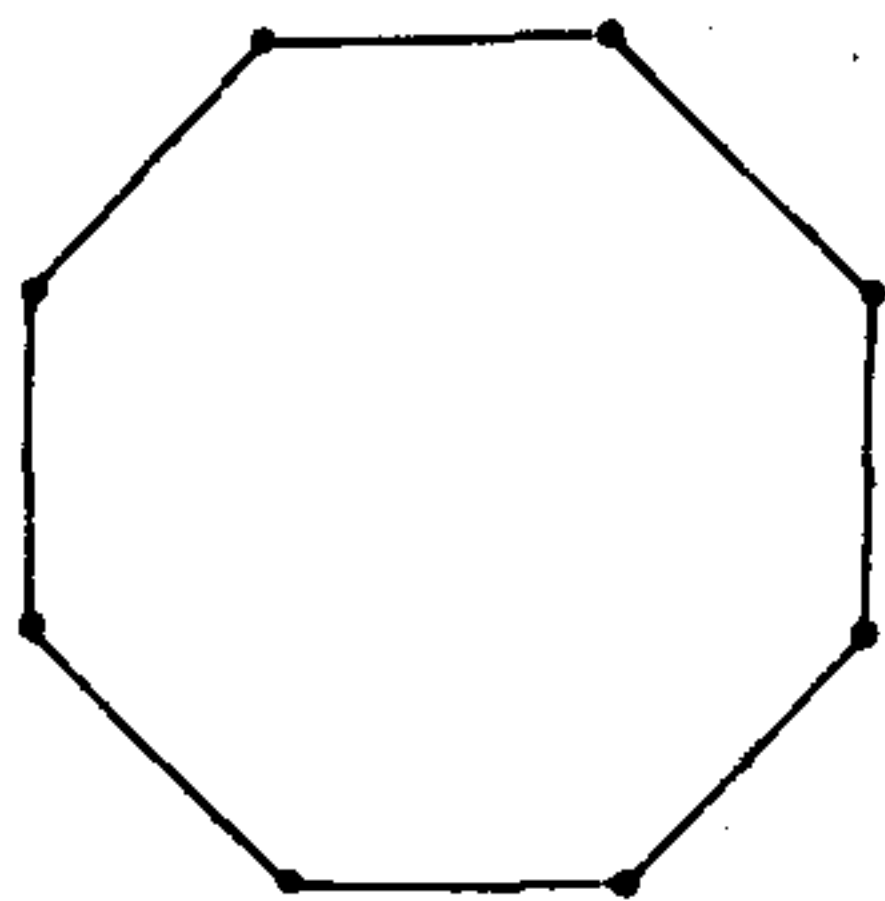


图 1.8

师: “具有单位长的 8 根火柴, 组成什么样的图形其面积最大? 这个图形的面积是多少?”

陈: “通过直观和计算得知, 用单位长的 8 根火柴, 摆成正八边形其面积最大(图 1.8), 其面积为 4.8.”

师: “用 8 根单位长的火柴组成的各种四边形中, 哪种四边形的面积最大?”

王: “正方形的面积最大.”

师: “由上述结果, 你们能猜想出一个一般的结论吗?”

郭: “周长为给定值的一切 n 边形中, 正 n 边形具有最大的面积.”

师: “这个猜测是对的, 可以从理论上予以证明, 这里就不详细讨论了. 现在我们再考虑一个相反的问题. 上面讨论的是已知火柴根数, 求图形的问题; 现在讨论的问题是, 已知图形, 求火柴的根数. 比如, 要摆成 5 个正三角形, 最少需要几根火柴?”

陈: “最少需要 9 根火柴(图 1.9).”

张老师因势利导, 又向同学们提出了下列问题:

(1)按图 1.10(a)的方式,用火柴拼成正方形.

1)当正方形的个数是 5 时,要用多少根火柴?

2)如果正方形的个数是 10,35 时,各需要多少根火柴?

3)70 根火柴能拼成多少个正方形? 72 根火柴呢?

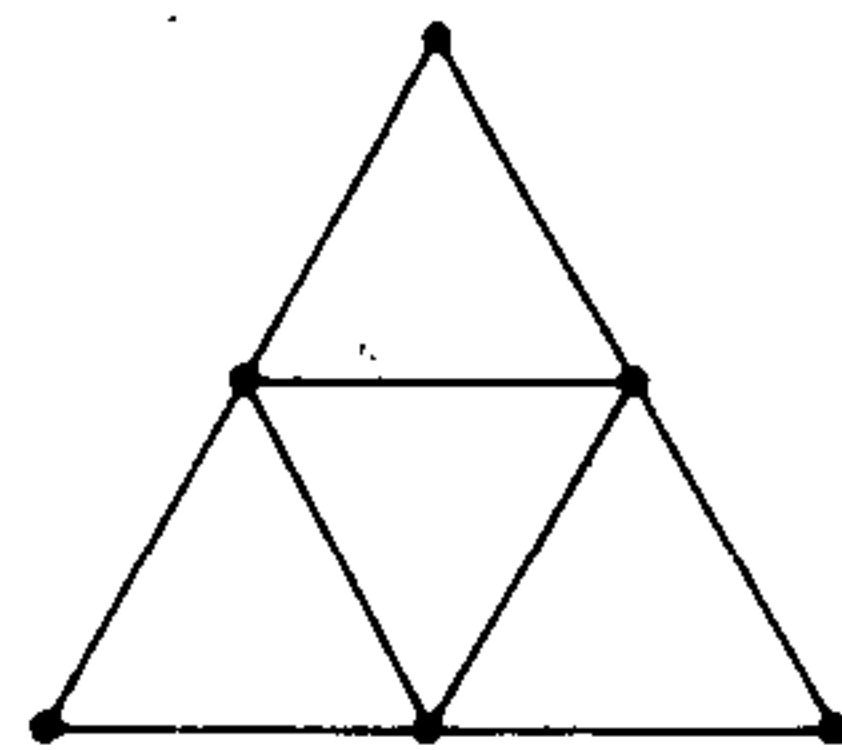


图 1.9

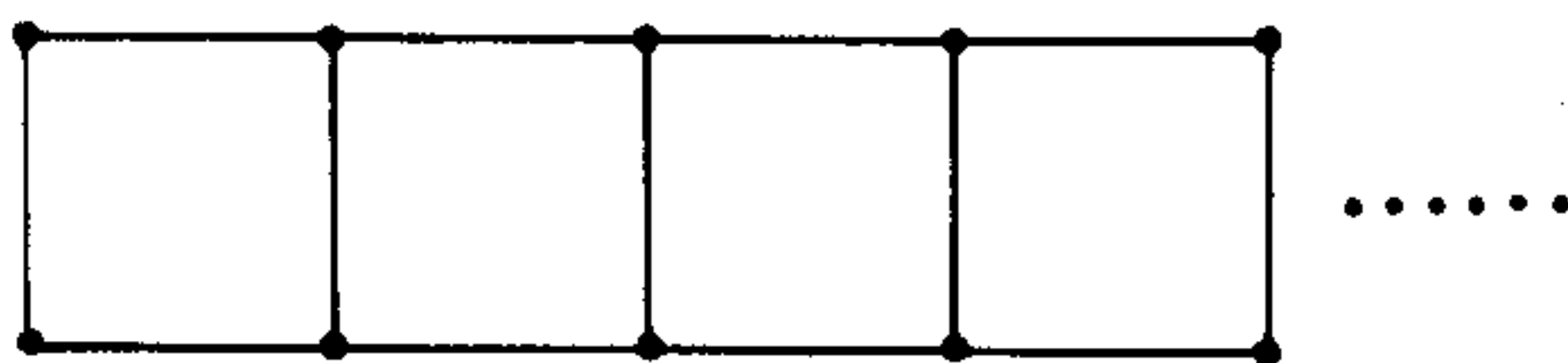


图 1.10(a)

4)一般地,要拼成 n 个正方形需要多少根火柴?

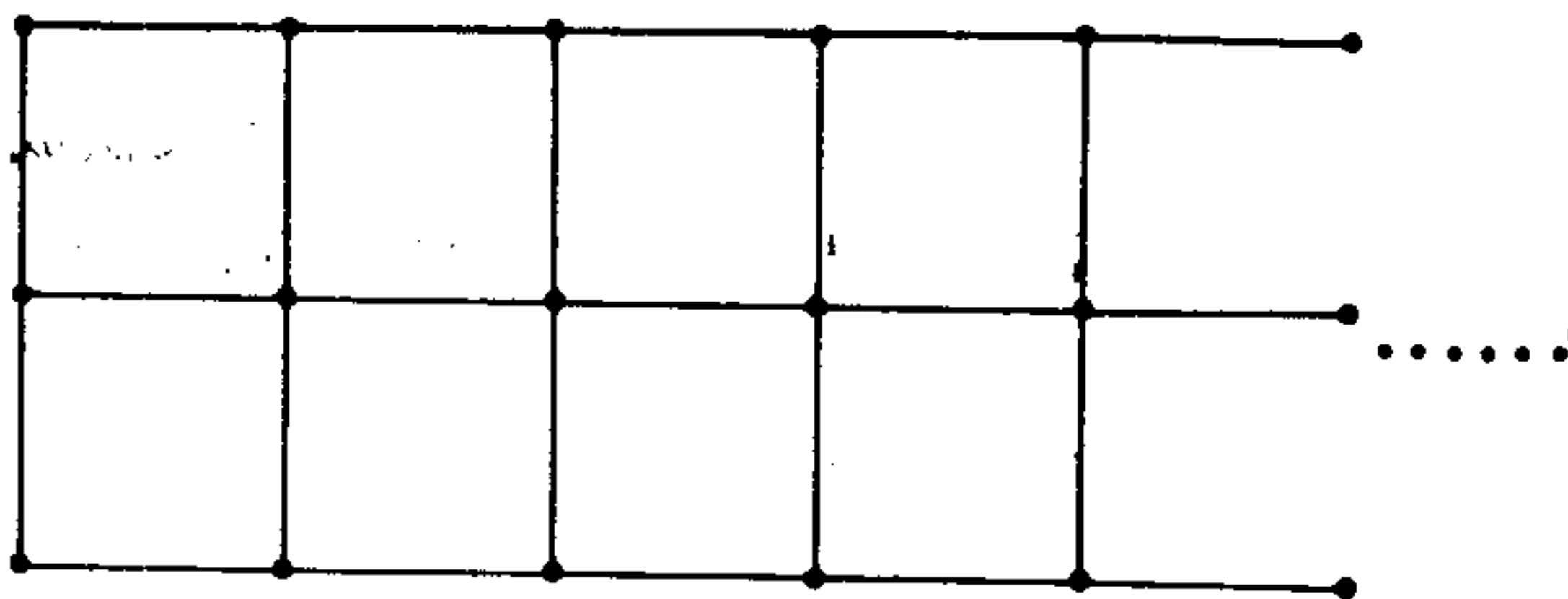


图 1.10(b)

(2)如果按图 1.10(b)的方式,用火柴拼边长为两根火柴的正方形,请提出类似于(1)中的问题,并讨论解决它们.

(3)如果按图 1.10(c)方式,用火柴拼成三角形,情况如

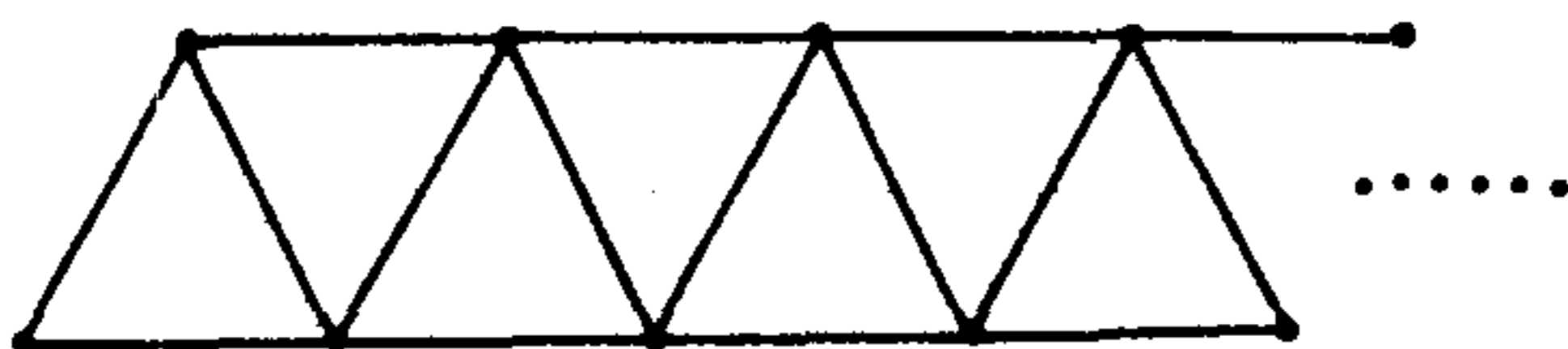


图 1.10(c)

何?一般地,把三角形改成平行四边形、五边形,请提出尽可能多的问题.

这是国际数学教育测试试题,曾在 1988 年被用于进行美日两国中小学数学教育比较研究.请读者独立地去做一下,它可以测试你的观察图形和发现规律的能力、发散思维能力、变换图形能力,以及提出问题和解决问题的能力.

习 题 1

1. 用 12 根火柴能摆成多少个正方形? 假设 1 根火柴是 1 个单位长,试用 12 根火柴首尾衔接,组成面积为 8 的图形.

2. 用 8 根火柴最多能摆成多少个长方形?

3. 用 24 根火柴摆成一个“回”字(图 1.11),请设法移动 4 根火柴,使它变成两个面积相等的正方形.

4. 用 9 根火柴能摆成 3 个正方形吗?

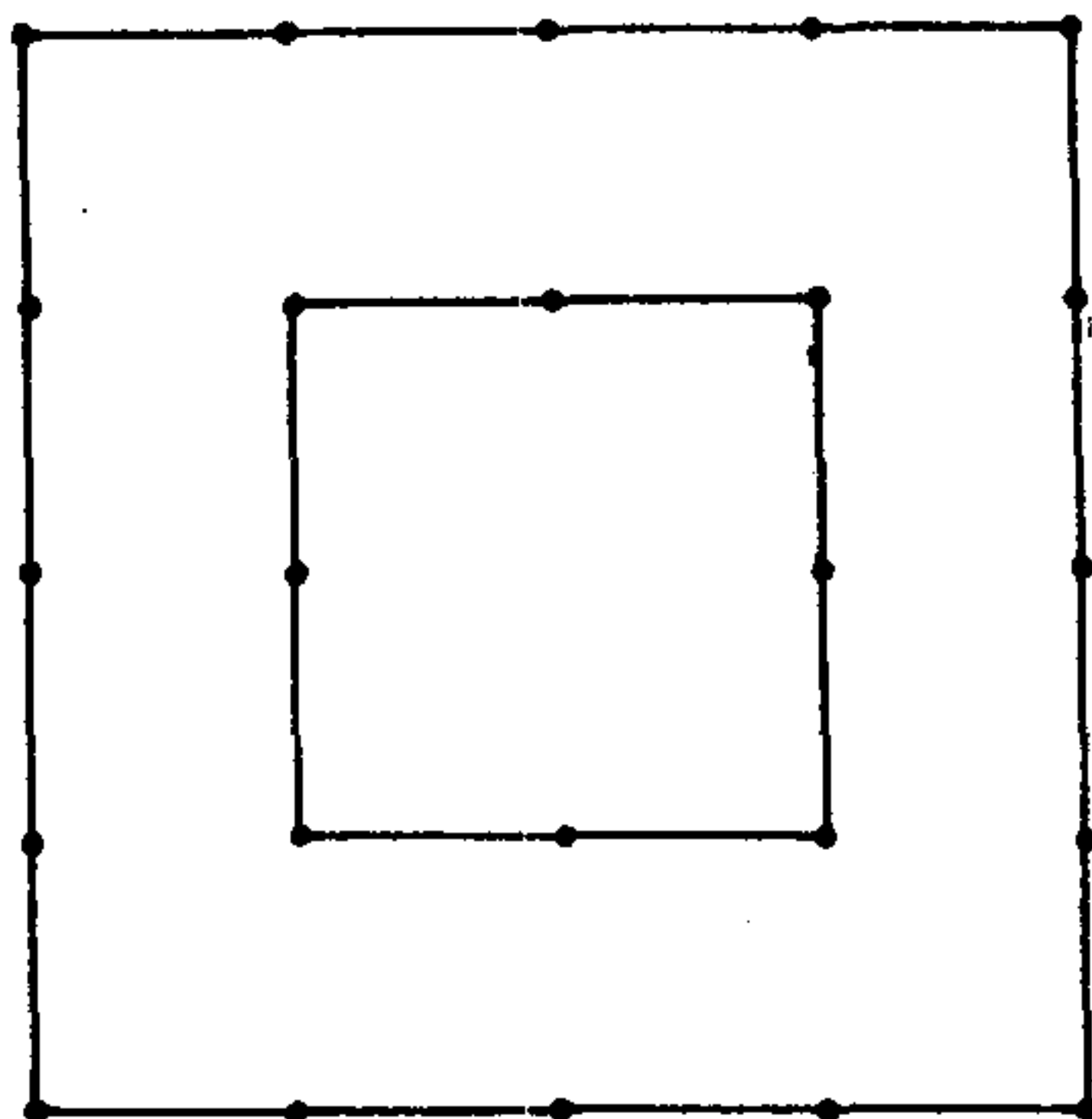


图 1.11



一堂生动的复习课

我的朋友秦华,是一位教学能手,学生们对他教的几何课特别感兴趣.在课堂上,他能把全班同学的思维调动起来,使学生们学得生动活泼.有一次我听了他一堂课,这是在同学们学习了相似三角形之后,师生共同复习推导梯形面积公式的方法的一堂课.

课堂上,在秦老师的引导下,同学们积极地思考,短短一节课中,同学们竟想出了那么多新的方法来.最重要的是,秦老师能启发同学们从简单问题的思考中领悟到更深层次的东西,挖掘出更深层次的思想方法来.我感到,这无论对教者还是对学者都是一种启迪.现将实际教学过程的主要步骤记述如下(T 表示教师, S 表示学生).

2.1 类比

上课铃响了,秦老师健步走上讲台.首先他向同学们讲了一下这节课的中心议题,然后向一位同学提出了如下的问题:

“ S_1 同学,请你回答一下,梯形面积公式是怎样推导出来的?”

S_1 :“老师,我忘了.”

T :“那么三角形的面积公式是怎样推导的,还记得吗?”

S_1 :“记得,在三角形旁边再拼补一个相同的三角形,使之形成一个平行四边形,平行四边形的面积求出之后,再除以 2 就是三角形的面积.”

这时教师展示图 2.1,如果三角形的高为 h ,底边长为 a ,就推得三角形面积公式为 $\frac{1}{2}ah$.

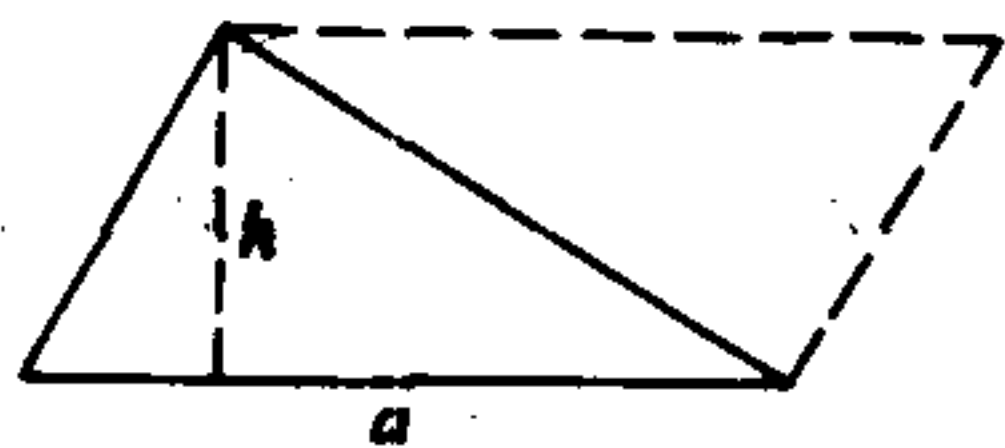


图 2.1

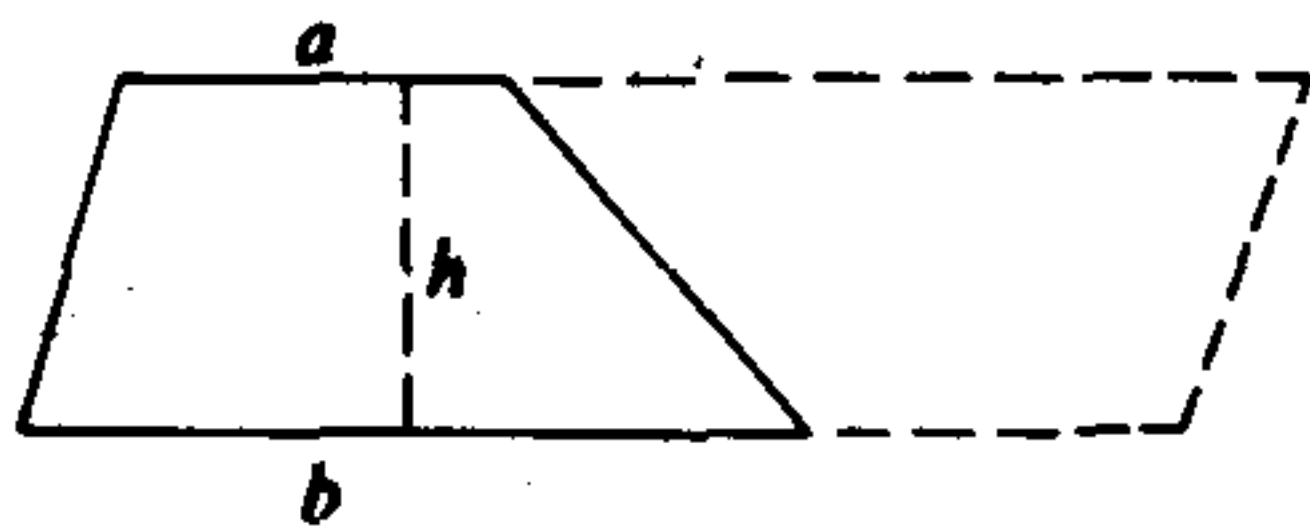


图 2.2

T :“能否用类似的方法来考虑一下梯形呢?”

S_1 :“我知道了,在梯形旁边再拼补一个大小相同的梯形,使之成为一个平行四边形,平行四边形的面积求出之后,再除以 2 就是梯形的面积,这样也就推导出了梯形的面积公式.”

这时教师展示图 2.2,设梯形的上底为 a ,下底为 b ,高为

h , 则其面积为 $\frac{1}{2}(a+b)h$.

2.2 抽象概括

T : “如果是单纯地解题, 那么到这儿就可以告一段落了, 因为梯形面积公式已经推导出来了. 但从解题过程所体现的思想方法这个角度考虑, 还需要我们再往深处想想. 下面, 请同学们把梯形面积公式的推导与三角形面积公式的推导比较一下, 找找它们的共同点.”

S_1 : “无论是三角形, 还是梯形, 它们都是通过拼补转化为平行四边形的.”

S_2 : “它们都是通过把平行四边形的面积折半推导出其面积公式的.”

T : “作为解题方法, 你能给它起一个名字吗?”

S_2 : “叫做拼补折半法.”

S_3 : “叫做拼补法.”

T : “这两种叫法都很好. 大家说, 这两种叫法有什么区别吗?”

S_4 : “拼补法适用的范围更广些.”

T : “这也就是说, 从方法论的层次上来说, 拼补法比拼补折半法高一个层次. 同学们还能在更高些的层次上概括一下吗?”

全班默然.

T : “在我们的证明过程中, 平行四边形、三角形与梯形之

间具有怎样的包含关系呢?”

S_3 :“平行四边形包含了三角形和梯形.”

T :“谁是整体,谁是局部呢?”

S_4 :“平行四边形相对于三角形、梯形来说是整体,而三角形、梯形相对于平行四边形来说是局部.”

T :“对单独的一个三角形或一个梯形来说,这样的局部问题不容易解决,我们就可以把它转化为平行四边形这样的整体问题来解决.而整体问题我们已经会解了,从而局部的问题也就迎刃而解了.这种解决问题的方法,同学们能给它一个名称吗?”

S_2 :“可不可以叫整体转化法?”

T :“对!这种由局部转化为整体来解决问题的方法,我们可以称之为整体转化法.这是一种带有普遍意义的思想方法,在我们所学过的数学知识中,还有哪些是属于用这种方法来解决问题的?”

.....

2.3 逆向思维

T :“上述解决问题的方法是局部 $\rightarrow$ 整体.这个箭头的方向是否可以倒过来呢?也就是说,如果我们从由整体到局部的角度来考虑,是否也可以推导出梯形面积公式呢?”

S_1 :“将梯形分割成两个三角形(图2.3),因为两个三角形的面积可求,那么这两个三角形的面积之和就是梯形的面积.”

S_2 :“将梯形转化为一个平行四边形和一个三角形(图 2.4),这个平行四边形的面积与三角形的面积之和也是梯形的面积.”

S_3 :“将梯形转化为两个三角形和一个矩形(图 2.5),它们的面积之和是梯形的面积.”

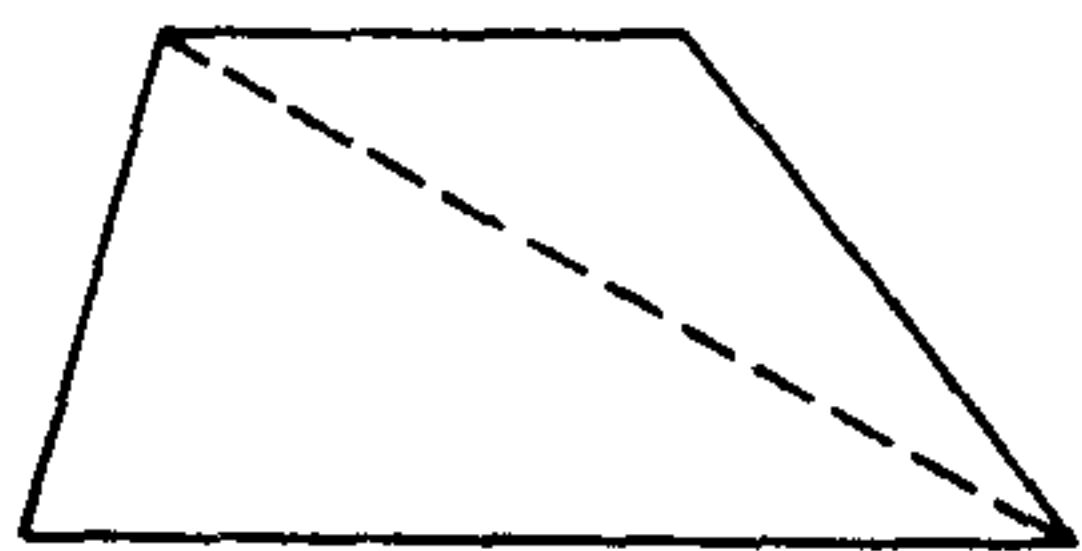


图 2.3

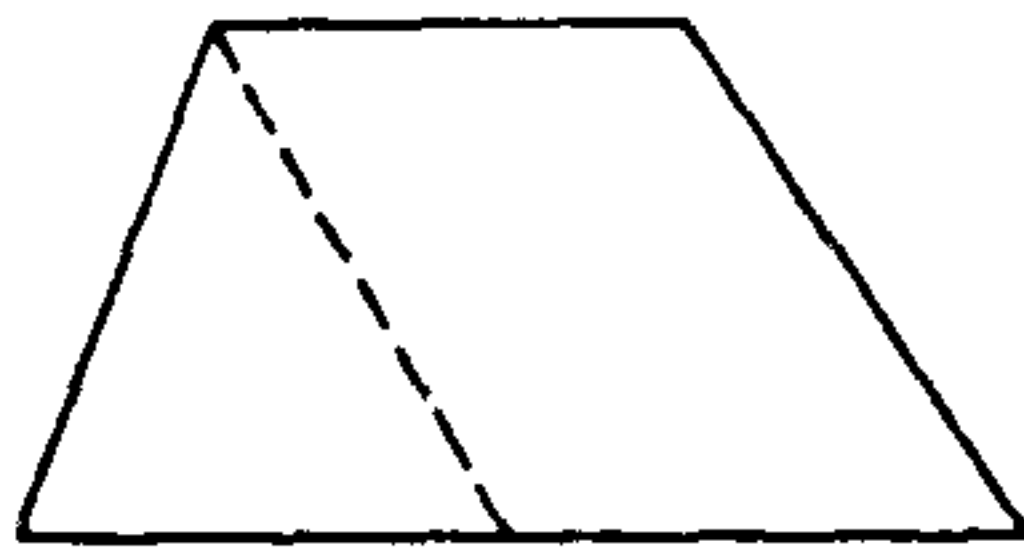


图 2.4

T :“上面三种推导梯形面积公式的方法,都是局部转化法,谁能说出局部转化法的定义?”

S_5 :“由整体转化为局部来解决问题的方法,称为局部转化法.”

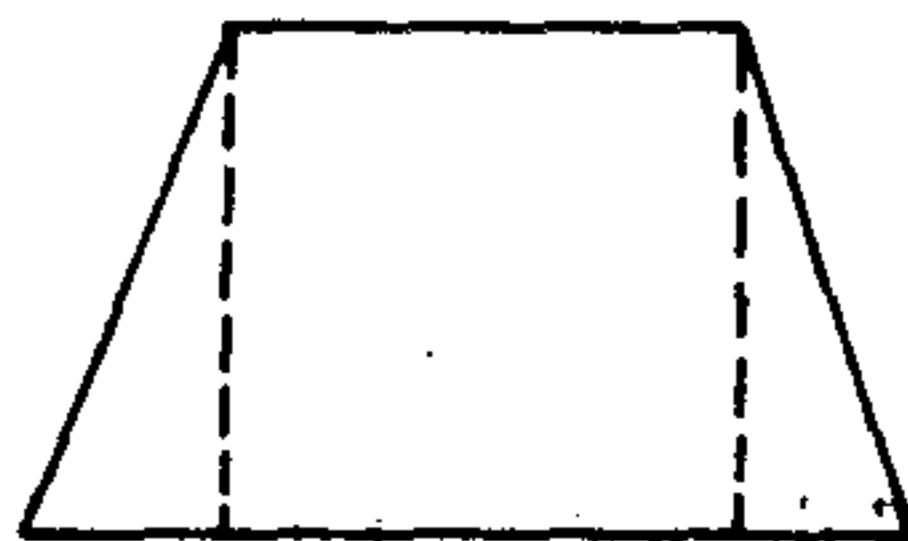


图 2.5

T :“可以这样说.上述解决问题的程序可用框图表示出来(图 2.6).从整体转化为局部,用的是分割法,因此,这种解决问题的方法,又称为分割法.由局部问题的解答*到整体问题的解答利用了叠加的方法,因此,这种解决问题的方法,还可以叫做叠加法.”

现在,我们再换一个角度来考虑问题.局部转化法相对于整体转化法,从思维方向来看,它们之间有怎样的关系?”

S_6 :“思维方向正好相反.”

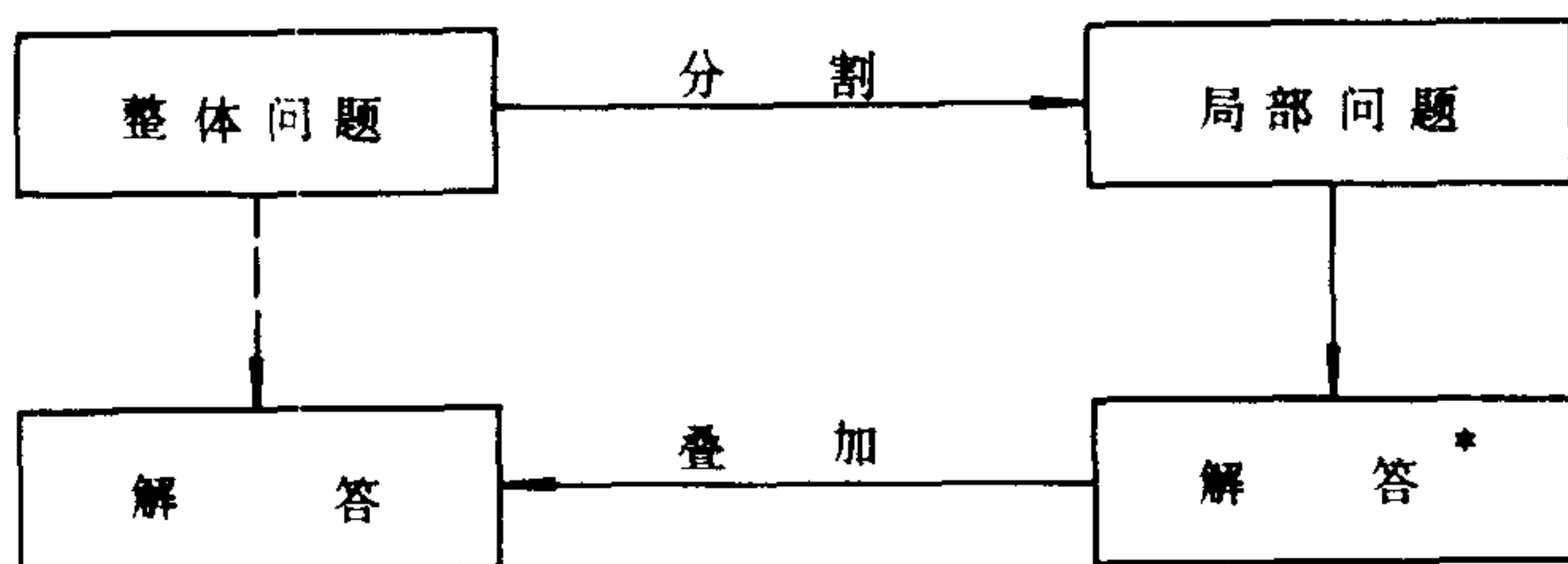


图 2.6

T:“一个是从局部到整体,一个是从整体到局部.如果把整体转化法看做是正向思维,那么局部转化法就是——”

S₇:“逆向思维.”

T:“你还能举出逆向思维的其他例子吗?”

S₇:“如式 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$,从左到右进行运算,即

$$(a-b)(a+b) \rightarrow a^2-b^2$$

为正向思维;那么从右到左进行因式分解,即

$$(a-b)(a+b) \leftarrow a^2-b^2$$

就是逆向思维.”

T:“从事物的反面考虑问题也是一种逆向思维.例如,解方程

$$x^4-10x^3-2(a-11)x^2+2(5a+6)x+2a+a^2=0,$$

这是一个关于 x 的四次方程,通常可按 x 的一元四次方程的求解方法求解.如果采取逆向思维方法思考,将 x 视做常量,而将 a 看做变量,从这一观点出发,我们的问题就转化为解关于 a 的二次方程

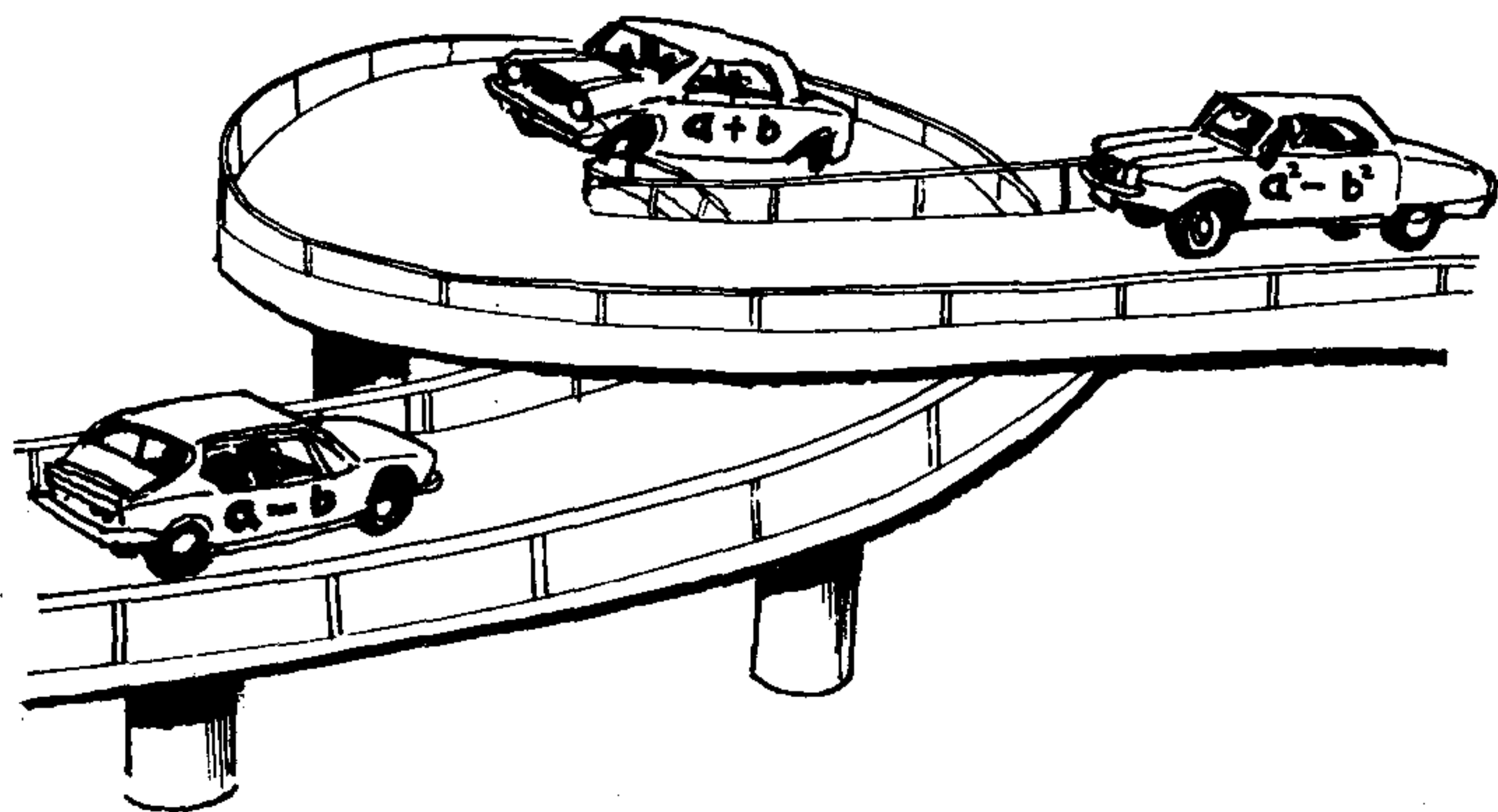


图 2.7

$$a^2 - 2(x^2 - 5x - 1)a + (x^4 - 10x^3 + 22x^2 + 12x) = 0$$

的问题. 解该方程得

$$a = x^2 - 6x \quad \text{或} \quad a = x^2 - 4x - 2.$$

到此, 我们再把 x 看做变量, a 视为常量, 解关于 x 的二次方程, 得

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{a+9}, \quad x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{a+6}.$$

这样, 我们通过两次转换思维方向, 利用解一元二次方程的方法, 解决了四次方程的求根问题.

所谓逆向思维, 就是与一般的思维程序相反或者从事物的反面来考虑问题和处理问题的一种思维方式. 人们在对事物的研究过程中, 当对于其正面有了深入全面了解之后, 这时若再利用逆向思维, 从反方向进行思考, 往往可以导致新的发现和发明. 例如, 英国物理学家法拉第曾想: 既然电流能产生

磁,那么反过来磁可否产生电流呢?经过10多年的反复实验、思考,终于发现了电磁感应现象,并由此发明了世界上第一台感应发电机.又如,说话的声音能使电话受话器的音膜有规律地振动,反过来想,同样的振动能否转换为原来的说话声音呢?爱迪生正是利用这种逆向思维于1877年发明了世界第一台会说话的机器——留声机.对高于四次的代数方程是否存在根式解的长期探索失败之后,人们就反过来考虑,五次和高于五次的代数方程不存在根式解,在对这个问题的证明过程中,开拓出一门新兴的学科——群论.在学习过程中,善于运用逆向思维,有助于思路的开拓,有助于思维能力的培养,特别有助于创造性思维能力的培养.”

2.4 整体转化法

如上所述,我们已经知道局部转化法中有三种推导梯形面积公式的方法,进一步可以考虑整体转化法中其他几种推导方法,于是教师又引导学生得到如下几类解决问题的方法:

S_1 :“拼补成如图2.8所示的平行四边形,由平行四边形与三角形的面积之差,可推导出梯形的面积公式.”

S_2 :“拼补成如图2.9所示的三角形,由大三角形与小三角形的面积之差,也可推导出梯形面积公式.”

T :“你能够具体推导一下吗?”

S_2 写出如下推导过程:

已知梯形 $ABCD$ 的高 h , 上、下底边长分别为 a, b . 设 $\triangle EBC$ 之高为 h_1 , 则梯形面积

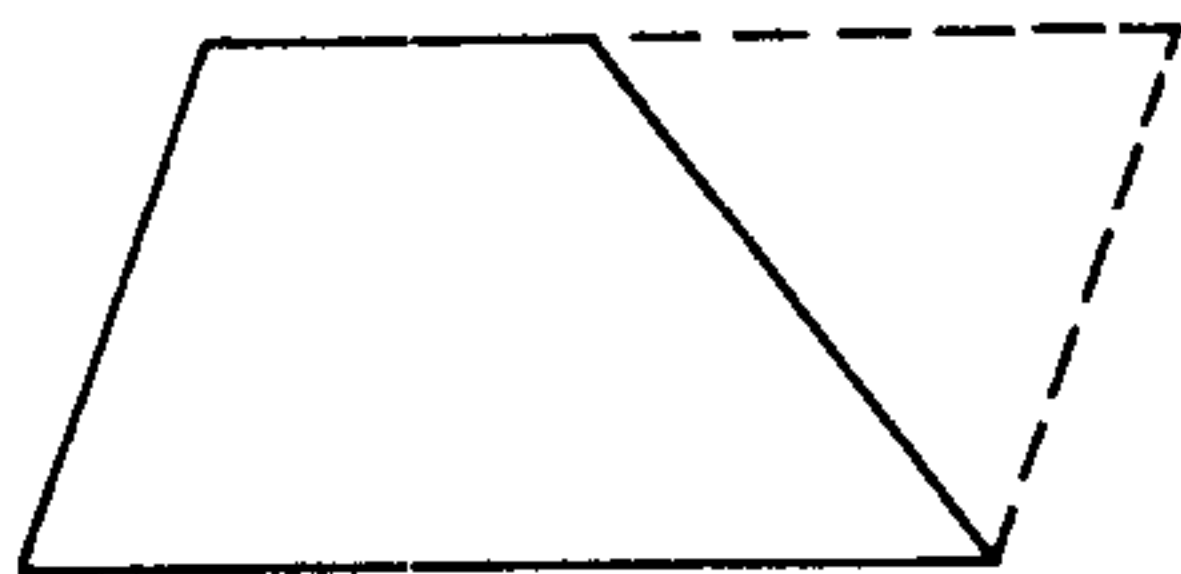


图 2.8

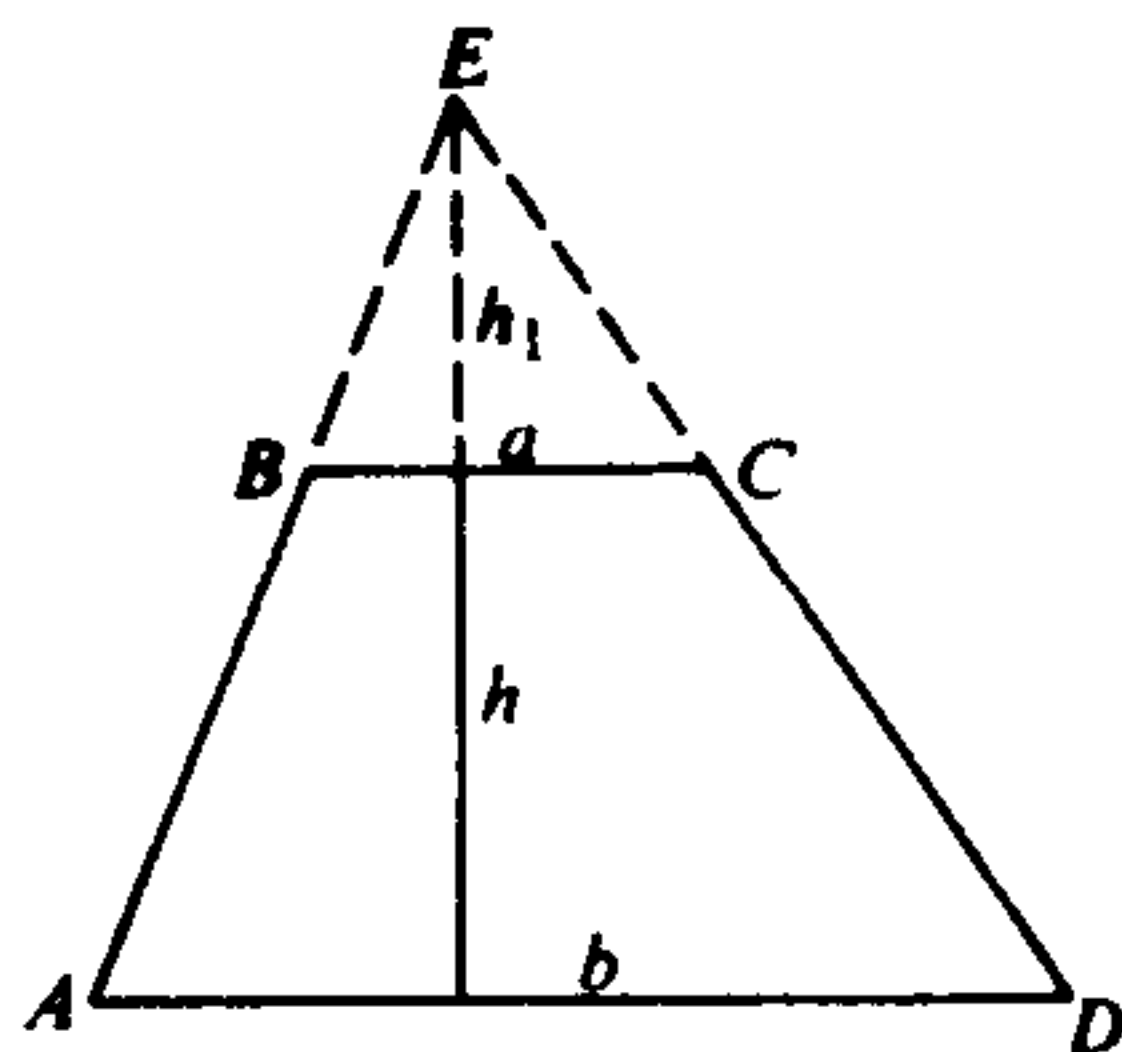


图 2.9

$$\begin{aligned}
 S &= S_{\triangle AED} - S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2}(h_1 + h)b - \frac{1}{2}h_1a \\
 &= \frac{1}{2}(b - a)h_1 + \frac{1}{2}bh.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\because \triangle AED \sim \triangle BEC,$$

$$\therefore h_1 : (h_1 + h) = a : b,$$

即 $(b - a)h_1 = ah$, 将此结果代入式(2.1), 即得

$$S = \frac{1}{2}(a + b)h.$$

T: “很好, 这里用到了三角形相似的知识, 还有其他的推导方法吗?”

S₃: “将梯形拼补成矩形(图 2.10), 由矩形面积减去两个三角形面积之和, 也可推出梯形面积公式.”

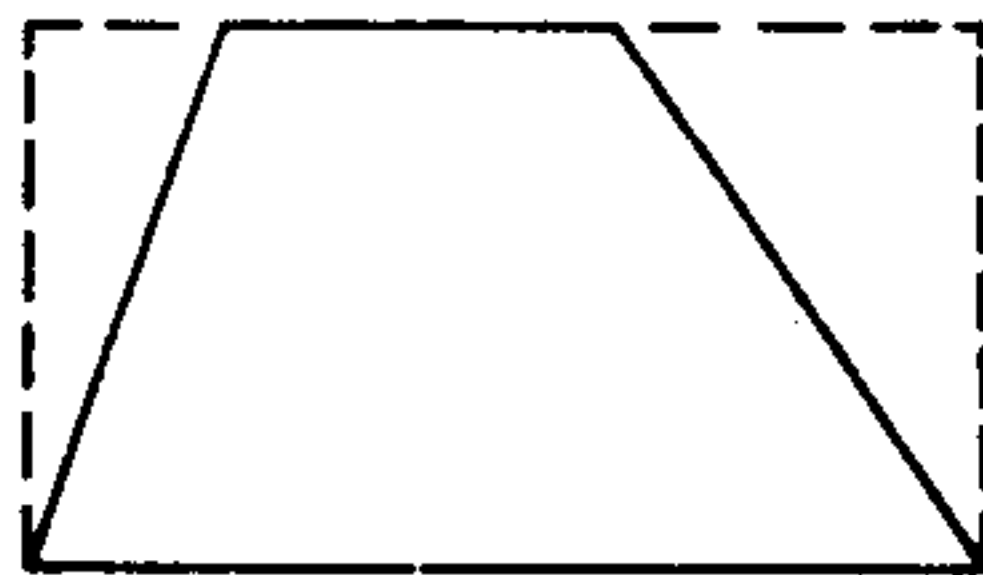


图 2.10

2.5 等积变换法

T: “除了上述分割法、拼补法, 很自然地, 将两种方法结合起来, 可形成既割又补的方法, 用割补方法推导梯形面积公

式有哪几种类型?”

S_1 : “如图 2. 11, 将 $\triangle GFD$ 割下来, 拼补为 $\triangle GEC$, 梯形 $ABCD$ 就等积转化为平行四边形 $ABEF$.”

S_2 : “如图 2. 12, 将 $\triangle EBC$ 割下来, 拼补为 $\triangle EFD$, 梯形 $ABCD$ 便等积转化为 $\triangle ABF$.”

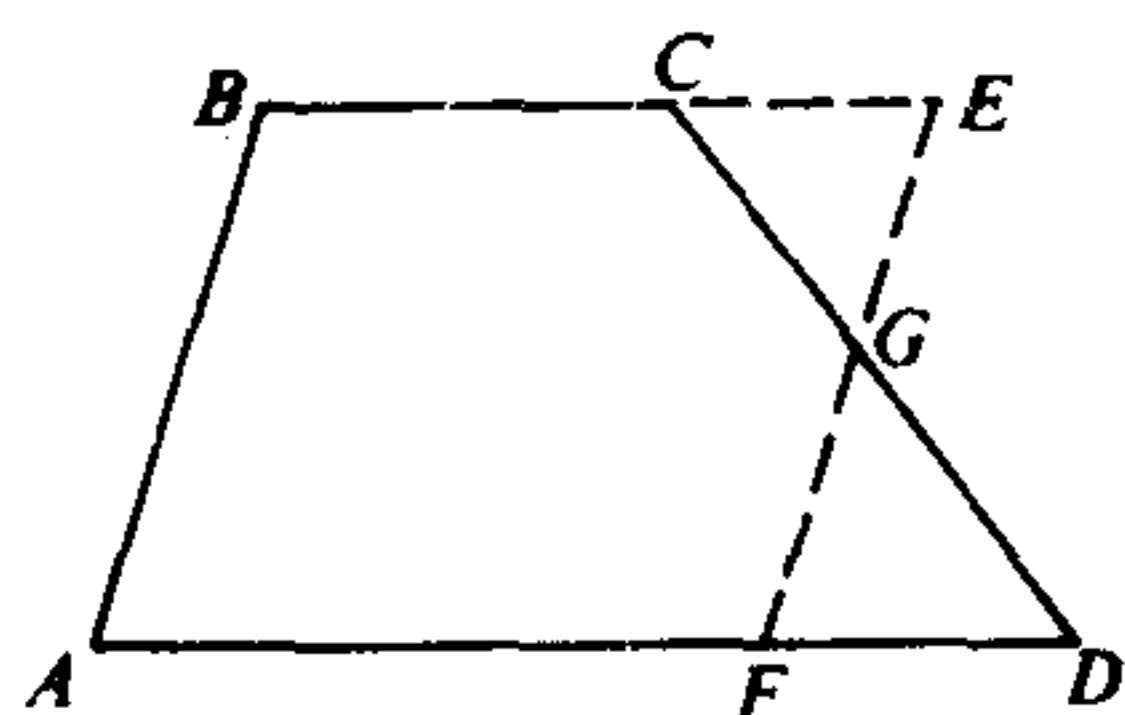


图 2. 11

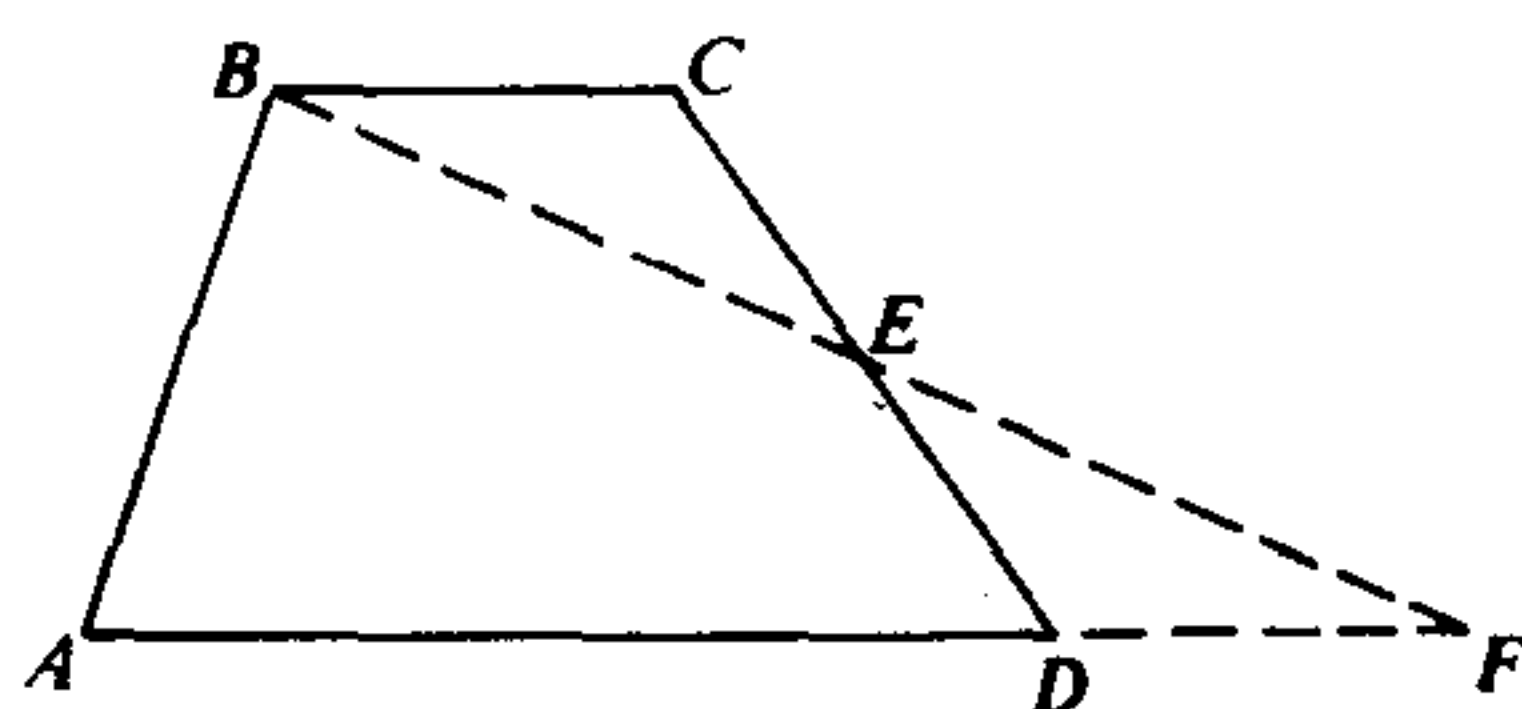


图 2. 12

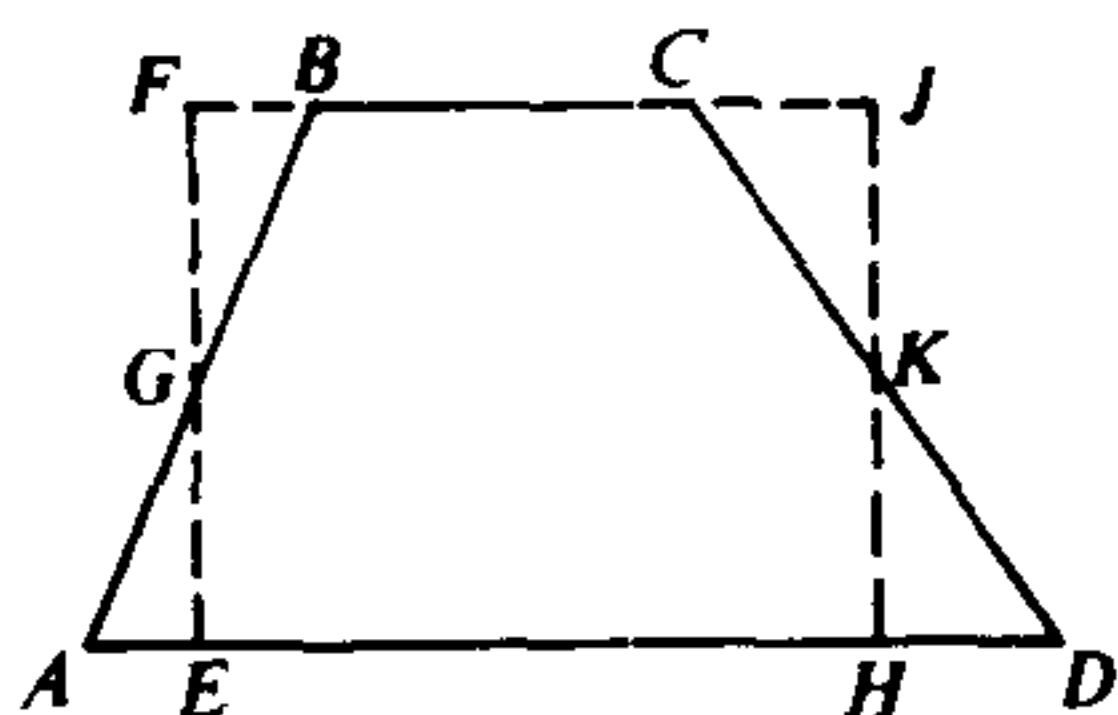


图 2. 13

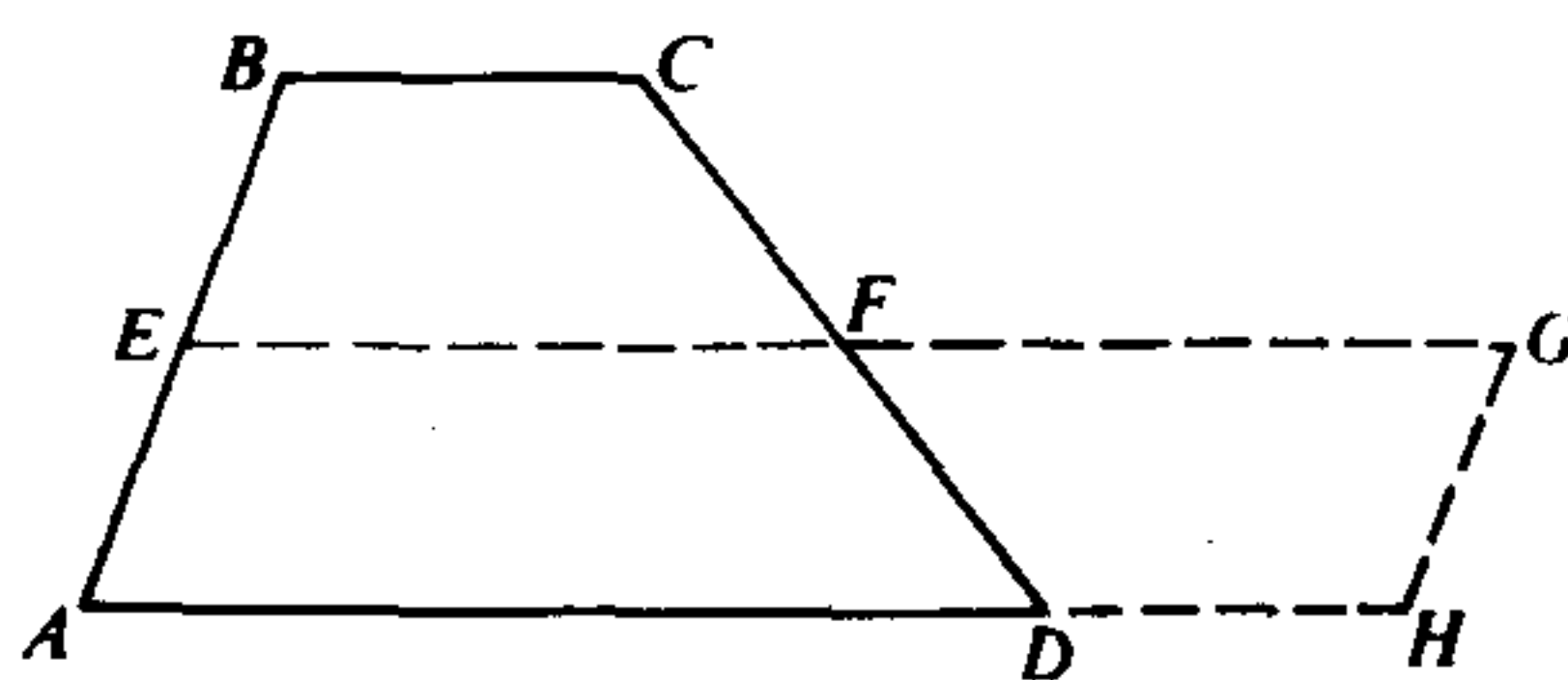


图 2. 14

S_3 : “如图 2. 13, 将 $\triangle GAE$ 割下来, 拼补为 $\triangle GBF$, 将 $\triangle KDH$ 割下, 拼补为 $\triangle KCJ$, 梯形 $ABCD$ 可等积转化为矩形 $EFJH$.”

S_4 : “如图 2. 14, 将梯形 $EBCF$ 割下, 拼补为 $GHDF$, 梯形 $ABCD$ 就等积转化为平行四边形 $AEGH$.”

T : “上述图 2. 11~图 2. 14 中, 变换前的图形与变换后的新图形, 其面积有变化吗?”

S_1 :“没有变化.”

T :“对,也就是说等积的,你能给割补法另外一个名字吗?”

S_1 :“等积变换法.”

T :“很好.所谓等积变换法,就是借助于等积变换以达到解决问题的一种转化方法.这个方法进一步抽象概括就是几何变换法.几何变换法、变量代换法、函数变换法等又可概括为关系(Relation)映射(Mapping)反演(Inversion)方法,简称RMI方法.这是著名数学家徐利治教授概括出的一个带有普遍意义的方法,下面我们粗略地叙述一下其含义.为此先解释映射与反演的意义.凡是在两个数学集合的元素(或两类数学对象)之间建立了一种对应关系,就称之为两个数学集合间给定了一个映射.如果是一一对应关系,则称为给定了一个可逆映射,并把逆映射称为反演.

给定的问题直接解决较难,如果能找到一个可逆映射 φ ,将原来问题转化为新问题*,而新问题*容易解决,得到解答*,再通过反演 φ^{-1} ,便由解答*引出原问题的解答.上述解题过程可归结为图 2.15 所示的模式:

这种方法的实质就是矛盾转移法,即把较困难的问题(不易处理的矛盾)转化为较易处理的问题以求得解决的方法.”

注 上述求梯形面积的方法,还可以抽象概括为“出入相补原理”,即“一个平面图形从一处移置他处,面积不变.又若把图形分割成若干块,那么各部分面积之和等于原来图形的面积,因而图形移置前后诸面积间的和、差有简单的相等关

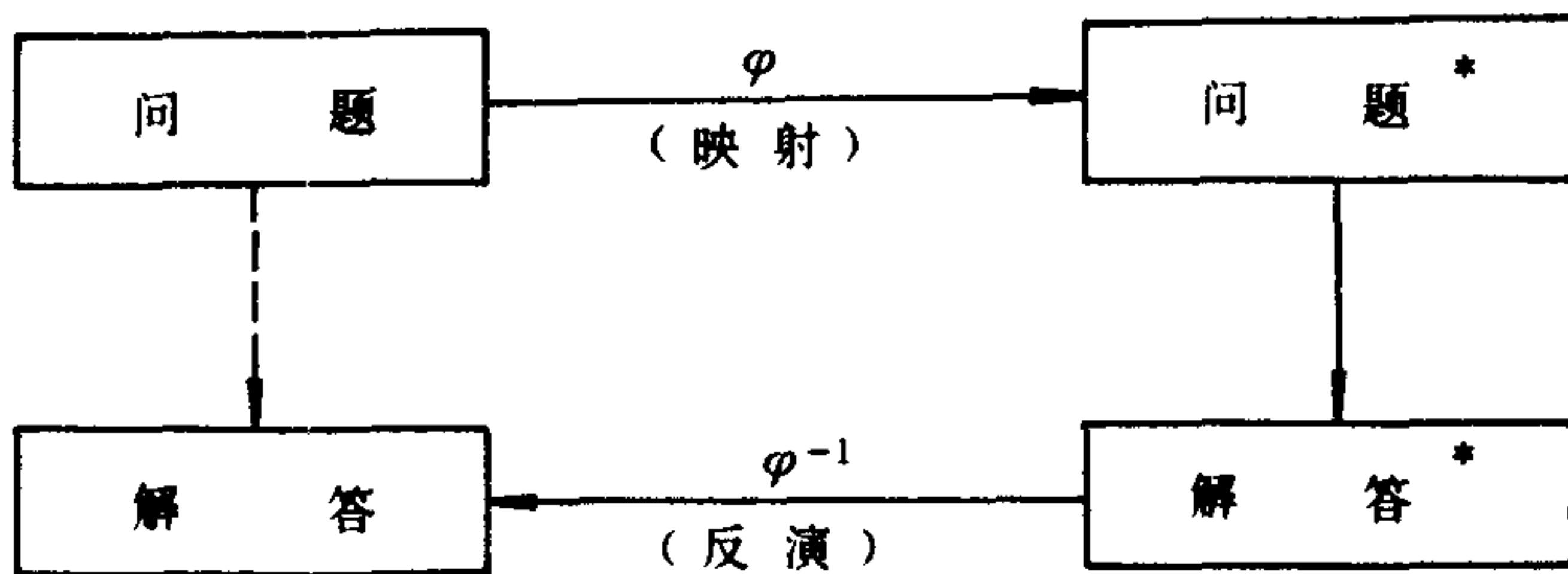


图 2.15

系.”(吴文俊,《〈九章算术〉与刘徽》,北京师范大学出版社,1982年)这是中国古代关于“形”的问题求解的一个十分重要的原理,它渗透在刘徽所注的《九章算术》中.

2.6 特殊化

T:“推求梯形面积公式的拼补法、分割法和割补法,还可以从高层次上抽象概括为一种方法,大家想一想,这种方法叫做什么?”

S₁:“可以叫做转化法吧?老师.”

T:“很好,这是一个高度的哲学概括,能否比转化这个层次再低一点呢?”

全班默然.

T:“大家思考一下,未知的梯形都转化成一些什么图形?”

S₂:“有三角形、平行四边形和矩形.”

T:“这些图形与梯形是什么关系呢?”

S_3 :“当梯形的两腰处在特殊的位置时,就可以变成平行四边形或矩形.因此,梯形与平行四边形、矩形是一般与特殊的关系.”

T :“梯形能变成三角形吗?”

S_4 :“可以,当梯形的短底边等于零时,就退化成三角形了.”

T :“这就是说,三角形可以看做是梯形的短底边之长等于零时的梯形,因此三角形也可看做是梯形的特殊情况.这样一来,把一般的梯形转化为特殊的已知三角形、平行四边形和矩形,从而推求出未知的梯形面积公式,这种方法你可以给它一个名字吗?”

S_3 :“特殊化,可以吗?”

T :“回答得很好.所谓特殊化,就是从考虑一般对象的集合过渡到考虑包含于其中一个或较小集合的一种有指导性的思想方法.你们在解题过程中,还曾遇到过哪些问题是用特殊化方法解决的?这可留做课后思考.”

2.7 移动辅助线法

T :“我们再来考察一下,图 2.2,2.3,2.4,2.8,2.9,2.11,2.12 之间有什么共同点?”

S_1 :“它们的共同点都是作一条辅助线与已知梯形的线段或其延长线相交,从而达到推出梯形面积公式的目的.”

T :“很好.图 2.3 的辅助线能否变动到图 2.4 辅助线的位置上?”

S_2 :“可以,只要将图 2.3 的辅助线以其上顶点为定点旋转一个角度即可.”

T :“图 2.3 的辅助线能否转到其他图形辅助线的位置上呢?”

S_3 :“可以,图 2.3 的辅助线经过旋转、平移就得到图 2.2, 2.4, 2.8, 2.11, 2.12 的辅助线.”

T :“一条直线经旋转、平移可移动到平面任何一个位置上,当这条直线处在一种特殊位置上时,就得到了上述各图所示的辅助线.如果这条辅助线不在这些特殊位置,而是在其他位置上,比如图 2.16 所示的位置上,是否也可推导出梯形面积公式呢?”

S_4 写出了如下的推导过程:

设 $BC=a$, $AD=b$, 梯形高为 h , $\triangle FEB$ 中边 BE 上的高设为 h_1 , $BE=a_1$, $\triangle HDG$ 中边 DG 上的高设为 h_2 , $DG=b_1$, 则梯形面积

$$\begin{aligned} S &= S_{\triangle HCE} - S_{\triangle FEB} - S_{\triangle HDG} + S_{\triangle FAG} \\ &= \frac{1}{2}(a+a_1)(h+h_2) - \frac{1}{2}a_1h_1 - \frac{1}{2}b_1h_2 + \frac{1}{2}(b-b_1)(h-h_1) \\ &= \frac{1}{2}(ah + ah_2 + a_1h + a_1h_2 - a_1h_1 - b_1h_2 + bh - b_1h - bh_1 \\ &\quad + b_1h_1) \\ &= \frac{1}{2}[ah + bh + a_1(h-h_1) - h_1(b-b_1) - b_1(h+h_2) \\ &\quad + h_2(a+a_1)]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

由 $\triangle EBF \sim \triangle GAF$, $\triangle DHG \sim \triangle CHE$, 可推得

$$a_1(h-h_1)=(b-b_1)h_1,$$

$$b_1(h+h_2)=(a+a_1)h_2,$$

代入式(2.2)即得

$$S=\frac{1}{2}(a+b)h.$$

T :“如果按辅助线位置不同分类,推求梯形面积公式有多少种方法?”

S_5 :“有无穷多种.”

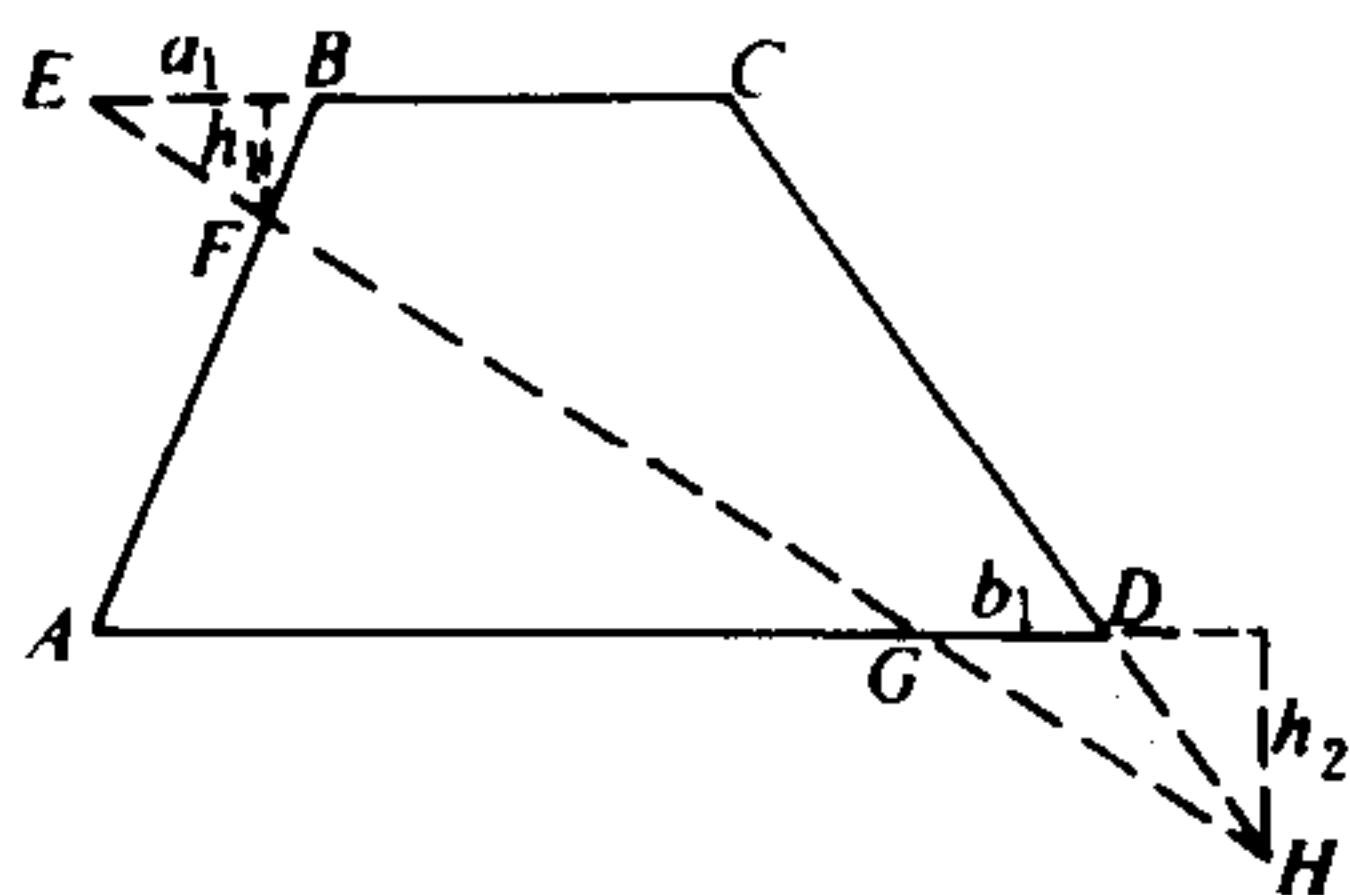


图 2.16

2.8 一般化

T :“上述移动辅助线法,实际上可看成当图 2.3 的辅助线处在一般位置上时可否推求梯形面积公式的问题,这是对一条辅助线而言的.类似地,对于两条辅助线也可提出这种问题.比如,能否通过使图 2.10 的辅助线处在一般位置上来推求梯形面积公式呢?”

S_6 首先画出图 2.17,然后写出推导过程如下:

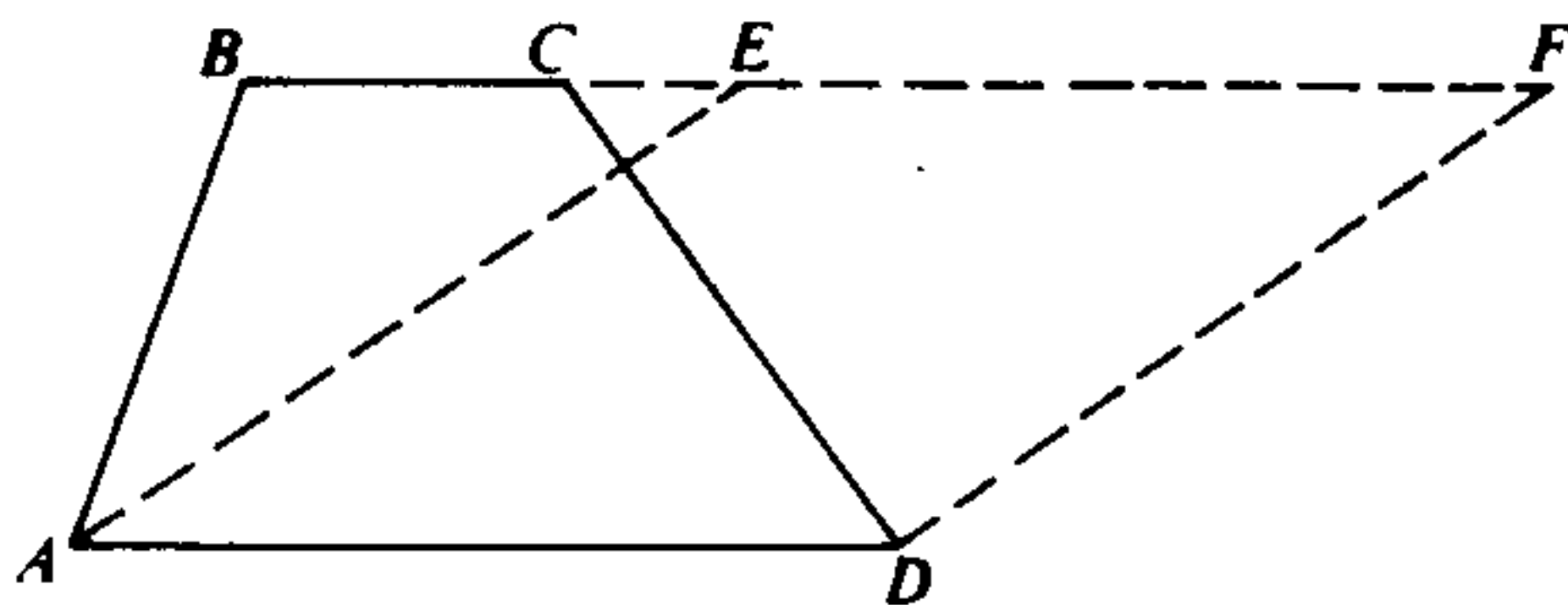


图 2.17

过点 A 任作一直线 AE (异于 AD)交 BC 的延长线于 E ,

过点 D 作 $DF \parallel AE$ 交 BC 的延长线于 F . 设 $BC=a, AD=b$, 梯形 $ABCD$ 的高为 h , 则它的面积

$$\begin{aligned} S &= S_{\triangle ABE} + S_{\square AEFD} - S_{\triangle CDF} \\ &= \frac{1}{2}(a+CE)h + bh - \frac{1}{2}(b+CE)h \\ &= \frac{1}{2}(a+b)h. \end{aligned}$$

特别地, 当两条平行线 AE, DF 垂直于 AD 时, 就变成了图 2.10 所示的辅助线.

T : “所谓一般化, 就是从考虑一个对象或较少对象的集合过渡到考虑包含已给定对象集合的更大集合的一种有指导性的思想方法. 同学们想一想, 上述这种带有一般性的推导方法是否适用于各种特殊情况?”

S_7 : “不适用于图 2.10 的情况.”

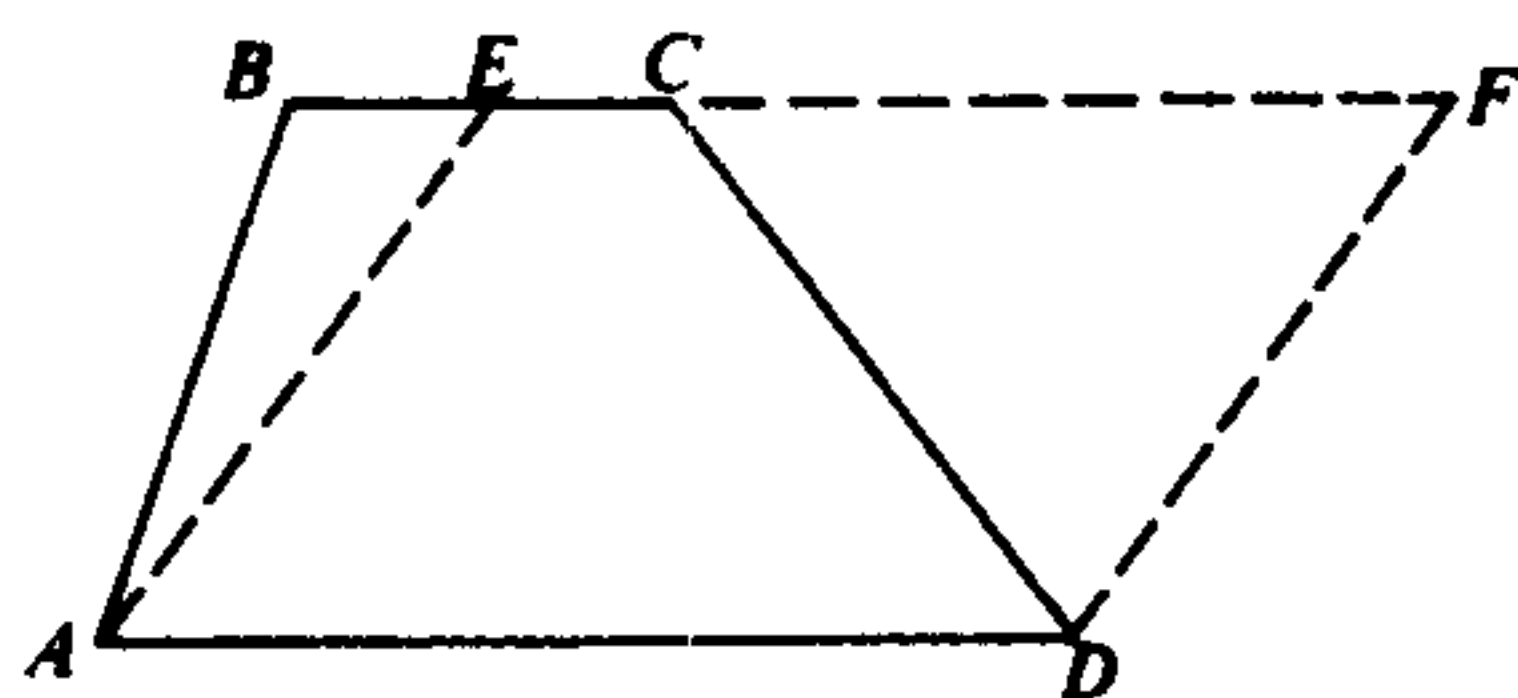


图 2.18

T : “这说明上述推导方法有一定的适用范围, 即有局限性. 这启迪我们, 为了对一般情况进行探讨, 又需要对辅助线处在几种可能的特殊情况进行考察. 下面, 我们来探讨具

有代表性的一些特殊情况.”

S_1 : “当 E 在 BC 延长线上时, 上述推导方法是适用的; 当 E 在 BC 上时(图 2.18), 梯形 $ABCD$ 的面积

$$S = S_{\triangle ABE} + S_{\square AEFD} - S_{\triangle CDF}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}(a - CE)h + bh - \frac{1}{2}(b - CE)h \\
 &= \frac{1}{2}(a + b)h.
 \end{aligned}$$

S_2, S_3, S_4 分别推出如下几种情况:

当 E 在 CB 延长线上, F 在 BC 延长线上时(图 2.19), 梯形面积

$$\begin{aligned}
 S &= -S_{\triangle ABE} + S_{\square AEFD} - S_{\triangle CDF} \\
 &= -\frac{1}{2}EB \cdot h + bh - \frac{1}{2}CF \cdot h \\
 &= \frac{1}{2}(a + b)h.
 \end{aligned}$$

当 F 在 BC 上时(图 2.20), 梯形面积

$$\begin{aligned}
 S &= -S_{\triangle ABE} + S_{\square AEFD} + S_{\triangle CDF} \\
 &= -\frac{1}{2}(b - BF)h + bh + \frac{1}{2}(a - BF)h \\
 &= \frac{1}{2}(a + b)h.
 \end{aligned}$$

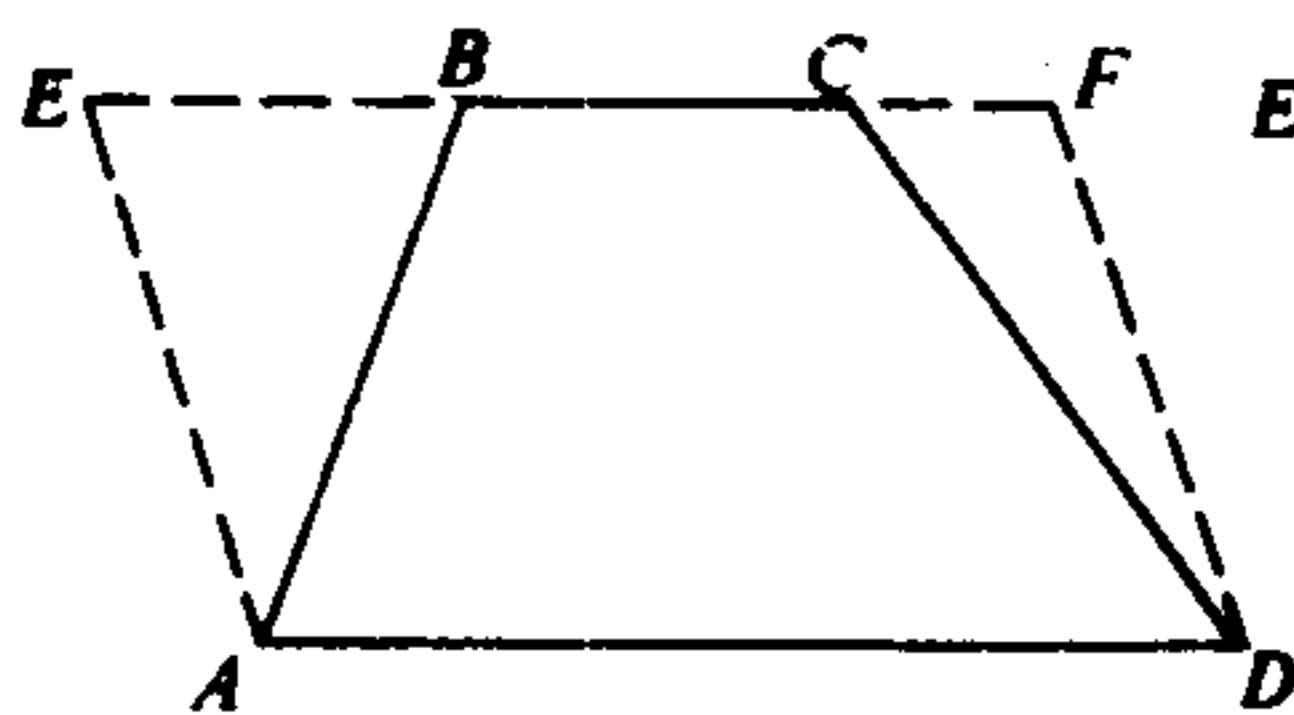


图 2.19

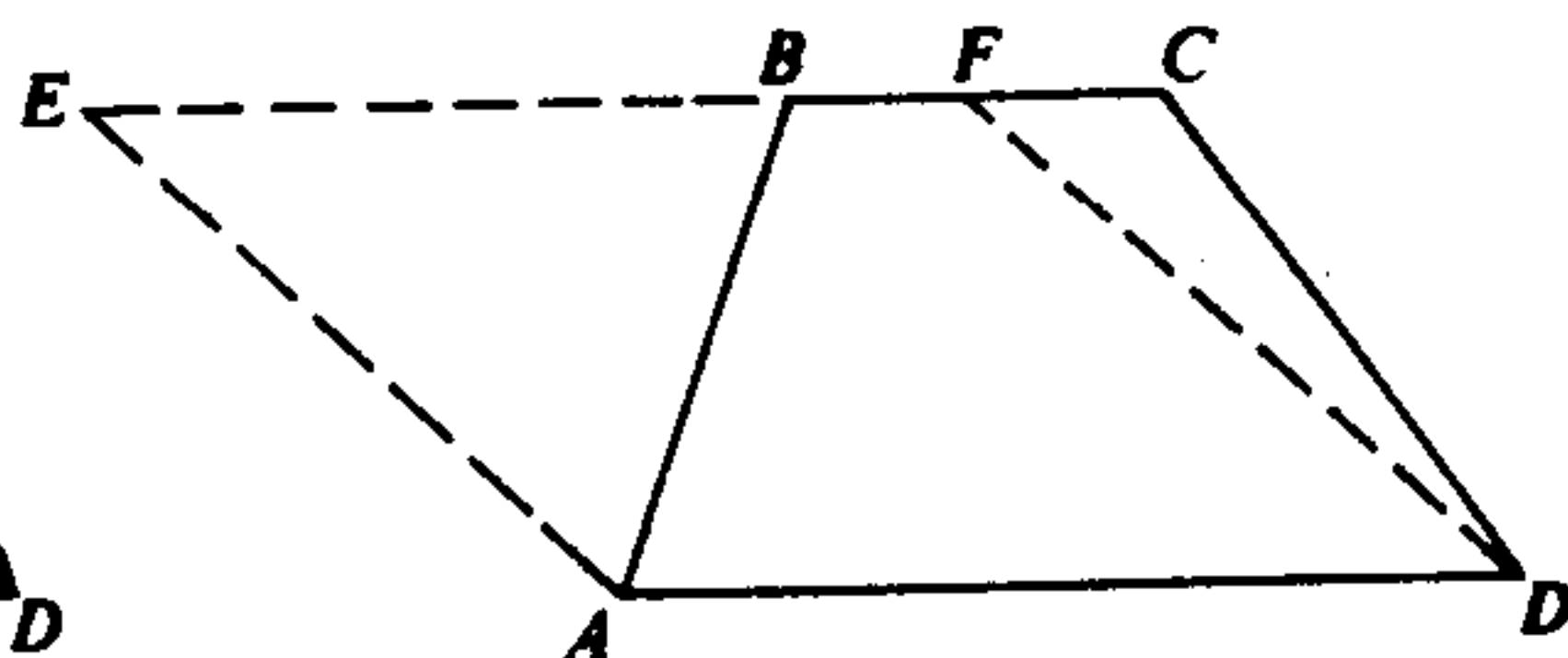


图 2.20

当 F 在 CB 的延长线上时(图 2.21), 梯形面积

$$S = -S_{\triangle ABE} + S_{\square AEFD} + S_{\triangle CDF}$$

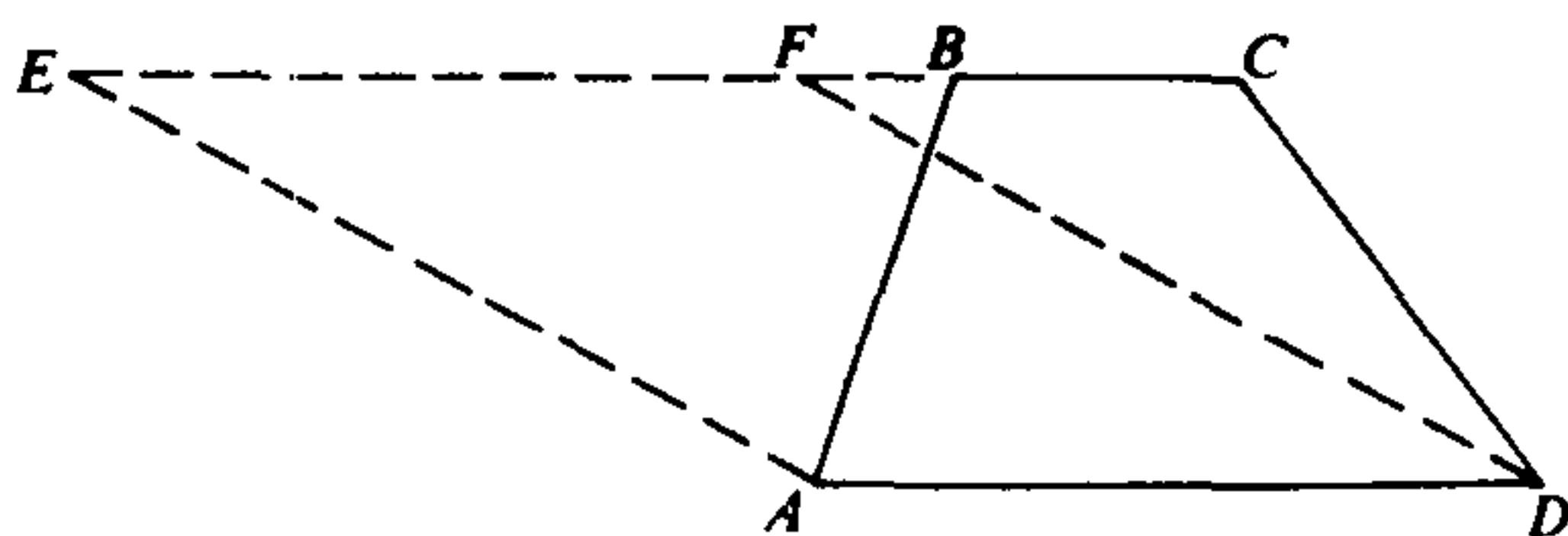


图 2.21

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2}(b+FB)h + bh + \frac{1}{2}(a+FB)h \\
 &= \frac{1}{2}(a+b)h.
 \end{aligned}$$

综上所述,点 F 在 BC 上或在 BC 两个相反方向的延长线上时,皆可推出梯形面积公式.

上节所说的移动辅助线法,实际上只考虑了一种特殊情况,还可继续探讨辅助线处在其他几种可能的特殊情况.这是由特殊到一般,由一般再到特殊的一种思考方式.不过我们也可以换一个角度来考虑这些特殊情况,这就是下节所谈的组合法.

2.9 组合

如果把平行四边形、矩形、三角形的面积分别用符号 $\square$ 、 $\square$ 、 $\triangle$ 来表示,梯形的面积以 S 表示,那么上述梯形面积公式的推导方法可概括如下:

图 2.2, $S = \frac{1}{2}\square$;

图 2.3, $S = \triangle_1 + \triangle_2$;

图 2.4, $S = \triangle + \square$;

图 2.5, $S = \square + \triangle_1 + \triangle_2$;

图 2.8, $S = \square - \triangle$;

图 2.9, $S = \triangle - \triangle_1$;

图 2.10, $S = \square - \triangle_1 - \triangle_2$;

图 2.11, $S = \square$;

图 2.12, $S = \triangle$;

图 2.13, $S = \square$;

图 2.14, $S = \square$;

图 2.16, $S = \triangle - \triangle_1 - \triangle_2 + \triangle_3$;

图 2.17, 2.18, 2.20, 2.21, $S = \square + \triangle_1 - \triangle_2$;

图 2.19, $S = \square - \triangle_1 - \triangle_2$.

上述推导梯形面积公式的方法可以视为从平行四边形、矩形、三角形这三种图形中选择一种或者两种进行不同的组合. 按照这种观点, 教师又引导学生得出如下几种推导方法:

图 2.22, 2.23, 2.24, $S = \triangle - \triangle_1 + \triangle_2$;

图 2.25, $S = \triangle - \triangle_1 - \triangle_2$;

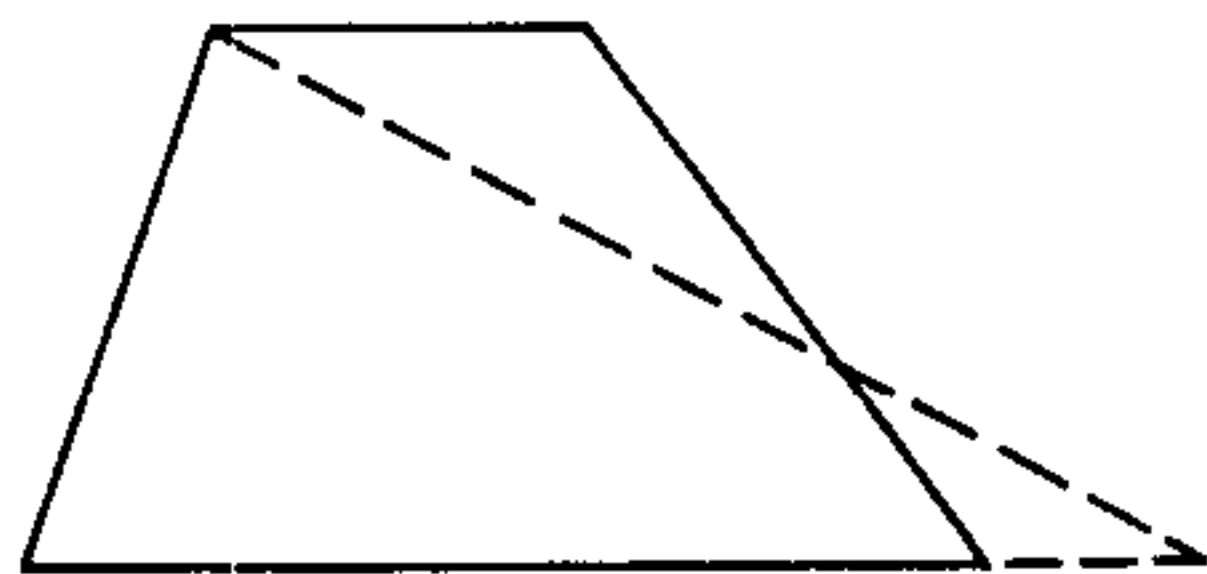


图 2.22

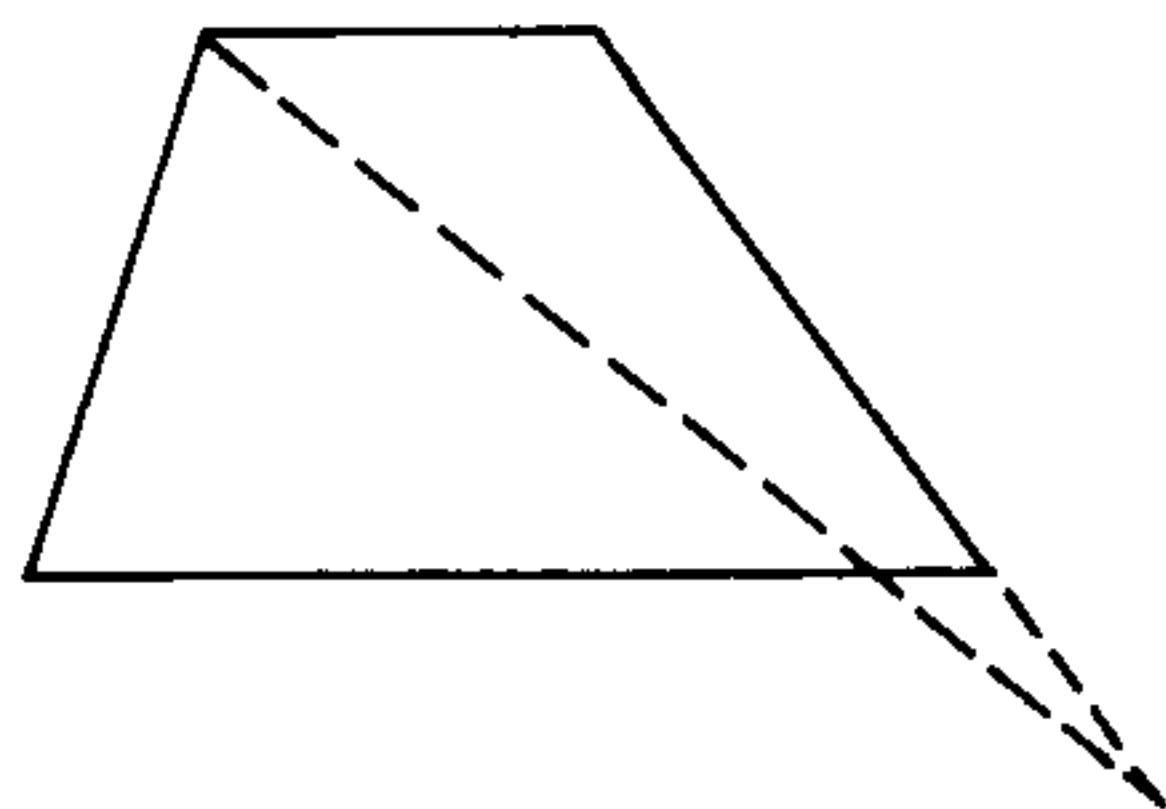


图 2.23

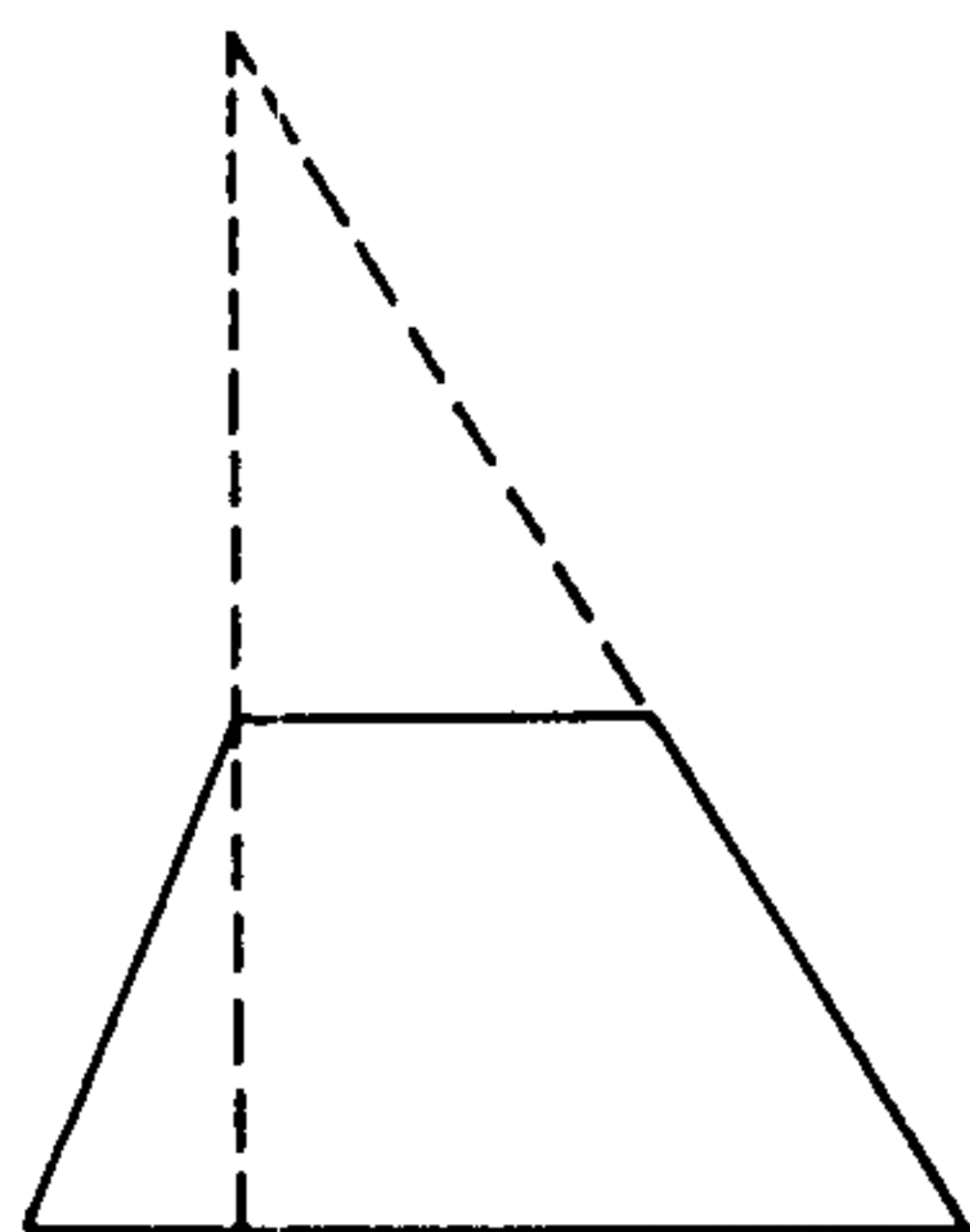


图 2.24

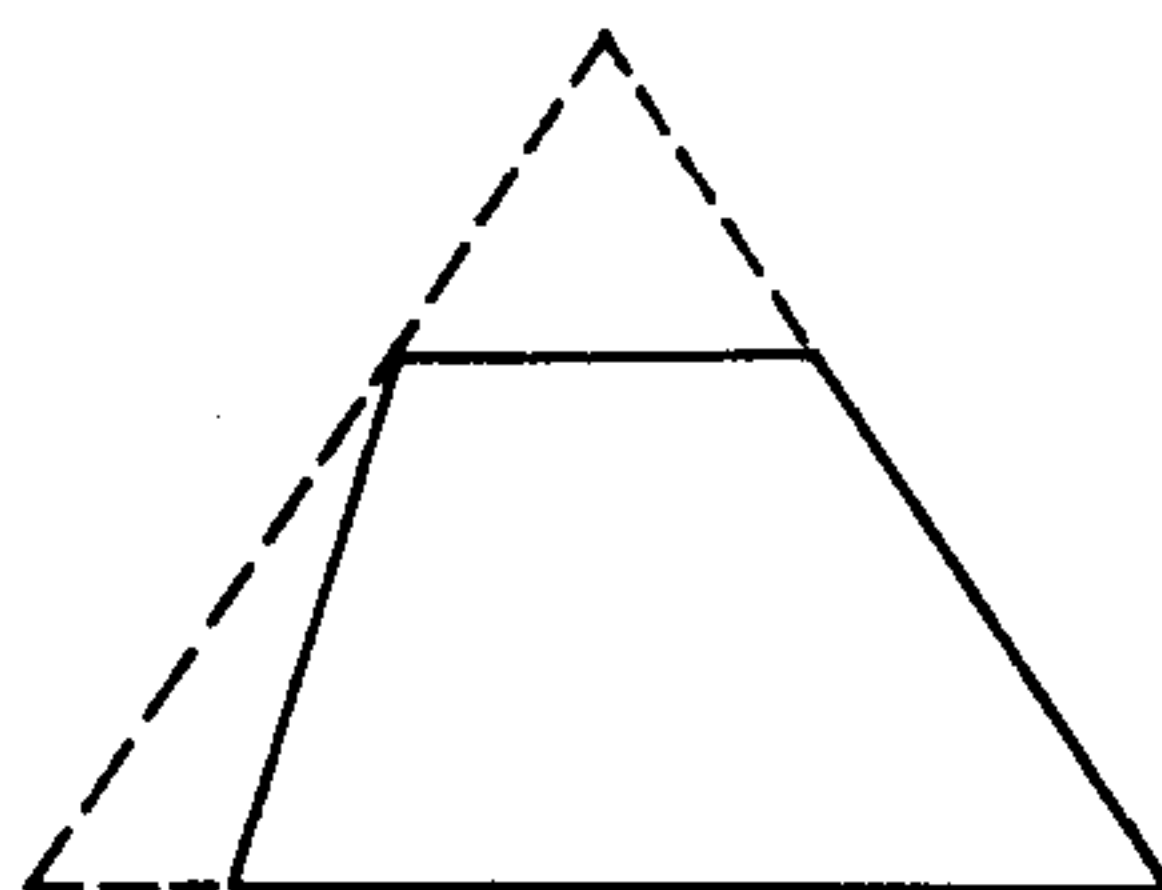


图 2.25

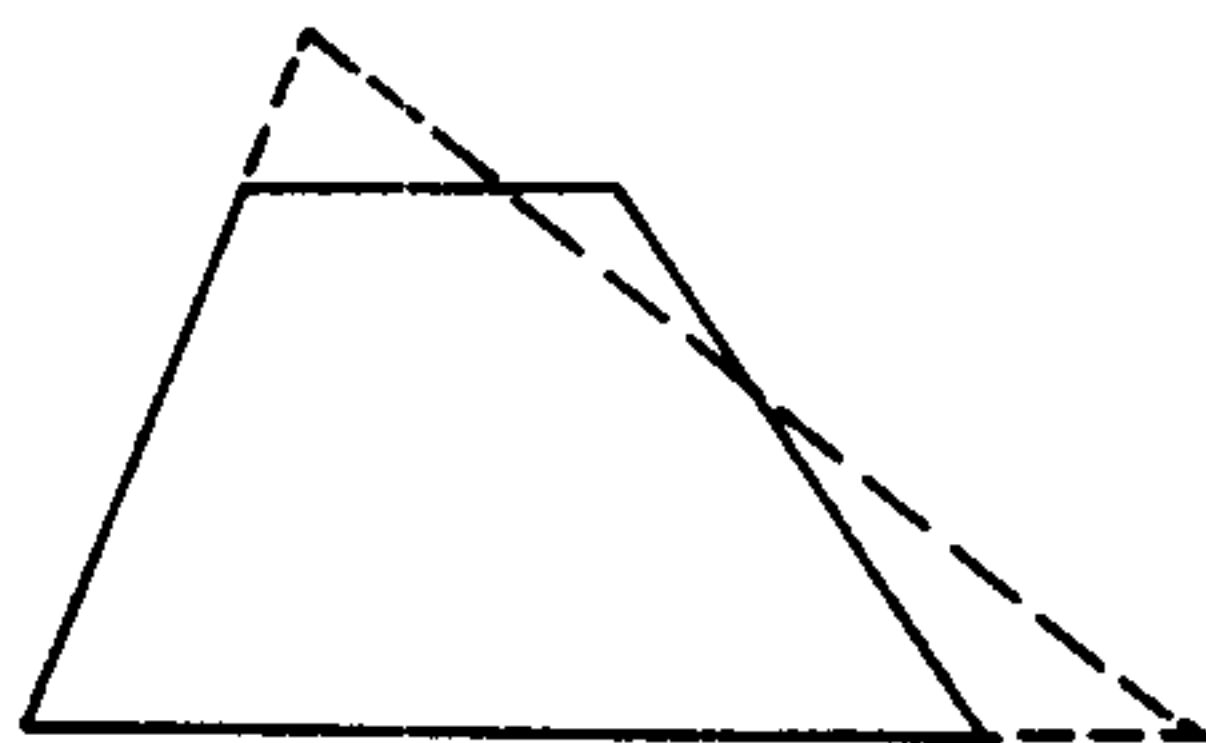


图 2.26

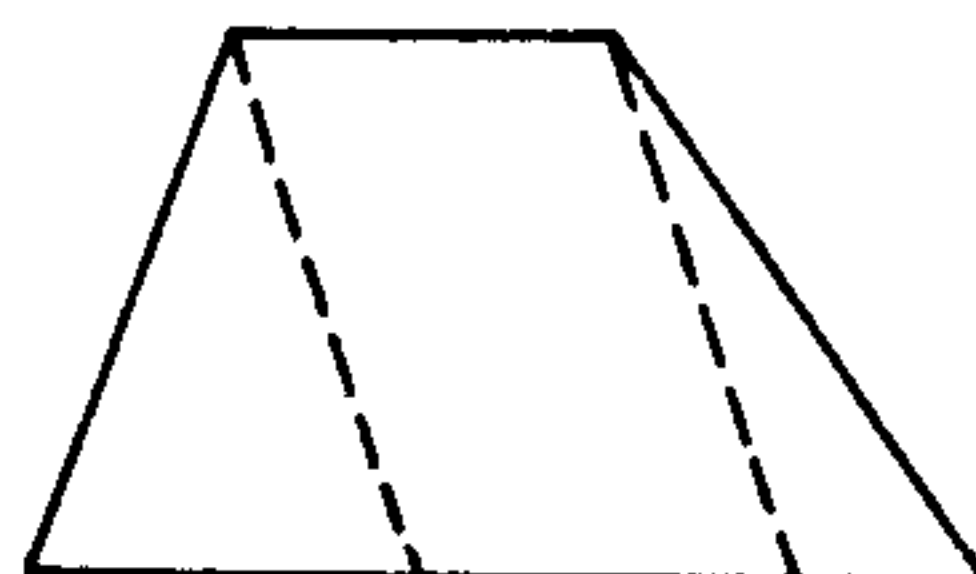


图 2.27

图 2.26, $S = \triangle - \triangle_1 + \triangle_2 - \triangle_3$;

图 2.27, $S = \square + \triangle_1 + \triangle_2$;

图 2.28, $S = \square$.

习 题 2

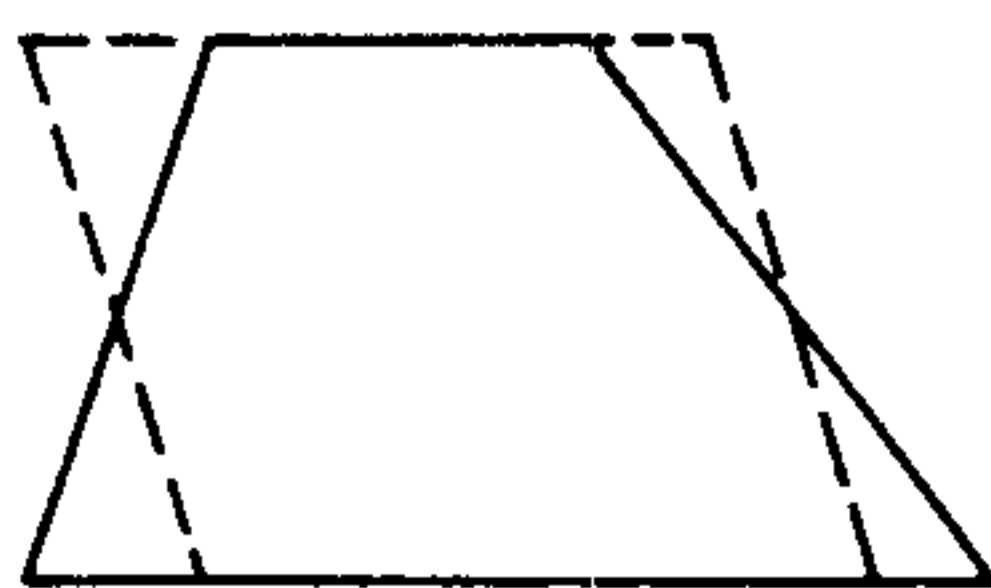


图 2.28

1. 如图 2.29, 已知梯形 $ABCD$, 任作直线 EF 平行于梯形两底且与 AB, DC 分别交于 E, F , 过点 E, F 作 $GH \parallel JK$, 且分别交两底及其延长线于 G, H, J, K , 由此

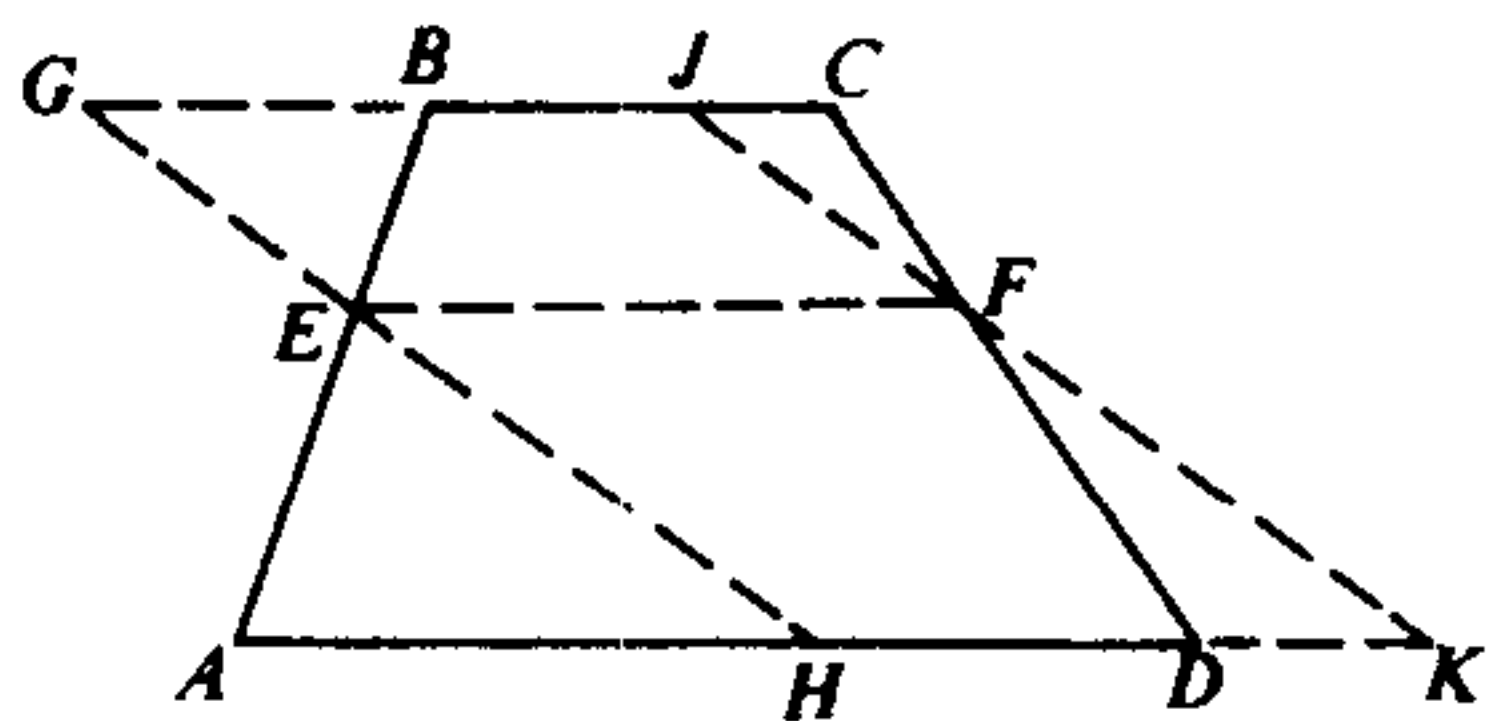


图 2.29

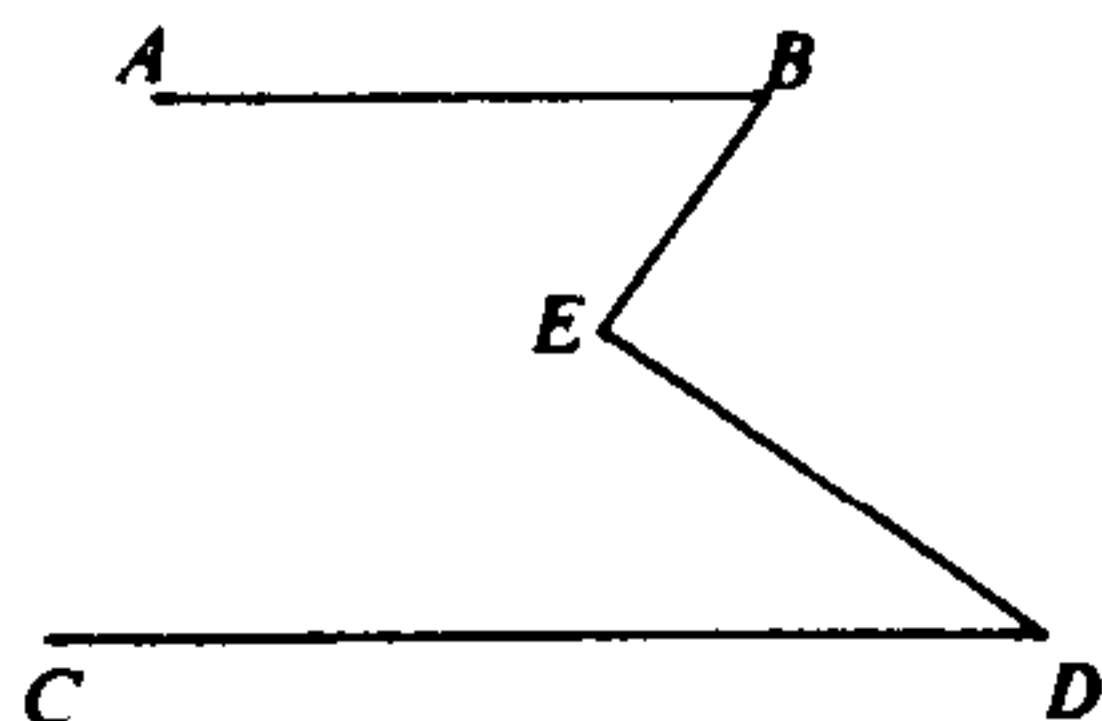


图 2.30

可否推出梯形面积公式.

2. 求证: 对角线相等的梯形是等腰梯形.
3. 求证: 梯形的中位线平行于两底且等于两底之和的一半.
4. 如图 2.30, 已知 $AB \parallel CD$, EB 交 AB 于 B , ED 交 CD 于 D . 求证 $\angle BED = \angle ABE + \angle CDE$, 并探索多种作辅助线的方法. 如果点 E 在其他位置上, 试探索有什么结果?

3

局部与整体

本章首先从动态思维的角度对前两章内容作了分析与总结,然后在动态思维的指导下,探索了直角三角形中线长定理的多种证法,最后把这多种证法又统一到局部与整体转化法之中.

3.1 回顾

从上面两章所述的解题过程可以看出,作为以培养数学能力为目的的数学解题过程,是一个揭露矛盾、分析矛盾、解决矛盾的过程.旧的矛盾解决了,又产生了新的矛盾.这就是“问题——解决——问题”的动态思维解题模式.

数学解题过程是解题者根据问题所提供的信息,对信息材料进行加工,施行一系列变换,

化未知为已知的过程,这是一个自觉、积极、富有创造性的数学动态思维过程.

数学动态思维,不是把数学对象、概念、方法看成凝固不变的,而是把它们视为运动、变化、发展着的.某一条辅助线(如图 2.3 的辅助线)对某一个解题方法而言,可以看成是固定不变的;但对探索方法之间的联系,以及由此发现新的解题方法而言,这条辅助线又可视作运动着的直线.又如用火柴摆正方形,对于某一个具体问题来说,用 8 根火柴组成的两个正方形可看成是静止的;但对于产生新的答案(3 个正方形)这一过程来说,又需要把其中一个正方形看做是运动着的;对于形成 3 个正方形的结果而言这些正方形是固定的,而要回答所组成的正方形有没有最小面积的时候,又需要把它们看成一个可变的动态过程.为了解答 100 根火柴最多能摆成多少个正方形这一问题,需要把问题一般化,先考察 $2n$ 根火柴最多能摆成多少个正方形. 100 是一个固定的量, $2n$ 是变量,变就意味着是动态的,因此作为思维过程就是一个动态思维过程.如果用静止的思维方法,只能是就问题去解决问题,而不会从一系列问题的联系中去考察问题的解决方法.由火柴根数求所组成的图形个数这一问题,启发我们提出由所组成的图形求火柴根数的问题.如果把问题的条件看做原因,把问题的结论看做结果,那么原因与结果也不是固定不变的,此时此地 A 为原因, B 为结果;彼时彼地则 B 为原因, A 为结果.在解题过程中,无论是问题的提出或者方法的获得,有时由局部想到整体,有时由整体想到局部,这是数学矛盾的对立统一在

数学解题思维过程中的具体体现. 数学概念、运算之间的对立统一是普遍存在的, 在解题过程中, 利用这种矛盾与转化, 往往可以开拓出新的境界来.

综上所述, 所谓数学解题的动态思维, 就是以数学中动态的基本概念为基础, 在解题这种数学活动中力求生动地反映数学对象的运动、变化、发展过程及其相互间的辩证关系的思维方法.

下面几章, 我们将通过一些典型的例子, 从不同的侧面来进一步深入地揭示和阐明数学解题的动态思维方法. 为了简练起见, 以下几章不再出现人物与场景. 本章通过对直角三角形一性质定理多种证法的思路剖析, 主要阐述局部与整体相互转化的动态思维方法.

3.2 定理与思路分析

在平面几何中有如下结果:

定理 3.1 在直角三角形中, 斜边上的中线等于斜边的一半.

已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, M 在 AC 上, $AM = MC$ (图 3.1), 求证 $BM = \frac{1}{2}AC$.

思路分析 将结论变成 $2BM = AC$, 这就启示我们将 BM 延长至 D , 使 $MD = BM$, 此时问题转化为证明 $BD = AC$. 连结 AD, CD , 这时若能证明四边形 $ABCD$ 为矩形, 则由矩形的性质可推知其对角线相等, 即 $BD = AC$. 欲证 $ABCD$ 为矩形, 由 $\angle ABC = 90^\circ$ 就归结到只须证 $AB = DC, BC = AD$ 即可. 要证

两对线段相等,这又归结为证相应的两对三角形全等,即证 $\triangle ABM \cong \triangle CMD$,
 $\triangle BCM \cong \triangle DAM$. 而由两边一夹角对应相等,就可推知这两对三角形是全等的.

3.3 矩形法

证明有关直角三角形的有关线段问题转化为证明矩形的有关线段问题,这种方法可称为矩形法. 直角三角形是矩形的一部分,这种解决问题的方法是从局部转化为整体,因此亦可称为整体转化法. 要构成如图 3.1 所示的矩形,关键在于确定点 D . 由于确定点 D 的方法不是唯一的,因此这种矩形法,根据确定点 D 的方法的不同,又可分为四种方法,即两直线相交法、轨法、线段截取法、直线与圆相交法.

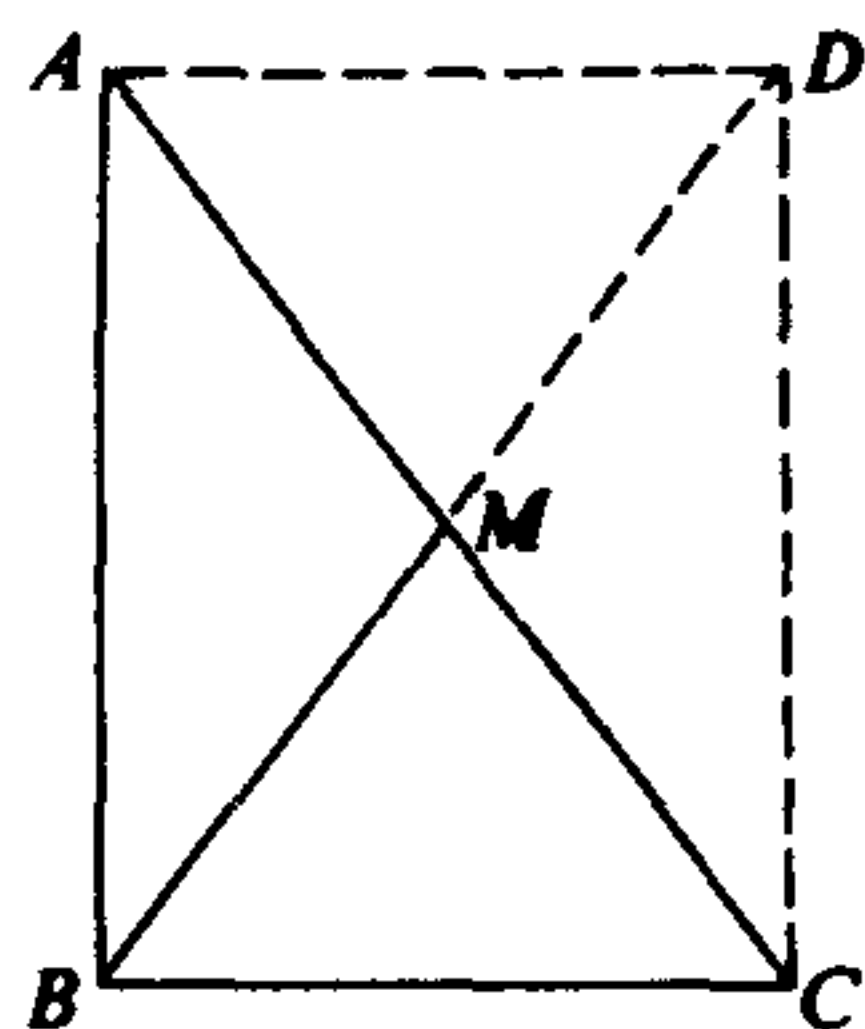


图 3.1

3.3.1 两直线相交法

(1)如图 3.1,过 A 作 $AD \parallel BC$ (或过 A 作 $DA \perp AB$, 或作 $\angle DAC = \angle BCA$), 与 BM 的延长线相交于 D , 连结 CD . $\because AD \parallel BC, \therefore \angle DAM = \angle BCM$, 且 $AM = MC, \angle ADB = \angle MBC$, 故有 $\triangle ADM \cong \triangle CBM (AAS)$. 于是 $BM = DM$. 从而推知 $ABCD$ 为平行四边形, 而且 $\angle ABC = 90^\circ$, 故得知 $\square ABCD$ 为矩形. 由矩形性质推知 $AC = BD, BM = \frac{1}{2}BD$, 故有 $BM = \frac{1}{2}AC$.

(2)如图 3.1,过 A 作 $DA \perp AB$ 与 BC 的垂线 CD 相交于

点 D (或过 A 作 $AD \parallel BC$ 与 BA 的平行线 CD 相交于 D , 或作 $\angle DAC = \angle BCA$, $\angle DCA = \angle BAC$ 相交于 D), 连结 MD . 四边形 $ABCD$ 有三个直角, 故知它为矩形. 再证 B, M, D 三点共线. 事实上, 由于 $CD \perp BC$, 故知 $CD \parallel BA$, 所以 $\angle MAB = \angle MCD$, $\angle MBA = \angle MDC$, 因此 $\angle AMB = \angle CMD$. 而 $\angle AMB + \angle BMC = 180^\circ$, 所以 $\angle BMC + \angle CMD = 180^\circ$, 故 B, M, D 在一直线上. BD, AC 为矩形 $ABCD$ 的对角线, 因此推知 $BM = \frac{1}{2}BD$, 即 $BM = \frac{1}{2}AC$.

3.3.2 交轨法

(1) 如图 3.1, 分别以 A, M 为圆心, 以 BC, BM 为半径画弧交于点 D , 连结 AD, MD, CD , 易知 $\triangle AMD \cong \triangle CMB$ (SSS). 于是 $\angle DAM = \angle BCM$, 故 $AD \parallel BC$. 而 $\angle AMD = \angle CMB$, 又因为 $\angle CMD + \angle AMD = 180^\circ$, 所以 $\angle CMB + \angle CMD = 180^\circ$, 即 B, M, D 在一条直线上. 由此得知 $\angle AMB = \angle CMD$, 从而有 $\triangle AMB \cong \triangle CMD$ (SAS), 所以 $AB = DC$. 又 $\angle ABC = 90^\circ$, 故 $ABCD$ 为矩形. 由矩形性质可推知 $BM = \frac{1}{2}AC$.

(2) 如图 3.1, 分别以 A, C 为圆心, 以 BC, BA 为半径画弧交于点 D , 连结 AD, MD, CD . 因 $AD = BC$, $AB = DC$, $\angle ABC = 90^\circ$, 故四边形 $ABCD$ 为矩形. 再证 B, M, D 在一直线上. 事实上, $\triangle AMB \cong \triangle CMD$ (SAS), 故 $\angle AMB = \angle CMD$. 而 $\angle AMB + \angle BMC = 180^\circ$, 所以 $\angle BMC + \angle CMD = 180^\circ$, 因此 B, M, D 在一条直线上. 由矩形性质推知 $BM =$

$$\frac{1}{2}AC.$$

3.3.3 线段截取法

(1)如图 3.1,过 A 作 $DA \perp AB$,截 $AD=BC$,连结 MD , CD . 由 $DA \perp AB$ 知 $\angle DAB = 90^\circ$,再由 $\angle ABC = 90^\circ$ 推知 $AD \parallel BC$. 所以 $\angle DAM = \angle BCM$,故 $\triangle ADM \cong \triangle CBM$ (SAS). 于是, $\angle AMD = \angle CMB$,而 $\angle CMB + \angle AMB = 180^\circ$,故 $\angle AMB + \angle AMD = 180^\circ$,即 B, M, D 在一条直线上, 四边形 $ABCD$ 为矩形. 根据矩形性质推知 $BM = \frac{1}{2}AC$.

(2)如图 3.1,在 BM 的延长线上截取 $MD=BM$. 以下证明从略.

3.3.4 直线与圆相交法

(1)如图 3.1,过 A 作 $AD \parallel BC$ (或过 A 作 $DA \perp AB$,或作 $\angle DAC = \angle BCA$),以 C 为圆心,以 BA 为半径画弧交 AD 于 D ,连结 MD, CD . 由两平行线间距离处处相等可推知四边形 $ABCD$ 为矩形,故 $AB \parallel DC$,从而 $\angle BAM = \angle DCM$,所以 $\triangle AMB \cong \triangle CMD$ (SAS). 由此推知 $\angle AMB = \angle CMD$,而 $\angle AMB + \angle BMC = 180^\circ$,故 $\angle BMC + \angle CMD = 180^\circ$,即 B, M, D 在一条直线上. 由矩形性质知 $BM = \frac{1}{2}AC$.

(2)如图 3.1,过 A 作 $AD \parallel BC$ (或过 A 作 $DA \perp AB$,或作 $\angle DAC = \angle BCA$),以 M 为圆心,以 MB 为半径画弧交 AD 于点 D ,连结 MD, CD .

设 $BM < \frac{1}{2}AC$,因为在同一三角形中大边对大角,所以

$\angle BAM < \angle ABM$, $\angle BCM < \angle CBM$. 但 $\angle BAM + \angle BCM = 90^\circ$, $\angle ABM + \angle CBM = 90^\circ$, 故知 $BM < \frac{1}{2}AC$ 是不可能的.

今设 $BM \geq \frac{1}{2}AC$, 则由两边及其中较大的边的对角对应相等推知 $\triangle AMD \cong \triangle CMB$, 故有 $AD = BC$, $\angle AMD = \angle CMB$. 而 $\angle CMB + \angle AMB = 180^\circ$, 故有 $\angle AMB + \angle AMD = 180^\circ$, 所以点 B, M, D 在同一直线上. 从而易知四边形 $ABCD$ 为矩形, 由矩形性质可知 $BM = \frac{1}{2}AC$.

(3) 如图 3.1, 以点 A 为圆心, 以 BC 为半径画弧交 BM 延长线于点 D , 连结 AD, CD . 以下证明从略.

3.4 拼补法

图 3.1 中的矩形是由确定点 D 而形成的, 换一个角度来看, 也可视做 $\triangle ABC$ 拼补一个与它大小相同的 $\triangle ADC$ 而形成的. 两个大小相同的直角三角形按照拼补的方式不同, 除了形成矩形外, 还可形成筝形、平行四边形、等腰三角形, 这些不同的图形相对直角三角形这个“局部”而言, 都是“整体”. 经探索, 通过这些不同的整体都可推证出直角三角形的中线长定理.

3.4.1 矩形拼补法

在 $\triangle ABC$ 旁边拼补一个与它大小相同的 $\triangle ADC$, 使之形成矩形, 如图 3.1 所示. 若能证明点 B, M, D 在同一直线上, 再利用矩形的性质就可推知结论正确. 事实上, $\triangle AMD \cong \triangle CMB$ (SSS), 所以 $\angle AMD = \angle CMB$, 而 $\angle AMB + \angle CMB$

$=180^\circ$, 故 $\angle AMB + \angle AMD = 180^\circ$, 从而 B, M, D 在同一直线上.

3.4.2 筝形拼补法

在 $\triangle ABC$ 旁边拼补一个与它大小相同的 $\triangle ADC$, 使之形成如图 3.2 所示的筝形. $\because \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, $\angle BAD + \angle DCB = 180^\circ$, $\therefore A, B, C, D$ 四点共圆, M 为圆心, 故知 $BM = \frac{1}{2}AC$.

3.4.3 平行四边形拼补法

在 $\triangle ABC$ 旁边拼补一个大小相同的 $\triangle ABD$, 使之形成如图 3.3 所示的平行四边形. $\because AN = BM, AM = BN$, $\therefore$ 四边形 $AMBN$ 为平行四边形. 在平行四边形 $ADBC$ 中, M, N 分别为 AC, DB 的中点, 故连结 MN , 有 $MN \parallel CB$, 而 $\angle ABC = 90^\circ$, 知 $AB \perp MN$, 故 $\square AMBN$ 为菱形, 于是 $BM = AM = \frac{1}{2}AC$.

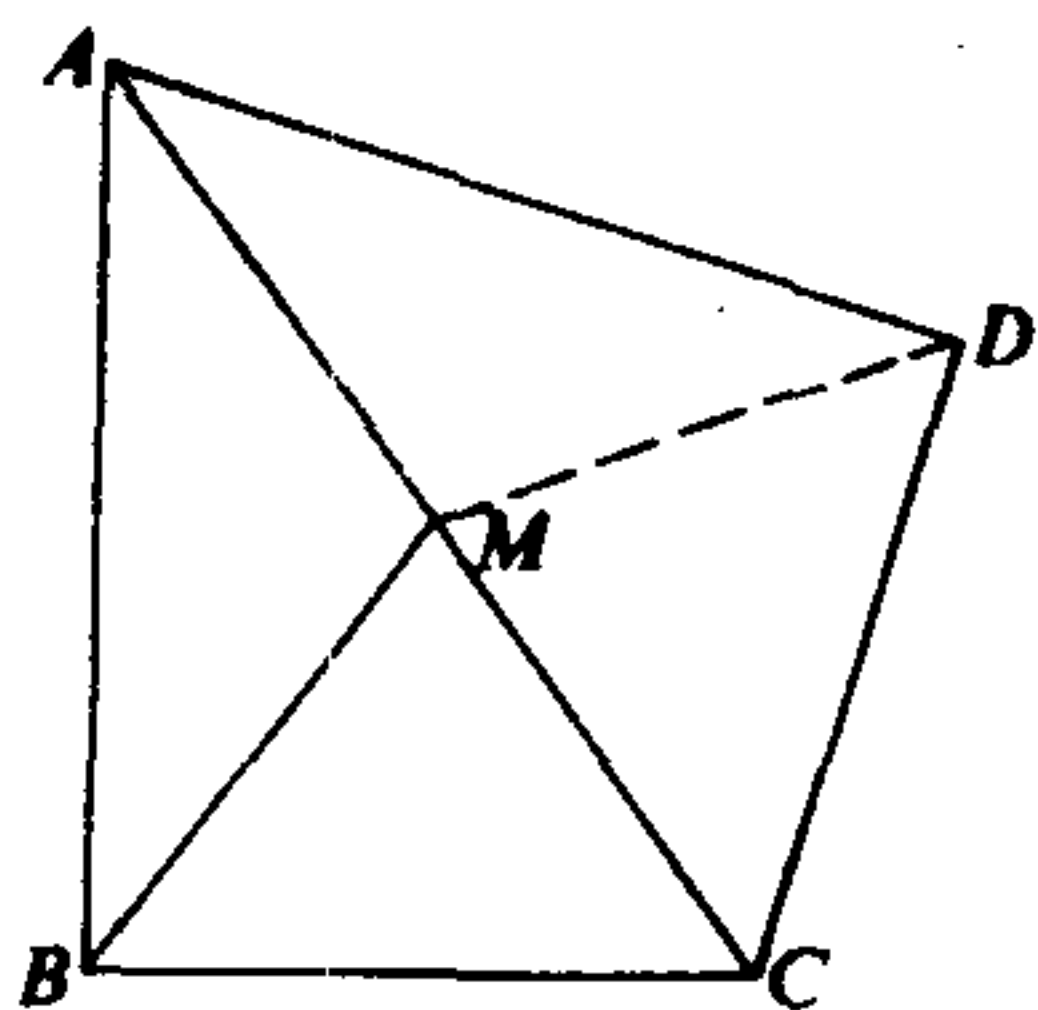


图 3.2

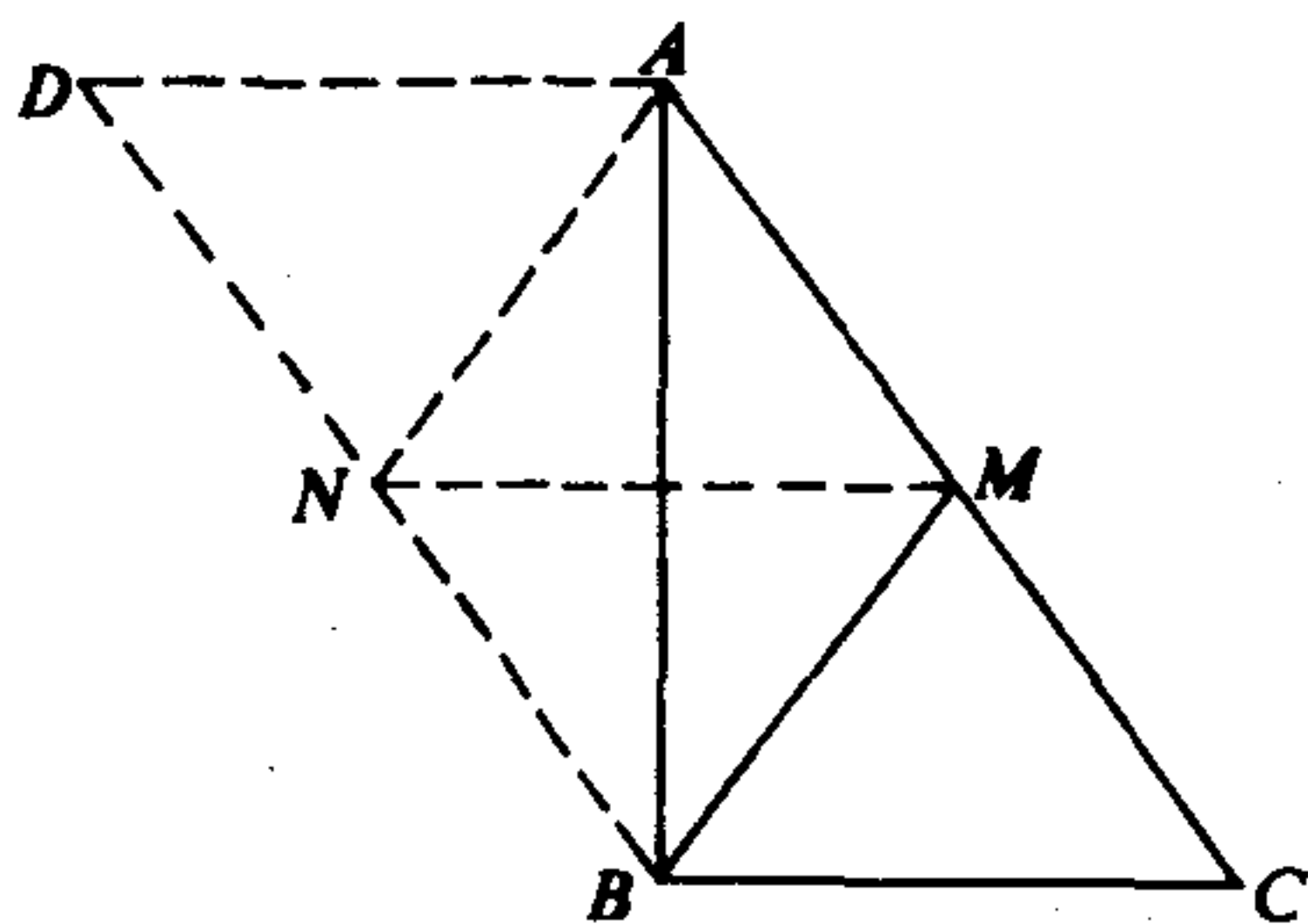


图 3.3

3.4.4 等腰三角形拼补法

在 $\triangle ABC$ 旁边拼补一个与它大小相同的 $\triangle ABD$, 使之

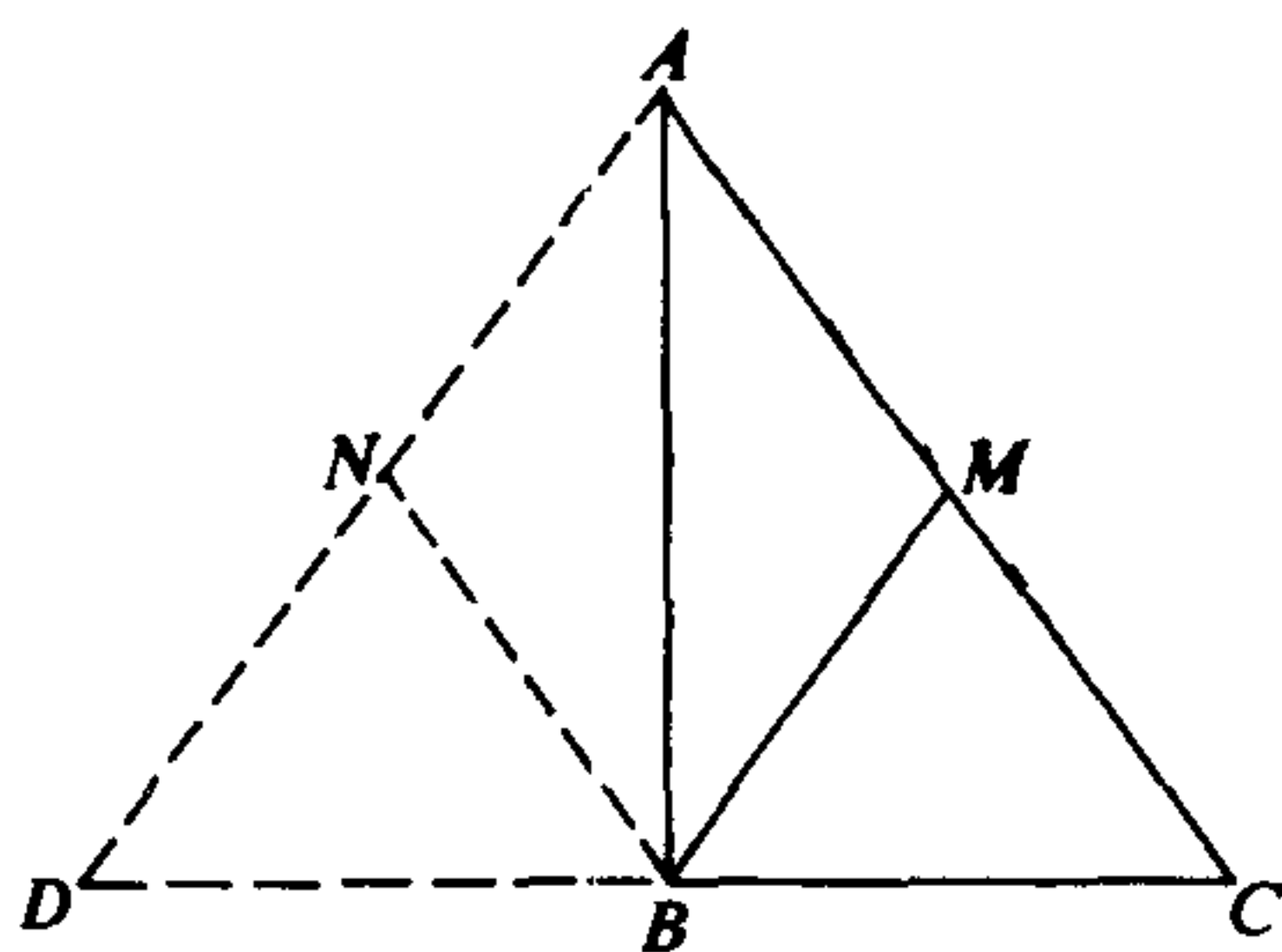


图 3.4

成为一个如图 3.4 所示的等腰三角形. $\because \angle ABC = \angle ABD = 90^\circ, \therefore D, B, C$ 三点共线. 在 $\triangle ADC$ 中, $AN = ND, CB = BD, AM = MC$, 故由中位线定理知 $BM = BN = \frac{1}{2}AC$.

3.5 V 形法

从矩形法推证过程来看,多用到三角形全等,这就启发我们猜测:是否只要再构作出一个新的三角形就可以推证结论成立呢?如图 3.5 所示,这是图 3.1 的一部分,但它相对于 $Rt\triangle ABC$ 来说,又是“整体”.经探索,利用这种整体转化法亦可推证其结论成立.由于这种整体的外形像英文字母 V,故称 V 形法.这种 V 形,是在原来 $\triangle ABC$ 的基础上,再构作 $\triangle MDC$ 而形成的,由于构作三角形的方式不同,它又可分为五种方法,即线段截取法、两直线相交法、交轨法、直线与圆相交法、拼补法.

3.5.1 线段截取法

(1) 延长 BM 至 D , 使 $MD = BM$, 连结 CD (图 3.5). $\because \triangle AMB \cong \triangle CMD (SAS), \therefore \angle BAM = \angle DCM$, 故 $AB \parallel DC$, 于是 $\angle ABC = \angle DCB$, 推知 $\triangle ABC \cong \triangle DCB (SAS)$, 因此 $AC = DB$. 再由 $BM = \frac{1}{2}BD$ 推知 $BM = \frac{1}{2}AC$.

(2)如图 3.5,过 C 作 $CD \parallel BA$ (或过 C 作 $DC \perp BC$, 或作 $\angle DCA = \angle BAC$),取 $CD=BA$,连结 M, D . $\because CD \parallel BA, \therefore \angle BAM = \angle DCM$,推知 $\triangle ABM = \triangle DCM(SAS)$,于是 $\angle AMB = \angle CMD$. 进而推知 B, M, D 共线. 从而可推知 $\triangle ABC \cong \triangle DCB(SAS)$,因此 $AC = DB$,故得 $BM = \frac{1}{2}AC$.

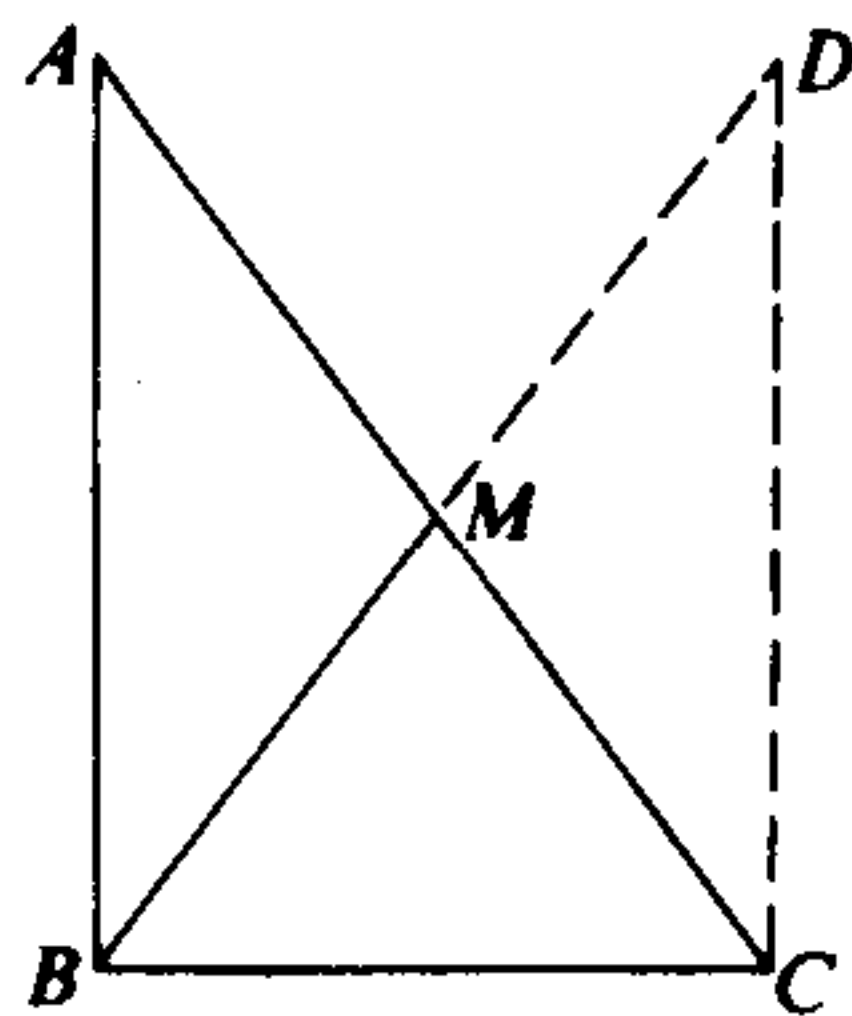


图 3.5

3.5.2 两直线相交法

如图 3.5,过 C 作 $DC \parallel AB$ (或过 C 作 $DC \perp BC$, 或作 $\angle DCA = \angle BAC$),与 BM 的延长线相交于点 D . $\because \triangle ABM \cong \triangle CDM(ASA), \therefore AB = CD$. 由此推知 $\triangle ABC \cong \triangle DCB(SAS)$,所以 $AC = BD$,从而推知 $BM = \frac{1}{2}AC$.

3.5.3 交轨法

如图 3.5,分别以 M, C 为圆心, BM, BA 为半径画弧交于 D ,连结 MD, CD ,则 $\triangle ABM \cong \triangle DCM(SSS)$,故 $\angle AMB = \angle DMC$,进而可推知 B, M, D 共线. 再由 $\triangle ABC \cong \triangle DCB(SAS)$ 得知 $BM = \frac{1}{2}AC$.

3.5.4 直线与圆相交法

(1)如图 3.5,以 C 为圆心,以 BA 为半径画弧与 BM 的延长线交于点 D . 以下证明从略.

(2)过 C 作 $CD \parallel AB$ (或过 C 作 $CD \perp BC$, 或作 $\angle DCA = \angle BAC$),以 M 为圆心,以 BM 为半径画弧交 CD 于点 D . 以

下证明从略.

3.5.5 拼补法

如图3.5,以 CM 为边拼接 $\triangle CDM$,使 $\triangle CDM \cong \triangle ABM$.
以下证明从略.

3.6 平移法

同一个图形,从不同的角度审视,往往可以探索出解决问题的新方法.在图3.1中, $AD=BC$,且 $\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ$,故此可把 AD 看做由 BC 平移而得.同样, CD 可看做由 BA 平移而得.由于平移的线段及其移动方式的不同,又可演变出一些新的证明方法.

3.6.1 平移 BC

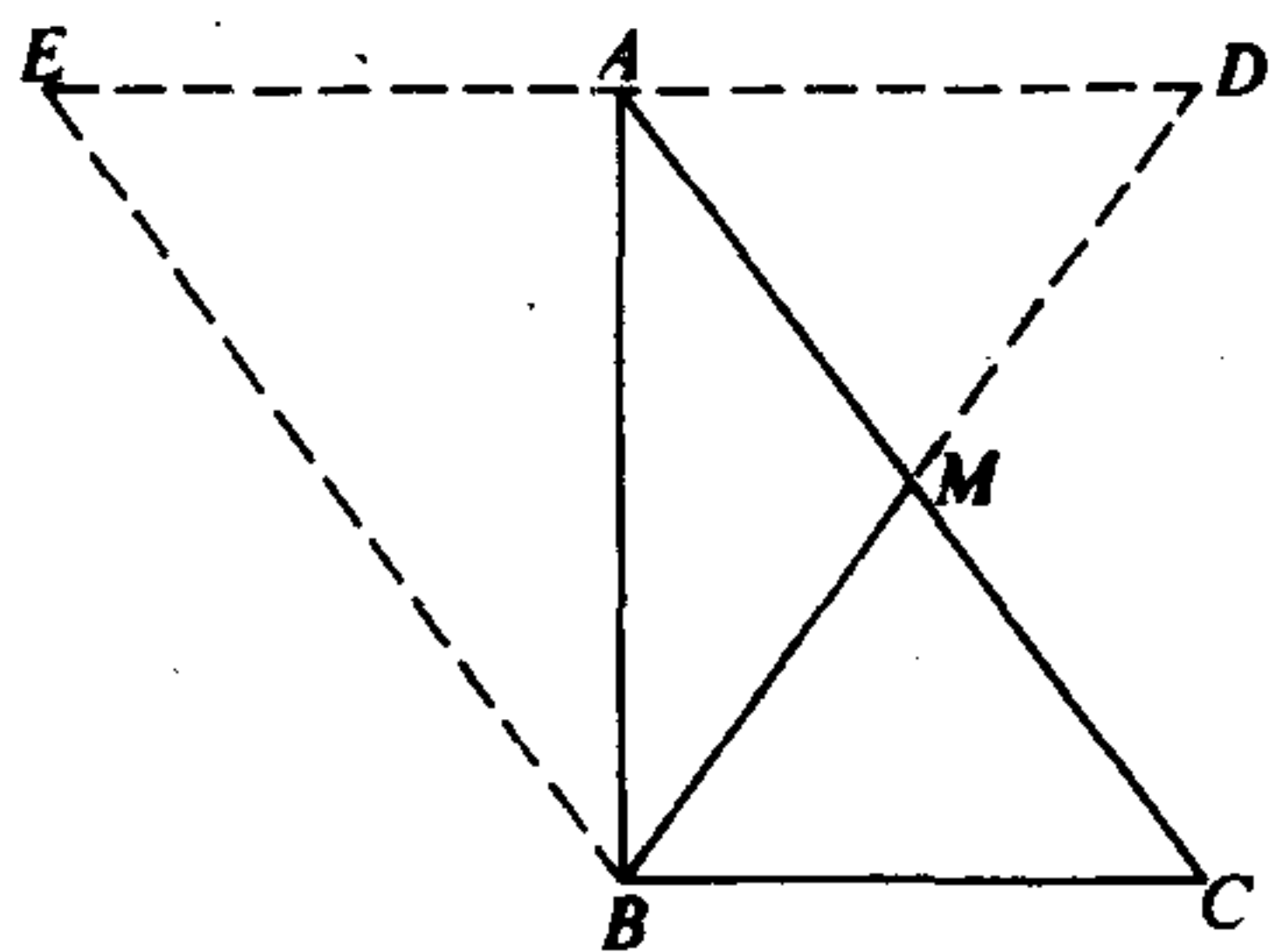


图 3.6

(1)将 BC 平移至 AE ,
连结 BE, EA, BM 的延长
线相交于点 D (图3.6).因
为四边形 $AEBC$ 为平行四
边形,所以 $EB=AC$,又
 $\triangle AMD \cong \triangle CMB$ (ASA),
故 $AD=BC=AE, BM=$
 DM .于是 $\triangle AEB \cong \triangle ADB$

(SAS). 因此 $BE=BD$,故有 $BM=\frac{1}{2}AC$.

(2)将 BC 平移到 AD ,连结 MD . 以下证明从略.

3.6.2 平移 AC

(1)将 AC 平移到 EB ,连结 AE, EA 与 BM 的延长线相

交于点 D (图 3.6). $\because \triangle AMD \cong \triangle CMB (ASA), \therefore AD = BC, DM = BM$. 因而有 $\triangle AEB \cong \triangle ADB (SAS)$, 故有 $EB = BD = 2BM$. 又由作法知 $EB = AC$, 于是 $AC = 2BM$, 即 $BM = \frac{1}{2}AC$.

(2) 将 AC 平移到 BD , 连结 CD , 取 BD 的中点 N , 连结 CN (图 3.7). $\because MC \parallel BN, \therefore BMCN$ 为平行四边形. 由于 M, N 分别是平行四边形 $ABDC$ 边 AC, BD 的中点, 故连结 MN , 得知 $MN \parallel AB$. 又由 $\angle ABC = 90^\circ$ 推知 $MN \perp BC$. 故平行四边形 $BMCN$ 为菱形. 从而推知 $BM = MC = \frac{1}{2}AC$.

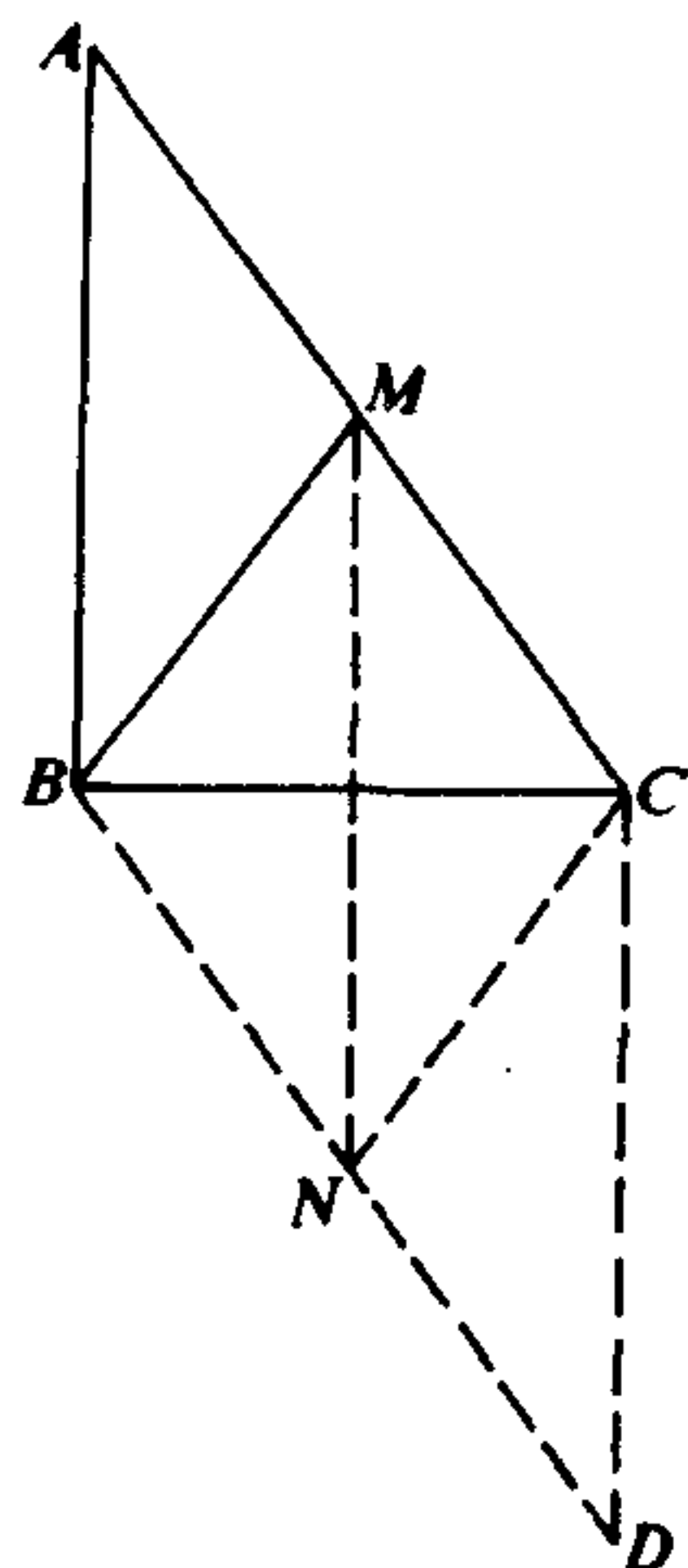


图 3.7

3.6.3 平移 BM

(1) 将 BM 平移到 DA , 连结 DB, DM , DM 交 AB 于 E (图 3.8). $\because AD \parallel MB, \therefore$ 四边形 $ADBM$ 为平行四边形, 于是有 $AE = EB$. 又 $AM = MC$, 故 $ME \parallel BC$, 所以 $\angle AEM = 90^\circ$. 由此推得 $AB \perp DM$, 故知 $\square ADBM$ 为菱形, 从而有 $BM = AM = \frac{1}{2}AC$.

(2) 将 BM 平移到 AE , 连结 EM . 作 $CD \parallel BA$ 与 BM 的延长线交于点 D , 连结 AD 交 EM 于 F (图 3.9). 由于 $MF \parallel CD, AM = MC$, 故根据中位线定理知 $AF = FD$. 又 $\angle AFM = \angle DFM = 90^\circ$, 所以 $\triangle AFM \cong \triangle DFM$, 故 $\angle AMF = \angle DMF$.

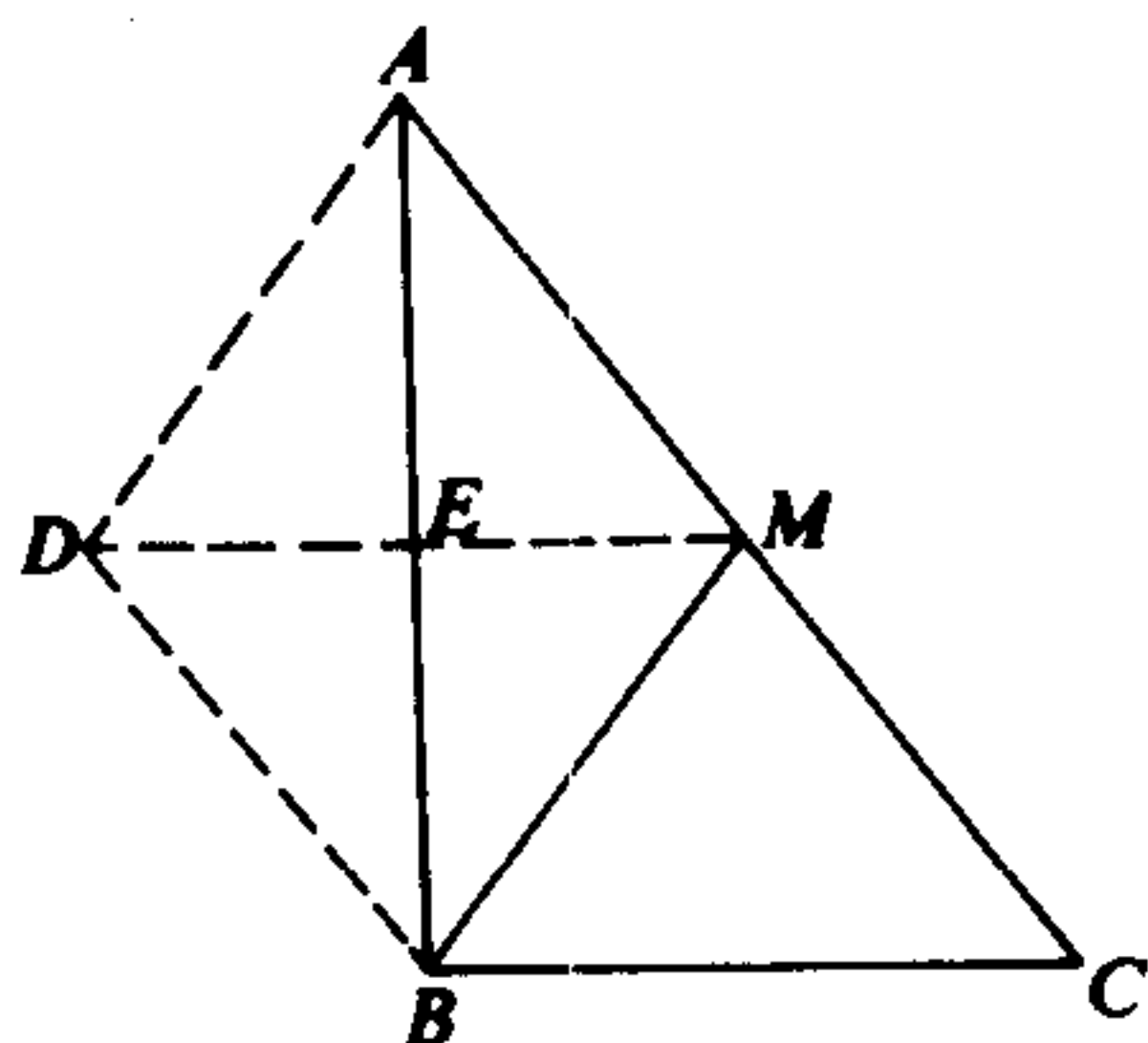


图 3.8

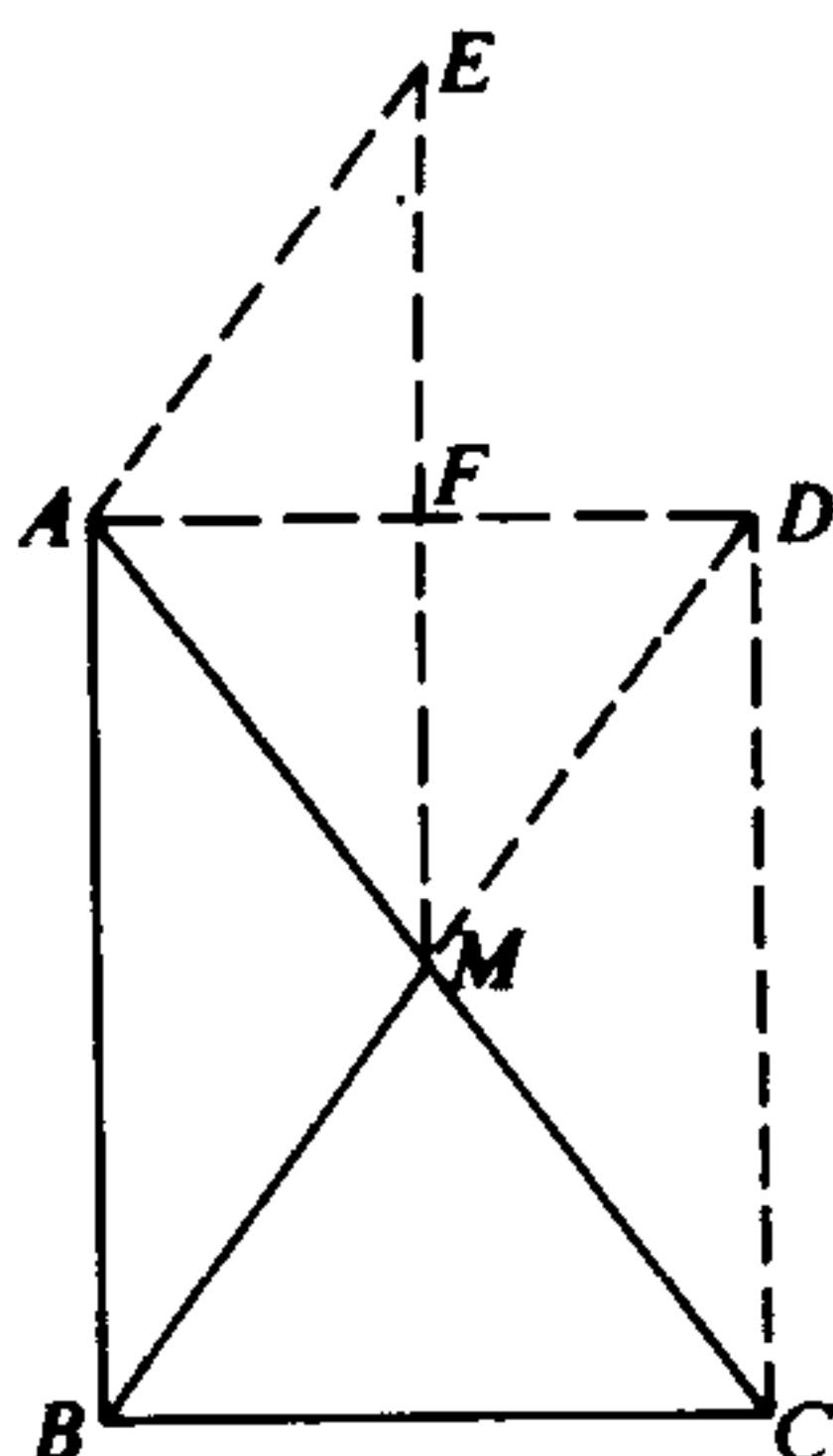


图 3.9

而 $\angle DMF = \angle AEF$, 故 $\angle AMF = \angle AEF$, 所以 $AM = AE$, 从而推出 $BM = \frac{1}{2}AC$.

3.6.4 平移 BD

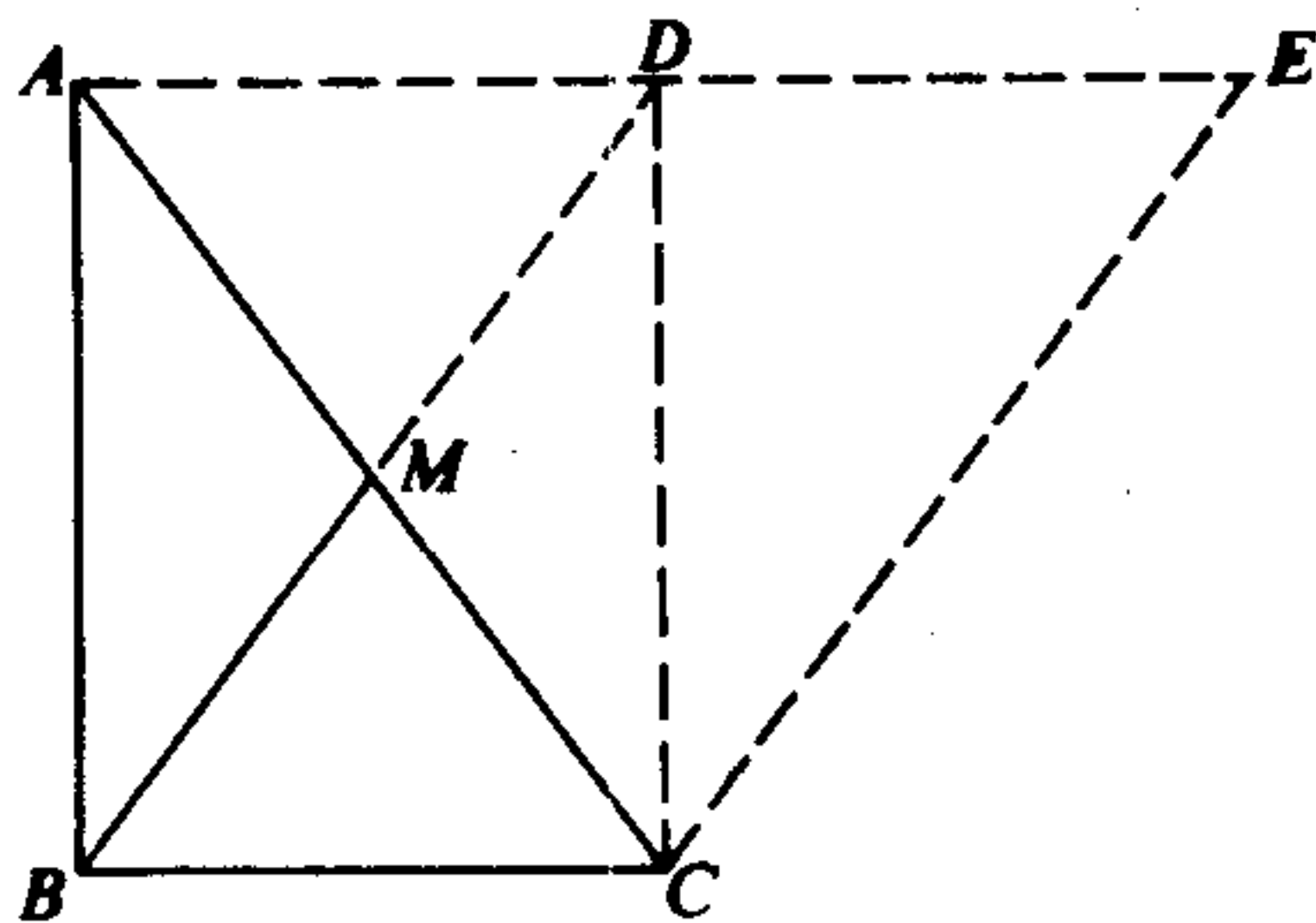


图 3.10

(1) 延长 BM 至 D , 使 $BD = 2BM$, 连结 AD , 平移 BD 到 CE , 连结 DE (图 3.10). 由 $\triangle AMD \cong \triangle CMB$ (SAS) 知 $\angle DAM = \angle BCM$, 所以 $AD \parallel BC$. $\therefore$ 四边形 $BDEC$ 为平行四边形, $\therefore DE \parallel$

BC , 故 A, D, E 在一条直线上. 连结 CD , 可推知 $CD \perp AE$. 再由 $AD = DE$ 可推知 $AC = CE$, 于是 $BM = \frac{1}{2}AC$.

(2) 延长 BM 至 D , 使 $BD=2BM$, 连结 DC , 平移 BD 到 $E'C$ [与(1)中 CE 方向相反], 连结 BE' (图 3. 11). $\because \triangle AMB \cong \triangle CMD (SAS), \therefore \angle BAM = \angle DCM$, 故 $AB \parallel DC$. 四边形 $BDCE'$ 为平行四边形, 所以 $DC \parallel BE'$, 故知 A, B, E' 三点共线. 再由 $AB = BE'$ 推知 $AC = E'C$, 于是 $BM = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}E'C = \frac{1}{2}AC$.

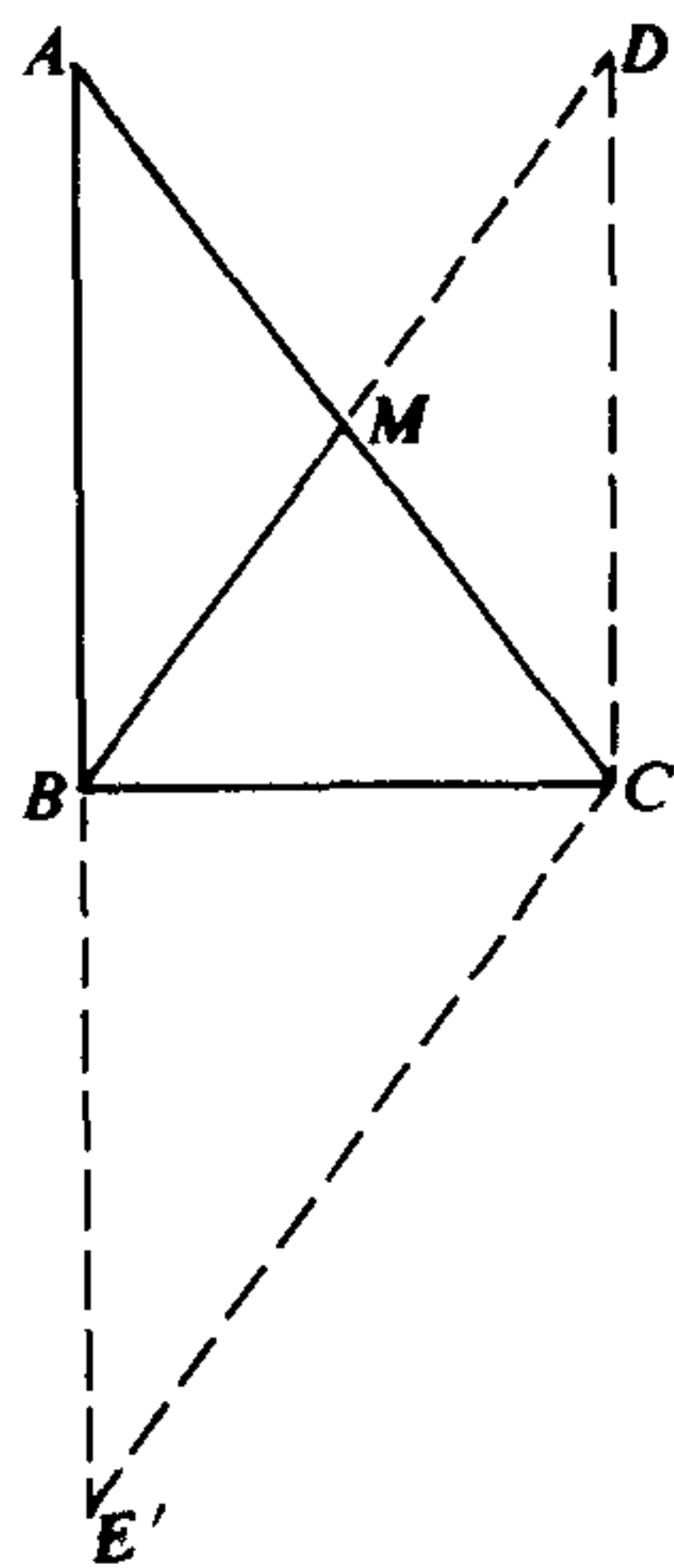


图 3. 11

在上述推证过程中, 得知 $E'C = AC$, 因此可视 $E'C$ 是由 AC 旋转一个角度而得, 按旋转的观点来审视图 3. 11, 又可得另外一种证法:

如图 3. 11, 以点 C 为定点, 将 CA 旋转一个角度变成 CE' , 使得 $\angle ACB = \angle E'CB$, 连结 BE' , 易证 $\triangle ABC \cong \triangle E'BC (SAS)$. 因此 $\angle ABC = \angle E'BC = 90^\circ$, 故 A, B, E' 三点共线. 由中位线定理知 $BM = \frac{1}{2}E'C = \frac{1}{2}AC$.

3. 7 逆向倍增线段法

在图 3. 6 中, 无论 BC 平移到 EA , 还是平移到 AD , 均可证明结论成立. 即同一个线段, 平移到点 A 左方可获得一个证法, 平移到点 A 右方亦可获得一个证法. 以 A 为基准点, 如果 A 的左方为正向, 那么 A 的右方就是逆向. 这就启示我们,

如果获得一个证法之后,再逆向思考,有可能获得新的证法.图 3.1 的矩形可视做倍增线段 BM 而形成的.如果把 BM 方向看做正向,那么这种倍增线段法就称为是正向的.如果从相反的方向予以思考,就可得到逆向倍增线段法.根据构成的整体图形的不同,这种方法又可分为双直角三角形法与菱形法.

3.7.1 双直角三角形法

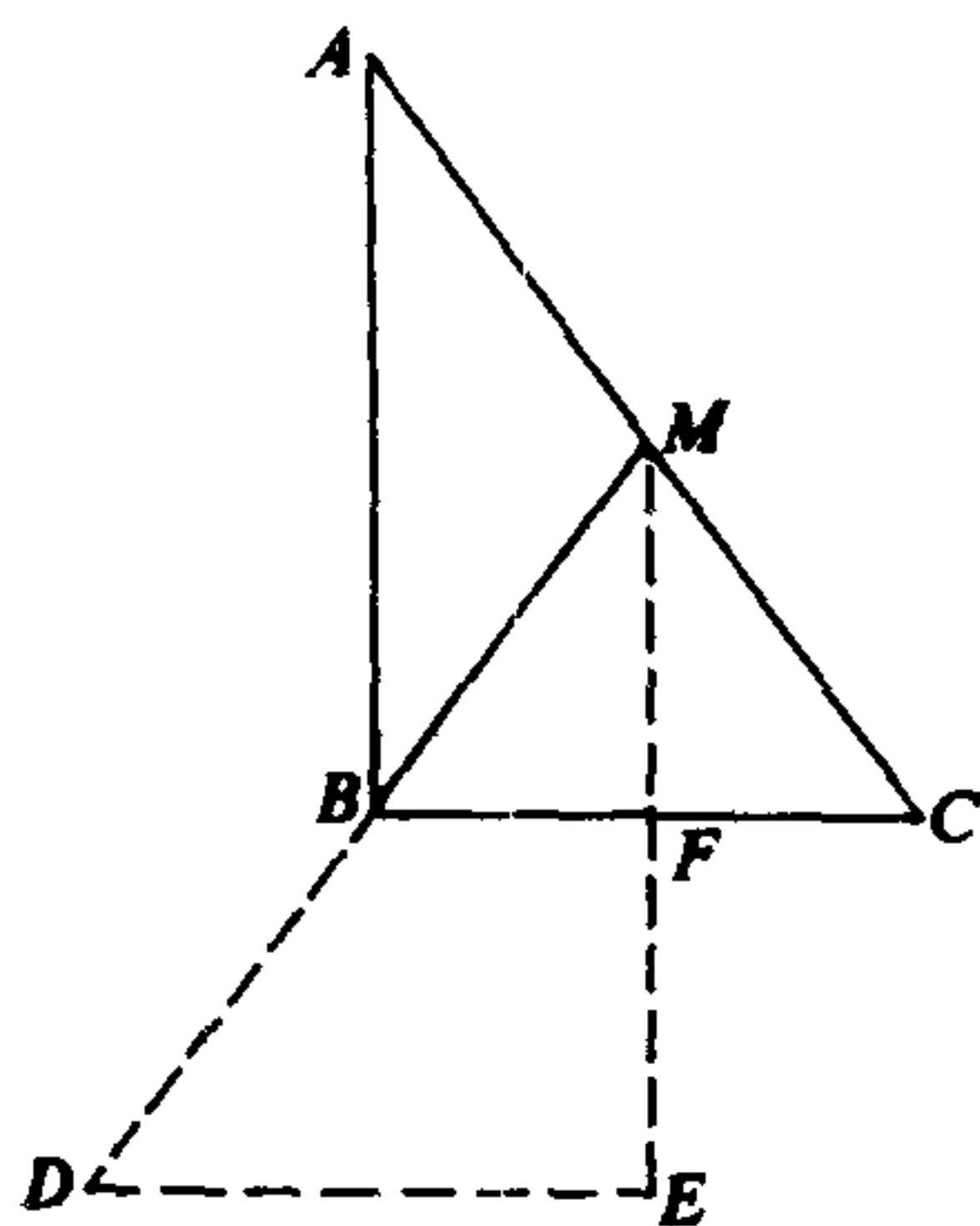


图 3.12

延长 MB 至 D , 使 $BD = BM$, 分别过 D, M 作 $DE \parallel BC$, $ME \parallel AB$, 相交于 E , 且与 BC 相交于 F (图 3.12). 由于 $AM = MC$, 且 $MF \parallel AB$, 故 $MF = \frac{1}{2}AB$, $BF = FC$. 又 $MB = BD$, $BF \parallel DE$, 故 $MF = FE$, $BF = \frac{1}{2}DE$. 由此可知 $AB = ME$, $BC = DE$, 故 $\triangle ABC \cong \triangle MED$. 所以 $MD = AC$, 即 $BM = \frac{1}{2}AC$.

3.7.2 菱形法

延长 MB 至 D , 使 $BD = BM$, 过 D 作 $DE \parallel AC$, 与 AB , CB 的延长线分别交于点 E, F , 连结 CE, AF (图 3.13). 由 $\triangle ABM \cong \triangle EBD$ 知 $AB = BE$, 由 $\triangle CBM \cong \triangle FBD$ 知 $BC = BF$, 故四边形 $ACEF$ 为平行四边形. 又 $AE \perp CF$, 所以 $\square ACEF$ 为菱形. 又 $AM = DE$, 而 $AM = \frac{1}{2}AC$, 所以 $DE =$

$\frac{1}{2}EF$, 故 $FD = AM$, 即四边形 $AMDF$ 为平行四边形, 故知 $BM = \frac{1}{2}DM = \frac{1}{2}AC$.

上面所述的矩形法、拼补法、平移法、旋转法、逆向倍增线段法, 都可以统一概括为整体转化法. 因为这几种方法通过作辅助线之后所形成的新图形都包含了原图形, 原图形是新图形的一部分. 也就

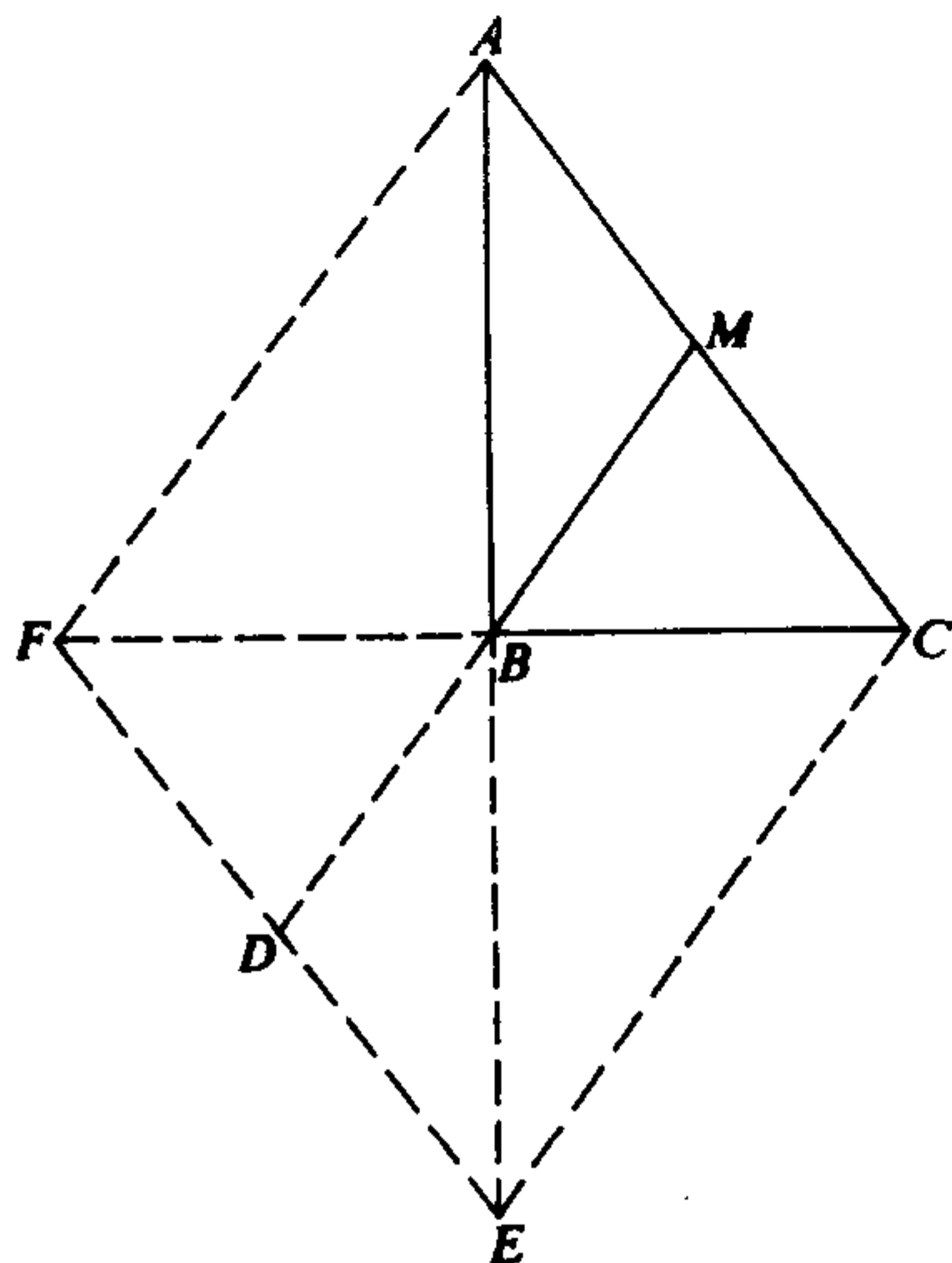


图 3.13

是说原图形为局部, 新图形为整体. 一个局部问题不易解决, 可转化为整体问题来解决. 反过来, 整体问题是否可以转化为局部问题来解决呢? 下面我们就来探讨这个问题.

3.8 局部转化法

如图 3.14, 欲证 $BM = \frac{1}{2}AC$, 只要证明 $BM = AM$ 即可, 这就归结到证 $\triangle AMB$ 为等腰三角形. 为此联想到中垂线定理, 这就想到引一条直线 ME , 交 AB 于 E , 使 $AE = EB$ 且 $ME \perp AB$. 而由题设知 $AM = MC$, 因此由中位线定理可知, 过 M 作直线 ME , 且使 $ME \parallel CB$, 则就有 $AE = EB, ME \perp AB$.

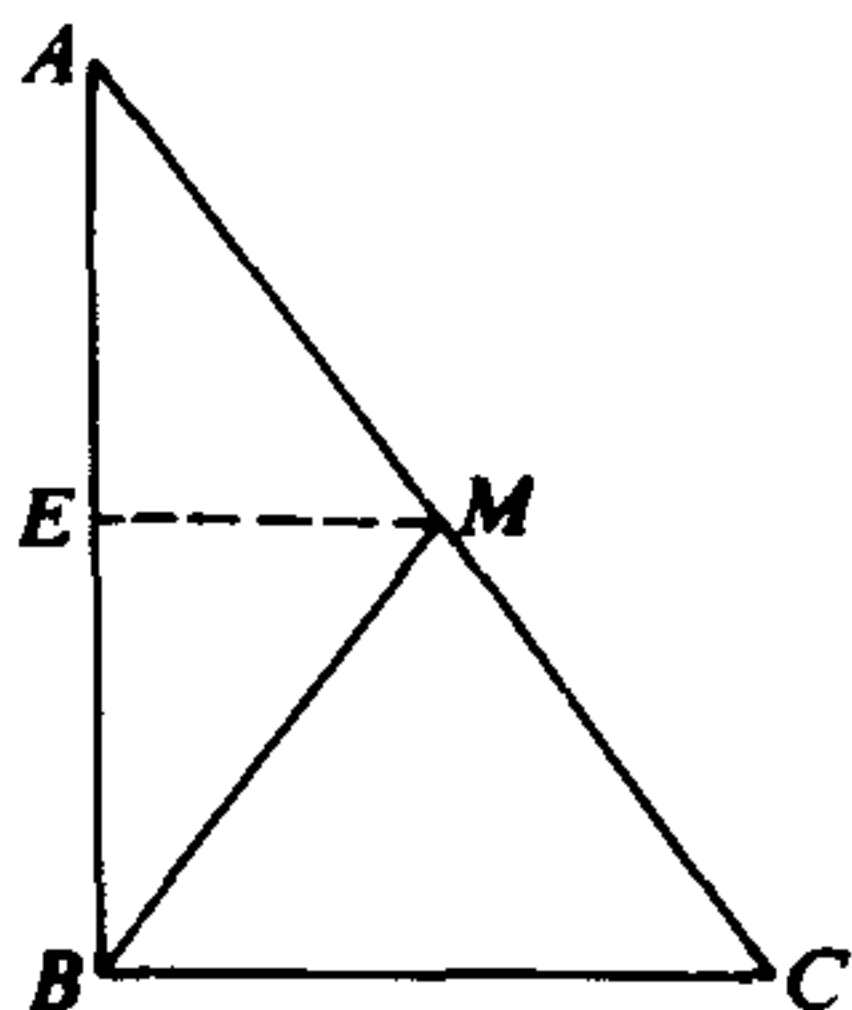


图 3.14

由上面探索得知,把原来在直角三角形中推求的线段关系转化为等腰三角形的线段关系是可行的.对本题而言,等腰三角形是直角三角形的一部分,上述思路即把整体问题转化为局部问题来解决:

如图 3.14,过 M 作 $ME \parallel CB$,交 AB 于 E .因 $AM = MC$, $ME \parallel CB$,故 $AE = EB$, $\angle AEM = 90^\circ$.所以 $ME \perp AB$,由中垂线定理知 $BM = AM = \frac{1}{2}AC$.

习 题 3

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, E 是 AB 上一点, F 是 AC 延长线上的一点, $BE = CF$, EF 交 BC 于 D . 求证 $DE = DF$.

2. CD 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的中线, CE 是 $\triangle ADC$ 的边 AD 上的中线, 且 $AD = AC$. 求证 $BC = 2CE$.

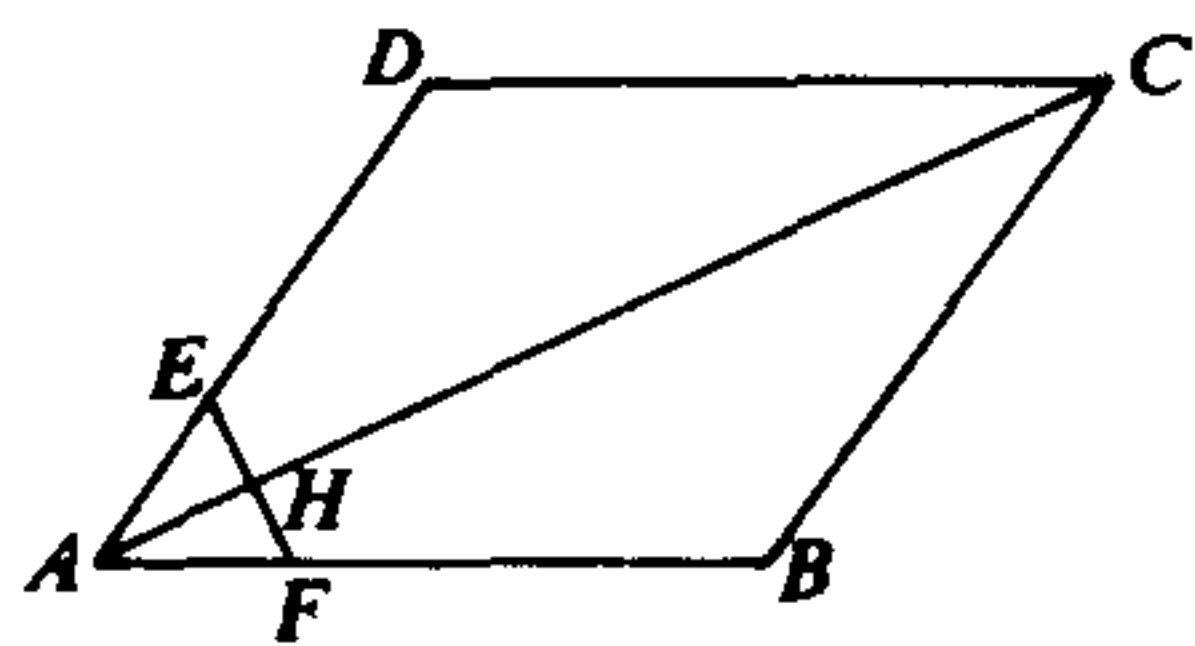


图 3.15

3. 如图 3.15, 在 $\square ABCD$ 中, E, F 分别在 DA, AB 上, 且有 $AE = \frac{1}{n}ED$,

$AF = \frac{1}{m}FB$, EF 交 AC 于 H . 求证

$$HC = (1 + m + n)AH,$$

并探索 $\frac{EH}{HF} = ?$

4. 设 M 为 $\triangle ABC$ 的边 AC 的中点, 证明: $BM = \frac{1}{2}AC$ 的充分必要条件是 $\angle ABC = 90^\circ$.

4

三角形内角平分线性质 定理的证明与演变

许多几何问题都涉及证明四条线段成比例的问题,解这类题应从何处下手?这是许多同学感到困惑的问题.在本章,我们通过对三角形内角平分线性质定理的多种证法的剖析,较全面地揭示了证明线段成比例问题的基本思考方法.在探讨上述定理的多种证法的过程中,我们还意外地导出了三角形外角平分线性质定理.从这两个定理可知:与五个点对应的三对线段的比值为常量,其中有的点为动点,有的点为定点,这又启发我们提出新的问题:保持这个常量的动点的轨迹是什么?

4.1 定理与思路分析

定理 4.1 三角形的内角平分线分对边所得的两条线段和这个角的两边对应成比例.

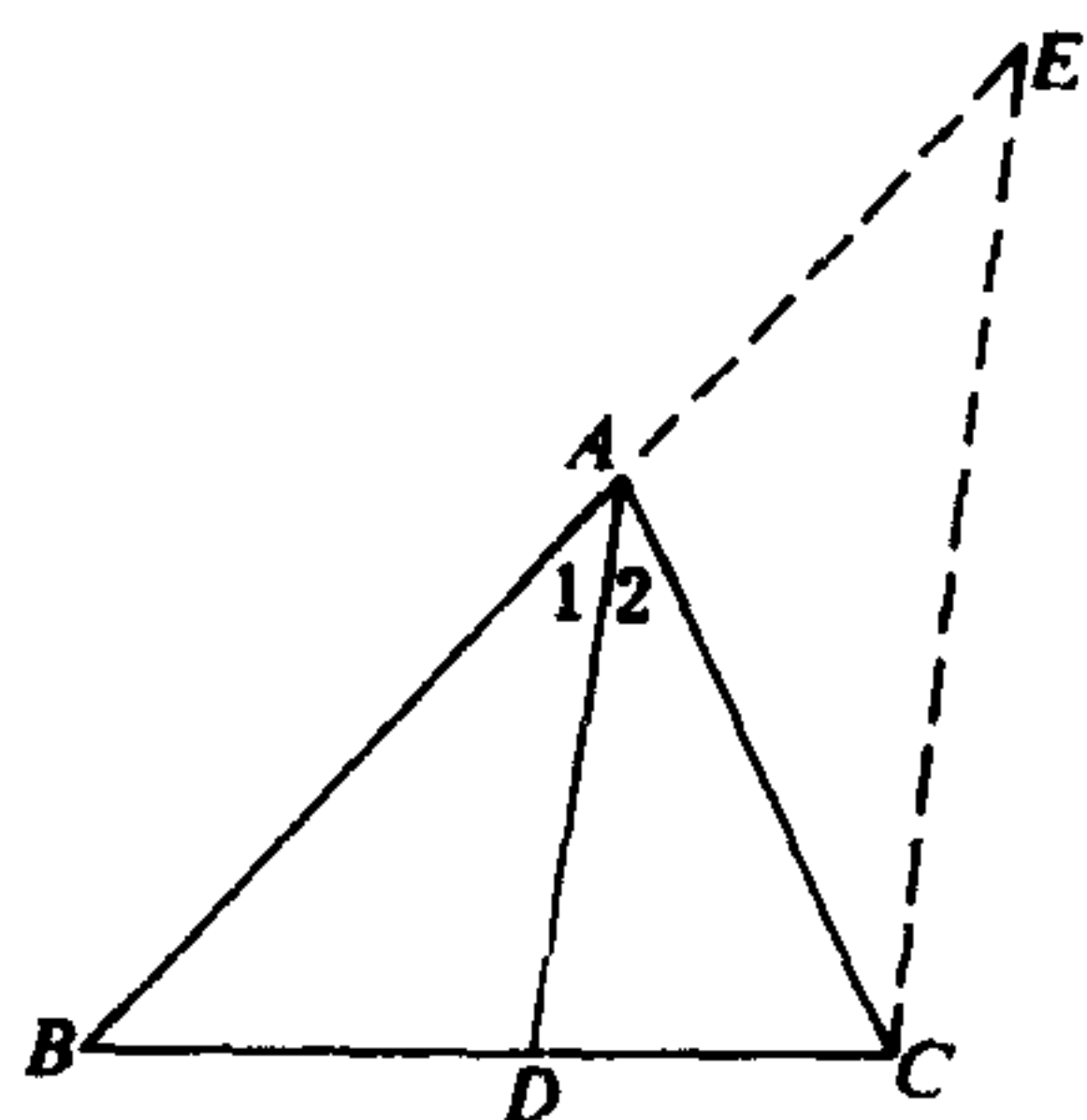


图 4.1

已知在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 $\angle BAC$ 的平分线(图 4.1). 求证

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

思路分析 首先观察欲证的成比例的四条线段 BD, DC, AB, AC 是否处在两个相似三角形中, 或者能否运用“平行线分线段成比例定理”, 看来皆不行. 于是我们考虑其中三条线段 $BD, DC,$

AB 可运用“平行于三角形一边的直线与另两边(或其延长线)相交, 所截得的对应线段成比例”, 而这就需要先作出这三条线段的第四比例项 AE . 为此过 C 作 $CE \parallel DA$, 且与 BA 的延长线交于 E , 从而有 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE}$. 能否用 AC 代换 AE 呢? 这就需要证 $AC = AE$. 因为 $CE \parallel DA$, 所以 $\angle 1 = \angle E$, $\angle 2 = \angle ACE$. 又 $\angle 1 = \angle 2$, 故 $\angle E = \angle ACE$. 因此 $AC = AE$. 这种用等量代换来完成证明比例线段问题的方法, 就称为等量代换法.

反过来考虑, 如果在 BA 的延长线上截取 AE , 使 $AE = AC$, 是否可证 $CE \parallel DA$ 呢? 这是可以证明的, 从而又得到另

一种证明方法.

上述由作三条线段 BD, DC, AB 的第四比例项构作的相似三角形为 A 型的 (含有一个公共顶角 $\angle ABD$), 我们也可构作 X 型的 (含有对顶角). 为此过 C 作 $CE \parallel AB$, 交 AD 的延长线于 E (图 4.2), 从而有 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{EC}$. 再用 AC 代换 EC , 这就需要证明 $AC = EC$, 这是不难证得的.

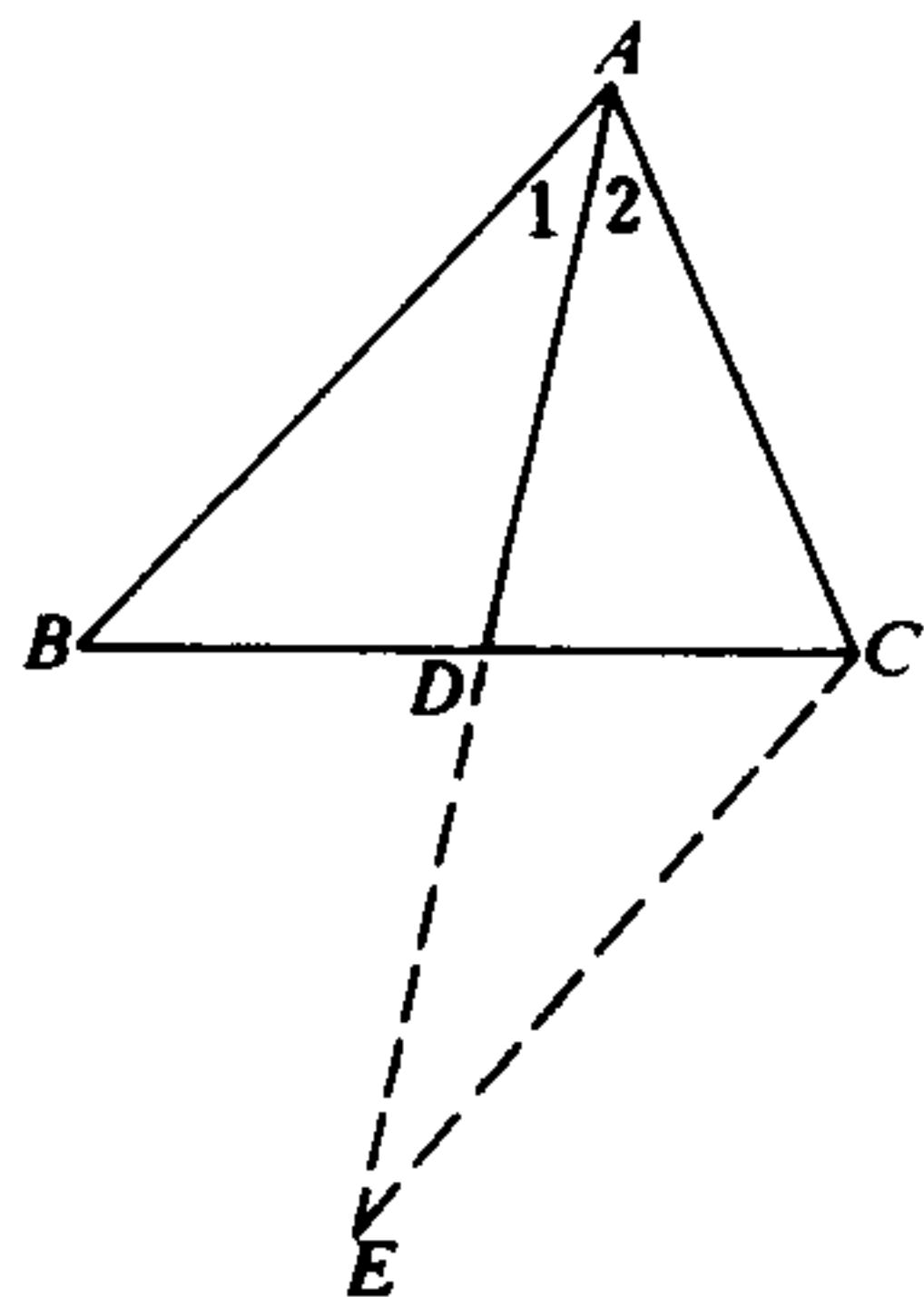


图 4.2

反过来考虑, 如果以 C 为圆心, 以 CA 为半径画弧交 AD 的延长线于 E , 由 $AC = EC$, 是否可证 $CE \parallel AB$ 呢? 这是可以证明的, 从而又得到一种证法.

从四条线段中选三条线段, 共有四种选法, 于是得到如下证法.

4.2 等量代换法

4.2.1 作 BD, DC, AB 的第四比例项

(1) 如图 4.1, 作 $CE \parallel DA$, 交 BA 的延长线于 E . 下面的证明刚才已经讲过了.

(2) 如图 4.1, 延长 BA 到 E , 使 $AE = AC$, 连结 CE , 则 $\angle ACE = \frac{1}{2}(\angle ACE + \angle E)$. 又 $\because \angle 2 = \frac{1}{2}\angle BAC, \angle BAC = \angle ACE + \angle E, \therefore \angle 2 = \angle ACE$, 于是 $CE \parallel DA$. 故有 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE}$

$$= \frac{AB}{AC}.$$

(3) 作 $CE \parallel AB$, 交 AD 的延长线于 E (图 4.2), 则 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{CE}$, $\angle 1 = \angle CED$. 又由已知 $\angle 1 = \angle 2$, 故 $\angle CED = \angle 2$, 于是 $CE = AC$. 故有 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

(4) 如图 4.2, 以 C 为圆心, 以 CA 为半径画弧交 AD 的延长线于 E , 则 $\angle CED = \angle 2$. 又由已知 $\angle 1 = \angle 2$, 故 $\angle 1 = \angle CED$, 于是 $CE \parallel AB$. 故有 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{CE} = \frac{AB}{AC}$.

4.2.2 作 BD, DC, AC 的第四比例项

由于 AC 与 AB 是对称的, 故亦可得到相应的四种证法. 证明过程与上述四种方法完全一样, 故证明从略, 只把图绘出 (图 4.3, 图 4.4).

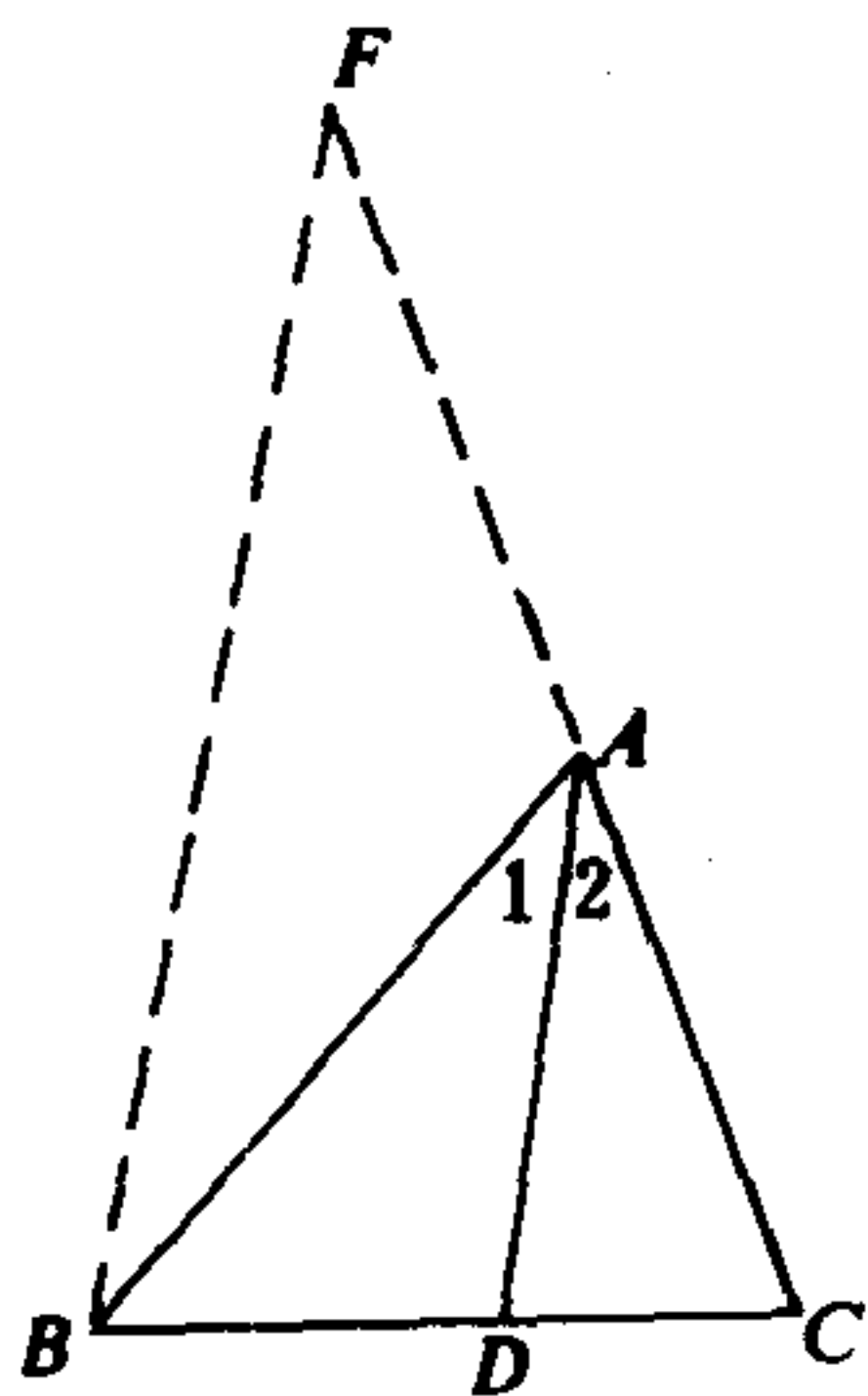


图 4.3

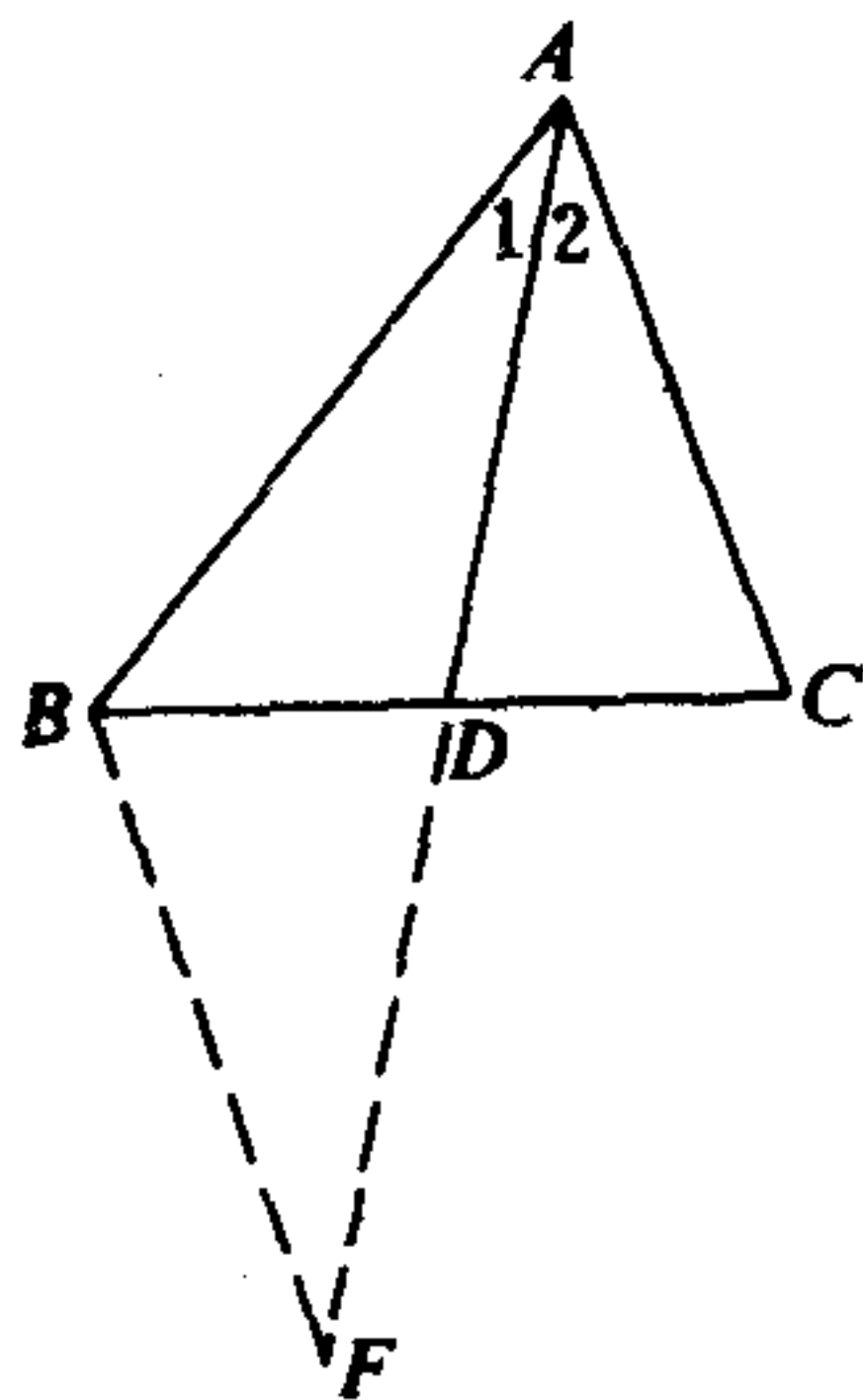


图 4.4

4.2.3 作 AB, AC, BD 的第四比例项

(1) 作 $\angle ACE = \angle B$, 交 AD 于 E (图 4.5), 则 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{EC}$, $\angle ADB = \angle AEC$. 又 $\because \angle EDC + \angle ADB = 180^\circ$, $\angle DEC + \angle AEC = 180^\circ$, $\therefore \angle EDC = \angle DEC$, 于是 $DC = EC$. 故有 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$.

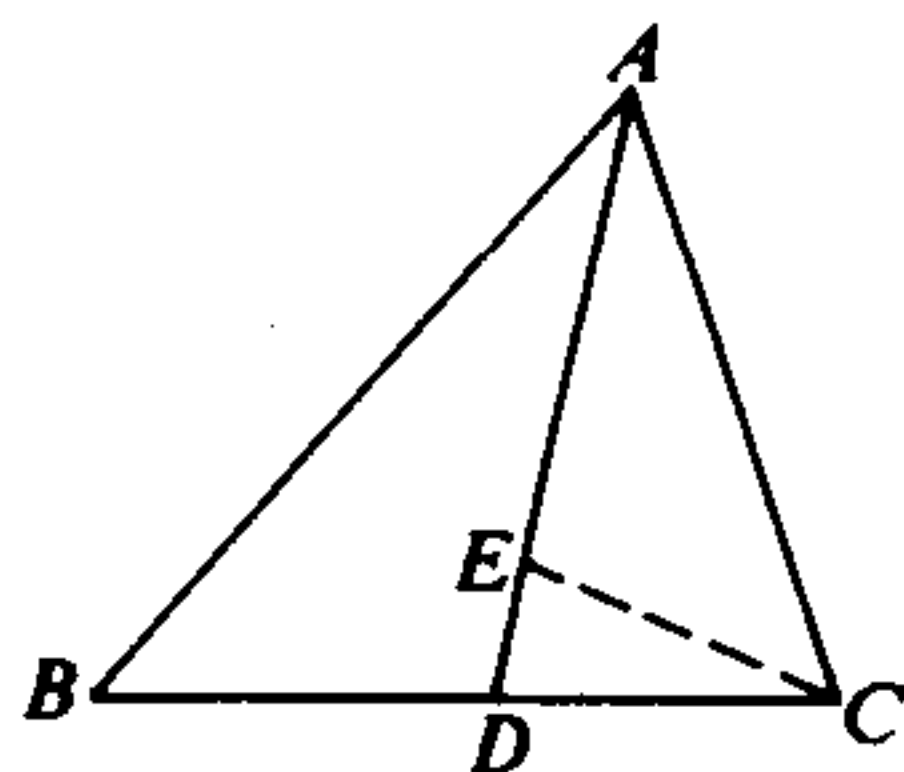


图 4.5

(2) 如图 4.5, 以 C 为圆心, 以 DC 为半径画弧交 AD 于 E , 连结 CE , 则 $\angle EDC = \angle DEC$. 又 $\angle EDC + \angle ADB = \angle DEC + \angle AEC$, 于是 $\angle ADB = \angle AEC$. 故有 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{EC} = \frac{BD}{DC}$.

4.2.4 作 AB, AC, DC 的第四比例项

如图 4.6, 由于 DC 与 BD 具有对称性, 证明过程与 4.2.3 一样, 故不赘述.

4.3 线段旋转法

上述几种证法所作的辅助线, 我们可以换一个角度来审视, 图 4.1~图 4.6 所引的辅助线都可以视为某一线段绕一固定点旋转一个角度而成: 图 4.1 可视为线段 AC 绕点 A 旋转 $180^\circ - \angle BAC$ 而成; 图 4.2 可视为线段 AC 绕点 C 旋

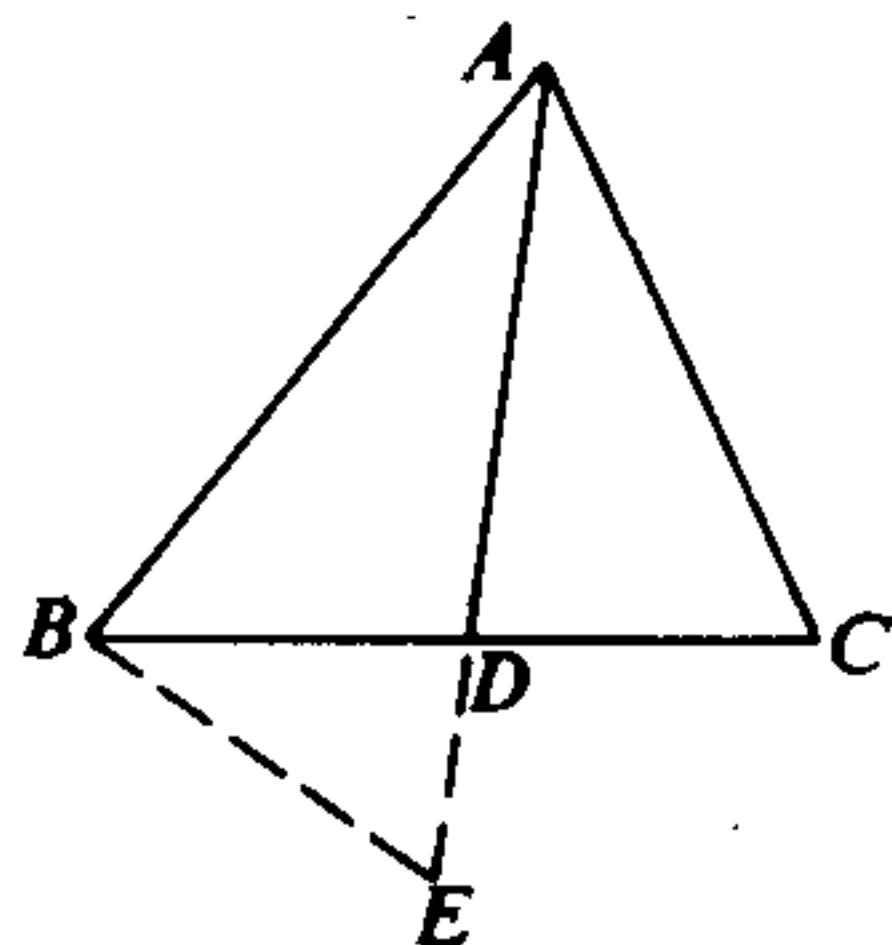


图 4.6

转 $\angle ACB + \angle DCE$ 而成;图 4.3 可视为线段 AB 绕点 A 旋转 $\angle ABC + \angle ACB$ 而成;图 4.4 可视为线段 AB 绕点 B 旋转 $\angle ABC + \angle CBF$ 而成;图 4.5 可视为线段 CD 绕点 C 旋转 $\angle ACB - \angle ABC$ 而成;图 4.6 可视为线段 BD 绕点 B 旋转 $\angle DBE = \angle ACB - \angle ABC$ 而成. 综上所述, 线段 AC 既可绕端点 A 旋转, 又可绕端点 C 旋转, AB 亦如此; 而 CD, BD 只是绕一个端点旋转, 因此还可以考察它们绕另一端点旋转的情况. 这样一来, 按旋转的观点来看, 除了上述引辅助线的形式外, 还可以有如下几种形式.

4.3.1 DC 绕点 D 旋转

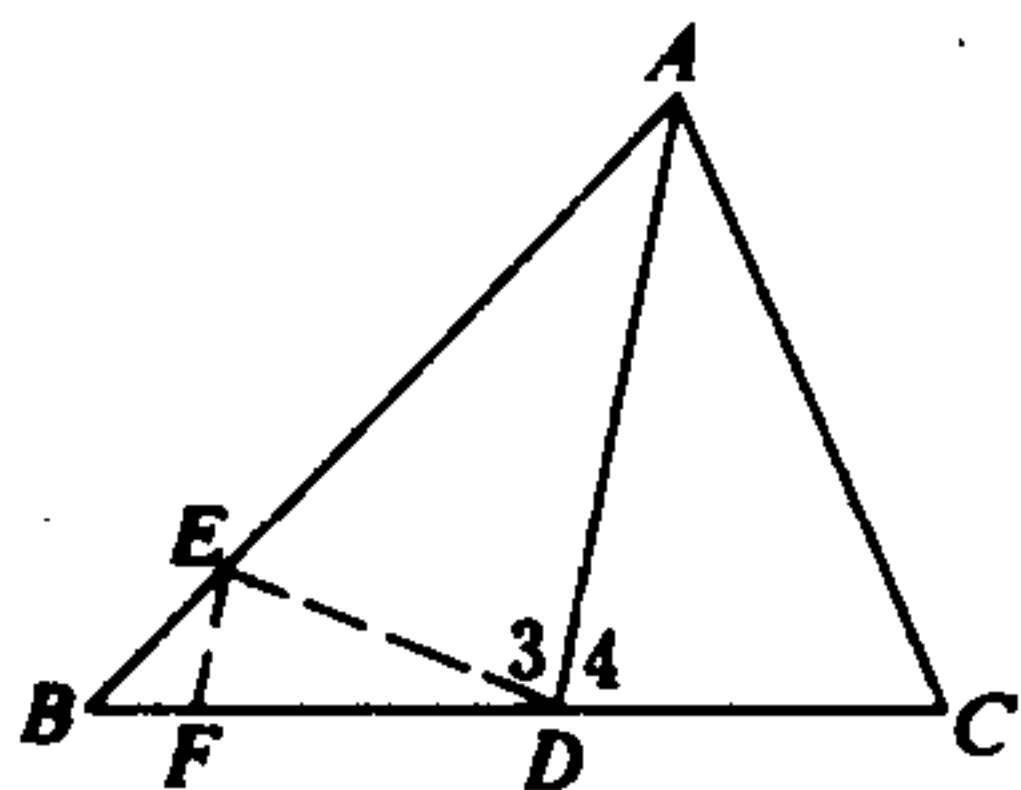


图 4.7

如图 4.7, 将 DC 绕点 D 旋转一个角度 $\angle EDC$, 使

$$\begin{aligned}\angle EDC &= 360^\circ - 180^\circ - \angle EDB \\ &= 360^\circ - (\angle ABC + \angle BAC \\ &\quad + \angle ACB) - (\angle AED - \angle ABC) \\ &= 360^\circ - \angle BAC - \angle ACB \\ &\quad - \angle AED \\ &= 360^\circ - 2\angle ACB - \angle BAC\end{aligned}$$

(即 $\angle ACB = \angle AED$, 从而 $\angle 3 = \angle 4$), 则 $DE = DC$, 且点 C 落在 AB 上成为点 E .

将 DE 继续旋转, 使之落在边 DB 上, 获得 DF , 且 $DF = DE = DC$, 连结 EF , 则有 $\angle EFD = \angle FED$, $\angle EFD + \angle FED + \angle EDF = 180^\circ$. 而 $\angle 3 + \angle 4 + \angle EDF = 180^\circ$, 因为 $\angle 3 =$

$\angle 4$, 故知 $\angle FED = \angle 3$, 所以 $EF \parallel AD$. 故有 $\frac{BD}{DF} = \frac{AB}{AE}$. 而 $DF = DC$, $AE = AC$, 故 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

4.3.2 AC 绕点 A 旋转

如图 4.7, AC 绕点 A 旋转一个角度, 与 AB 重合, 截 AB 于 E ($AB > AC$), 连结 ED , 作 $EF \parallel AD$, 交 BD 于 F , 则有 $\frac{BD}{DF} = \frac{AB}{AE}$, $\angle 3 = \angle DEF$. 又由于 $\angle 3 = \angle 4$, $\angle 3 + \angle 4 = \angle DEF + \angle DFE$, 知 $\angle DEF = \angle DFE$, 于是 $DF = DE = DC$. 而 $AE = AC$, 故 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

通过上面的证明, 我们发现一个重要事实: 如图 4.7, 将 AC 旋转到 AB 上, 使得求证 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ 的问题转化为求证 $\frac{BD}{DF} = \frac{BA}{EA}$ 的问题. 由于 $\angle 3 = \angle 4$, 故 DA 是 $\triangle BDE$ 的外角平分线, 于是求证的 $\frac{BD}{ED} = \frac{BA}{EA}$ 恰是 $\triangle BDE$ 的外角平分线性质定理. 由此可知, 从三角形内角平分线性质定理可直接推出三角形外角平分线性质定理, 反之亦然.

4.3.3 DB 绕点 D 旋转

如图 4.8, 将 DB 绕点 D 旋转一个角度 $\angle BDE$, 使 $\angle BDE = 180^\circ - \angle CDE$

$$\begin{aligned} &= \angle ABC + \angle BAC + \angle ACB - (\angle ACB - \angle AED) \\ &= \angle ABC + \angle BAC + \angle AED \\ &= 2\angle ABC + \angle BAC \end{aligned}$$

(即 $\angle ABC = \angle AED$, 从而 $\angle ADB = \angle ADE$), 点 E 落在 AC

的延长线上.

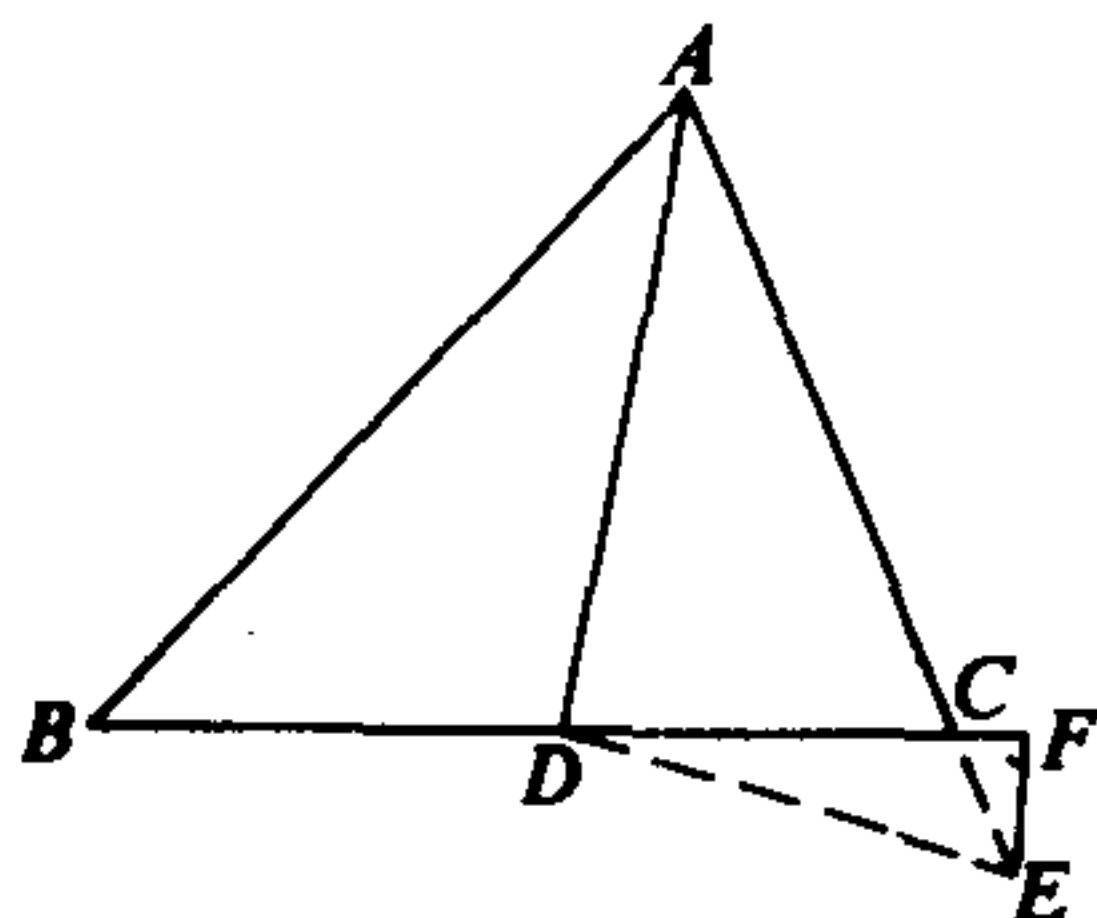


图 4.8

将 DE 继续旋转,使 E 落在 DC 的延长线上成为点 F ,且有 $DF = DE = DB$. 连结 EF ,则有 $\angle DEF = \angle EFD$, $\angle DEF + \angle EFD + \angle FDE = 180^\circ$. 而 $\angle BDA + \angle ADC = \angle ADE + \angle ADC = \angle FDE + 2\angle ADC = 180^\circ$, 所以 $\angle EFD =$

$\angle ADC$, 故有 $AD \parallel FE$, 因此 $\frac{EC}{AC} = \frac{CF}{DC} \cdot \frac{EC}{AC} + 1 = \frac{CF}{DC} + 1$, 即 $\frac{AE}{AC} = \frac{DF}{DC}$. 而 $AE = AB, DF = DB$, 故有 $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

4.3.4 AB 绕点 A 旋转

如图 4.8, 将 AB 绕点 A 旋转一个角度, 使之与 AC 重合, B 落在 AC 的延长线上成为点 E ($AC < AB$), 连结 DE . 作 $EF \parallel DA$, 交 DC 的延长线于 F ($DC < DB$). 以下证明从略.

4.4 平行线法

图 4.1~图 4.4 作辅助线的方法, 可以统一概括为: 过待证结论中线段的某一端点, 作一直线平行于某一已知线段, 且与另一已知线段或其延长线相交. 按这种观点作辅助线的方法, 称为平行线法. 对于本题来说, 除了图 4.1~图 4.4 这几种方式之外, 采用平行线法还可以有如下几种方式.

(1) 如图 4.9, 过 D 作 $DE \parallel CA$, 交 AB 于 E , 则 $\frac{BD}{DC} =$

$\frac{BE}{EA}, \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{ED}$, $\angle 2 = \angle 3$. 又由已知 $\angle 1 = \angle 2$ 知 $\angle 1 = \angle 3$, 于

是 $EA = ED$. 故有 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

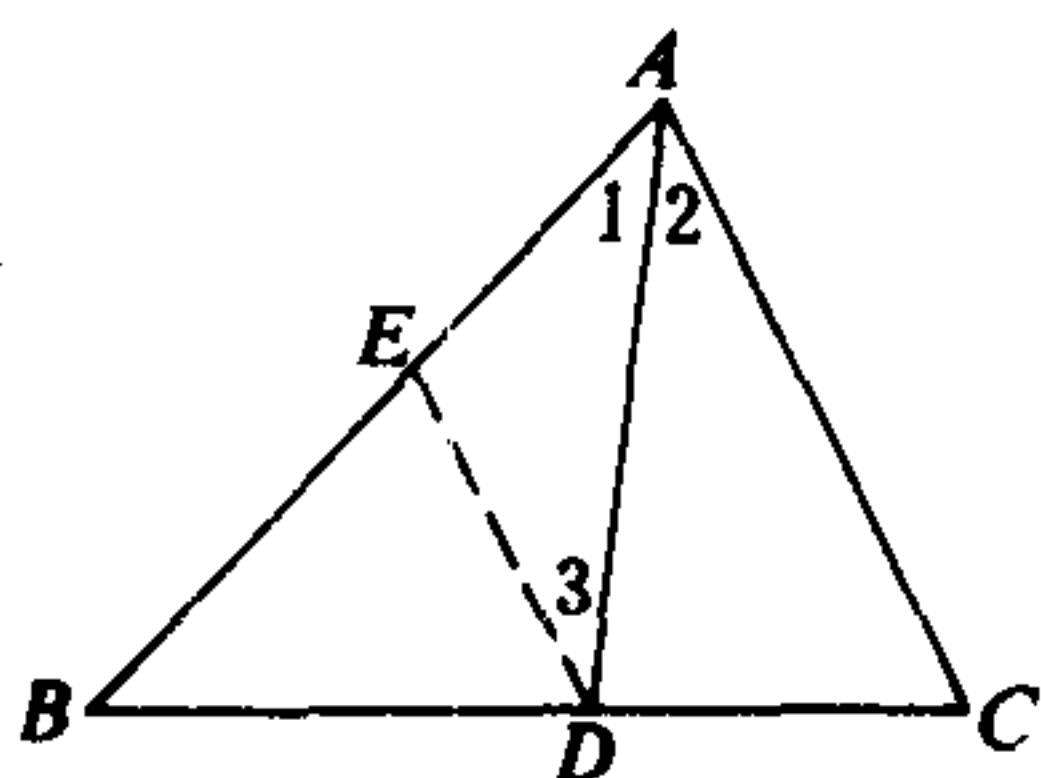


图 4.9

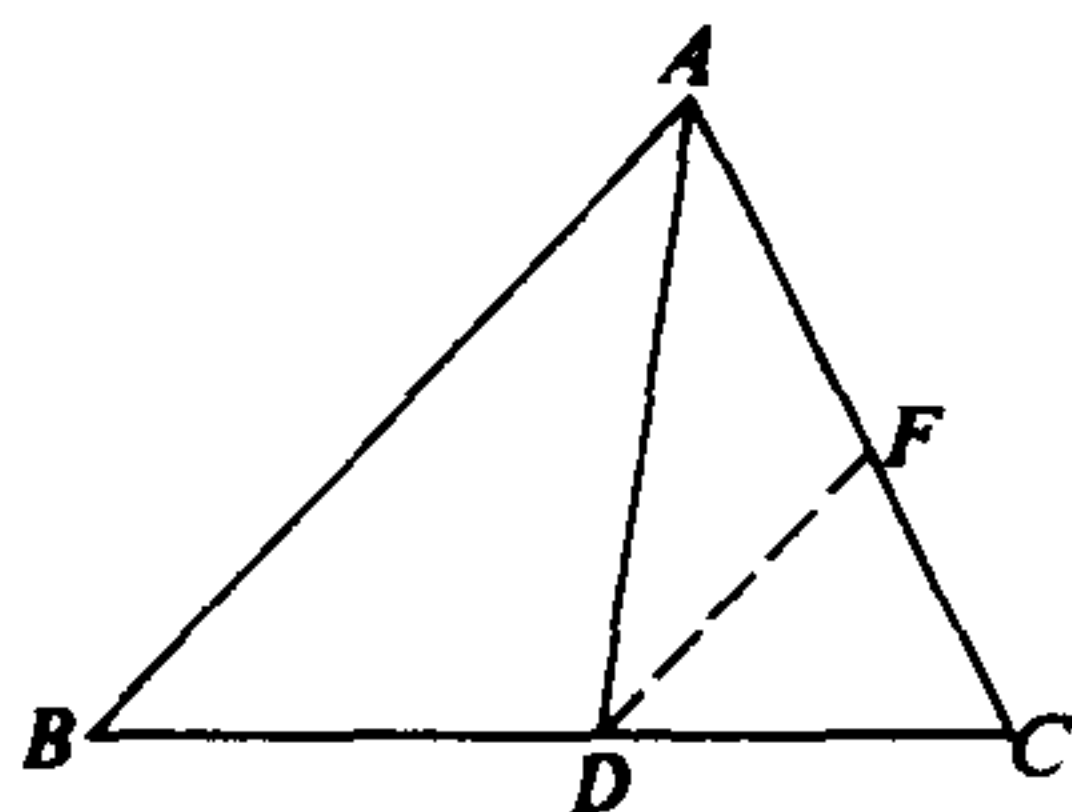


图 4.10

完全对称地, 可得

(2) 如图 4.10, 过 D 作 $DF \parallel BA$, 交 AC 于 F . 证明从略.

(3) 如图 4.11, 过 D 作 $DE \parallel$
 CA , 交 BA 于 E , 又过 D 作 $DF \parallel$
 BA , 交 CA 于 F , 则四边形 $AEDF$
 为平行四边形, $\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EA} = \frac{AF}{FC}$. 又
 由已知 $\angle 1 = \angle 2$, 于是 $\square AEDF$ 为
 菱形. 故有 $\frac{BD}{DC} = \frac{BE+AF}{EA+FC} =$

$$\frac{BE+EA}{AF+FC} = \frac{AB}{AC}.$$

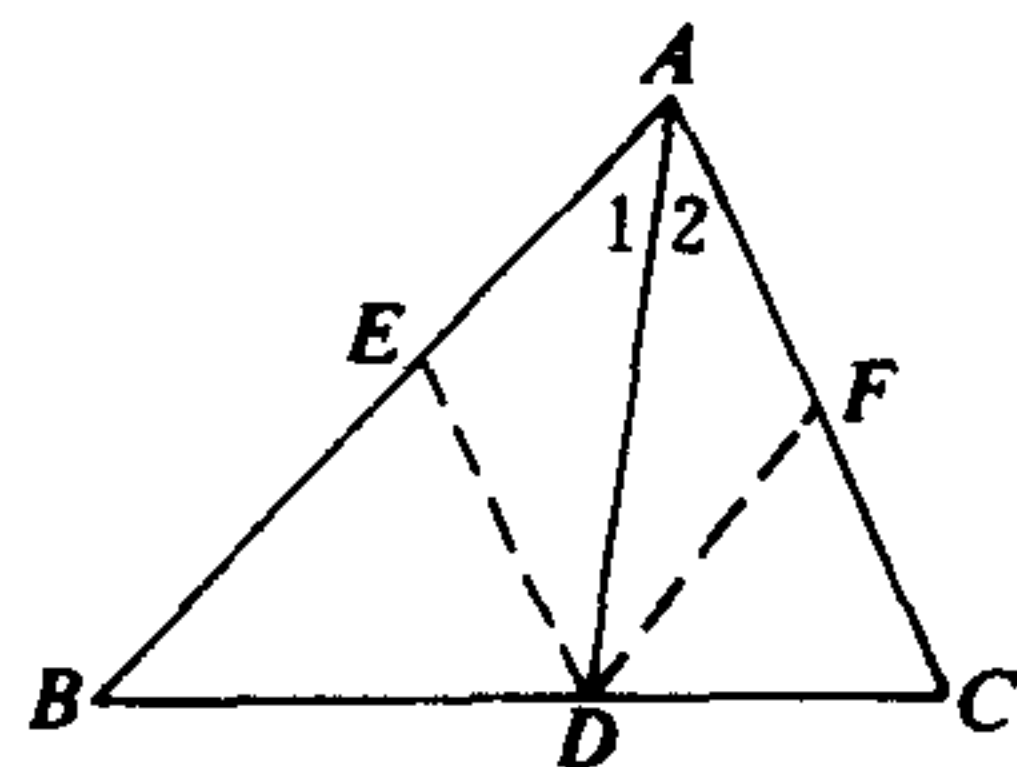


图 4.11

4.5 等比代换法

在图 4.9 中, 通过作平行线推出 $\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EA}, \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{ED}$, 继
 而又证明 $EA = ED$, 从而完成了定理的证明. 我们也可换一

个角度来审视这种证明方法:欲证 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$,将两端的比 $\frac{BD}{DC}, \frac{AB}{AC}$ 都转化为其他的线段比值,通过中间比做桥梁,最后完成比例式的证明.按这种观点处理问题的方法,称为等比代换法.下面就本题再举几例.

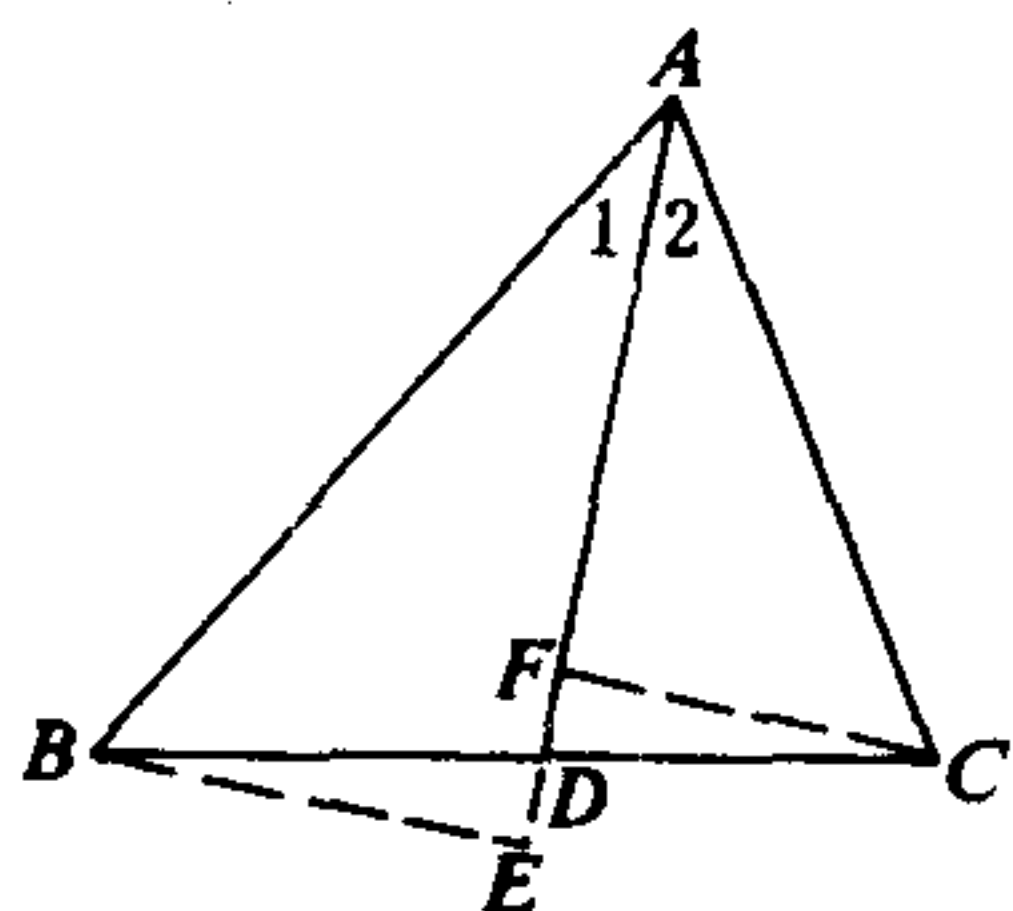


图 4.12

(1)如图 4.12,作 $BE \perp AD$,交 AD 的延长线于 E ,作 $CF \perp AD$,交 AD 于 F . $\because \angle 1 = \angle 2, \therefore \triangle ABE \sim \triangle ACF$,故有 $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CF}$; $\because \angle BDE = \angle CDF, \therefore \triangle BDE \sim \triangle CDF$,故有 $\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{CF}$. 因此 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

(2)在图 4.11 中,一方面有

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \angle 1}{\frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin \angle 2} = \frac{AB}{AC};$$

另一方面,对于 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 来说, BD, DC 上的高 h 相等,于是有

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2} BD \cdot h}{\frac{1}{2} DC \cdot h} = \frac{BD}{DC}.$$

故有 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

(3)如图 4.11,在 $\triangle ABD$ 中,由正弦定理推知

$$\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin \angle 1}, \text{ 亦即 } \frac{BD}{AB} = \frac{\sin \angle 1}{\sin \angle ADB};$$

在 $\triangle ACD$ 中,由正弦定理推知

$$\frac{AC}{\sin \angle ADC} = \frac{DC}{\sin \angle 2}, \quad \text{亦即} \frac{DC}{AC} = \frac{\sin \angle 2}{\sin \angle ADC}.$$

由于 $\sin \angle 1 = \sin \angle 2, \sin \angle ADB = \sin \angle ADC$,故

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}, \quad \text{即} \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

(4) 如图 4.13, 延长 AD 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 E , 则有 $\angle 3 = \angle 2, \angle 4 = \angle 1. \because \angle 1 = \angle 2, \therefore \angle 3 = \angle 1$, 于是 $\triangle BDE \sim \triangle ABE$. 故有 $\frac{BD}{AB} = \frac{BE}{AE}$. 同理有 $\frac{DC}{AC} = \frac{EC}{AE}$. 又 $\because \angle 1 = \angle 2, \therefore \angle 3 = \angle 4$. 于是 $BE = EC$, 故有

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}, \quad \text{亦即} \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

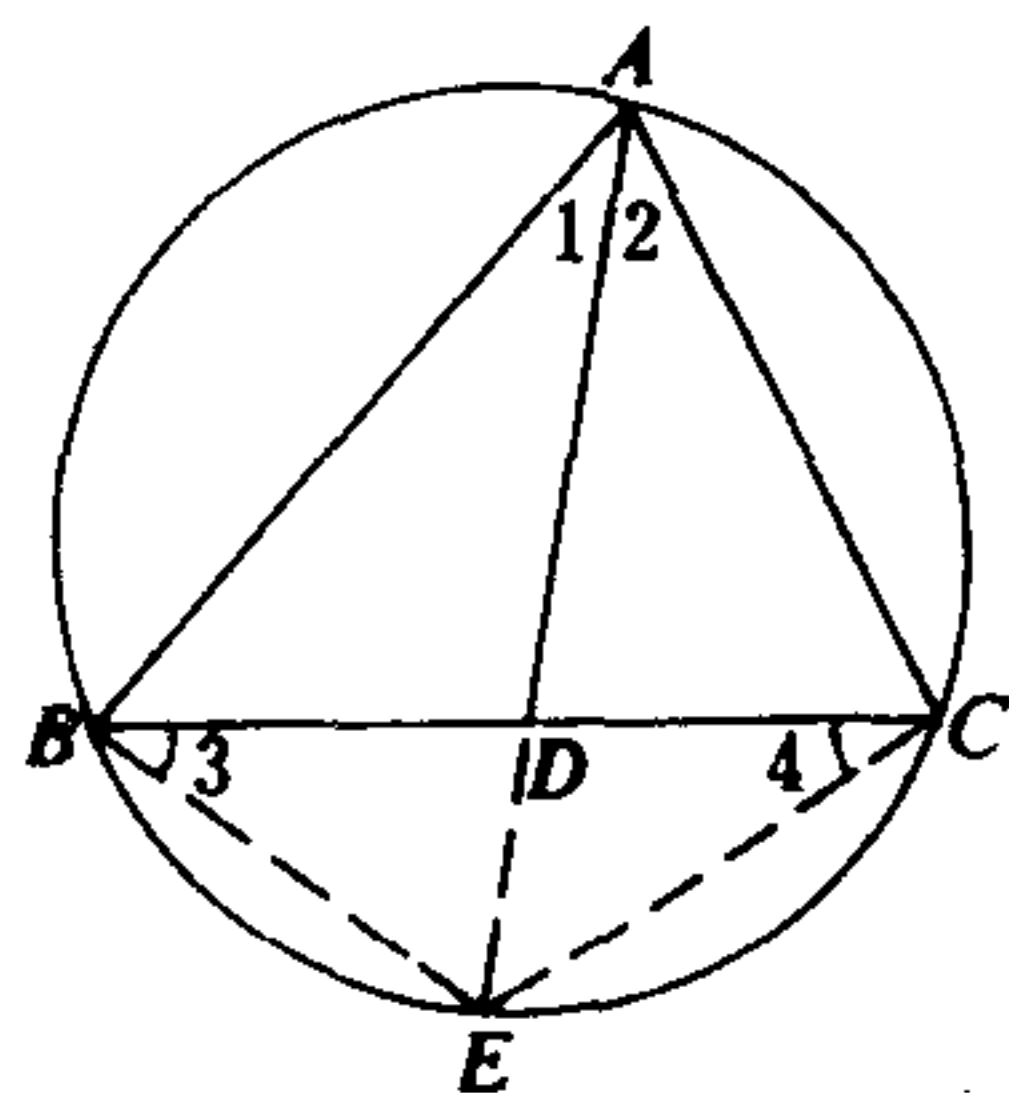


图 4.13

(5) 如图 4.14, 过 A 作 $AE \perp AD$, 设 B, C 在 AE 上的射影为 E, F , 由平行线分线段成比例定理知 $\frac{BD}{DC} = \frac{EA}{AF}$; 又 $\triangle BEA \sim \triangle CFA$, 所以 $\frac{AB}{AC} = \frac{EA}{AF}$. 故有 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

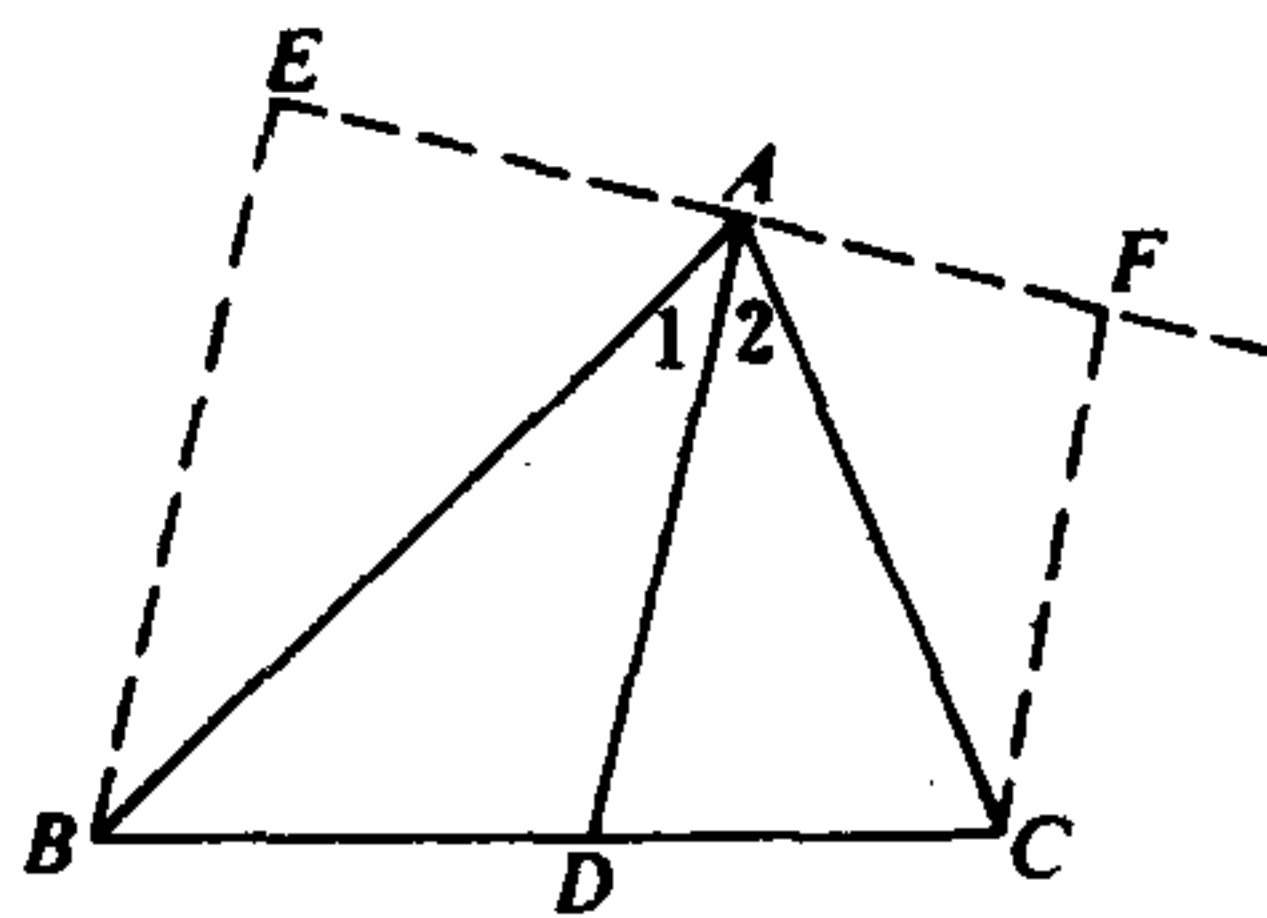


图 4.14

4.6 演变出的新问题

下面我们对外角平分线性质定理给出直接证明.

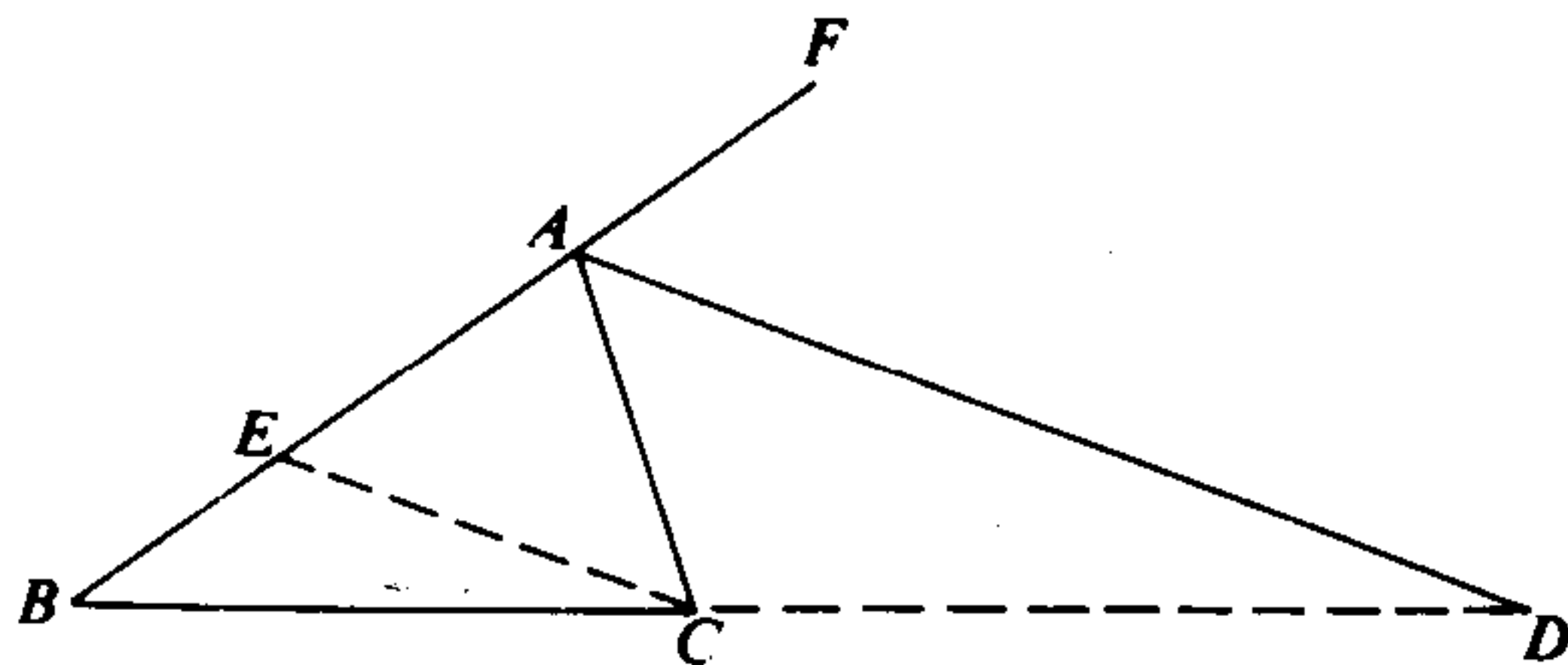


图 4.15

如图 4.15, 已知 $\triangle ABC$ 中, AD 是外角 $\angle CAF$ 的角平分线, AD 交 BC 的延长线于 D . 求证 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

证 过 C 作 $CE \parallel DA$, 交 AB 于 E , 则 $\frac{BE}{AE} = \frac{BC}{DC}$. 由 $\frac{BE}{AE} + 1 = \frac{BC}{DC} + 1$ 得 $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC}$. $\because \angle CEA = \angle FAD = \angle DAC = \angle ACE, \therefore AE = AC$. 故有 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

我们已经反复证明了三角形平分线性质定理, 那么, 其逆命题是否存在呢?

定理 4.2 若三角形的一边上有一点将这边分为两部分, 而此两部分之比等于两邻边之比, 则此点与它所在边所对顶点的连线, 必平分此顶角.

如图 4.1, 已知 D 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的一点, 且有 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. 求证 DA 平分 $\angle BAC$.

证 连结 DA , 过 C 作 $CE \parallel DA$, 交 BA 的延长线于 E , 则 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AE}$, $\angle 1 = \angle AEC$, $\angle 2 = \angle ACE$.

又 $\because \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}, \therefore AC = AE$. 于是 $\angle AEC = \angle ACE$, 故 $\angle 1 = \angle 2$, 即 DA 平分 $\angle BAC$.

如图 4.15, 同理可证 DA 平分 $\angle FAC$.

如图 4.16, 若把 B, C 视为两个定点, BC 为定长, $\angle BAC$ 的平分线 DA 在 BC 上的点 D 称为线段 BC 的内分点, $\angle FAC$ 的平分线 $D'A$ 在 BC 延长线上的点 D' 称为线段 BC 的外分点. 设 $\frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}$, 由上述得知

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C} = \frac{m}{n}.$$

若把 A 视为动点, 当 A 移至 D 或 D' 时, 它到两定点 B, C 的距离之比值均等于 $\frac{m}{n}$. 这就启发我们提出如下基本轨迹问题:
求距两定点距离之比为定比的点的轨迹.

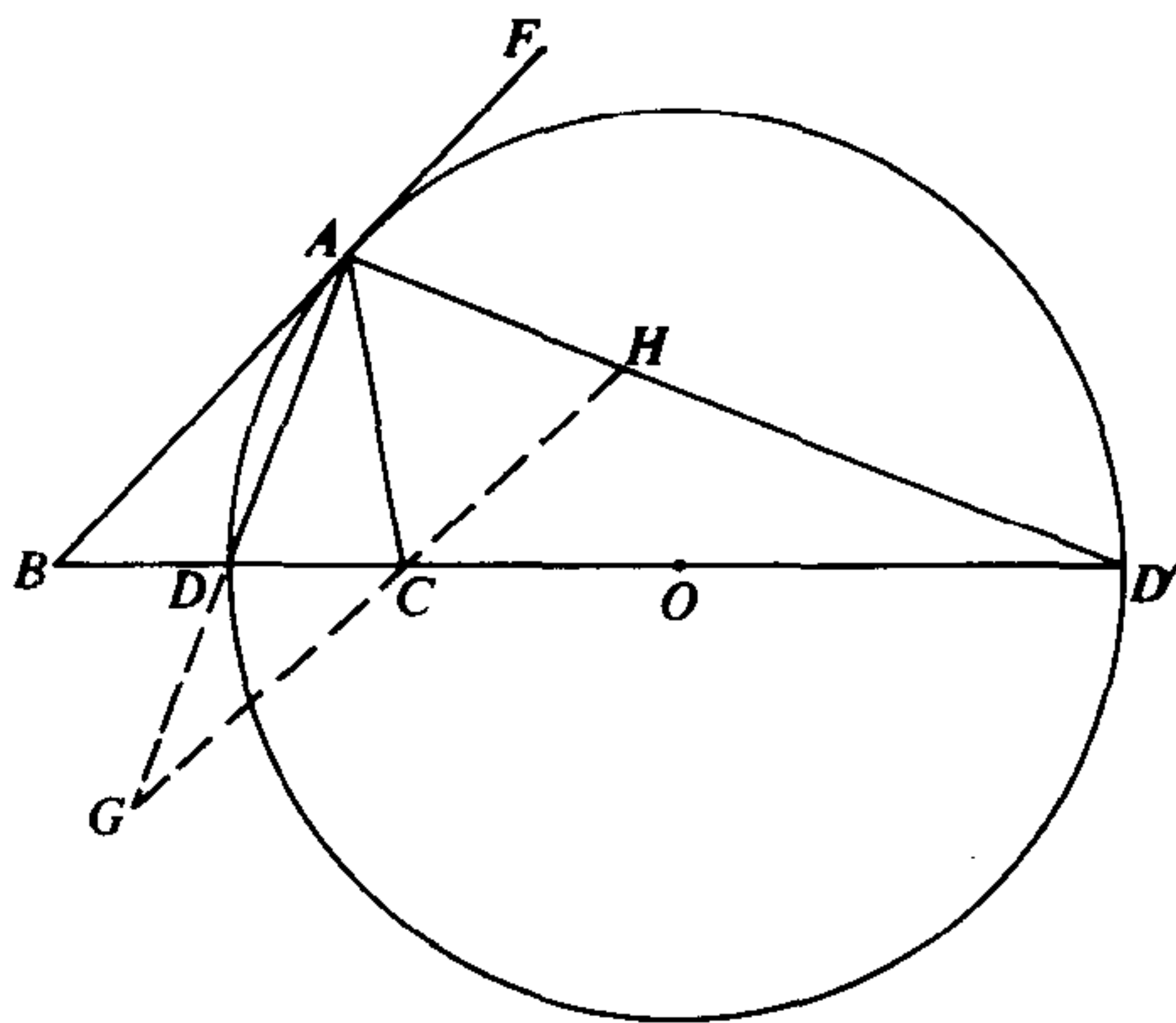


图 4.16

我们知道,点 D, D' 均为轨迹上的点. 因为 A, D, D' 三点不在一条直线上, 而平面几何的轨迹不是直线或线段, 就是圆或圆弧, 故可猜想点 A 的轨迹为一个圆. 由于 D 与 D' 为线段 BC 的内外分点, DA 与 $D'A$ 为 $\angle A$ 之内外角平分线, 故有 $\angle BAD = \angle DAC, \angle CAD' = \angle D'AF$. 而

$$\angle BAD + \angle DAC + \angle CAD' + \angle D'AF = 180^\circ,$$

于是有

$$\angle DAD' = \angle DAC + \angle CAD' = 90^\circ.$$

故知 DD' 为此圆的直径. 这样我们就得到如下作法.

取线段 BC 之内外分点 D, D' , 且使 $\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C} = \frac{m}{n}$, 以 DD' 为直径作圆, 则此圆即为所求之轨迹(图 4.16). 有如下轨迹定理.

定理 4.3 一动点至两定点距离之比等于一个定比(不等于 1), 这两个定点之间的线段按定比内分和外分, 则此动点的轨迹, 是以这两个内外分点为直径所作之圆.

证 如图 4.16, 设 A 为适合条件的动点, 连结 AB, AC , 则 $\frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}$.

$$\therefore \frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C} = \frac{m}{n},$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C} = \frac{m}{n}.$$

连结 AD, AD' , 根据定理 4.2 可知, AD 为 $\angle BAC$ 的平分线, AD' 为 $\angle CAF$ 的平分线, 于是 $\angle DAD' = 90^\circ$, 故点 A 在以 DD' 为直径的圆上.

在 DD' 为直径的圆上任取一点 A , 连结 AB, AC, AD, AD' . 过 C 作 $GH \parallel AB$, 交 AD 的延长线于 G , 交 AD' 于 H , 则 $\triangle BDA \sim \triangle CDG$, 故有 $\frac{AB}{CG} = \frac{DB}{DC} = \frac{m}{n}$; 又 $\because \triangle CHD' \sim \triangle BAD'$, $\therefore \frac{AB}{HC} = \frac{D'B}{D'C} = \frac{m}{n}$. 于是 $\frac{AB}{CG} = \frac{AB}{HC}$, 故 $CG = HC$. 又 $\because \angle DAD' = 90^\circ$, $\therefore AC = \frac{1}{2}GH = HC$. 故 $\frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}$. 这就证明了点 A 适合条件.

这个定理系古希腊数学家阿波罗尼奥斯(约公元前262~约前190)在总结前人经验的基础上予以证明的, 故这个轨迹定理又称为阿氏圆定理.

如果 $m=n$, 则点 A 的轨迹为 BC 的中垂线.

现在我们来探索在定理 4.3 的条件下, 还可以推出什么结论. 如图 4.16, 设圆心为 O , 则有 $OA = OD = OD'$. 由题设条件知 $\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C}$, 所以有 $\frac{D'B}{DB} = \frac{D'C}{DC}$, 即

$$\frac{BO + DO}{BO - DO} = \frac{D'B}{DB} = \frac{D'C}{DC} = \frac{DO + CO}{DO - CO},$$

故有 $\frac{BO}{DO} = \frac{DO}{CO}$, $DO^2 = BO \cdot CO$. 于是我们得到如下结论:

结论 4.1 如图 4.16, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 的内、外角平分线交 BC 及其延长线于 D, D' , O 为 DD' 的中点, 则有 $OD^2 = OB \cdot OC$.

在定理 4.3 中, 如果我们将 $\triangle ABC$ 特殊化, 比如 $\angle ACB = 90^\circ$, 这时有 $\angle CAD' + \angle AD'C = 90^\circ$, 又 $\angle CAD' + \angle CAD = 90^\circ$, 故 $\angle AD'C = \angle CAD = \angle DAB$. 于是 $\triangle ABD \sim$

$\triangle D'BA$. 因此 $\frac{AB}{DB} = \frac{D'B}{AB}$, 即

$$DB = \frac{AB^2}{D'B}. \quad (4.1)$$

又由已知 $\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C}$, 即

$$\frac{DC}{D'C} = \frac{DB}{D'B}. \quad (4.2)$$

将(4.1)代入(4.2), 得

$$\frac{DC}{D'C} = \frac{AB^2}{D'B^2}.$$

这样一来, 我们又有如下结果.

结论 4.2 如图 4.16, $DA, D'A$ 分别为 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的内、外角平分线, 当 $\angle ACB = 90^\circ$ 时, 则有

$$\frac{DC}{D'C} = \frac{AB^2}{D'B^2}.$$

在结论 2 的推导过程中, 我们知道 $\angle BAD = \angle AD'C = \angle CAD$, 于是得知 BA 切圆 O 于 A . 反过来, 若 BA 切圆 O 于 A , $\angle ACB = 90^\circ$ (可换一种说法), DD' 为圆的直径 (换一种说法), 是否可推出 $\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C}$ 呢? 经推证有如下结果.

结论 4.3 如图 4.17, 自圆 O 外一点 B 向圆 O 作两条切线 BA, BE , 切点分别为 A, E , 若弦 AE 交过 B 之中心线 BD' 于 C , 则 $\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C}$.

证 $\because DD'$ 为圆的直径, $\therefore \angle DAD' = 90^\circ$. $\because AC \perp DD'$, $\therefore \angle DAE = \angle D'$. 又 $\because \angle BAD = \angle D'$, $\therefore \angle BAD = \angle DAE = \angle DAC$. 故有 $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

又 $\because \angle DAD' = 90^\circ, \therefore$
 $D'A$ 为 $\angle BAC$ 的外角平分线,
 故 $\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$.

由上所述推知 $\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C}$.

前面我们曾用正弦定理的知识通过等比代换法证明了三角形内角平分线性质定理, 运用这一方法很容易将此性质定理

予以拓广. 如图 4.18, 在 $\triangle ABC$ 中, 设 $\angle BAD = \alpha, \angle DAC = \beta$, 在 $\triangle ABD$ 中,

$$\frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \angle ADB},$$

在 $\triangle ADC$ 中,

$$\frac{DC}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin \angle ADC}.$$

$$\because \sin \angle ADB = \sin \angle ADC,$$

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{AB \sin \alpha}{AC \sin \beta}.$$

于是有如下结论.

结论 4.4 在 $\triangle ABC$ 中, D 为边 BC 上的一点, 设 $\angle BAD = \alpha, \angle DAC = \beta$, 则有

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB \sin \alpha}{AC \sin \beta}.$$

特别地, 当 $\alpha = \beta$ 时, 这就是三角形内角平分线性质定理.

在探讨三角形角平分线性质定理的不同证法的过程中, 我们不断地转换看问题的角度, 于是从一种证明思路又演变

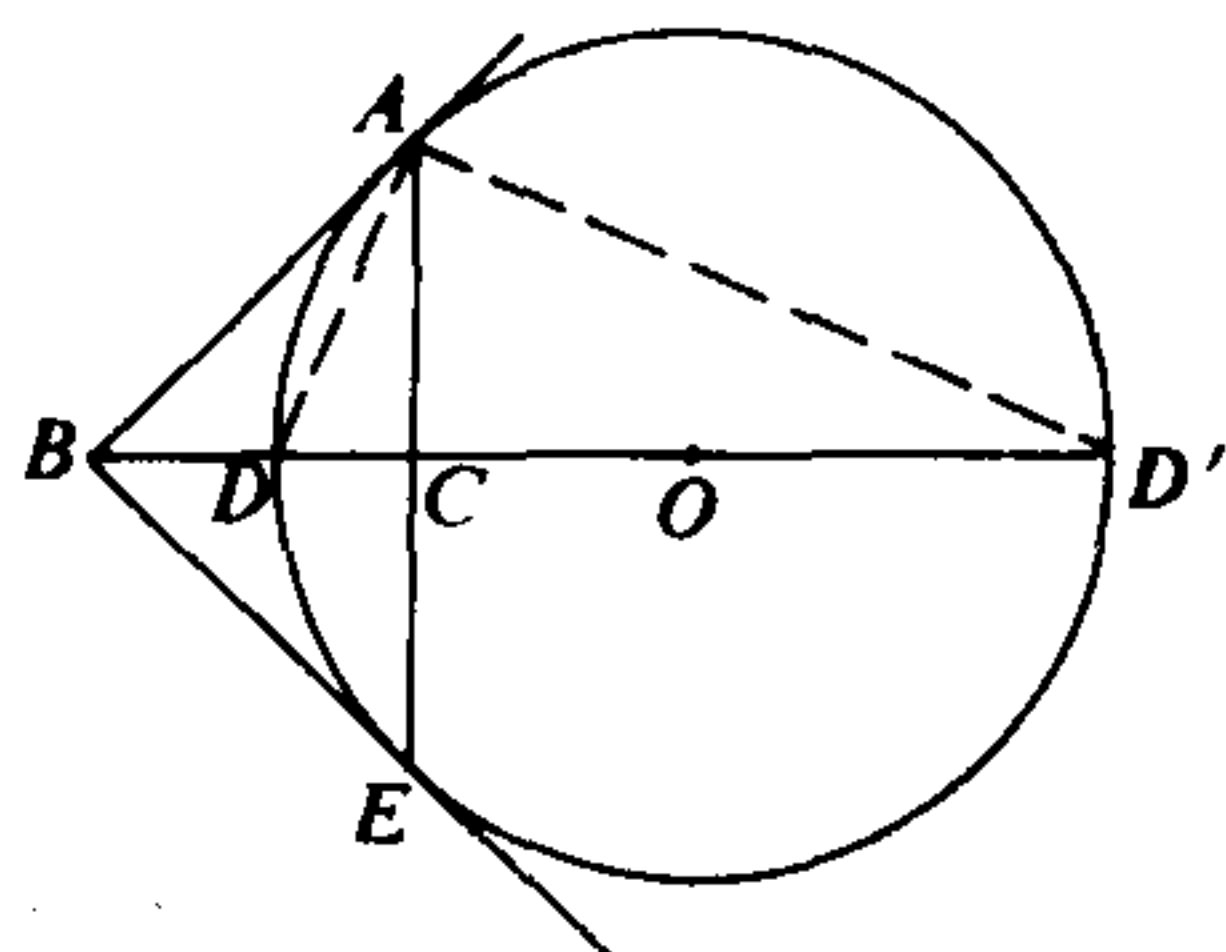


图 4.17

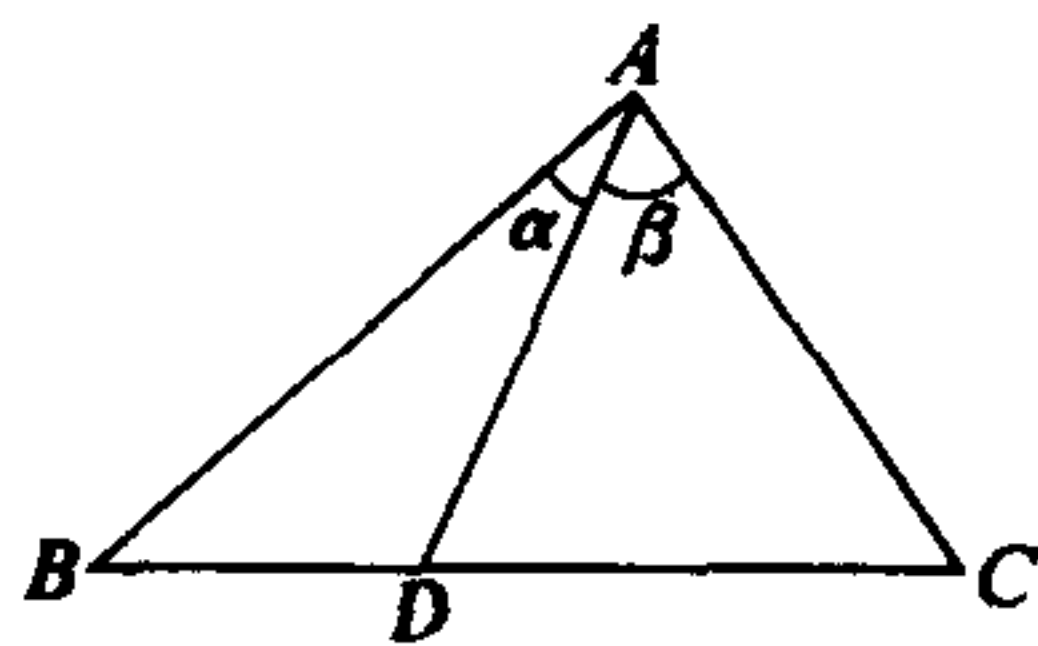


图 4.18

出另一种证明思路,从而获得了多种证明方法.同时在证明过程中,我们通过特殊化、一般化、逆向思维,又提出了一些新的问题,获得了一些新的成果,这正是我们的数学思维处在动态中的结果.

习 题 4

1. 设 $\triangle ABC$ 底边的中点为 D , $\angle ADB$, $\angle ADC$ 的平分线,分别与 AB , AC 交于点 E , F . 求证 $EF \parallel BC$.

2. 延长题1中的 ED , FD ,与 AB , AC 的延长线分别相交于 E' , F' . 求证 $E'F' \parallel BC$.

3. $\triangle ABC$ 中 $\angle B$, $\angle C$ 的平分线,分别与其对边 AC , AB 相交于 D , E . 证明:若 $ED \parallel BC$,则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

4. 试证:若四边形 $ABCD$ 中 $\angle A$, $\angle C$ 的平分线,相交于对角线 BD 之上,则 $\angle B$, $\angle D$ 的平分线,亦必相交于对角线 AC 之上.

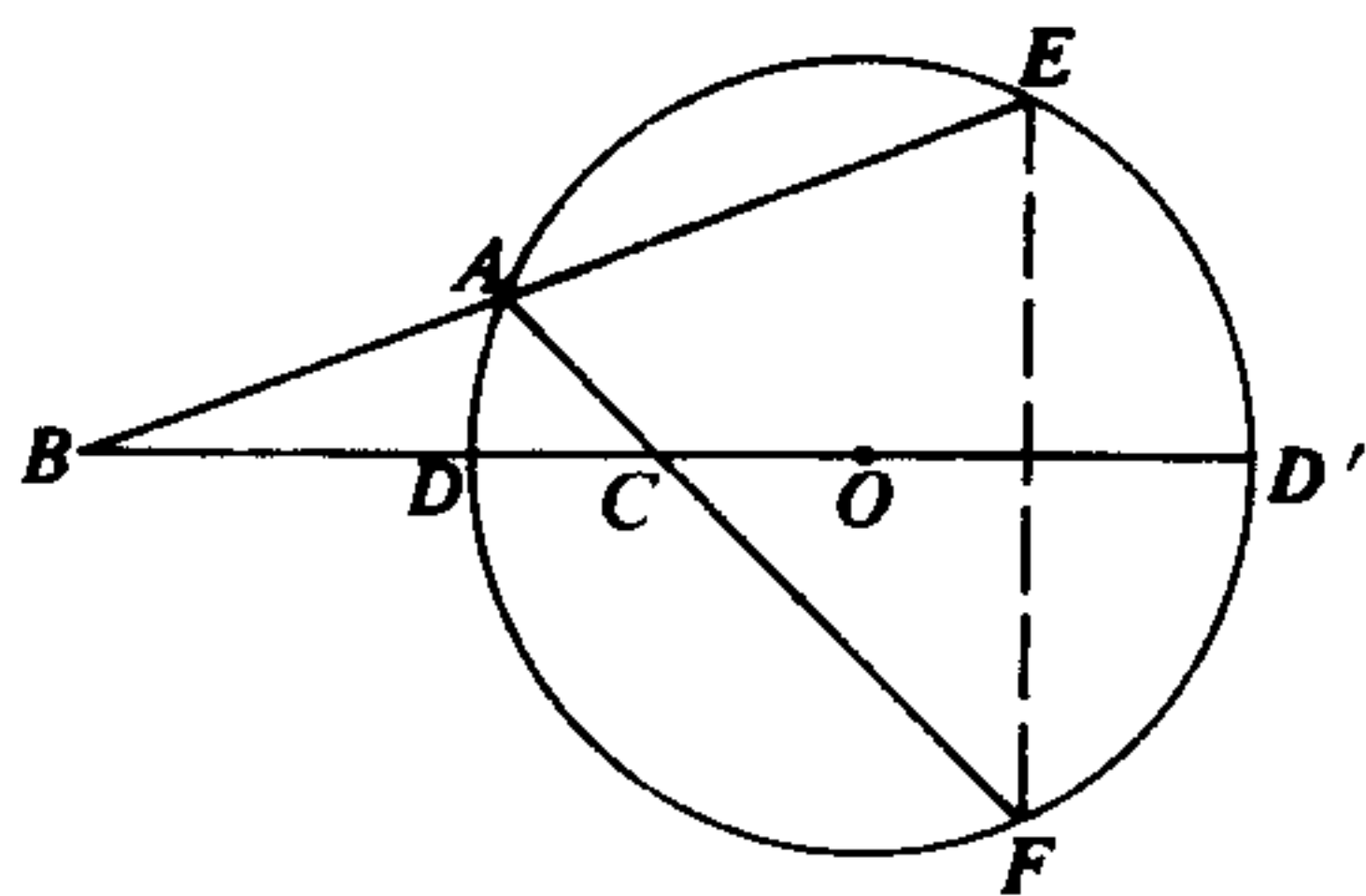


图 4.19

5. 如图 4.19,从圆 O 外的点 B 作割线,与圆周交于 A , E ,又从 B 作通过圆心 O 的直线,与圆周交于 D , D' . F 为点 E 关于直径 DD' 的对称点,连结 AF ,与 DD' 交于 C . 求证

$$\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C}.$$

分线的性质.

7. 于梯形 $ABCD$ 的两底 AD , BC 上各取 E , F ,分别内分 AD 为 EA , ED ,内分 BC 为 BF , CF ,且使 $2AE = ED$, $2BF = CF$. 证明:若梯形

6. 探索三角形三内角平

之边 $CD=2AB$, 则直线 EF 与 AB, CD 成等角.

8. 如图 4.16, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 的内、外角平分线交 BC 及其延长线于 D, D' , O 为 DD' 的中点, 探索 $OB:OC=?$

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C$ 的平分线交边 AB 于 D . 证明: 线段 CD 的长度小于边 CA 和 CB 的几何平均值. (匈牙利数学奥林匹克试题)

10. 设 $\triangle ABC$ 是以 AC 为底的等腰三角形, $\angle B$ 为锐角, CD 为 $\angle C$ 的平分线, 交 AB 于 D . 过 D 引直线 $DE \perp CD$, 且交 AC 的延长线于 E . 证明 $AD = \frac{1}{2} EC$.

5

比例线段问题与面积法

本章通过一道数学竞赛题,进一步阐述解决比例线段问题的一般思考方法,并对其中的面积证法作了较深入的探讨.最后对给定的命题作了一般化与特殊化的演变,提出了许多新的命题.

5.1 一道竞赛题

下面的命题,原是 1974 年加拿大中学生笛卡尔数学竞赛的一道试题.

命题 5.1 如图 5.1,过 $\triangle ABC$ 的顶点 B 任作一直线,与边 AC 及边 BC 的中线 AD 分别相交于点 E 及 P ,则

$$\frac{AP}{PD} = \frac{2AE}{EC}. \quad (5.1)$$

思路分析 通过图形可以看出,欲证的四

条线段皆出现在 $\triangle ADC$ 中,但对这四条线段不能直接应用定理,因此我们转而考虑 AP, PD, AE 可否运用“平行于三角形一边的直线与另两边(或另两边的延长线)相交,所截得的对应线段成比例”.为此,过 D 作 $DG \parallel PE$ 交 EC 于 G (图 5.2),则有 $\frac{AP}{PD} =$

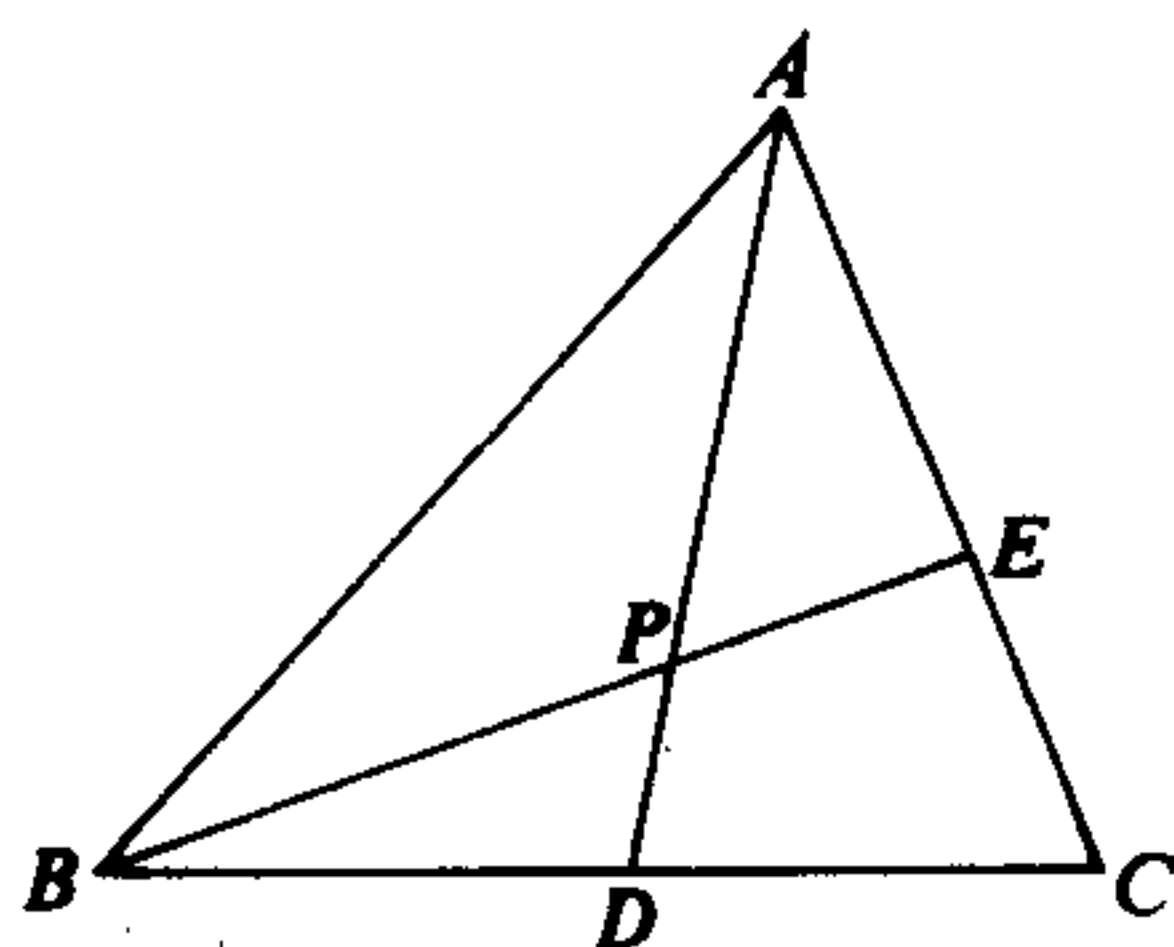


图 5.1

$\frac{AE}{EG}$.若能证明 $EG = \frac{1}{2}EC$,则(5.1)得证.因为在 $\triangle BCE$ 中, D 为 BC 的中点, $DG \parallel BE$,故由中位线定理得知 G 是 EC 的中点,即 $EG = \frac{1}{2}EC$.

反过来,若取 EC 中点 G ,则连结 DG ,可证 $DG \parallel PE$,从而又得到另一种证明方法,这种方法称折半法.

上述构作的相似形属于A型,也可构作X型的.如图 5.2,过 D 作 $DF \parallel EC$ 交 BE 于 F ,则 $\frac{AP}{PD} = \frac{AE}{DF}$.又在 $\triangle BCE$ 中, D 为 BC 中点, $DF \parallel EC$,故 $DF = \frac{1}{2}EC$.

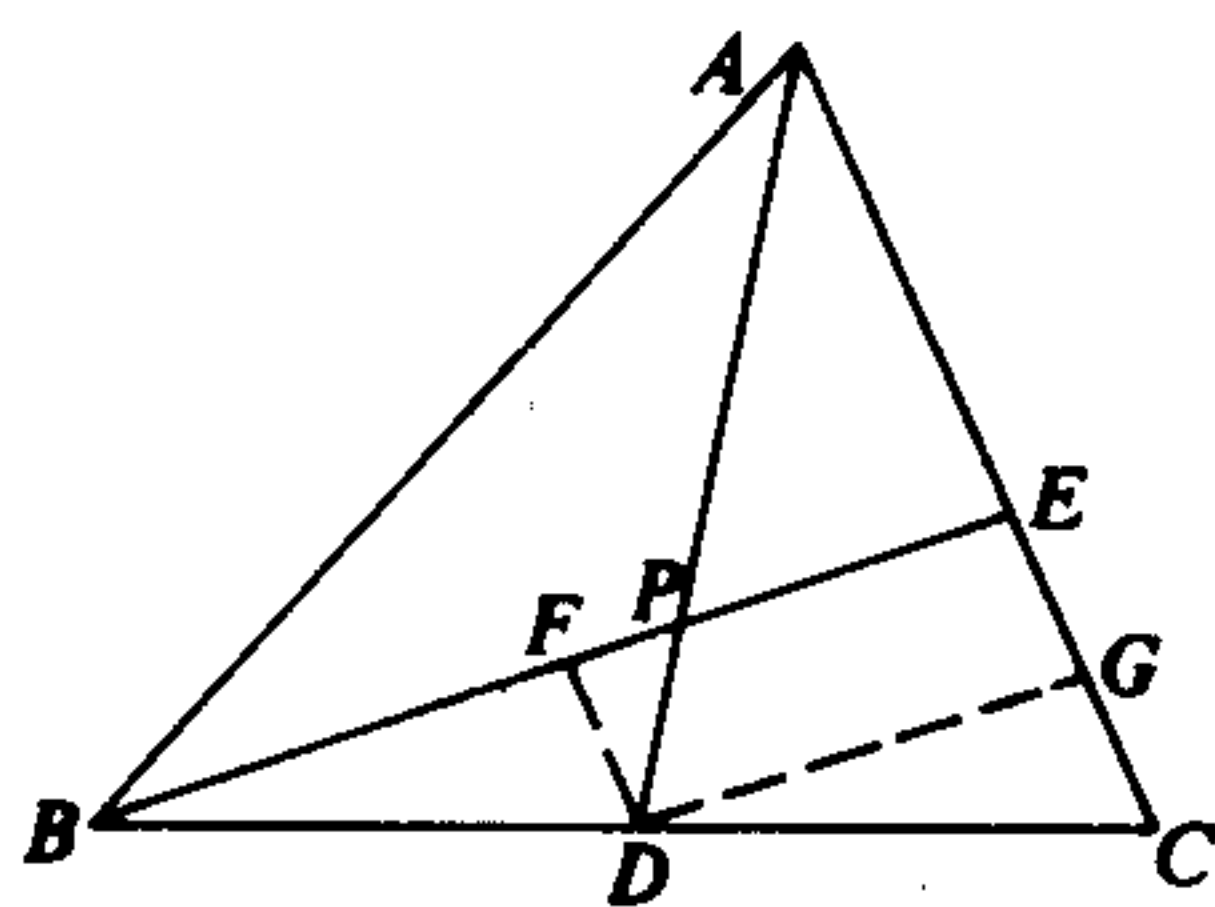


图 5.2

考虑三条线段 AP, AE, EC 亦可得到相应证法.

5.2 等量代换法

5.2.1 先考虑线段 AP, PD, AE

(1)如图 5.2,过 D 作 $DG \parallel PE$,交 AC 于 G ,以下证明如上节所述,故从略.

(2)如图 5.2,过 D 作 $DF \parallel CA$,交 BE 于 F ,证明从略.

5.2.2 先考虑线段 AP, AE, EC

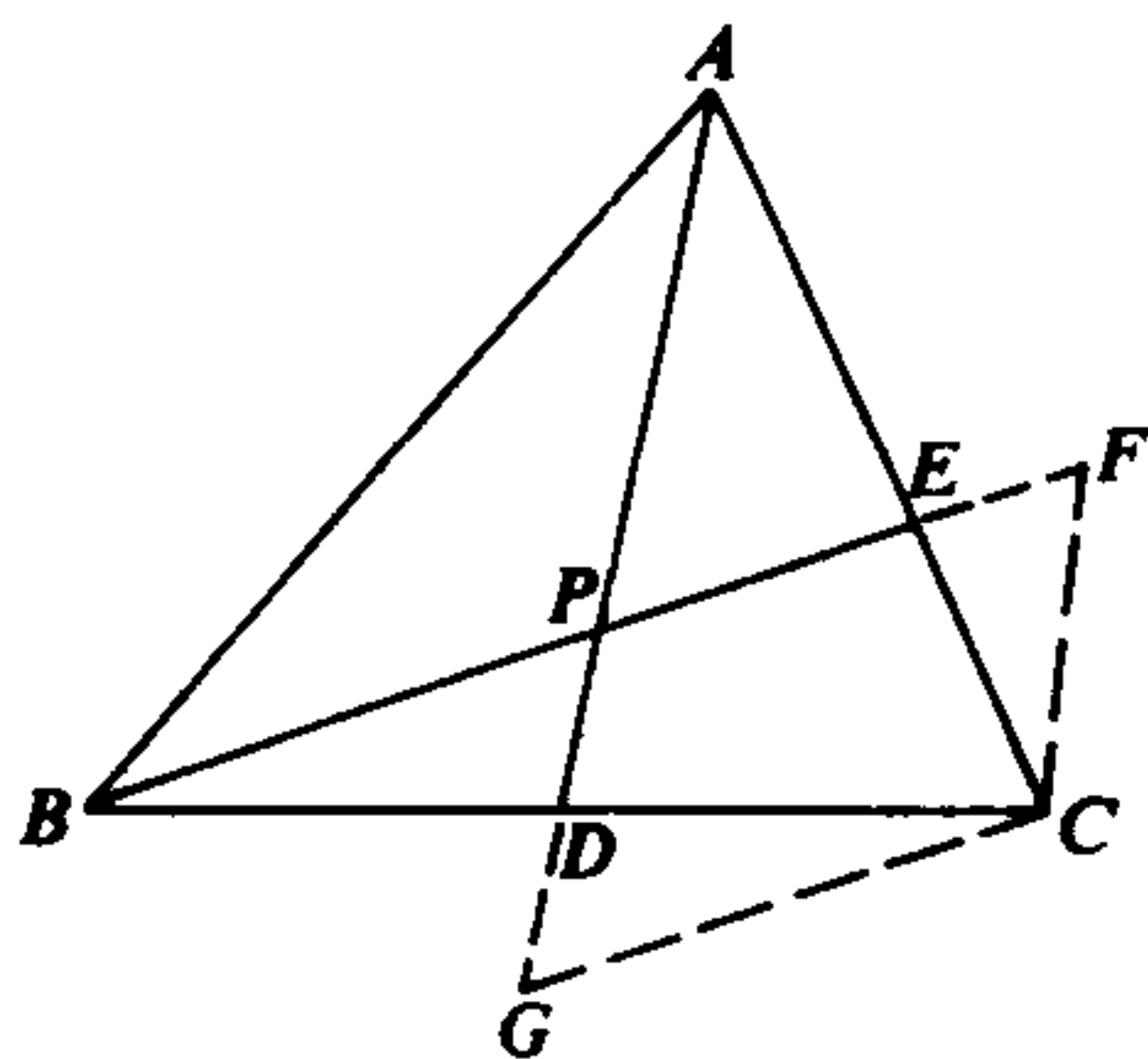


图 5.3

(1)如图 5.3,过 C 作 $CF \parallel DA$,交 BE 延长线于 F ,则有 $\frac{AP}{CF} = \frac{AE}{EC}$. 由中位线定理知 $CF = 2PD$,代入上式,变形即得(5.1).

(2)如图 5.3,过 C 作 $CG \parallel EB$,交 AD 的延长线于 G ,则有 $\frac{AP}{PG} = \frac{AE}{EC}$. 而 $\triangle BDP \cong$

$\triangle CDG$,故 $PG = 2PD$,代入上式变形即得(5.1).

5.3 倍折法

5.3.1 加倍法

如图 5.3,延长 AD 至 G ,使 $PG = 2PD$,连结 CG ,于是 $\triangle BPD \cong \triangle CGD$,故 $\angle PBD = \angle GCD$. 于是 $CG \parallel EB$,即 $CG \parallel PE$,所以 $\frac{AP}{PG} = \frac{AE}{EC}$,即 $\frac{AP}{2PD} = \frac{AE}{EC}$,变形即得(5.1).

5.3.2 折半法

如图 5.2, 取 EC 的中点 G , 连结 DG . 又 D 是边 BC 的中点, 故 $DG \parallel BE$. 所以 $\frac{AP}{PD} = \frac{AE}{EG}$, 即 $\frac{AP}{PD} = \frac{AE}{\frac{1}{2}EC}$, 变形即得 (5.1).

5.4 等比代换法

将式 (5.1) 变形为 $\frac{AP}{2PD} = \frac{AE}{EC}$, 可视为采用加倍法的原因; 将 (5.1) 变形为 $\frac{AP}{PD} = \frac{AE}{\frac{1}{2}EC}$, 则可视为折半法取 EC 的中

点的契机. 按这种思路考虑, (5.1) 还可以变形为 $\frac{\frac{1}{2}AP}{PD} = \frac{AE}{EC}$, 这就是取 AP 的中点 G (图 5.4), 也就是将 AP 折半.

但将线段 AP 折半之后, GP, PD, AE, EC 四条线段既不处在两个相似三角形中, 也不能运用“平行线分线段成比例定理”, 因此我们将 $\frac{GP}{PD}$ 或 $\frac{AE}{EC}$ 等值转化为另外两条线段之比, 而使这两条线段与没有转化的两条线段处在两个相似三角形中, 或者能运用“平行线分线段成比例定理”, 从而使问题得到解决. 这里运用的是等比代换法.

式 (5.1) 中的 $2AE$, 就意味着将该线段加倍, 将 EA 延长至 G , 使 $GA = AE$ (图 5.6). 现考察四条线段 AP, PD, GE, EC , 将 $\frac{AP}{PD}$ 或 $\frac{GE}{EC}$ 等值转化, 使得我们能够运用已知的定理, 从

而使问题得以解决. 基于上述想法, 我们便获得了如下的证法.

5.4.1 线段折半

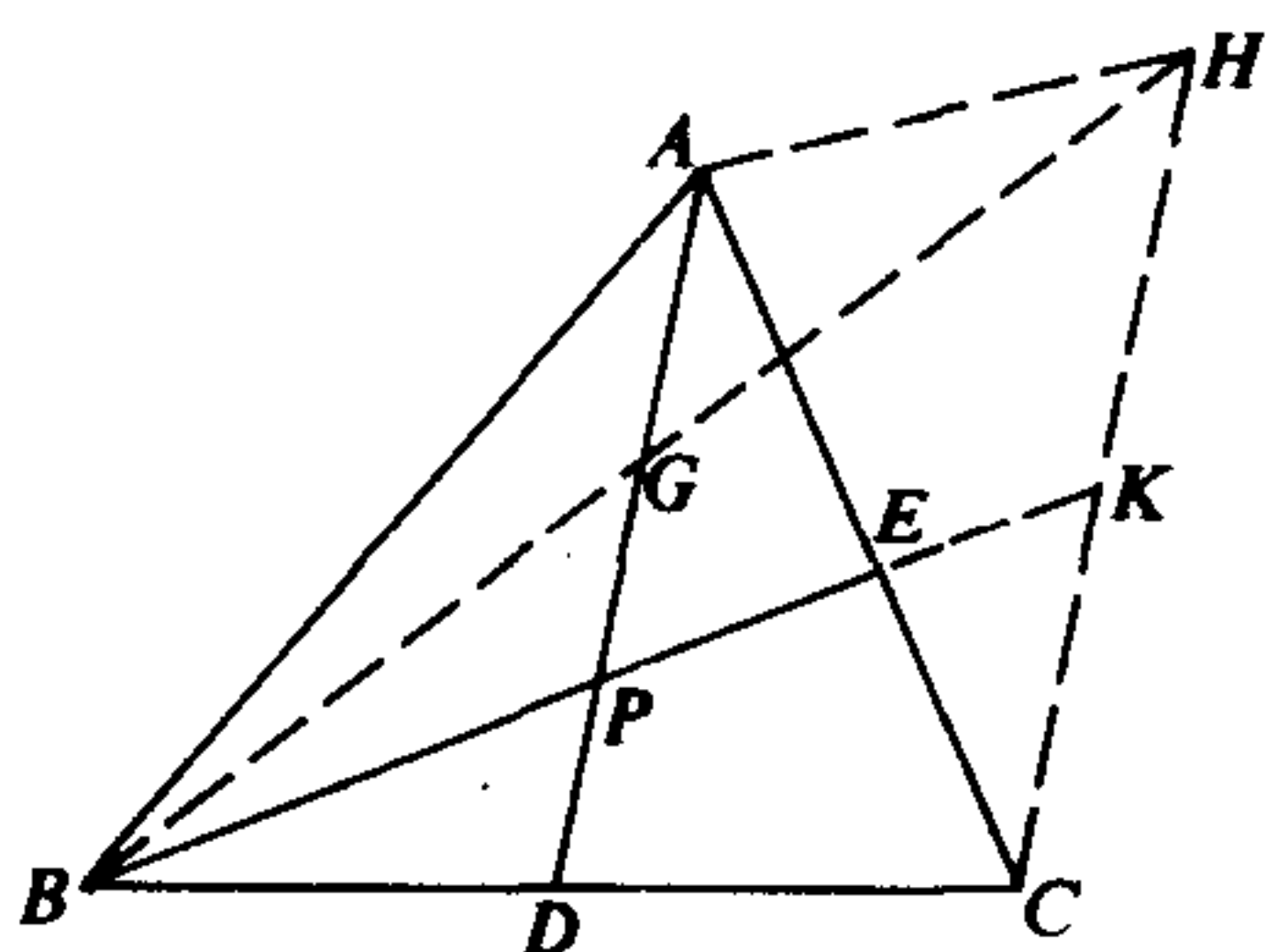


图 5.4

(1) 如图 5.4, 取 AP 的中点 G , 连结 BG , 过 C 作 $CH \parallel DA$, 分别与 BE , BG 的延长线相交于点 K, H , 连结 AH , 有 $\frac{GP}{HK} = \frac{BP}{BK} = \frac{PD}{KC}$, 故有 $\frac{GP}{PD} = \frac{HK}{KC}$. 由中位线定理知 $BG = GH$, 故有 $\triangle AGH \cong \triangle PGB$. 于是 $\angle AHG = \angle PBG$, 因而 $AH \parallel BK$. 所以 $\frac{AE}{EC} = \frac{HK}{KC}$, 故得 $\frac{GP}{PD} = \frac{AE}{EC}$, 即 $\frac{\frac{1}{2}AP}{PD} = \frac{AE}{EC}$. 变形即得 (5.1).

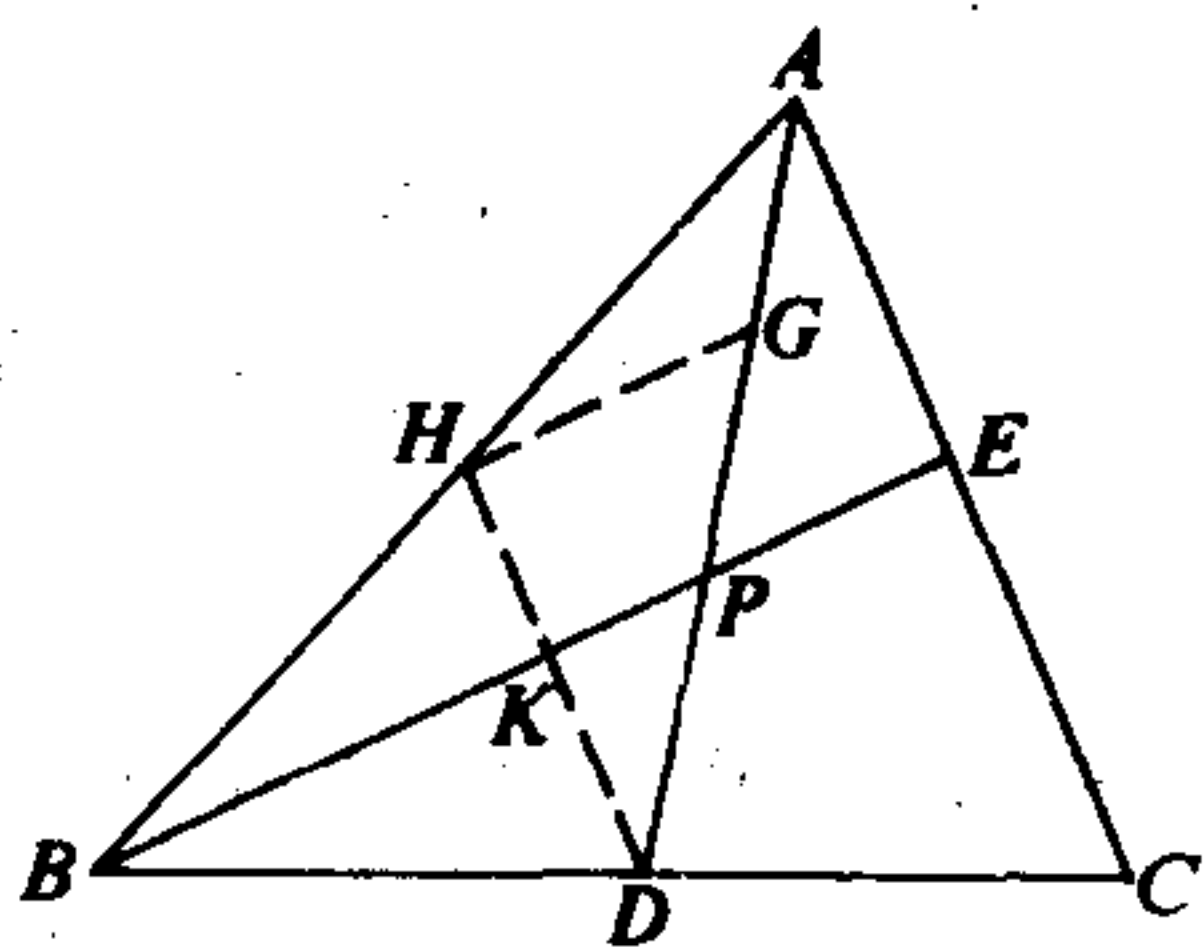


图 5.5

(2) 如图 5.5, 过点 D 作 $DH \parallel CA$, 分别与 BE, BA 交于 K, H , 取 AP 的中点 G , 连结 HG . $\because DH \parallel CA, \therefore \frac{AE}{EC} = \frac{HK}{KD}$. 由中位线定理知 $AH = HB$, 故 $HG \parallel BE$, 因此, $\frac{PG}{PD} =$

$\frac{HK}{KD}$. 故得 $\frac{PG}{PD} = \frac{AE}{EC}$, 即 $\frac{\frac{1}{2}AP}{PD} = \frac{AE}{EC}$, 变形即得 (5.1).

5.4.2 线段加倍

(1) 如图 5.6, 延长 EA 至 G , 使 $GA = AE$. 作 $CH \parallel DA$, 分别与 BE , BA 的延长线相交于 K , H , 连结 HG , 则 $\frac{AP}{PD} = \frac{HK}{KC}$. 由中位线定理知 $BA = AH$, 于是有 $\triangle AHG \cong \triangle ABE$, 从而 $\angle GHA = \angle EBA$, 故 $BK \parallel GH$. 由此推得 $\frac{GE}{EC} = \frac{HK}{KC}$. 从而 $\frac{AP}{PD} = \frac{GE}{EC}$, 即 $\frac{AP}{PD} = \frac{2AE}{EC}$.

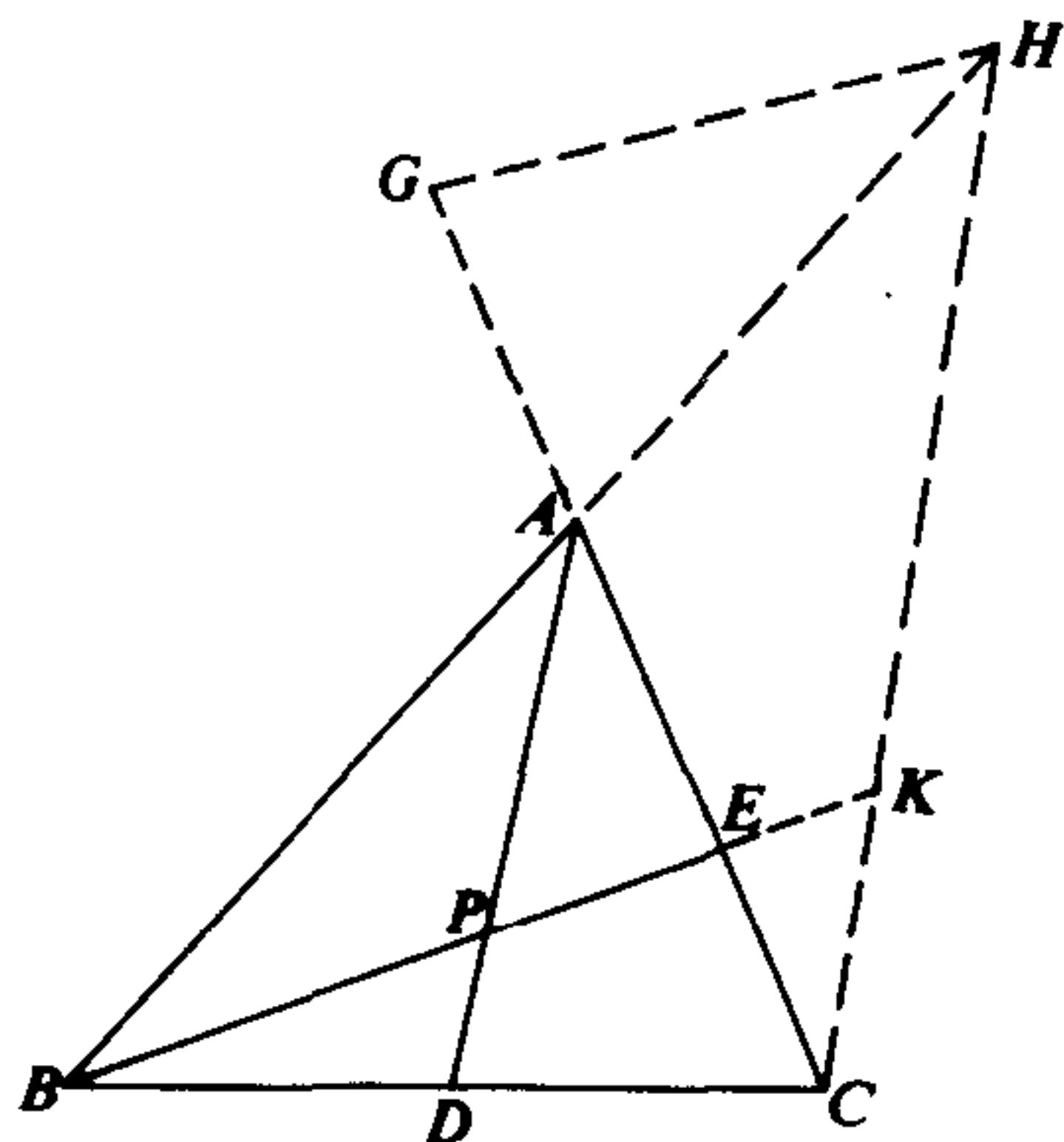


图 5.6

(2) 如图 5.7, 延长 EA 至 G , 使 $AG = AE$, 连结 BG . 过 D 作 $DH \parallel CG$, 分别与 BE , BG 交于 K , H , 则 $\frac{GE}{EC} = \frac{HK}{KD}$. 由中位线定理知 $AH \parallel EB$, 故 $\frac{AP}{PD} = \frac{HK}{KD}$. 从而 $\frac{AP}{PD} = \frac{GE}{EC}$, 亦即 $\frac{AP}{PD} = \frac{2AE}{EC}$.

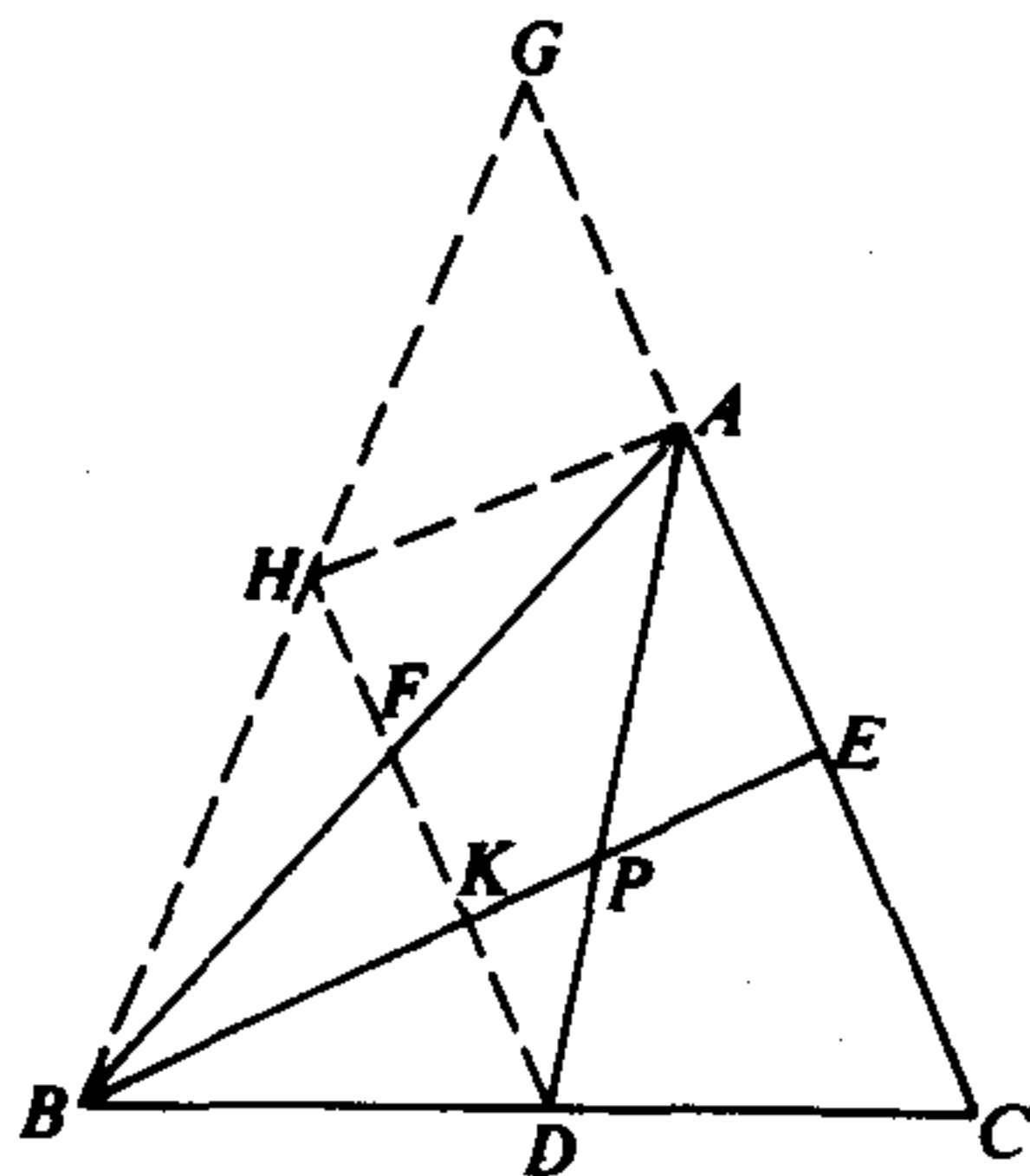


图 5.7

在图 5.7 中, 设 DH 与 BA 交于 F , 于是有 $HF = FK$. 在上面的证法中有 $\frac{AP}{PD} = \frac{HK}{KD}$, 即 $\frac{AP}{PD} = \frac{2FK}{KD}$. 这样就把原来证 $\frac{AP}{PD} = \frac{2AE}{EC}$ 转化为证 $\frac{AP}{PD} = \frac{2FK}{KD}$. 如果把图 5.7 中的 BG, CG, AH, FH, PE 去掉, 这时就把原来的问题转化成:

在 $\triangle ADB$ 中, 已知 DF 是边 AB 的中线, 过 B 任作一直线 BP , 分别交 DF, AD 于点 K, P , 则

$$\frac{AP}{PD} = \frac{2FK}{KD}.$$

这与原来的问题完全一样, 只不过现在的 $\triangle ADB$ 比原来的 $\triangle ABC$ 缩小了, 它可以看成是由原来的三角形变换而来的. 这样一来, 原问题有几种证法, 在此三角形中就有几种证法.

同样, 在图 5.6 中, $\triangle CHB$ 可以看成是由 $\triangle ABC$ 放大变换而得到的.

5.5 比值算法

上面通过式 (5.1) 的变形, 将线段加倍或折半, 从而得到问题的证法. 式 (5.1) 也可变形为

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{EC}{AE} = 2, \quad (5.2)$$

如果通过等比代换法能将线段之比由两比转化为一比, 而这一比值又是可求的, 那么问题也就解决了. 于是我们便获得了如下的比值算法.

(1) 如图 5.8, 过 A, D, C 分别作 AF, DG, CK , 交 BE 及

其延长线于 F, G, K , 且 $AF \parallel GD$
 $\parallel KC$, 则有

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AF}{DG}, \quad (5.3)$$

$$\frac{EC}{AE} = \frac{CK}{AF}. \quad (5.4)$$

(5.3) $\times$ (5.4) 得

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{EC}{AE} = \frac{CK}{DG}.$$

由中位线定理知 $DG = \frac{1}{2}CK$, 代入上式即得 (5.2).

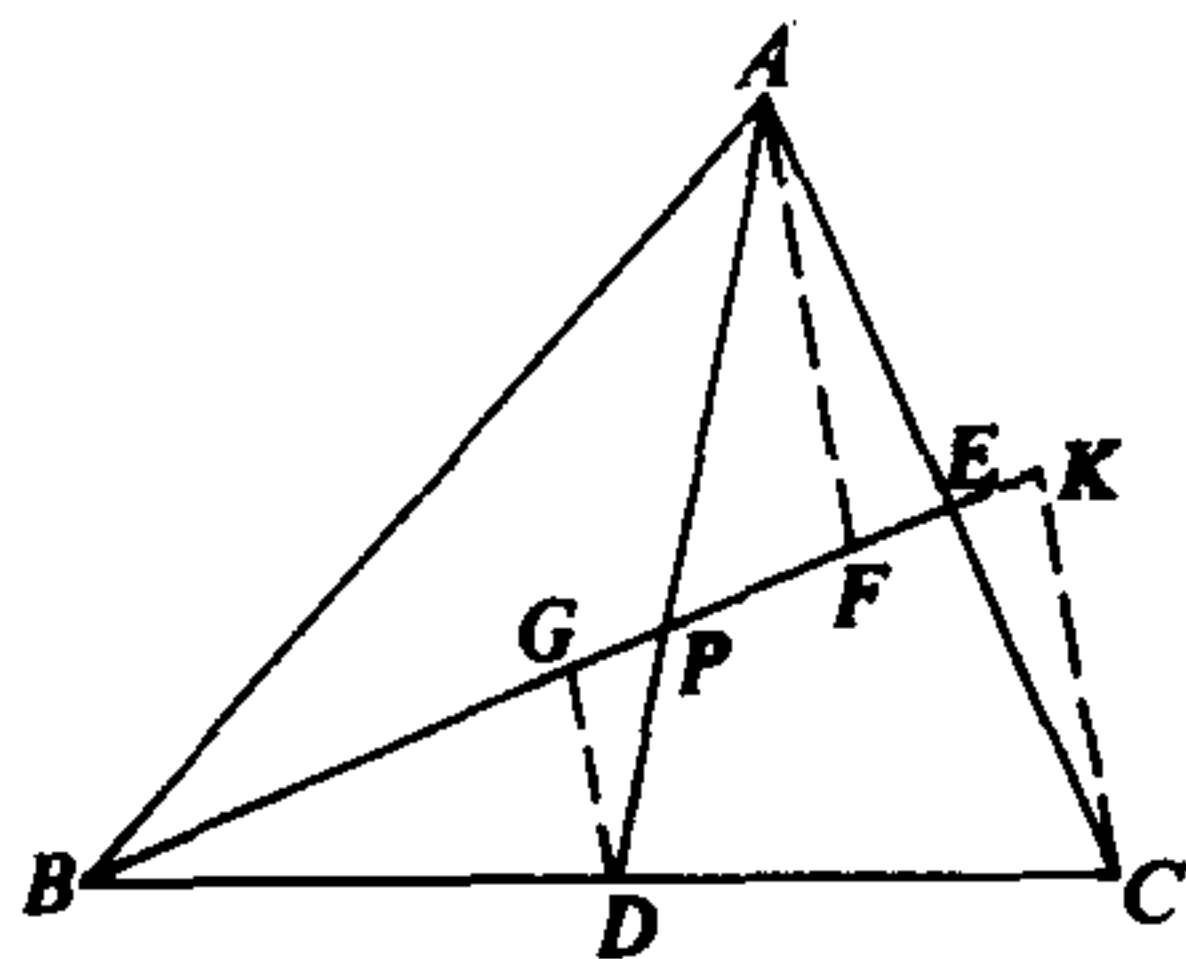


图 5.8

这是一个具有一般性的作辅助线的方法, 特别地, 当这些平行线处于特殊位置时, 就可得到前面和下面几种引辅助线的方法. 例如, 当 AF 与 AE 重合时, 就得到图 5.2 的 DF 线; 当 AF 与 AP 重合时, 就得到图 5.3 的 CF 线; 当 AF 与 AB 重合时, 就得到图 5.9 所引的辅助线; 当 $AF \parallel BC$ 时, 就得到图 5.10; 当 $AF \parallel BE$ 时, 就得到图 5.11; 当 $DG \parallel BE$ 时, 就得到图 5.2 中的 DG ; 当 $CK \parallel BE$ 时, 就得到图 5.3 中的 CG .

(2) 如图 5.9, 过 D, C 分别作 DG, CK , 与 BE 的延长线交于点 G, K , 且有 $DG \parallel CK \parallel BA$, 则有

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AB}{DG}, \quad (5.5)$$

$$\frac{EC}{AE} = \frac{CK}{AB}. \quad (5.6)$$

(5.5) $\times$ (5.6) 得

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{EC}{AE} = \frac{CK}{DG}.$$

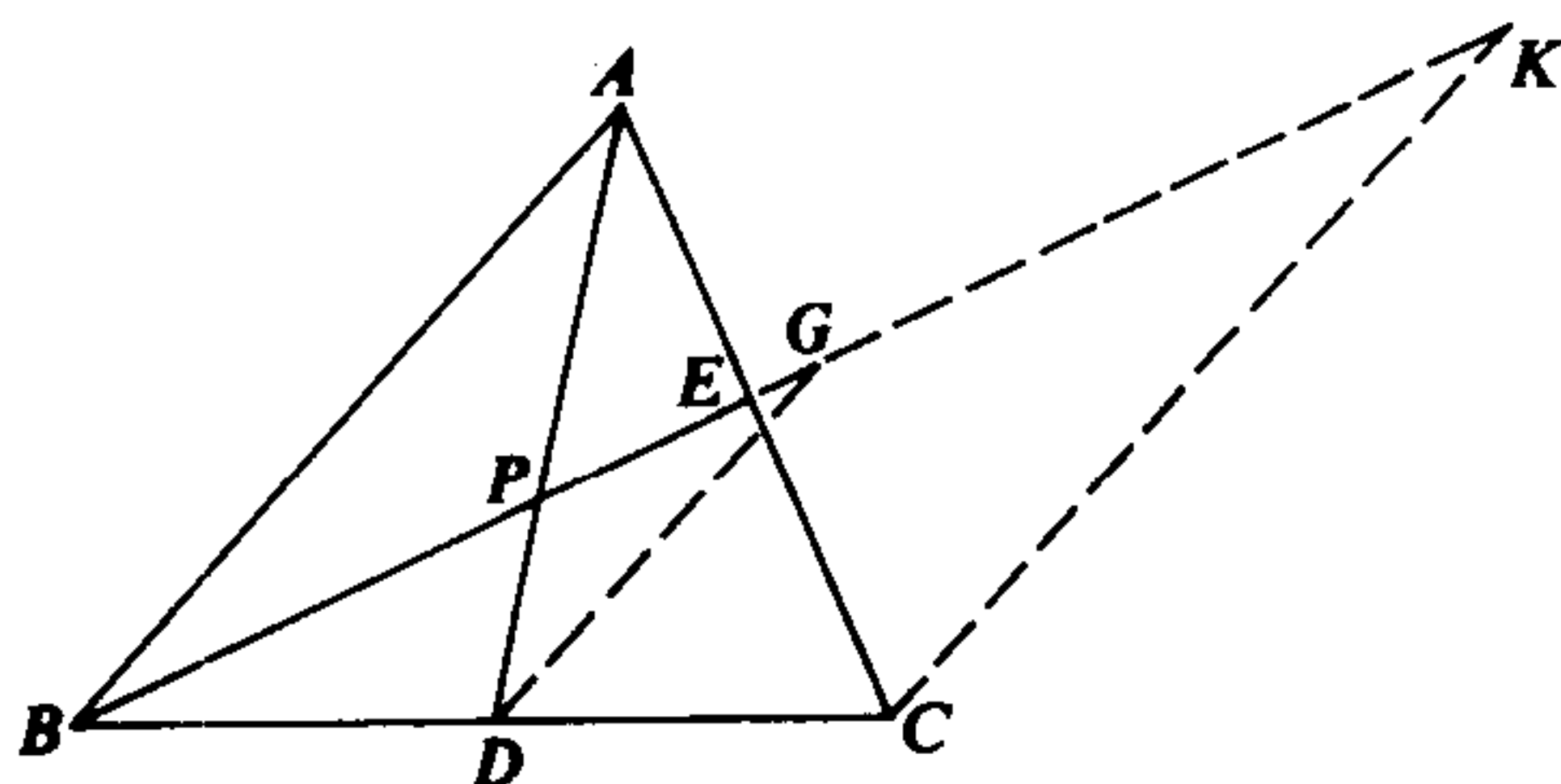


图 5.9

由中位线定理知 $CK = 2DG$, 代入上式即得 (5.2).

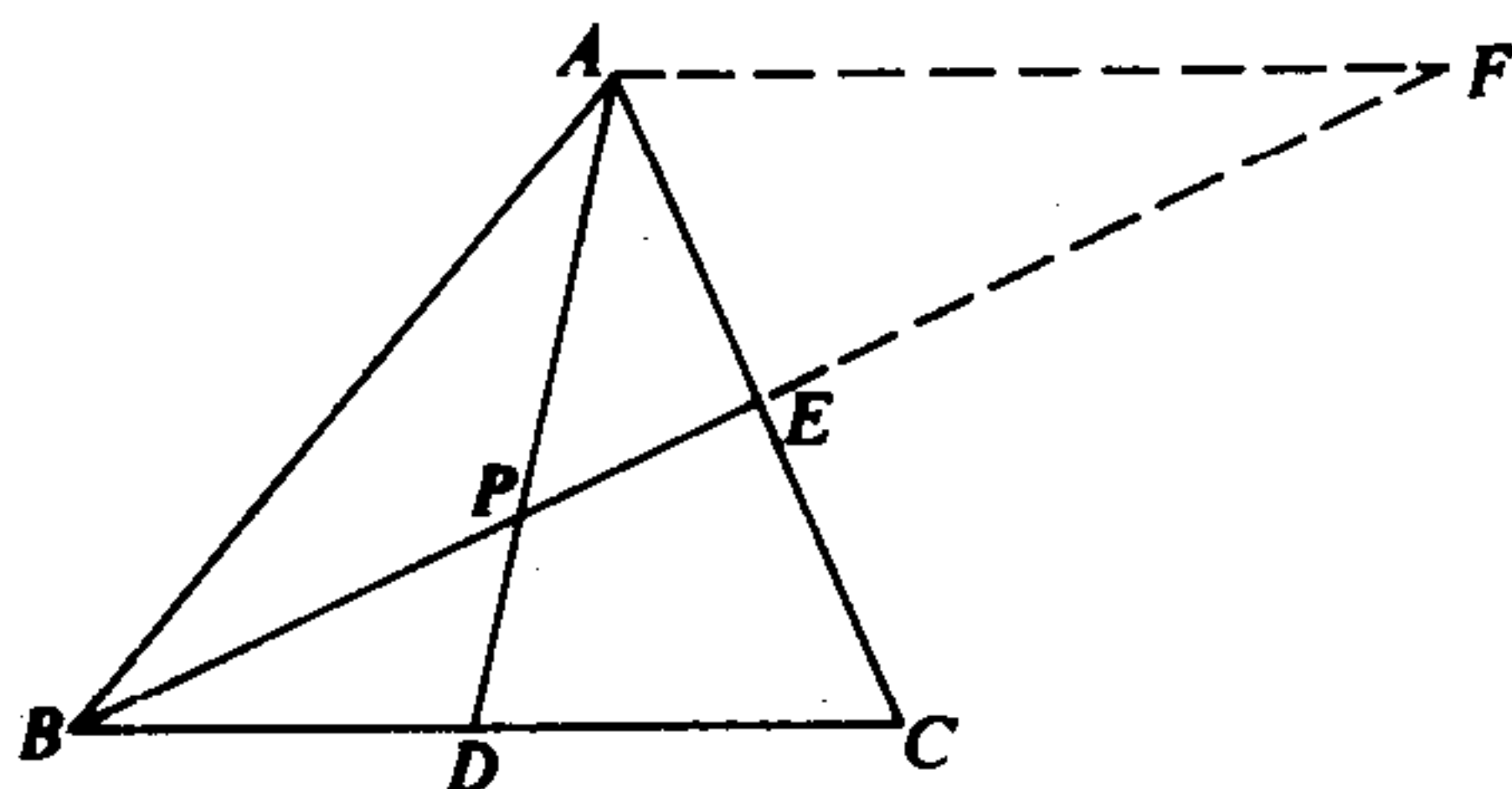


图 5.10

(3) 如图 5.10, 过 A 作 $AF \parallel BC$, 交 BE 的延长线于 F, 则有

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AF}{BD}, \quad (5.7)$$

$$\frac{EC}{AE} = \frac{BC}{AF}. \quad (5.8)$$

(5.7) $\times$ (5.8) 得

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{EC}{AE} = \frac{BC}{BD}.$$

而 $BC = 2BD$, 代入上式即得 (5.2).

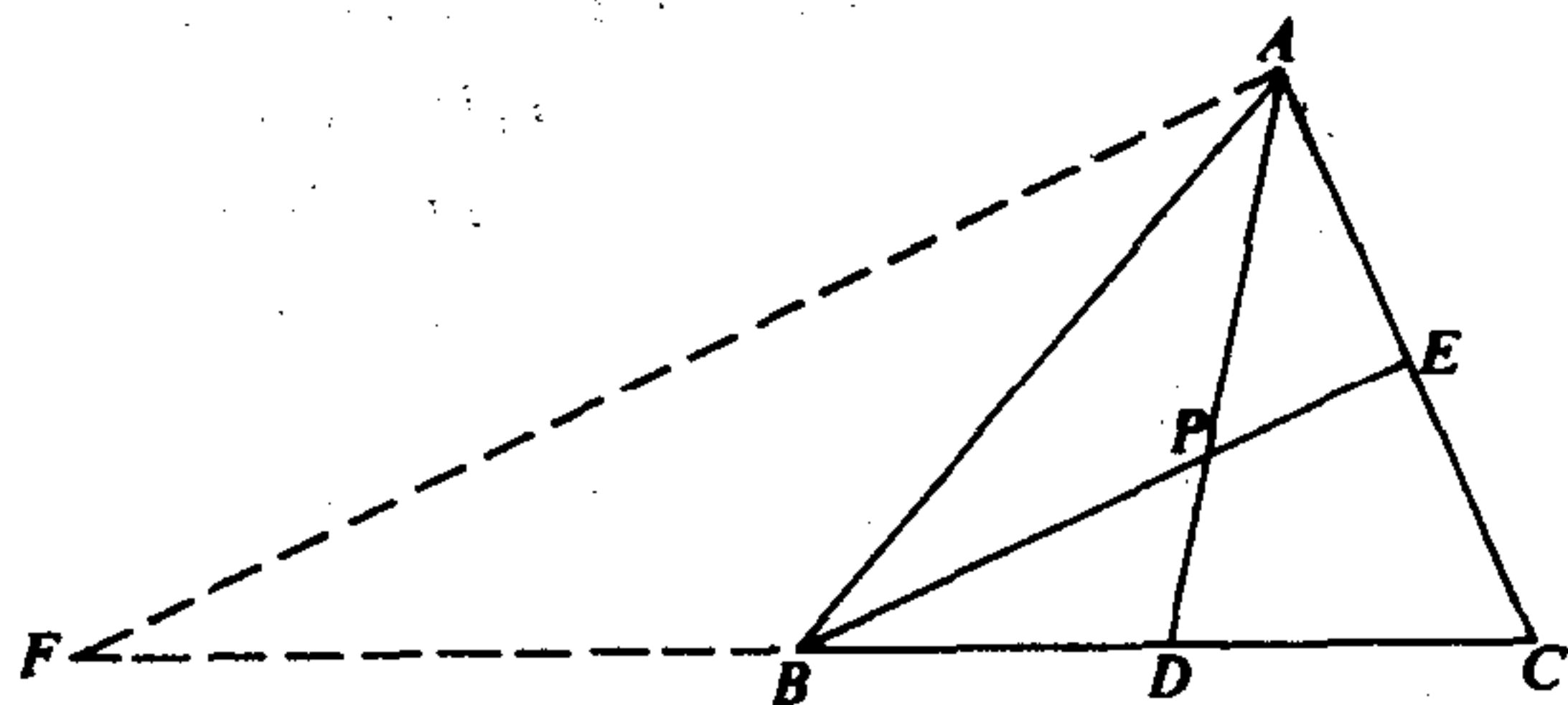


图 5.11

(4)如图 5.11,过 A 作 $AF \parallel EB$,与 CB 的延长线交于点 F ,则

$$\frac{AP}{PD} = \frac{FB}{BD}, \quad (5.9)$$

$$\frac{EC}{AE} = \frac{BC}{FB}. \quad (5.10)$$

(5.9) $\times$ (5.10) 得

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{EC}{AE} = \frac{BC}{BD}.$$

而 $BC = 2BD$,代入上式即得(5.2).

5.6 平行线法

上述证法中,有一个共同特点,就是通过图形中某些特殊的点,作平行于图形中某一条直线的平行线.基于这种想法,还可以通过点 E, P 作平行线.另外由图 5.7 可知, $DH \parallel CA$, $AH \parallel BE$,因此启示我们也可以通过图中两点作直线,分别平行于图中已知直线.这样便得到了平行线法.

5.6.1 过点 E 作平行线

(1)如图 5.12,过 E 作 $EG \parallel CB$,与 AD 交于 G ,则

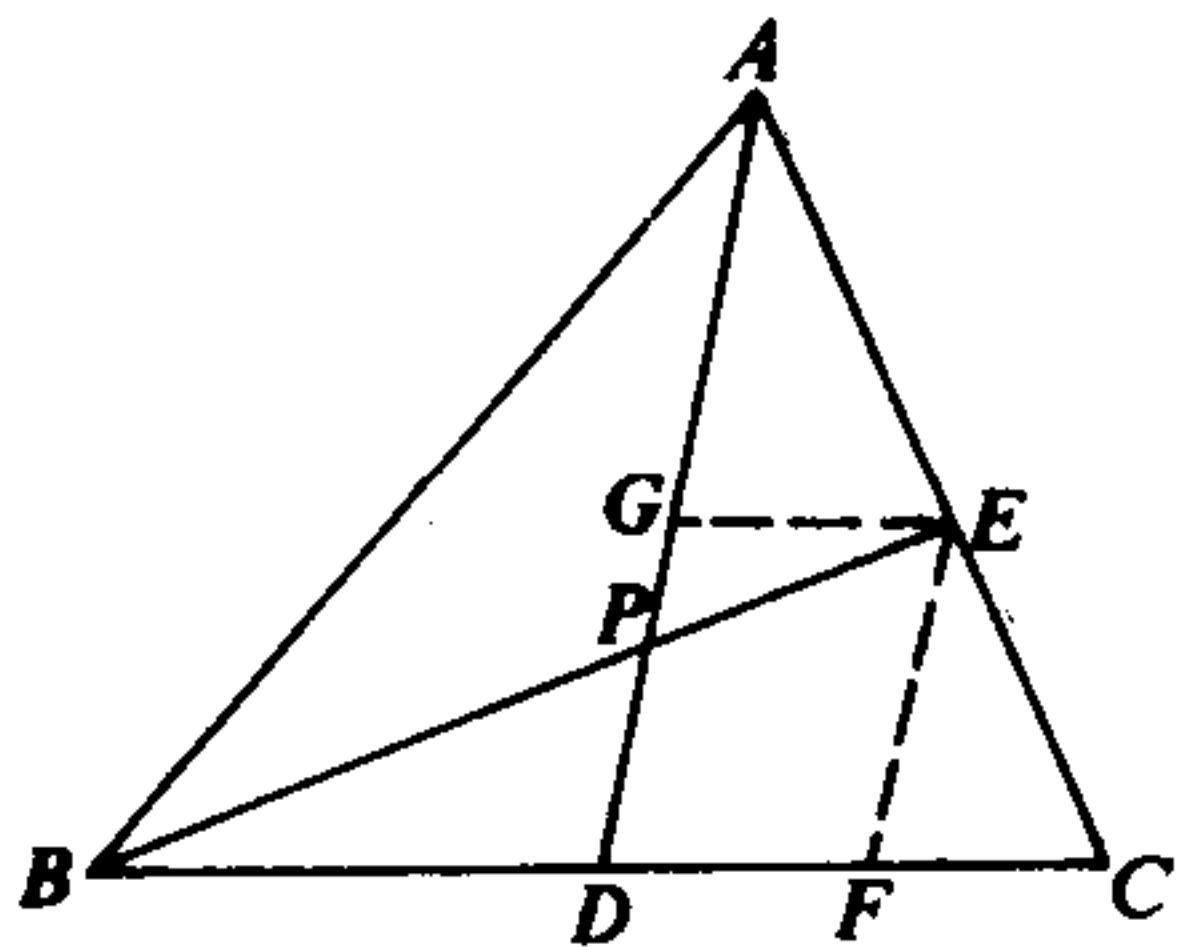


图 5.12

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AG}{GD} = \frac{AP - GP}{PD + GP}, \quad (5.11)$$

$$\frac{GP}{PD} = \frac{GE}{BD}, \quad (5.12)$$

$$\frac{AD}{AG} = \frac{DC}{GE}. \quad (5.13)$$

由(5.12), (5.13)可得

$$\frac{AD}{PD} = \frac{AG}{GP}.$$

于是有 $\frac{AD}{PD} - 1 = \frac{AG}{GP} - 1,$

即
$$\frac{AP}{PD} = \frac{AP - 2GP}{GP} = \frac{2(AP - GP)}{PD + GP}. \quad (5.14)$$

由(5.11), (5.14)即得(5.1).

(2)如图 5.12, 过 E 作 $EF \parallel AD$, 与 BC 交于 F, 则

$$\frac{AE}{EC} = \frac{DF}{FC} = \frac{DC - FC}{FC}, \quad (5.15)$$

$$\frac{AD}{EF} = \frac{DC}{FC}, \quad (5.16)$$

$$\frac{EF}{PD} = \frac{BF}{DB}. \quad (5.17)$$

(5.16) $\times$ (5.17) 得

$$\frac{AD}{PD} = \frac{BF}{FC},$$

两边减 1, 整理得

$$\frac{AP}{PD} = \frac{2(DC - FC)}{FC}. \quad (5.18)$$

由(5.15), (5.18)即得(5.1).

5.6.2 过点 P 作平行线

(1)如图 5.13, 过 P 作 $PF \parallel BC$, 与 AC 交于 F, 则

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AF}{FC} = \frac{AE+EF}{EC-EF}, \quad (5.19)$$

$$\frac{2DC}{PF} = \frac{EC}{EF}, \quad (5.20)$$

$$\frac{PF}{DC} = \frac{AF}{AC}. \quad (5.21)$$

(5.20) × (5.21) 得

$$2 = \frac{EC}{EF} \cdot \frac{AF}{AC},$$

两边减 1, 整理得

$$\frac{2AE+EC}{EC} = \frac{AE}{EF}. \quad (5.22)$$

由 (5.19), (5.22) 即得 (5.1).

(2) 如图 5.13, 过 P 作 $PG \parallel AC$, 与 BC 交于 G , 则

$$\frac{AP}{PD} = \frac{GC}{DG} = \frac{GC}{DC-GC}, \quad (5.23)$$

$$\frac{PG}{EC} = \frac{BG}{BC} = \frac{2DC-GC}{2DC}, \quad (5.24)$$

$$\frac{AC}{PG} = \frac{DC}{DG} = \frac{DC}{DC-GC}. \quad (5.25)$$

$$(5.24) \times (5.25) \text{ 得 } \frac{AC}{EC} = \frac{2DC-GC}{2(DC-GC)},$$

$$\text{即 } \frac{AE}{EC} = \frac{GC}{2(DC-GC)}. \quad (5.26)$$

由 (5.23), (5.26) 即得 (5.1).

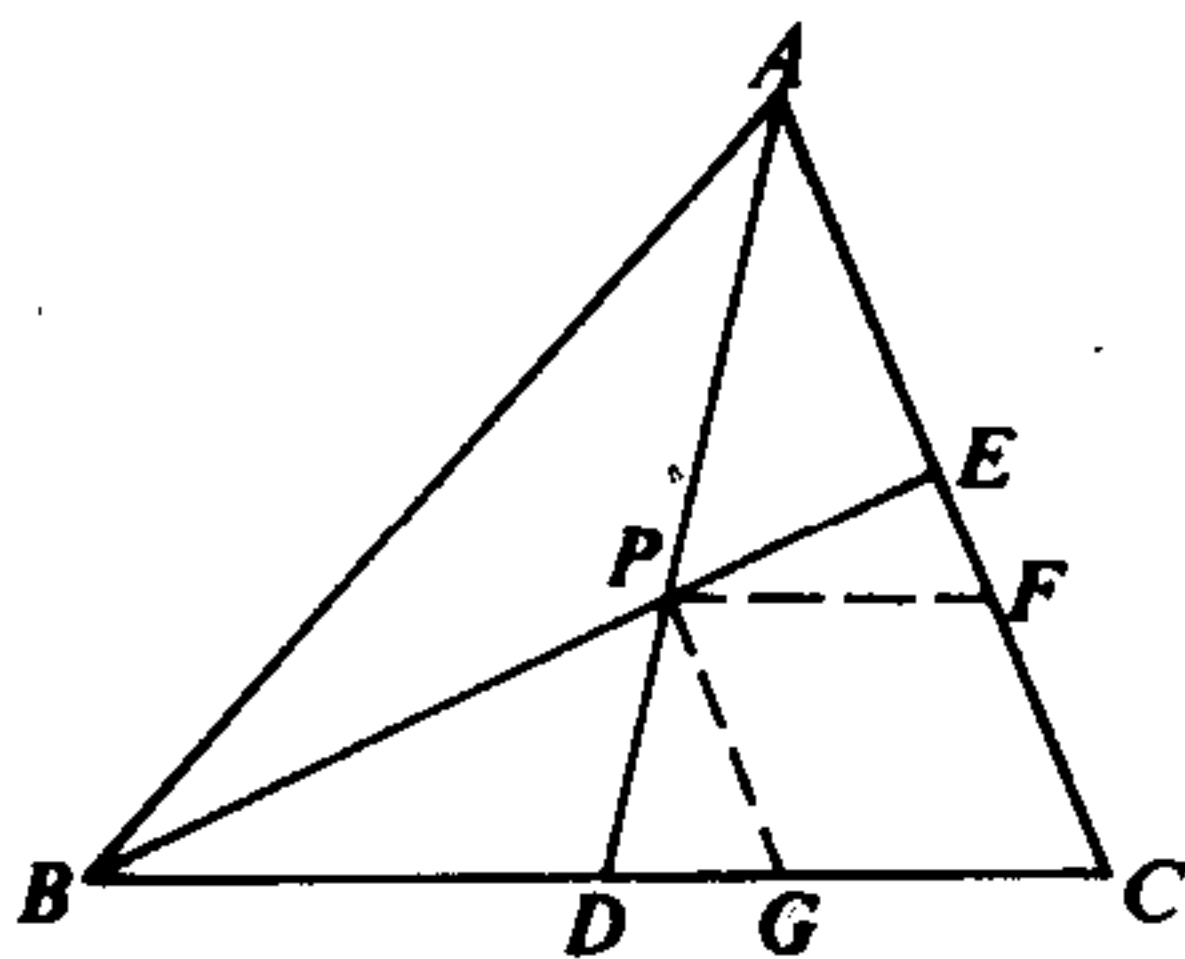


图 5.13

5.6.3 过点 A, C 作平行线

如图 5.14, 过 C 作 $CH \parallel DA$, 与 BE, BA 的延长线分别交于 K, H , 过 A 作 $AF \parallel BK$, 与 CH 交于 F , 则

$$\frac{AP}{PD} = \frac{HK}{KC},$$

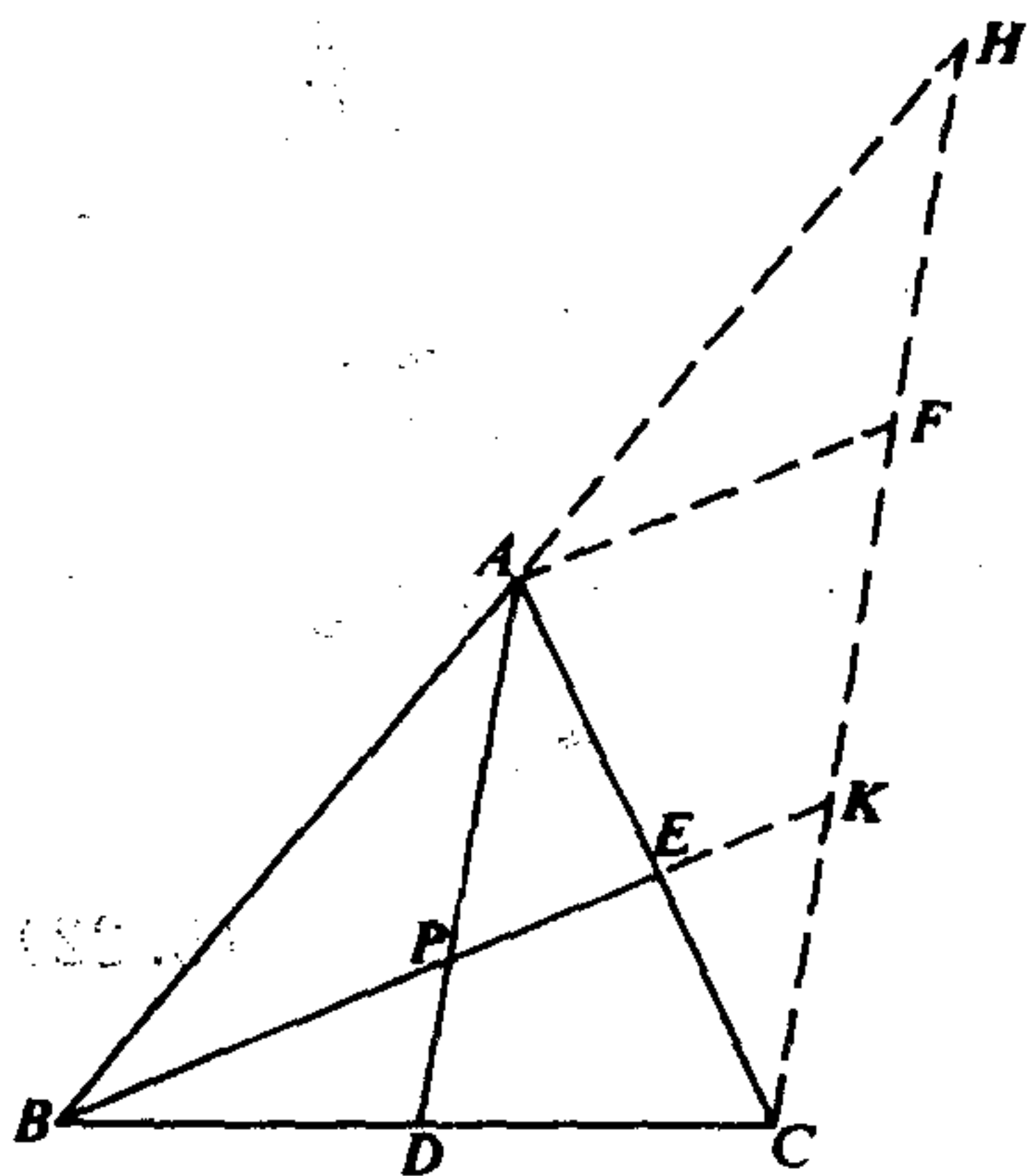


图 5.14

$$\frac{AE}{EC} = \frac{FK}{KC}$$

由中位线定理知 $HK = 2FK$, 故 (5.1) 成立.

5.6.4 过点 D, A 作平行线

如图 5.15, 过 D 作 $DH \parallel CA$, 与 BE , AB 分别交于点 K , H , 作 $AF \parallel EB$, 与 DH 的延长线交于 F , 则

$$\frac{AE}{EC} = \frac{HK}{KD},$$

$$\frac{AP}{PD} = \frac{FK}{KD}.$$

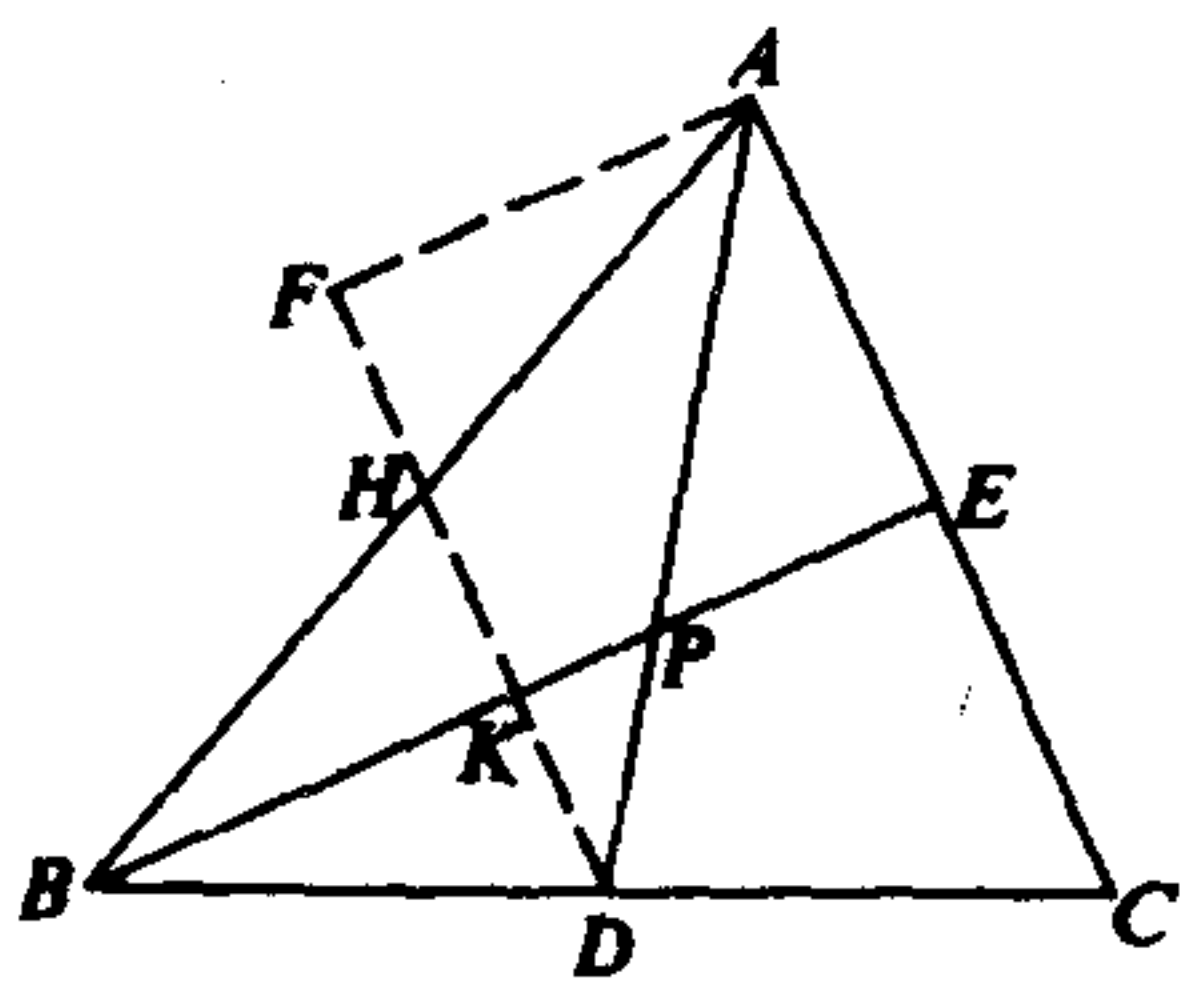


图 5.15

由中位线定理知 $AH = HB$, 故 $\triangle AFH \cong \triangle BKH$. 于是 $FH = HK$, 所以 $FK = 2HK$, 因而 (5.1) 成立.

5.7 面积法

上面我们将两个线段之比转化为另外两个线段之比作为中介, 从而达到解决问题的目的. 两个线段之比还可以通过面积作为中介进行转化, 这就是面积法.

(1) 如图 5.16, 连结 DE . BE 为 $\triangle ABE$ 与 $\triangle BDE$ 的公共

底边,故

$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{AP}{PD}.$$

又 $\because BD = DC, \therefore S_{\triangle BDE} = S_{\triangle DEC}.$

设 H, h 分别为由顶点 B, D 向边 EC 作的高,则 $H = 2h$,故有

$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle DEC}} = \frac{\frac{1}{2}H \cdot AE}{\frac{1}{2}h \cdot EC} = \frac{2AE}{EC}.$$

于是有 $\frac{AP}{PD} = \frac{2AE}{EC}.$

(2)如图 5.16,连结 PC . 由

$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle APE}} = \frac{S_{\triangle CBE}}{S_{\triangle CPE}}$$

有 $\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle APE}} - 1 = \frac{S_{\triangle CBE}}{S_{\triangle CPE}} - 1,$

$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle APE}} = \frac{S_{\triangle CBP}}{S_{\triangle CPE}},$$

$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle CBP}} = \frac{S_{\triangle APE}}{S_{\triangle CPE}} = \frac{AE}{EC}.$$

又 $\frac{AP}{PD} = \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle BDP}} = \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle BCP}} \cdot \frac{S_{\triangle BCP}}{S_{\triangle BDP}} = \frac{AE}{EC} \cdot \frac{BC}{BD},$

即 $\frac{AP}{PD} = \frac{2AE}{EC}.$

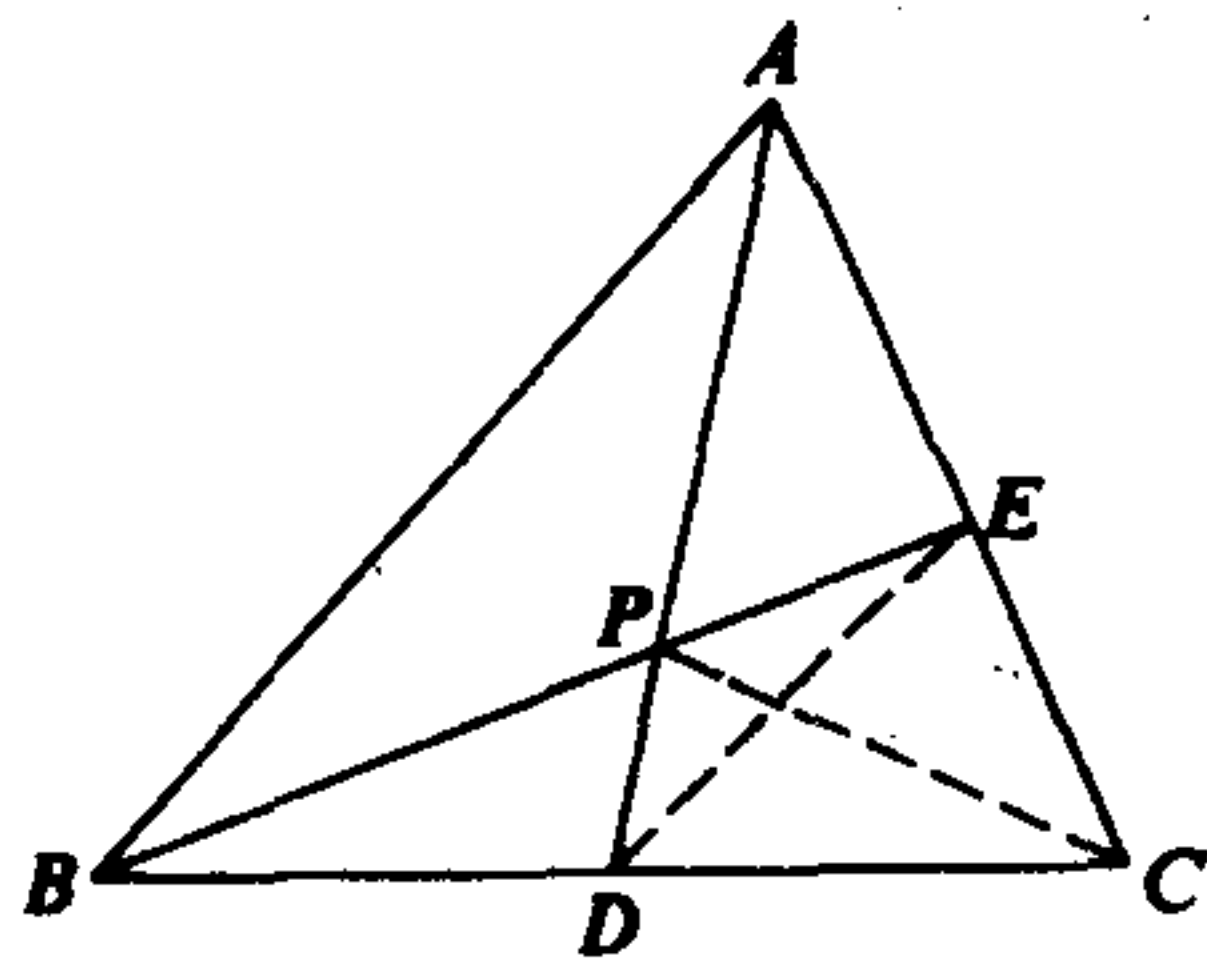


图 5.16

5.8 关于面积法的思考

从上一章和这一章我们看到,运用面积关系证明比例线段问题是比较方便的. 在这里,我们对面积法作些概括的叙述.

所有直线形的面积,最终都可以归结为三角形的面积.计算三角形面积的最基本公式有如下两个:

$$S = \frac{1}{2}ah,$$

$$S = \frac{1}{2}absinC.$$

从这两个公式出发,可以推出一些与面积计算有关的性质定理:

(1)等底等高的两个三角形面积相等.

(2)两个等底(高)三角形的面积之比等于它们的高(底)之比.

(3)共边比例定理:若直线 PQ 与 AB 交于 M ,则

$$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle QAB}} = \frac{PM}{QM}.$$

其图形可有 4 种情形(图 5.17).

(4)共角比例定理:有一个角相等(或互补)的两个三角形的面积之比等于夹此角两边的乘积之比.

(5)相似三角形面积之比,等于其相似比的平方.

为了计算面积,一般地,我们需要先知道或求出某些线段或角的大小;反之,为了证明与线段或角的度量关系有关的几何命题,可恰当地选用面积公式或上述的有关性质定理.逆用面积公式及有关性质定理来解决有关数学问题的方法,可称为面积法.如果利用面积公式求面积是正向思维,那么逆用面积公式来证与线段或角度有关的几何命题就是逆向思维.利用面积关系来证明平面图形中的长度或角度相等,或证明比例式、和差倍分关系、三点共线、三线共点,或利用面积关系进

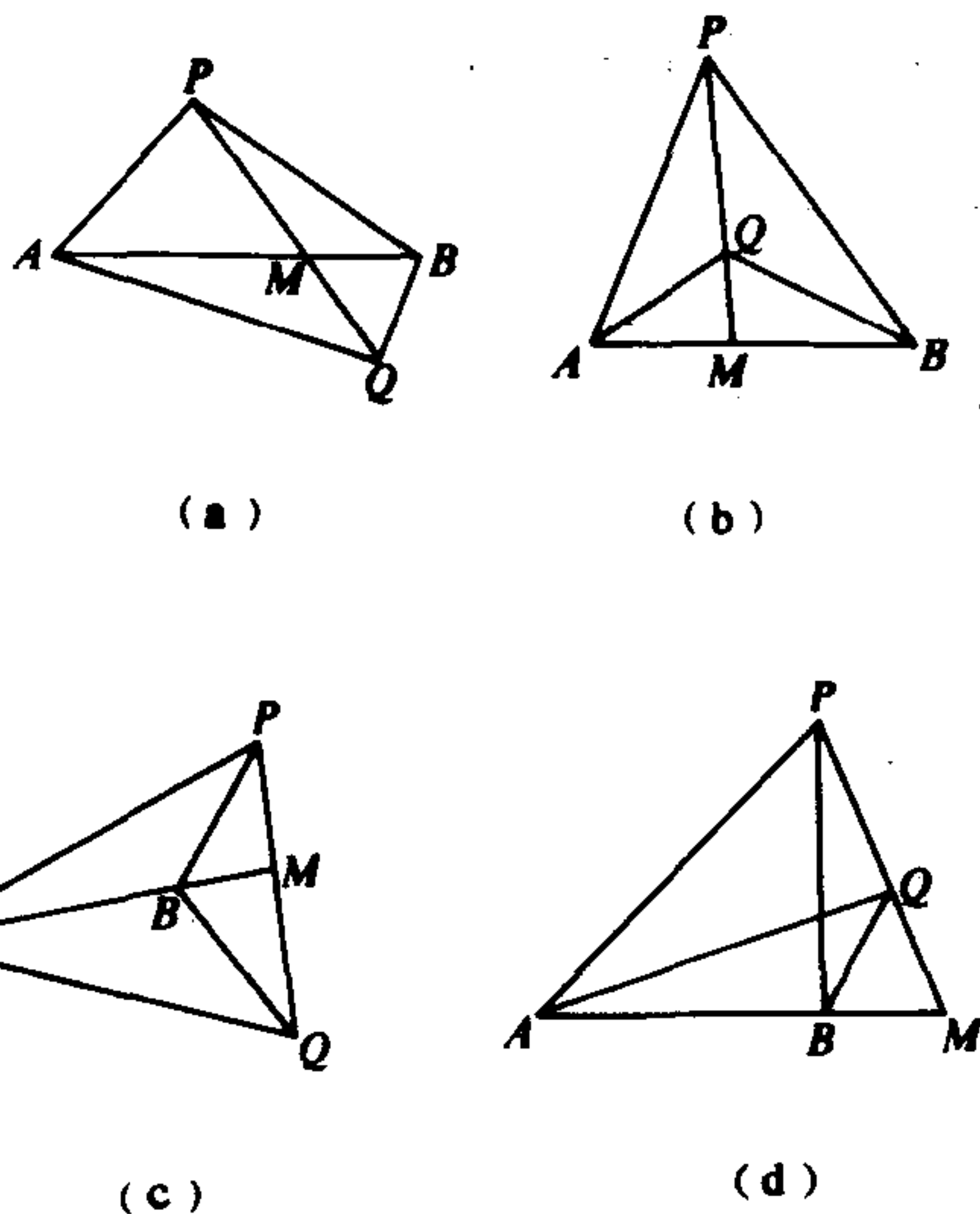


图 5.17

行几何计算等,常常能体现出数学的简洁美、统一美,使人陶醉于数学美的甘甜之中.

5.9 命题的演变

上面我们从不同的角度考虑了命题 5.1 的证明方法,下面对命题 5.1 进行演变,提出与此有关的新命题.

5.9.1 探索新的结论

在命题 5.1 的条件下,除了所述的结论外,是否还可以推出其他的结论呢? 在图 5.3 中,由 $BP=CG$ 知

$$\frac{BP}{PE} = \frac{CG}{PE} = \frac{AC}{AE}.$$

于是有

命题 5.2 条件同命题 5.1, 这时有

$$\frac{BP}{PE} = \frac{AC}{AE}.$$

由命题 5.1 与 5.2, 易得

命题 5.3 条件同命题 5.1, 这时有

$$\frac{AP \cdot BP}{PD \cdot PE} = 2 \frac{AC}{EC}.$$

前面在证明命题 5.1 时, 曾利用了面积与线段之间的关系, 这就启发我们, 在已知条件下, 是否还隐含有面积与线段之间的关系尚待发现?

在图 5.1 中, 由于 $\angle APB = \angle DPE$, 所以

$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle PDE}} = \frac{AP \cdot PB}{DP \cdot PE} = 2 \frac{AE}{EC} \cdot \frac{AC}{AE} = \frac{2AC}{EC}.$$

于是有

命题 5.4 条件同命题 5.1, 这时有

$$\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle PDE}} = \frac{2AC}{EC}.$$

在图 5.16 中, 由于 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BEC$ 等高, 所以 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BEC}} = \frac{AC}{EC}$. 而 $\frac{AP}{PD} = \frac{2AE}{EC}$, 此式两边同加 1 得

$$\frac{AP + PD}{PD} = \frac{2AE + EC}{EC},$$

即 $\frac{AD}{PD} = \frac{AE + AC}{EC} = \frac{2AC - EC}{EC} = \frac{2AC}{EC} - 1,$

故 $\frac{AC}{EC} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{AD}{PD} \right).$

于是有

命题 5.5 条件同命题5.1(假定 P 在线段 AD 上),则有

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BEC}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{AD}{PD} \right).$$

类似地,还可以推出其他两个面积与两个线段之间的关系式,这里就不详述了.

5.9.2 条件与结论互换

当我们确立了一个命题之后,常常把它反过来再研讨一下,即把结论当做已知条件,考虑原命题的条件(即新命题的结论)是否成立.若不成立,能够推出什么结论?或者考虑新命题的结论(即原命题的条件)在什么条件下成立?例如,我们把命题 5.2 的结论作为已知条件,试问 AD 是否一定是边 BC 的中线?易证这个问题的答案是肯定的.于是有

命题 5.6 如图 5.1,在 $\triangle ABC$ 中,已知 $\frac{BP}{PE} = \frac{AC}{AE}$,连结 AP ,并使其延长线与 BC 相交于 D ,则 AD 必为边 BC 上的中线.

5.9.3 特殊化

(1)取特定的线段.命题 5.1 中的结论是关于四条线段的关系式,如果其中任意两条线段已给定,那么它就变成两条线段之间的关系式了.例如,若 $\frac{AE}{EC} = 1$,则 $\frac{AP}{PD} = 2$.而 $\frac{AE}{EC} = 1$ 意味着不是过点 B 任作一直线,而是作边 AC 上的中线.这样,我们便得到

命题 5.7 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是边 BC 的中线,过 B 向边 AC 作中线 BE ,交 AD 于 P ,则 $\frac{AP}{PD} = 2$.

在图 5.1 中,若 BE 是 $\angle B$ 的平分线,由角的平分线性质

定理知 $\frac{AB}{BD} = \frac{AP}{PD}$. 由命题 5.1 知 $\frac{AP}{PD} = \frac{2AE}{EC}$, 而 $BD = DC$, 所以 $\frac{AB}{DC} = \frac{2AE}{EC}$, 这就得到了

命题 5.8 在图 5.1 中, 若 BE 是 $\angle B$ 的平分线, 其他条件与命题 5.1 相同, 则

$$\frac{AB}{DC} = \frac{2AE}{EC}.$$

(2) 取特殊的三角形. 命题 5.1 中的 $\triangle ABC$ 是一般的三角形, 若取特殊的三角形, 例如取等腰三角形, 其中 $AB = AC$, 则有 $\frac{AP}{PD} = \frac{2AE}{EC}$, $\frac{2PD}{AP} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$,

故有
$$\frac{PD + AD}{AP} = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AE}.$$

于是得到

命题 5.9 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AB = AC$, 其他条件同命题 5.1, 则

$$\frac{AB}{AE} = \frac{PD + AD}{AP}.$$

(3) 取特殊的线段和三角形.

命题 5.10 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $AB = BC$, $\angle B = 90^\circ$, AD 为边 BC 的中线, 过 B 作直线 $BP \perp AD$, 交 AD 于 P , 交 AC 于 E , 则 $\frac{AE}{EC} = 2$.

证 如图 5.18, 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AB^2 = AP \cdot AD$, $BD^2 = PD \cdot AD$, 两式相除得

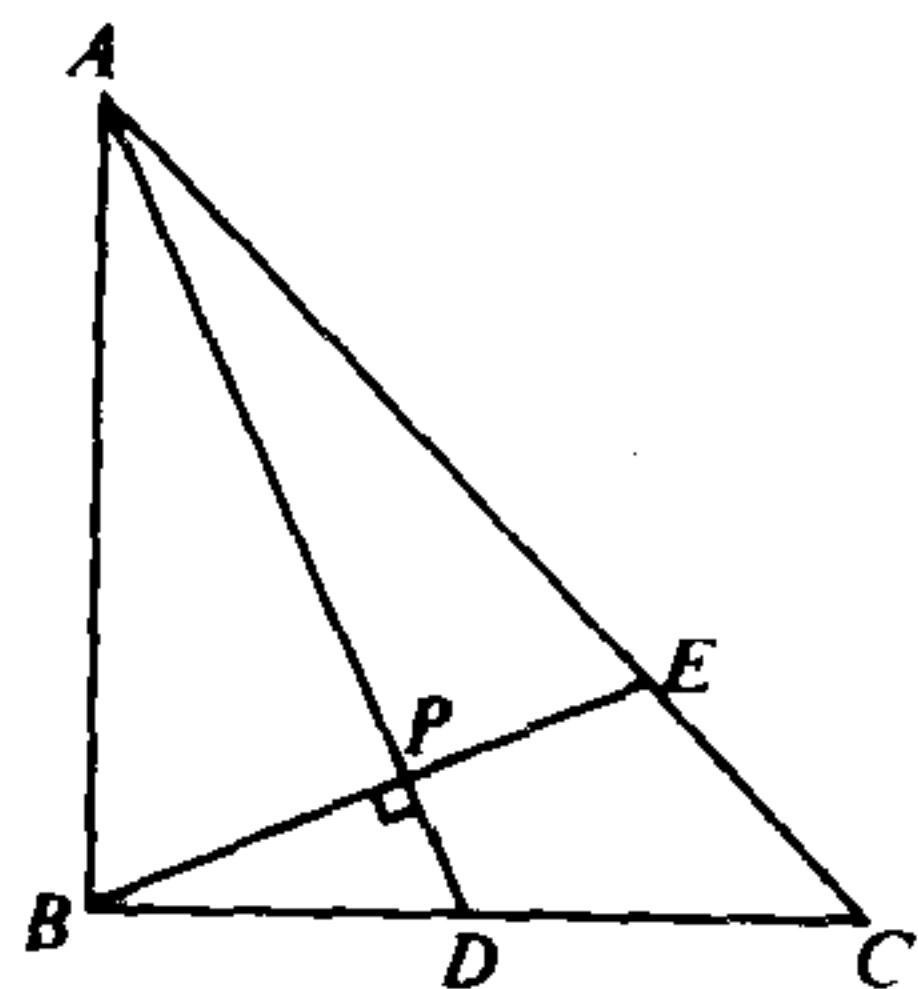


图 5.18

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AB^2}{BD^2} = \frac{(2BD)^2}{BD^2} = 4.$$

再由命题 5.1 知 $\frac{AP}{PD} = \frac{2AE}{EC}$, 故有 $\frac{AE}{EC} = 2$.

5.9.4 一般化

(1) 点 D 在线段 BC 上. 在命题 5.1 中, D 是边 BC 的中点, 这是一个特定的点. 若 D 是边 BC 上的任意一点, 设 $\frac{BD}{DC} = \lambda$, 这就是一般条件了. 这样一来, 命题的结论相应地也变为更一般的结论了. 按命题 5.1 的面积法证明步骤, 易推知有结论

$$\frac{AP}{PD} = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \frac{AE}{EC}.$$

同样, 若命题 5.2 也用面积法给予证明, 亦可推出相应结论为

$$\frac{BP}{PE} = \lambda \frac{AC}{AE}.$$

于是有

命题 5.11 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是由点 A 向边 BC 作的任一条直线, 交 BC 于 D , 且有 $\frac{BD}{DC} = \lambda$. 过 B 任作一直线, 分别交 AD 或其延长线于 P , 交 AC 或其延长线于 E , 则有

$$(i) \quad \frac{AP}{PD} = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \frac{AE}{EC};$$

$$(ii) \quad \frac{BP}{PE} = \lambda \frac{AC}{AE}.$$

证 1 如图 5.16, 连结 PC , 则

$$\begin{aligned} \frac{AP}{PD} &= \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle BDP}} = \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle BCP}} \cdot \frac{S_{\triangle BCP}}{S_{\triangle BDP}} = \frac{AE}{EC} \cdot \frac{BC}{BD} \\ &= \frac{AE}{EC} \left(1 + \frac{DC}{BD}\right) = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \frac{AE}{EC}. \end{aligned}$$

(i)得证. 下面证(ii). 连结 DE , 则

$$\begin{aligned}\frac{BP}{PE} &= \frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle EAD}} = \frac{S_{\triangle BAD}}{S_{\triangle ADC}} \cdot \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle EAD}} \\ &= \frac{BD}{DC} \cdot \frac{AC}{AE} = \lambda \frac{AC}{AE}.\end{aligned}$$

证 2 如图 5.16,

$$\begin{aligned}\frac{BD}{DC} &= \frac{AB \sin \angle BAD}{AC \sin \angle DAC}, \\ \frac{BP}{PE} &= \frac{AB \sin \angle BAP}{AE \sin \angle PAE}.\end{aligned}$$

上面两式相除得

$$\frac{BP}{PE} \cdot \frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AE}.$$

即
$$\frac{BP}{PE} = \lambda \frac{AC}{AE}.$$

(ii)得证. 下面证(i), 如图 5.16, 连结 PC , 则

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AC \sin \angle ACP}{DC \sin \angle PCD}, \quad (5.27)$$

$$\frac{BP}{PE} = \frac{BC \sin \angle PCB}{EC \sin \angle ECP}. \quad (5.28)$$

(5.27) $\times$ (5.28)得

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{BP}{PE} = \frac{AC}{DC} \cdot \frac{BC}{EC}.$$

即
$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{AC}{AE} = \frac{AC}{EC} \cdot \frac{BC}{DC},$$

亦即
$$\frac{AP}{PD} = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \frac{AE}{EC}.$$

(2)点 D 在 BC 的延长线上. 在图 5.1 中, 若点 D 不在线段 BC 上, 而在 BC 的延长线上, 又有怎样的结论呢? 仿照上面的证明步骤可得

命题 5.12 在 $\triangle ABC$ 中, 在 BC 的延长线上任取一点

D , 设 $\frac{BD}{DC} = \lambda$. 过 B 任作一直线, 与 AC 或其延长线交于 E , 与 AD 或其延长线交于 P , 则有

$$(i) \quad \frac{AP}{PD} = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{AE}{EC};$$

$$(ii) \quad \frac{BP}{PE} = \lambda \frac{AC}{AE}.$$

(3) 点 D 在 CB 的延长线上.

命题 5.13 在 $\triangle ABC$ 中, 在 CB 的延长线上任取一点 D , 设 $\frac{BD}{DC} = \lambda$. 过 B 任作一直线, 与 AC 或其延长线交于 E , 与 AD 或其延长线交于 P , 则有

$$(i) \quad \frac{AP}{PD} = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \frac{AE}{EC};$$

$$(ii) \quad \frac{BP}{PE} = \lambda \frac{AC}{AE}.$$

5.9.5 增加新的条件

(1) 由对等增加新线段. 在图 5.1 中, 由于 AD 是边 BC 上的中线, 过点 B 作直线和过点 C 作直线具有对等的地位, 对于点 B 所得的结论, 只要将 B 相应地改成 C , 就得出对于点 C 的相应结论. 故当作了 BE 之后, 很易想到若过点 C 再作一直线, 又会产生一些什么结论呢? 为了与前面所产生的结论有联系, 自然想到应过点 C 作一条过点 P 的直线, 故不妨连结 CP , 并延长之交 AB 于 F (图 5.19), 看有什么结论.

连结 EF . 由命题 5.1 知

$$\frac{2AF}{FB} = \frac{AP}{PD} = \frac{2AE}{EC},$$

所以 $\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC}$. 由平行线截比例线段定理的逆定理, 得知 FE

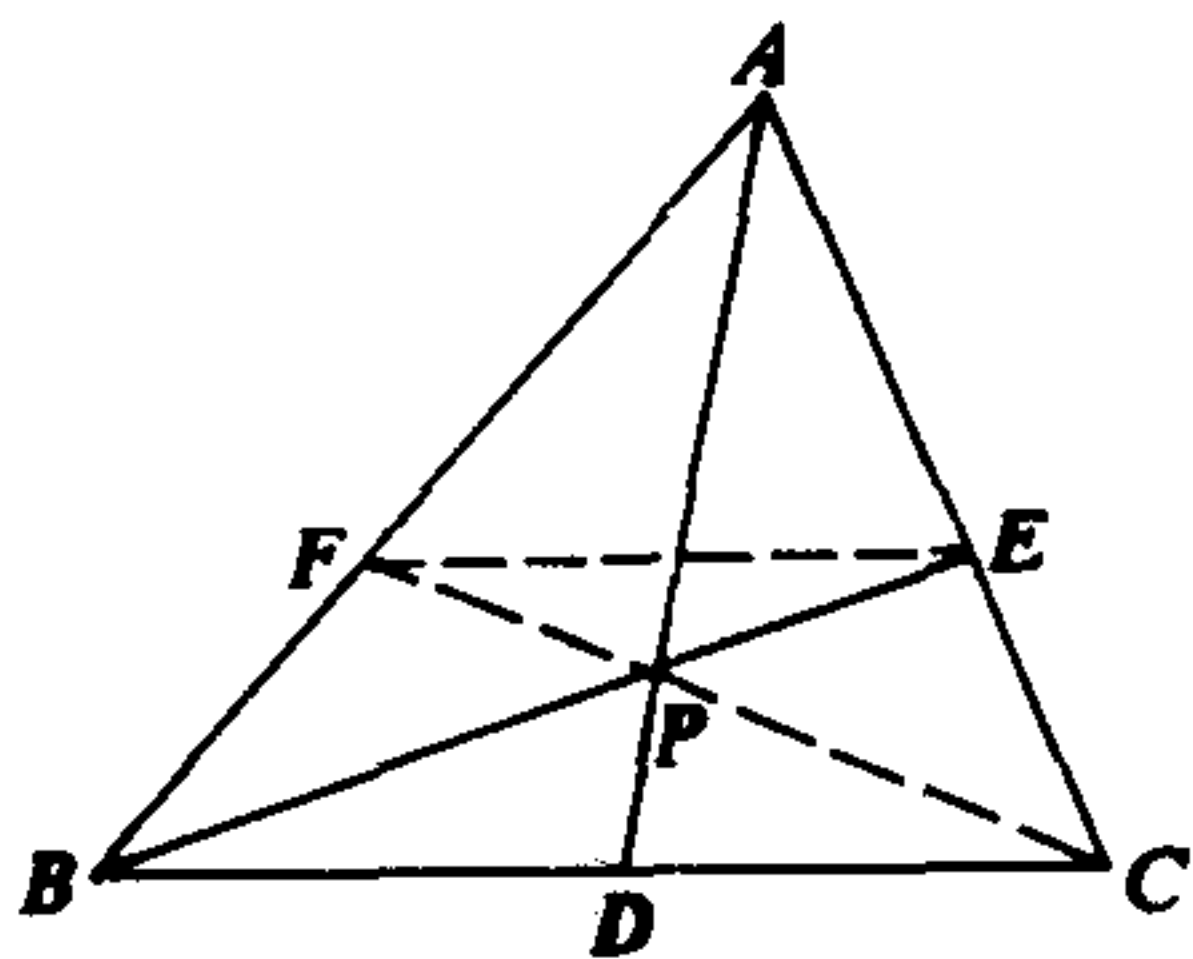


图 5.19

// BC. 于是有

命题 5.14 在 $\triangle ABC$ 中, 除了命题 5.1 的条件外, 连结 CP , 并延长之交 AB 于 F , 连结 FE , 则 $FE \parallel BC$.

(2) 由逆命题增加新线段. 上述命题有结论 $FE \parallel BC$, 如果我们不作直线 CP , 而是过 E 作

$EF \parallel CB$, 可推出什么结论呢?

如图 5.20, 由命题 5.2 知

$$\frac{BP}{PE} = \frac{AC}{AE} \because EF \parallel CB, \therefore \frac{AC}{AE} =$$

$$\frac{AB}{AF}, \text{故有}$$

$$\frac{AB}{AF} = \frac{BP}{PE}.$$

于是有

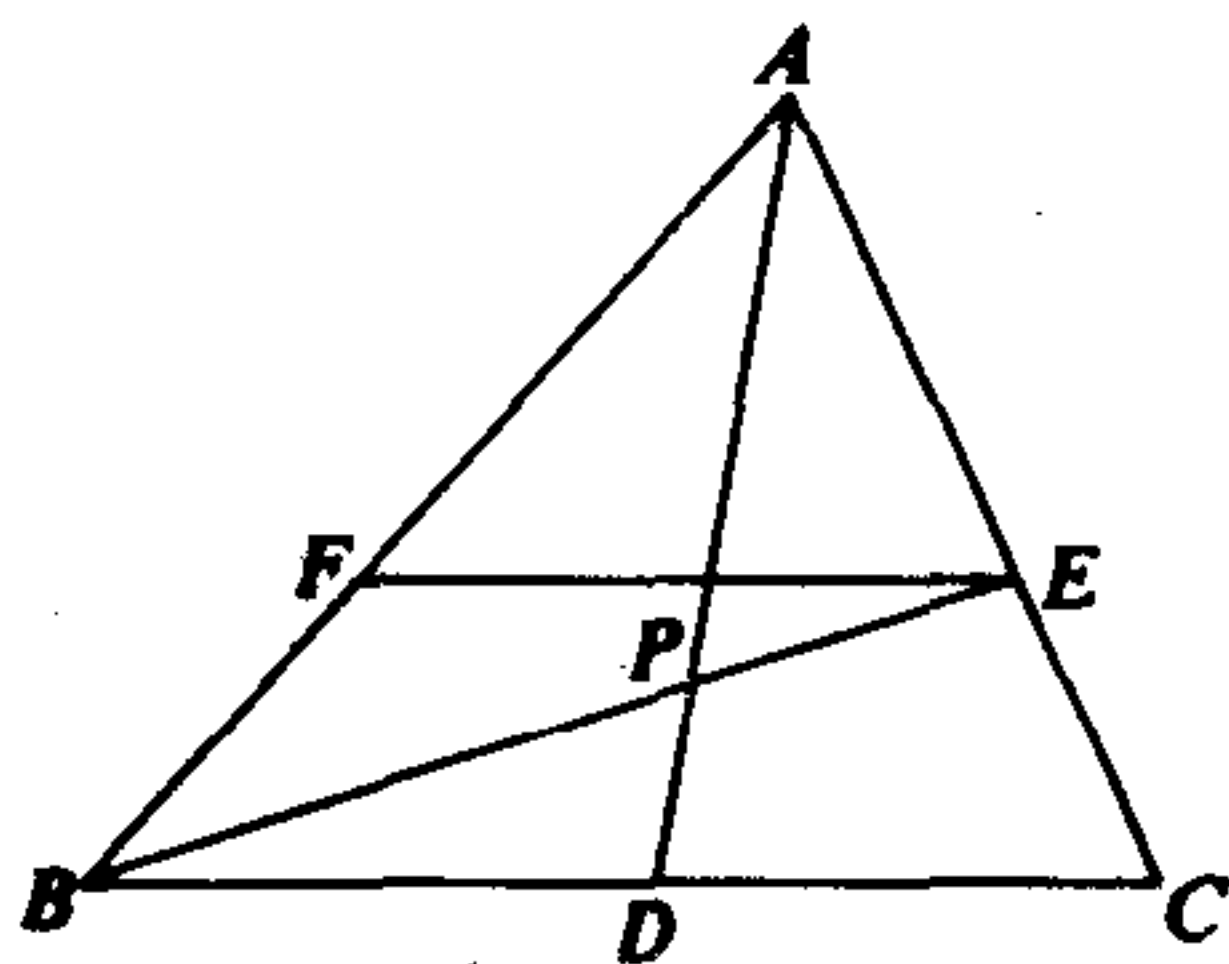


图 5.20

命题 5.15 在 $\triangle ABC$ 中,

在命题 5.1 的条件下, 再过 E 作 $EF \parallel CB$, 交 AB 于 F , 则

$$\frac{AB}{AF} = \frac{BP}{PE}.$$

5.9.6 在导出命题的基础上再演变

如果我们把命题 5.1 叫做基本命题, 那么由命题 5.1 演变出的命题 5.2~命题 5.15 就叫做导出命题. 对导出命题, 反复应用上述方法, 即考虑命题条件与结论互换, 寻找新结论, 增加新条件, 特殊化, 一般化等, 又可以演变出许许多多的

新命题. 例如, 对于命题 5.15 我们还可以推出如下结论:

命题 5.16 条件同命题 5.15, 则 C, P, F 三点共线.

又如在图 5.19 中, 经过探索还有下面的结论:

命题 5.17 条件同命题 5.14, 则有

$$\frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} = 1.$$

证 由命题 5.2 知

$$\frac{BP}{PE} = \frac{AC}{AE},$$

$$\frac{BP}{PE} + 1 = \frac{AC}{AE} + 1,$$

$$\frac{PE}{BE} = \frac{PE}{PE+BP} = \frac{AE}{AE+AC}.$$

对称地, 可得 $\frac{PF}{CF} = \frac{PF}{PF+CP} = \frac{AF}{AF+AB}.$

由命题 5.1 知 $\frac{AP}{PD} = \frac{2AE}{EC},$

即 $\frac{AP}{AP+PD} = \frac{2AE}{2AE+EC} = \frac{2AE}{AC+AE} = \frac{AP}{AD}.$

对称地, 可得 $\frac{AP}{AP+PD} = \frac{2AF}{AB+AF} = \frac{AP}{AD}.$

由上可得

$$\begin{aligned} \frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} &= \frac{PD}{AD} + \frac{AE}{AE+AC} + \frac{AF}{AF+AB} \\ &= \frac{PD}{AD} + \frac{1}{2} \left(\frac{AP}{AD} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{AP}{AD} \right) = 1. \end{aligned}$$

命题 5.18 条件同命题 5.14, 则有

$$S_{\triangle APE} + S_{\triangle BPF} + S_{\triangle CPD} = S_{\triangle APF} + S_{\triangle BPD} + S_{\triangle CPE}.$$

证 $\because EF \parallel CB, \therefore S_{\triangle BCF} = S_{\triangle BCE}.$ 等式两端同减去 $S_{\triangle BPC},$ 得

$$S_{\triangle BCF} - S_{\triangle BPC} = S_{\triangle BCE} - S_{\triangle BPC},$$

即 $S_{\triangle BPF} = S_{\triangle CPE}.$

$$\because BD = DC, \therefore S_{\triangle BPD} = S_{\triangle CPD}, \quad S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}.$$

故有 $S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BPF} - S_{\triangle BPD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle CPE} - S_{\triangle CPD},$

即 $S_{\triangle APF} = S_{\triangle APE}.$

所以 $S_{\triangle APE} + S_{\triangle BPF} + S_{\triangle CPD} = S_{\triangle APF} + S_{\triangle BPD} + S_{\triangle CPE}.$

对于命题 5.14, 如果我们不连结 CP , 而是在 AB 上取一点 F , 使 $\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC}$, 则直线 CF 必过点 P . 于是有

命题 5.19 在 $\triangle ABC$ 中, 除命题 5.1 的条件外, 若在 AB 上取一点 F , 使 $\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC}$, 则直线 CF 必过点 P .

在上面的命题中, 特别地, 当 $\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC} = 1$ 时, 则有

命题 5.20 三角形三中线共点, 这点把每条中线从顶点开始分为 $2:1$ 两部分.

对命题 5.5 取特例, 若 $AD = 5PD$, 则有

$$S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle BEC}.$$

对于命题 5.14 取特例, 若 $BE = CF$, 则 $\triangle ABC$ 为等腰三角形.

在命题 5.11 中, 特别地, 当 $2AE = EC$, 且 $BP = PE$ 时, 则有 $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{3}$. 如果再加上选择支 (即在 $\triangle ABC$ 中, 点 F 分边 AC 成 $1:2$. 设 E 是边 BC 和 AG 的交点, 其中 G 是 BF 的中点, 那么 E 分 BC 成的比是 (A) $1:4$; (B) $1:3$; (C) $2:5$; (D) $4:11$; (E) $3:8$), 这就是 1971 年美国中学数学竞赛试题第 26 题.

如此反复演变下去,还可以演变出更多的题.

在解题过程中,当我们获得一种解法之后,若再换一个角度审视,往往又可演变出新的解法来.这种思维角度的变动,有助于培养思维的广阔性.在解题过程中,如果新的解法是从转化的问题得来的,那么继续考察这转化的问题与原问题之间的关系,往往可以发现解题方法之间的联系,从而有助于培养思维的深刻性.在图 5.14 中,我们把证 $\frac{AP}{PD} = \frac{2AE}{EC}$ 的问题转化为证 $\frac{2AE}{EC} = \frac{HK}{KC}$. 而 $BA = AH$, 因此 CA 为 $\triangle BCH$ 的边 BH 的中线. 这样一来,原来的问题就转化成:在 $\triangle BCH$ 中,已知 CA 是边 BH 的中线,过 B 任作一直线 BK ,与 CA, CH 分别交于 E, K , 则

$$\frac{CE}{EA} = \frac{2CK}{KH}.$$

这与原来的问题完全一样,只不过是所用的符号不同罢了. $\triangle BCH$ 可以看成是由 $\triangle ABC$ 变换而来的,在 $\triangle BCH$ 中引辅助线 AF 就相当于图 5.2 中引辅助线 DG . 于是对 $\triangle ABC$ 有几种证法,对 $\triangle BCH$ 也有几种证法.

解同一个题目可以用不同的方法,同一个方法又可以解不同的题目.在用面积法证明命题 5.1 的过程中,我们发现这种方法完全适用于证明命题 5.11. 从一个题目联想到多个题目,由一个问题演变出多个问题,这正是动态思维的创造性的表现.

习 题 5

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 60^\circ$, BD 与 CE 分别是 $\angle B$, $\angle C$ 的平分线且交于 P , BD 与 AC 交于 D , CE 与 AB 交于 E . 求证 $PD = PE$.

2. 在正三角形 ABC 中, AD 交 BC 于 D , BE 交 AC 于 E , 且有 $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}$, AD 与 BE 交于点 P . 求证 $AP \perp CP$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C$ 为直角, $CD \perp AB$, 垂足为 D , $\angle A$ 的平分线与 CD 交于 F , 与 BC 交于 E . 试证:

(i) $\frac{CE}{EB} = \frac{CD}{CB}$;

(ii) $\triangle EFC$ 为等腰三角形;

(iii) $\frac{BC^2}{DC^2} = \frac{AB}{AD}$;

(iv) $\frac{AE^2}{AF^2} = \frac{AB}{AD}$;

(v) $CE^2 = BE \cdot DF$;

(vi) $\frac{BA}{DA} = \frac{EB}{DF}$.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别为 BC, CA 上的点, 且有 $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{1}{2}$, AD, BE 相交于 P . 试探讨 $\triangle ABP, \triangle BPD, \triangle APE$, 四边形 $DCEP$ 各面积之间的关系, 以及这些图形的面积与 $\triangle ABC$ 的面积之间的关系.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle CBA = 72^\circ$, E 是边 AC 的中点, D 在边 BC 上且 $2BD = DC$, AD 与 BE 相交于 F . $\triangle BDF$ 和四边形 $FDCE$ 的面积之比是

(A) $\frac{1}{5}$; (B) $\frac{1}{4}$; (C) $\frac{1}{3}$; (D) $\frac{2}{5}$;

(E) 这些都不对.

6. 设 O 为 $\triangle ABC$ 内任一点, 直线 AO, BO, CO 分别交 BC, CA, AB 于 D, E, F . 求证

$$\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1.$$

7. 在 $\triangle ABC$ 内任取一点 P , 直线 AP, BP, CP 分别交 BC, CA, AB 于点 D, E, F . 求证

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

8. 在 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 上分别取 D, E , 连结 CD, BE , 相交于点 O . 设 $\frac{AD}{BD} = \lambda, \frac{AE}{CE} = \mu$. 求证

$$\frac{DO}{CO} = \frac{\mu}{1+\lambda}, \quad \frac{EO}{BO} = \frac{\lambda}{1+\mu}.$$

并阐述这一题与上一题的关系.

9. 直线 FE 与 $\triangle ABC$ 的两边 AB, AC 分别交于 F, E , 并与边 BC 的延长线交于 D . 求证

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

(梅涅劳斯定理)

6

几何动态

在前面几章中,我们看到,当变动图形中的直线时,往往可以获得解题的新方法.这种变动直线的方法就是几何动态.在这一章中,我们将进一步阐述几何动态的含义,并通过具体例子介绍几何动态在数学中的应用.

6.1 什么叫几何动态?

对于一个几何图形来说,我们可以把它的各元素之间的位置关系看做是处在变化的相互依存的状态之中,这种状态我们称之为几何动态.静是相对的,动是绝对的;变即寓于不变之中.用这种动态观点审视几何图形就产生了几何变换.一个将平面图形 F 变到图形 F' 的运动,称做 F 到 F' 的一个变换.在中学平面几何

中,常见的几何变换有合同变换、相似变换、等积变换等.合同变换又叫全等变换,平移、旋转、反射都是特殊的全等变换.应用这些变换或其复合,有助于启发证题思路,完成辅助元素的添设,化难为易,变未知为已知,从而达到解题的目的.在实际解题过程中,要设法造成有变有不变的状态,让有利于解题的条件保持不变,而将不利于解题的条件变为有利的,这就是利用几何变换解题的核心思想.

运用几何动态的观点,可以把表面看来不同的定理统一起来,可以发现新的几何命题,又常常可以找到探求几何中的极值、定值以及轨迹问题的较有效的方法.下面结合具体例子予以说明.

6.2 统一在圆幂定理之中

如图 6.1,弦 AB 与 DC 相交于 $\odot O$ 内一点 P ,则

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD. \quad (6.1)$$

这就是相交弦定理.

如果把弦 AB, DC 视为两条直线,以 D 为定点,沿逆时针方向旋转直线 DC ,则 PC 越来越短,当 PC 为零时, P, C, A 三点重合,显然式(6.1)仍然成立.

继续旋转,这时直线 DC 与 BA 在圆外相交于 P (图 6.2),则式(6.1)仍然成立.这就是割线定理.

通过观察图形,分析比较,我们可归纳出相交弦定理与割线定理的异同点:定理中的条件均可概括为两条相交直线分别与圆相交;定理中的结论可统一为两条直线的交点到各弦

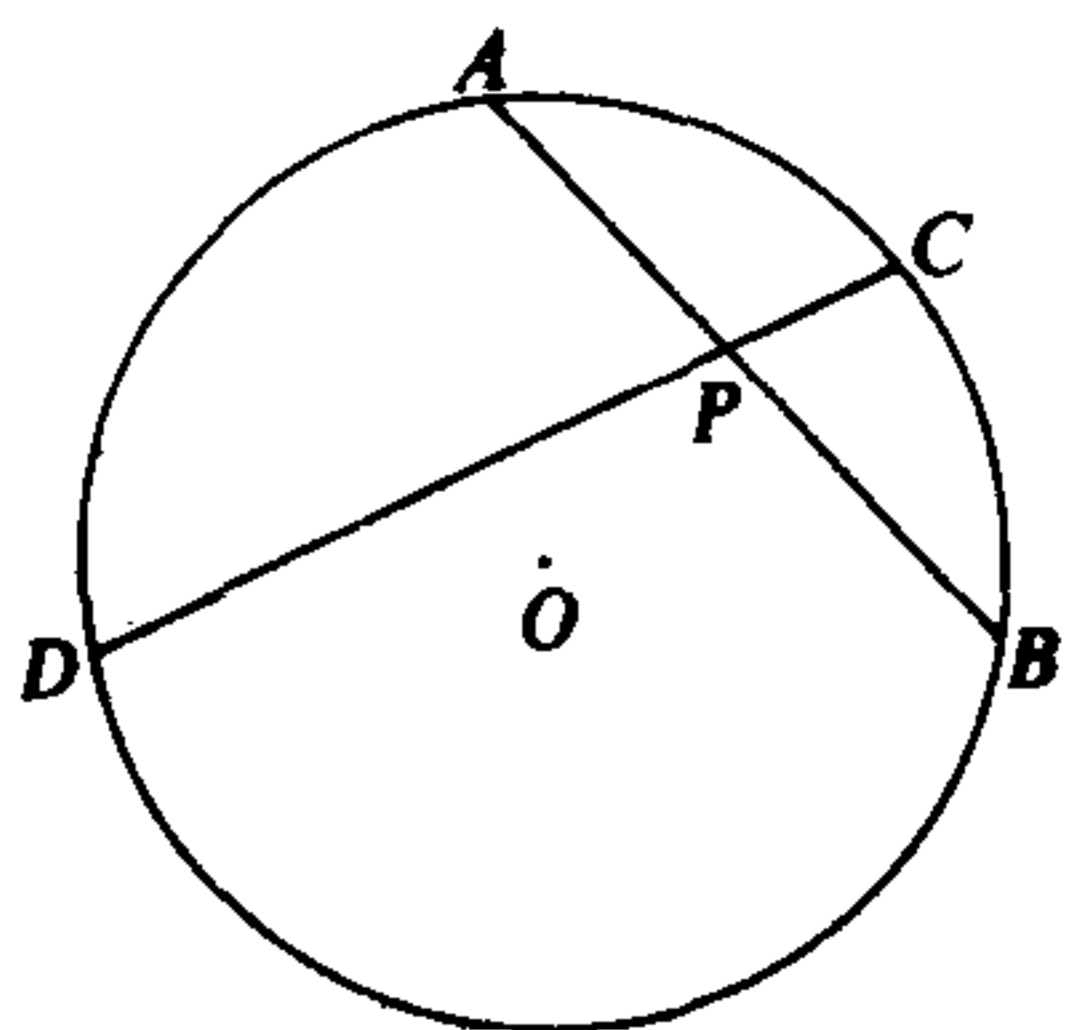


图 6.1

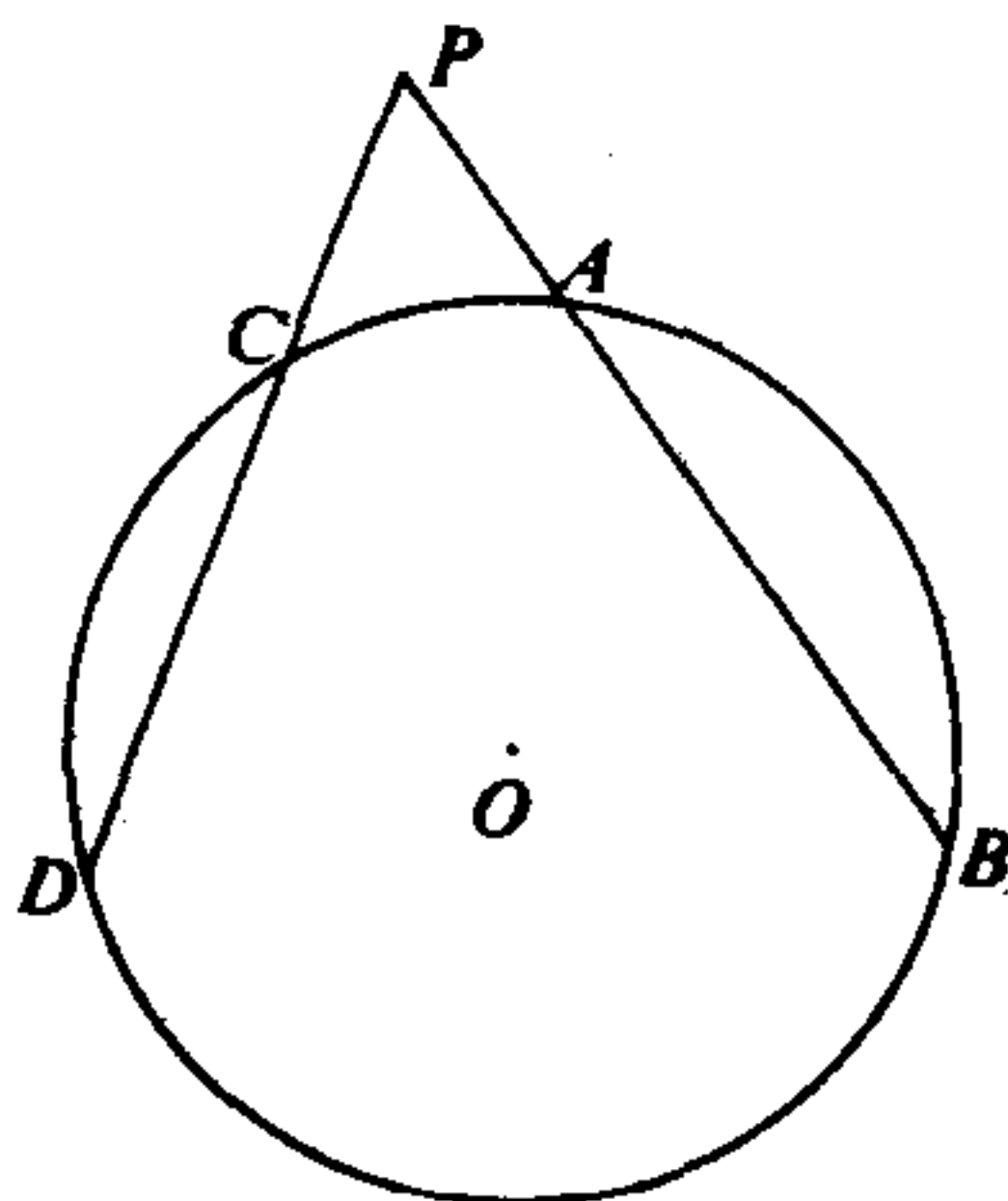


图 6.2

两端的距离之积相等. 于是, 可把相交弦定理和割线定理统一概括为如下的形式:

定理 6.1 两条相交直线分别与圆相交, 则两直线的交点到各弦两端的距离之积相等.

以 D 为定点, 将 DC 继续沿逆时针方向旋转, 则 DC 越来越短, 当点 D, C 重合时, PD 变为圆的切线(图 6.3). 因此, 式(6.1)变为

$$PA \cdot PB = PD^2. \quad (6.2)$$

这就是切割线定理.

在图 6.3 中, 以 P 为定点, 将直线 PB 沿逆时针方向旋转, 则 AB 越来越短, 当 A, B 重合时, PB 变为圆的切线(图 6.4).

因此, 式(6.2)变为 $PB^2 = PD^2$, 即

$$PB = PD. \quad (6.3)$$

这就是切线长定理.

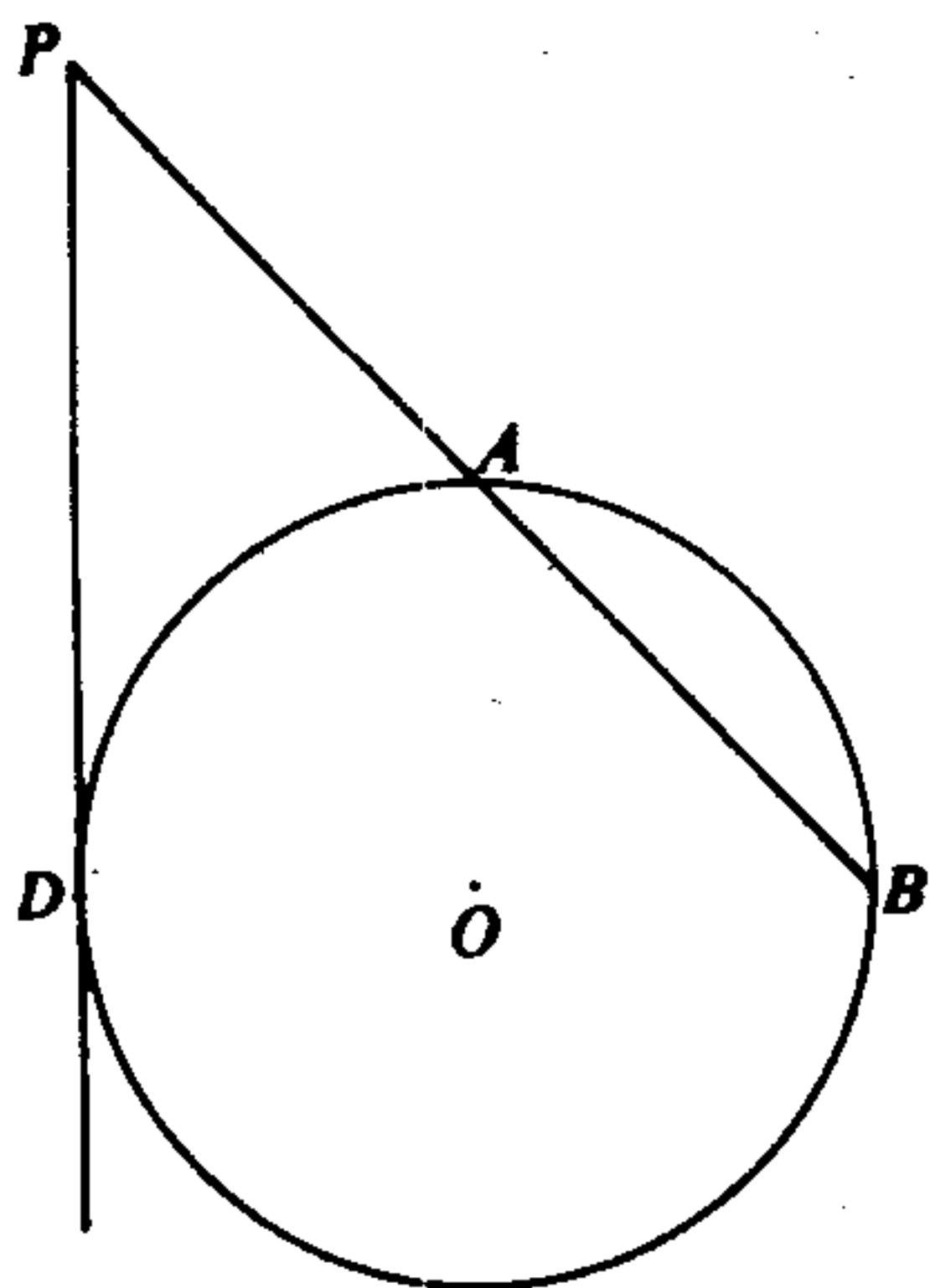


图 6.3

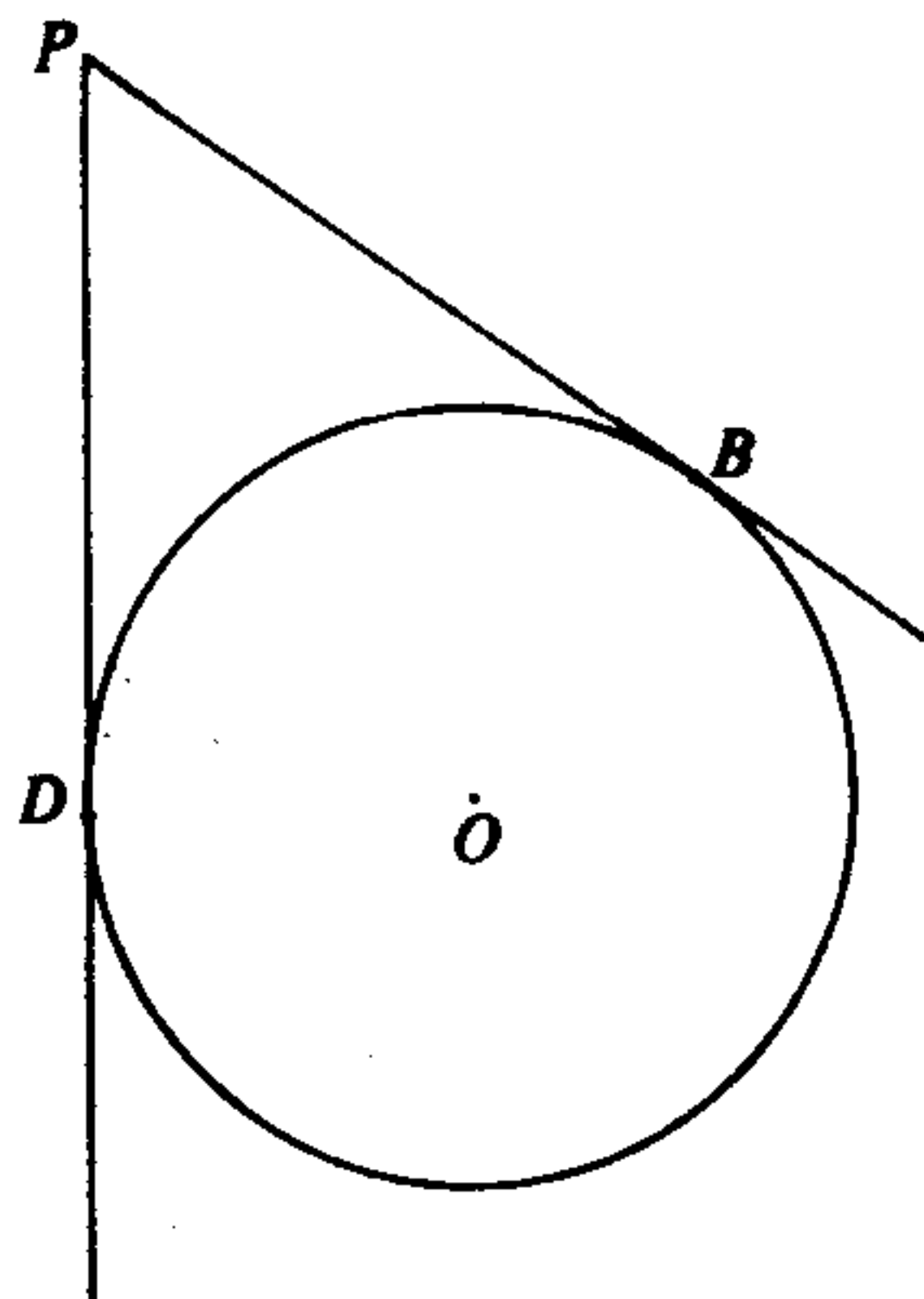


图 6.4

切割线定理和切线长定理都可视为割线定理的特殊情况. 因此定理 6.1 概括了切割线定理和切线长定理, 只须把切线视为弦的两端点重合时的特殊情况即可.

与割线定理的两种特殊情况相对应, 在相交弦定理也有两种特殊情况: 在图 6.5 中, DC 过圆心 O , 且 $DC \perp AB$, 这时等式变为

$$PA^2 = PC \cdot PD, \quad (6.4)$$

这是射影定理的一个表达式; 在图 6.6 中, 两条弦的交点过圆心 O , 交点到圆周的距离是圆的半径.

过点 P 到各弦两端的距离之积皆相等, 这个固定的值究竟等于什么? 这是一个定值问题. 当点 P 确定之后, OP 和圆的半径 r 都是定值, 因此, 考虑过点 P 的直线, 须有一条通过圆心 O . 下面分两种情况讨论.

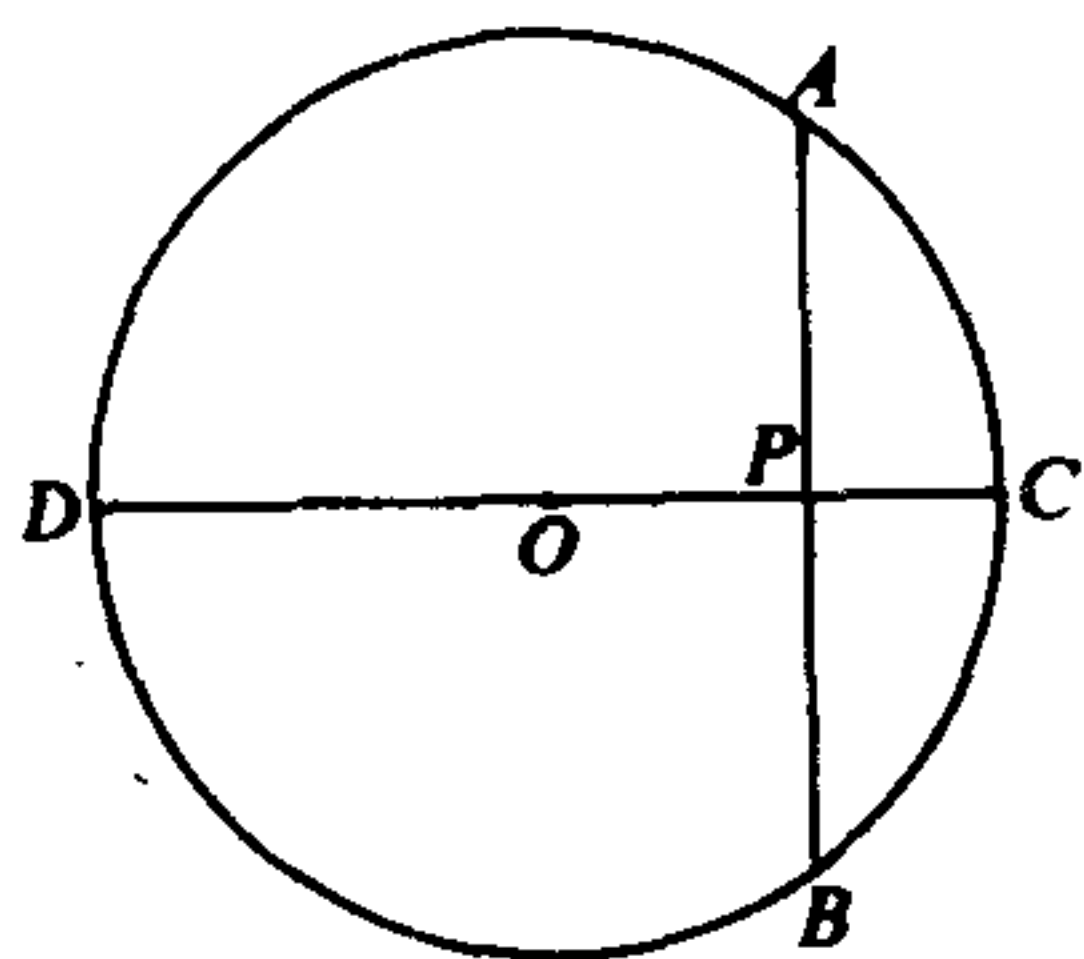


图 6.5

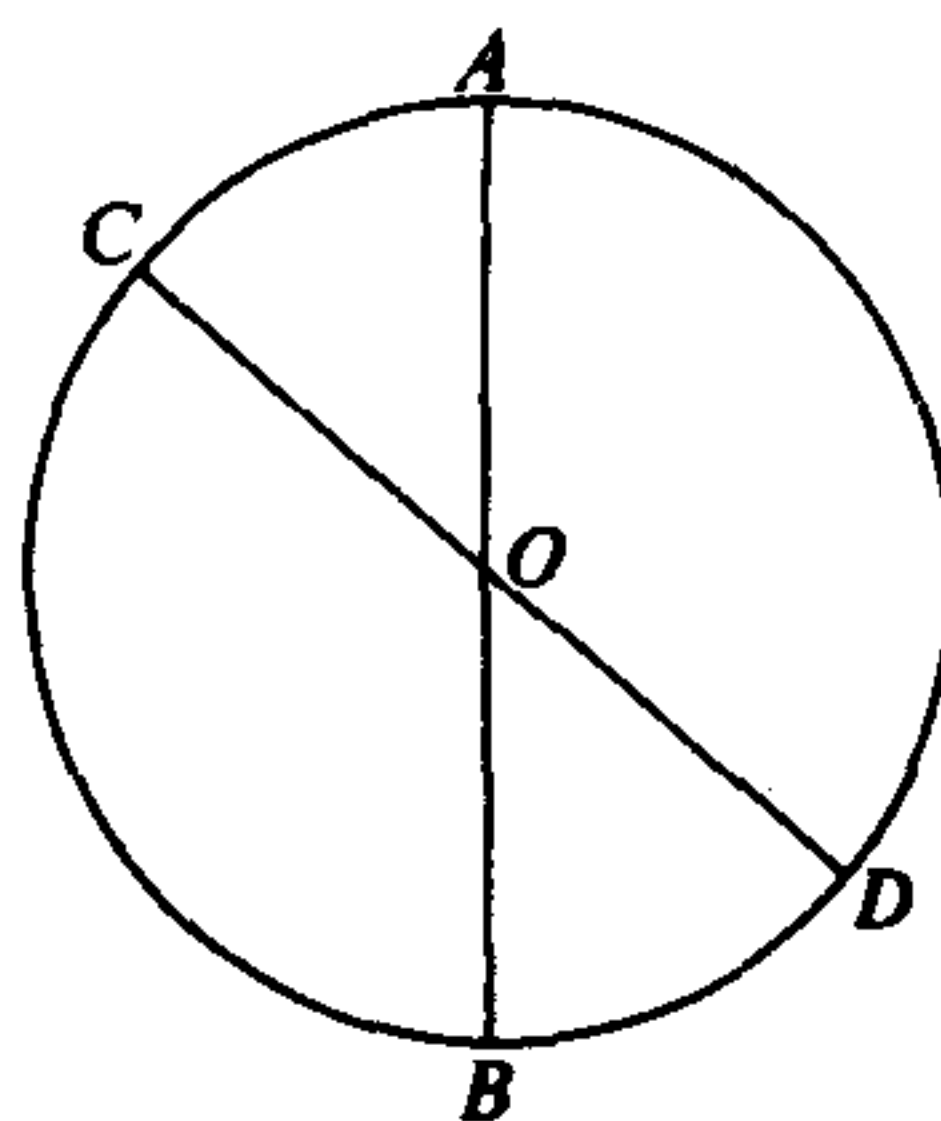


图 6.6

(1) 点 P 在圆内. 如图 6.7, 直线 CD 过圆心 O , 则

$$PC = r + OP, \quad PD = r - OP.$$

于是, 由定理 6.1 可得

$$\begin{aligned} PA \cdot PB &= PC \cdot PD \\ &= (r + OP)(r - OP) = r^2 - OP^2. \end{aligned}$$

(2) 点 P 在圆外. 如图 6.8, CD 过圆心 O , 则

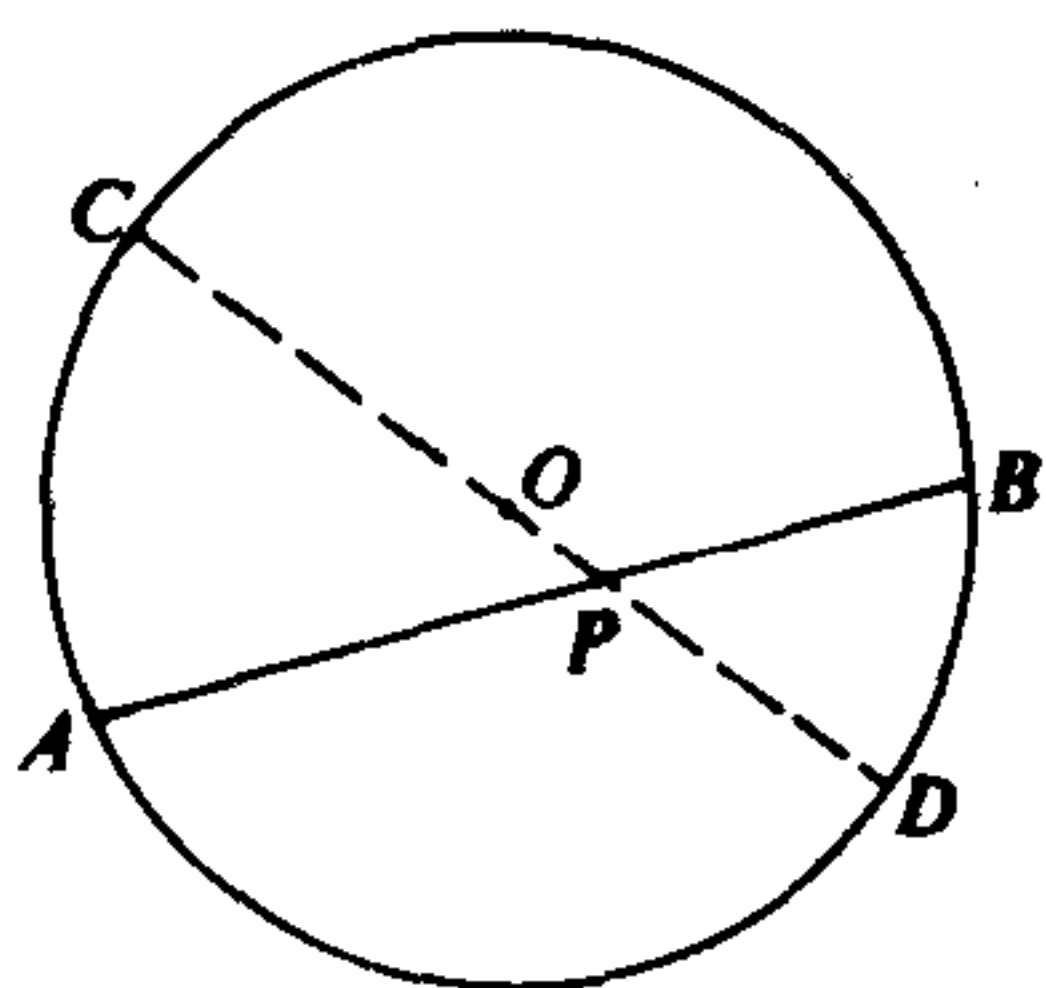


图 6.7

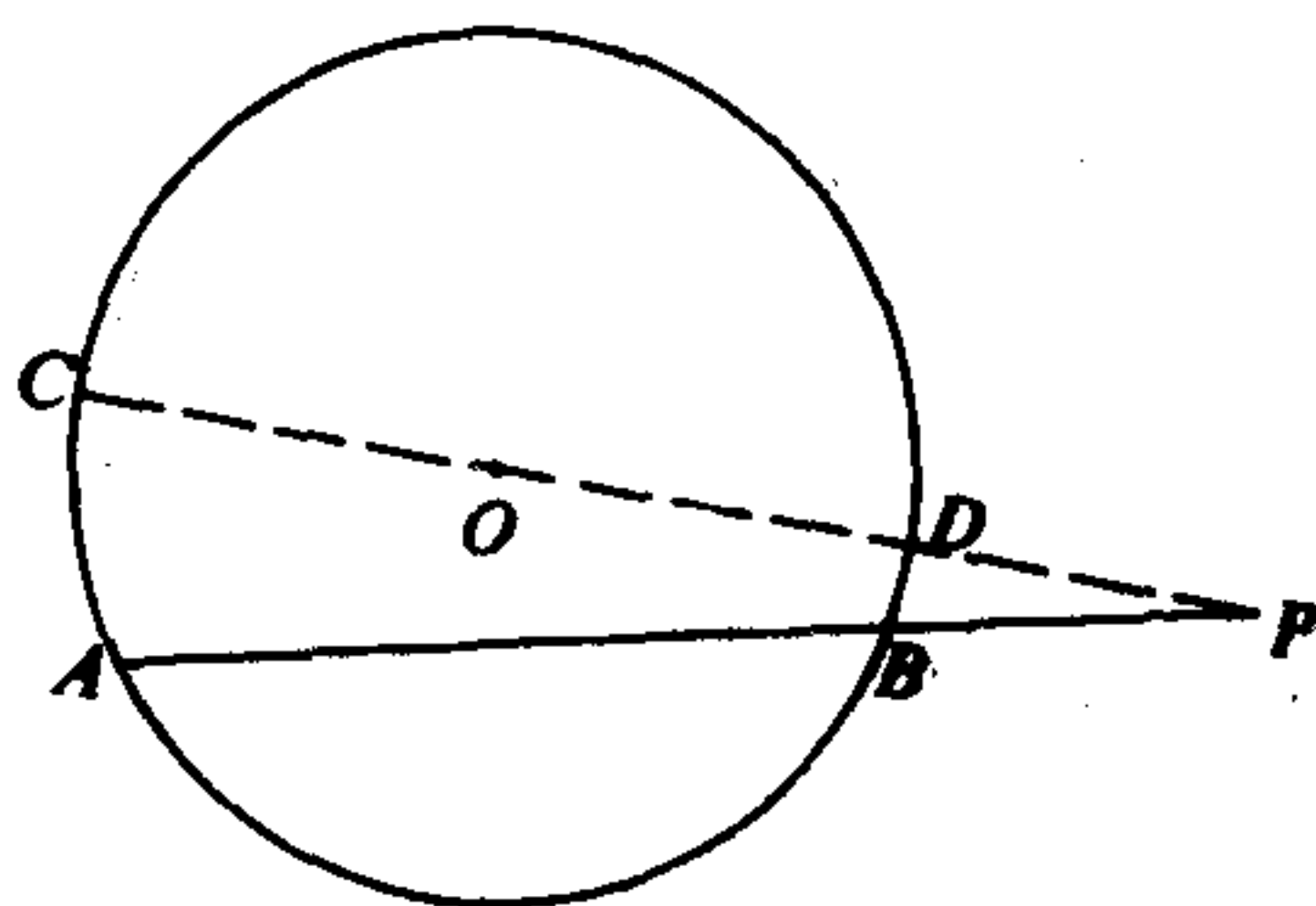


图 6.8

$$PC = OP + r, \quad PD = OP - r.$$

因此, 由定理 6.1 可得

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

$$=(OP+r)(OP-r)=OP^2-r^2.$$

综合(1),(2),可得定理 6.1 的定值表达式

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = |r^2 - OP^2|. \quad (6.5)$$

这样一来,就得到了如下的圆幂定理.

定理 6.2 一直线与半径为 r 的圆 O 相交,在直线上取一不在圆周上的点 P ,则该点到弦两端的距离之积是定值 $|r^2 - OP^2|$.

6.3 勾股定理的一种推广

在平面几何中,我们可能证明过如下两个命题.

命题 6.1 以 $\triangle ABC$ 的边 BC 为直径作圆,分别与边 AB, AC 交于点 D, E (图 6.9),则有

$$BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA.$$

证 连结 BE, CD , 则

$$BC^2 = BE^2 + CE^2, \quad (6.6)$$

$$BC^2 = CD^2 + BD^2. \quad (6.7)$$

而

$$BE^2 = BA^2 - EA^2,$$

$$CD^2 = CA^2 - DA^2,$$

分别代入(6.6),(6.7),然后相加

得

$$\begin{aligned} 2BC^2 &= BA^2 - EA^2 + CE^2 + CA^2 - DA^2 + BD^2 \\ &= BA^2 - (BA - BD)^2 + BD^2 + CA^2 - (CA - CE)^2 + CE^2 \\ &= 2BD \cdot BA + 2CE \cdot CA, \end{aligned}$$

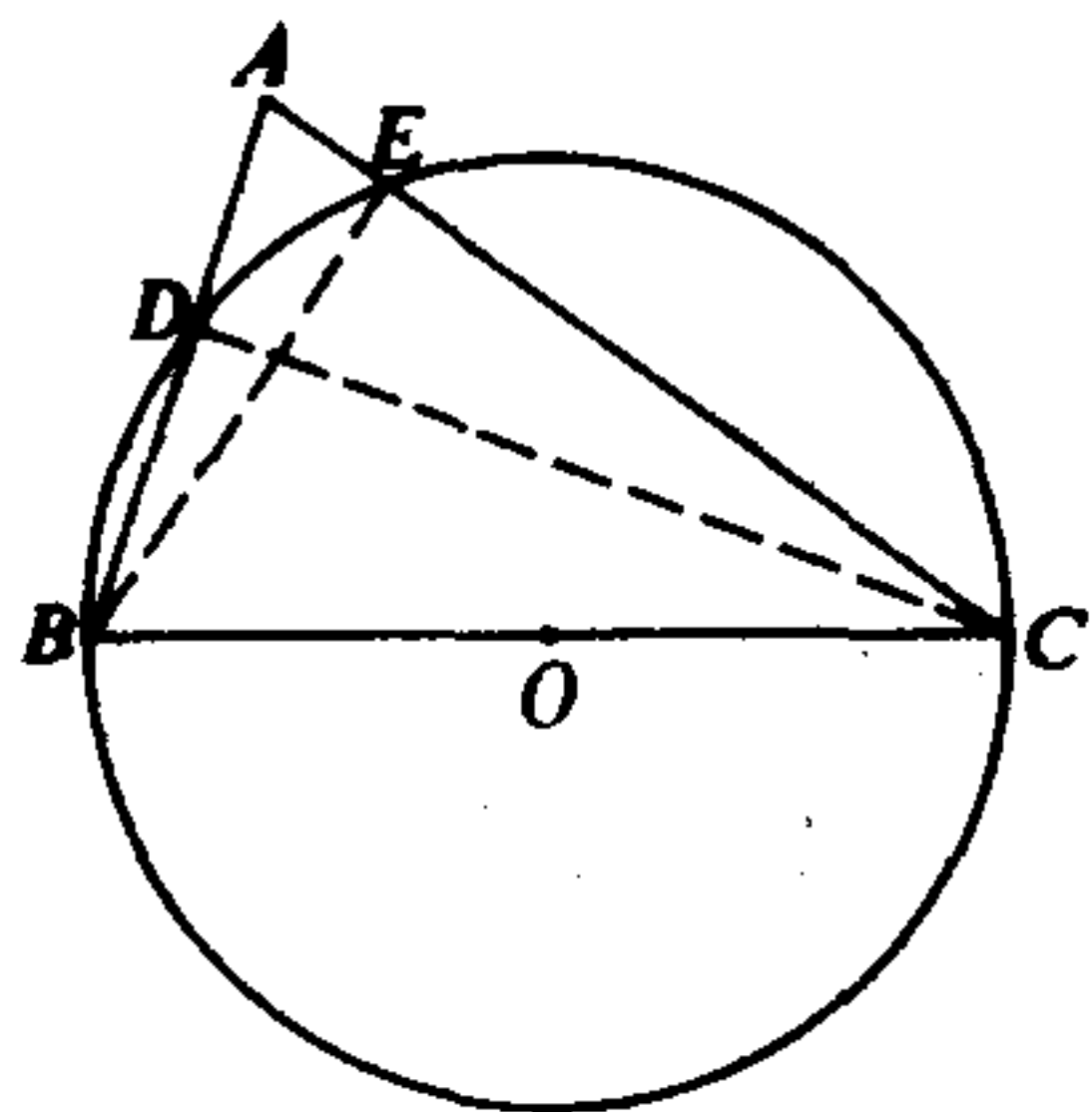


图 6.9

即 $BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA$.

命题 6.2 自圆的直径 BC 的两端引二弦 CE, BD , 在圆内交于点 A (图 6.10), 则有

$$BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA.$$

证 连结 BE, CD , 则

$$BC^2 = BE^2 + CE^2, \quad (6.8)$$

$$BC^2 = CD^2 + BD^2. \quad (6.9)$$

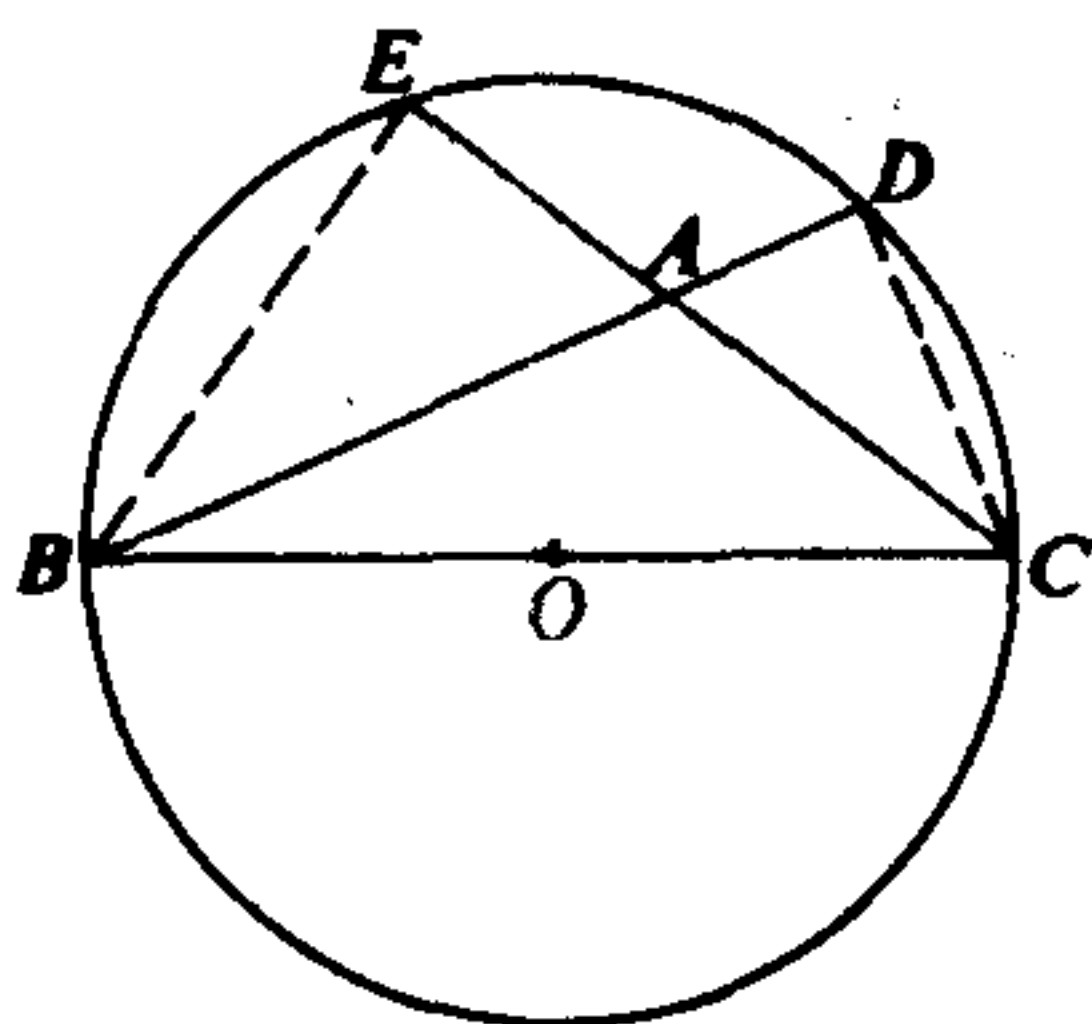


图 6.10

而

$$BE^2 = BA^2 - EA^2,$$

$$CD^2 = CA^2 - DA^2,$$

分别代入 (6.8), (6.9), 然后相加得

$$\begin{aligned} 2BC^2 &= BA^2 - EA^2 + CE^2 + CA^2 - DA^2 + BD^2 \\ &= BA^2 - (BD - BA)^2 + BD^2 + CA^2 - (CE - CA)^2 + CE^2 \\ &= 2BD \cdot BA + 2CE \cdot CA, \end{aligned}$$

即 $BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA$.

命题 6.1 与 6.2 的结论完全一样, 证明的步骤和过程, 以及数学表述也几乎完全一样, 只是其中两个地方相差一个负号. 这绝非偶然的巧合, 用几何动态的观点, 就可把这两个命题联系起来, 并给出统一的表述.

通过对图 6.9 和图 6.10 的观察、分析和比较, 找出二者的异同点, 我们就可把命题 6.1 和命题 6.2 的条件都视为两条相交直线分别过圆的直径两端, 且与圆相交. 又因为命题的结论完全一样, 于是命题 6.1 与 6.2 可概括为如下的命题

6.3.

命题 6.3 自圆的直径 BC 两端引二直线相交于 A , 且分别与圆周相交于 D, E , 则有

$$BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA. \quad (6.10)$$

既然是两条相交直线与圆之间的关系, 那就有各种各样的位置关系. 下面我们在图 6.10 的基础上, 以几何动态的观点来讨论这个问题: 即以点 B 为定点, 将直线 BA 旋转 360° , 其他不动, 考察它与圆所处的各种位置关系.

若将 BA 沿逆时针方向旋转, 则 AD 越来越短, 特别当 A, D, E 重合时, 有 $BA = BD, CE = CA$ (图 6.11), 这时式 (6.10) 就变成

$$BC^2 = BA^2 + CA^2. \quad (6.11)$$

这就是勾股定理.

将 BA 继续旋转, 就得到如图 6.9 所示的情况, 这时 (6.10) 仍然成立.

再继续旋转, BD 越来越短, 特别当 B, D 重合时, BA 变为圆的切线 (图 6.12), 这时 (6.10) 变成

$$BC^2 = CE \cdot CA. \quad (6.12)$$

这就是射影定理.

在图 6.12 中, 继续以 B 为定点, 沿逆时针方向旋转 BA , 使之处在图 6.13 所示的位置, 此时 CA 增长, BC 为定值, 因此猜想 (6.10) 中的 $BD \cdot BA$ 应在前面加上负号, 即 $-BD \cdot BA$, 于是 (6.10) 变成

$$BC^2 = -BD \cdot BA + CE \cdot CA. \quad (6.13)$$

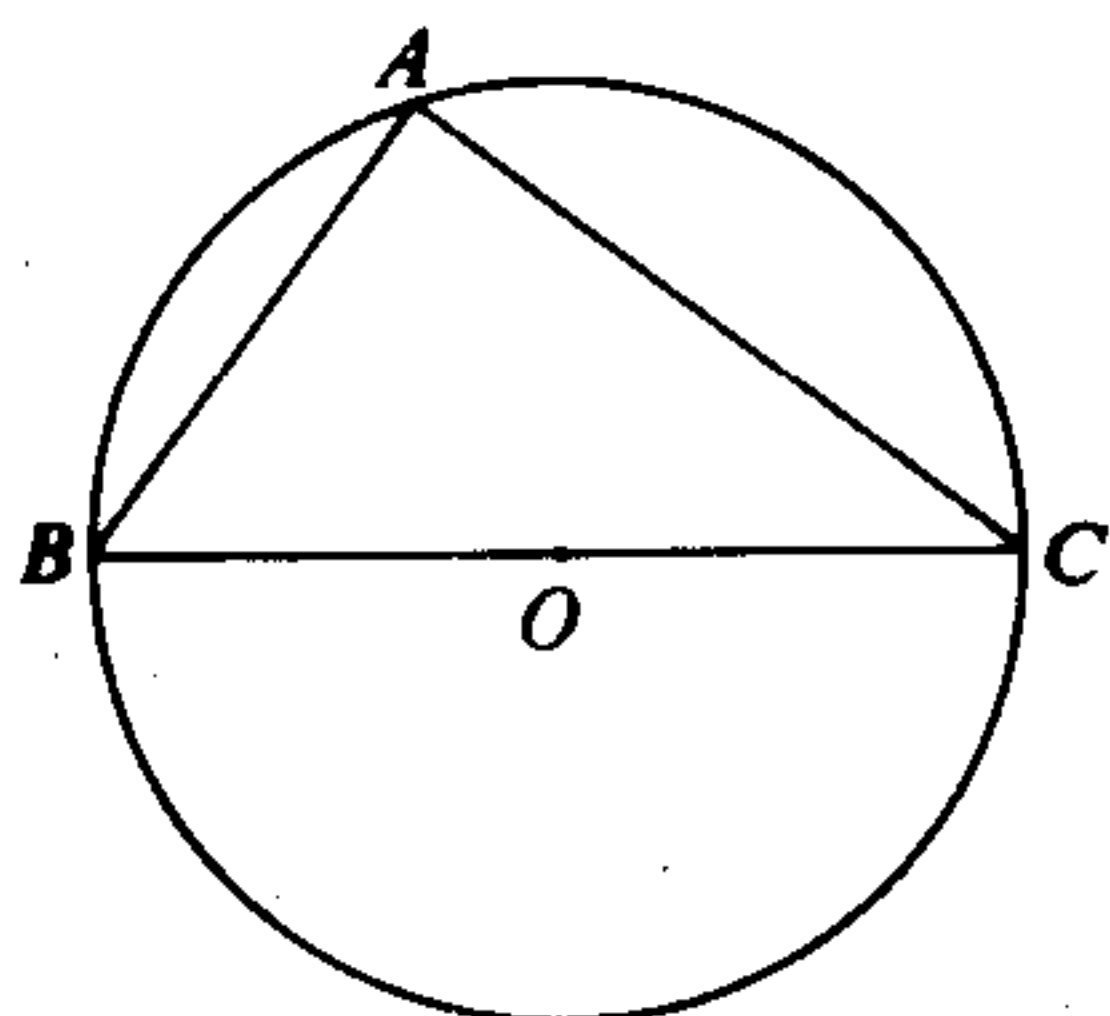


图 6.11

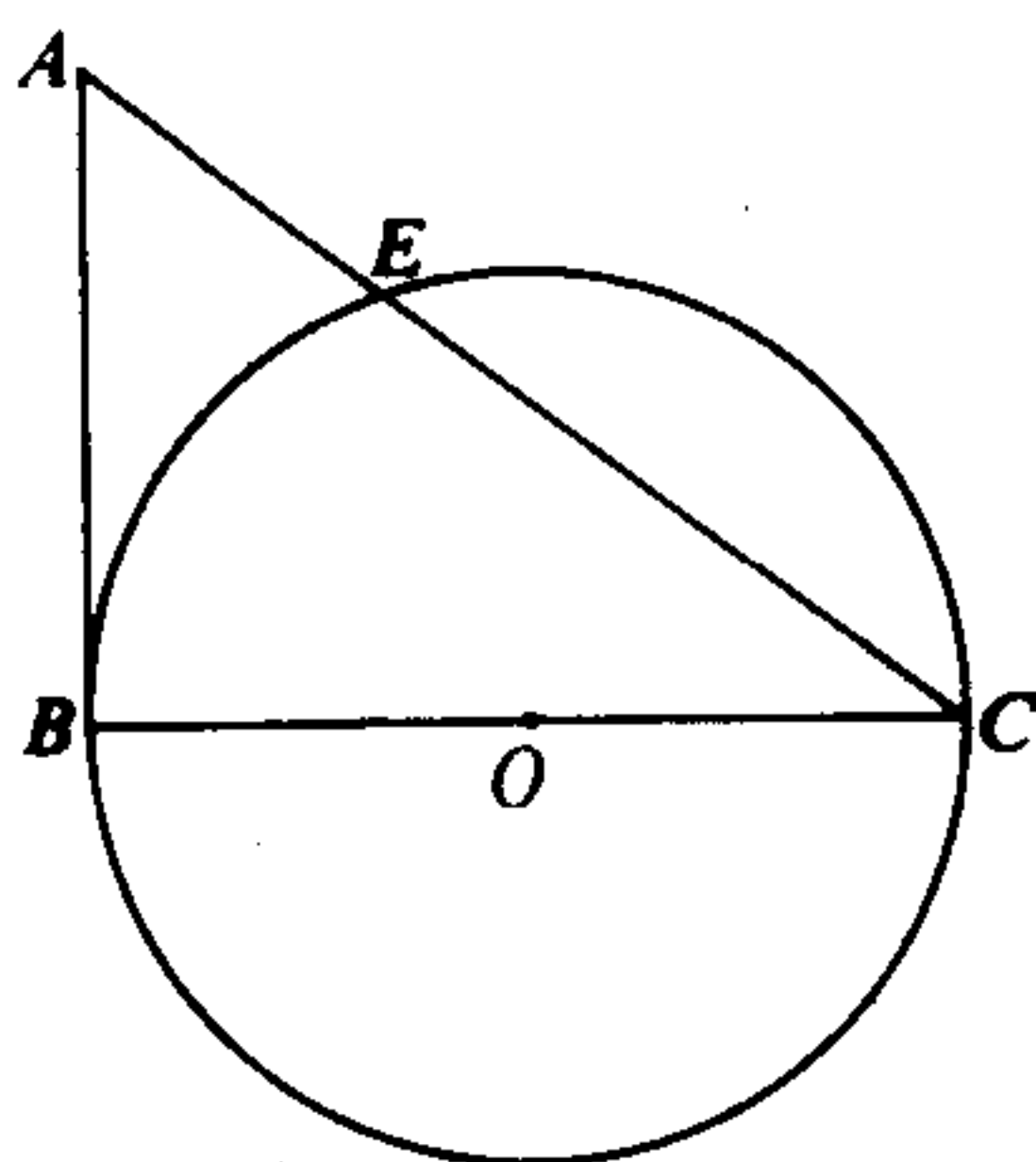


图 6.12

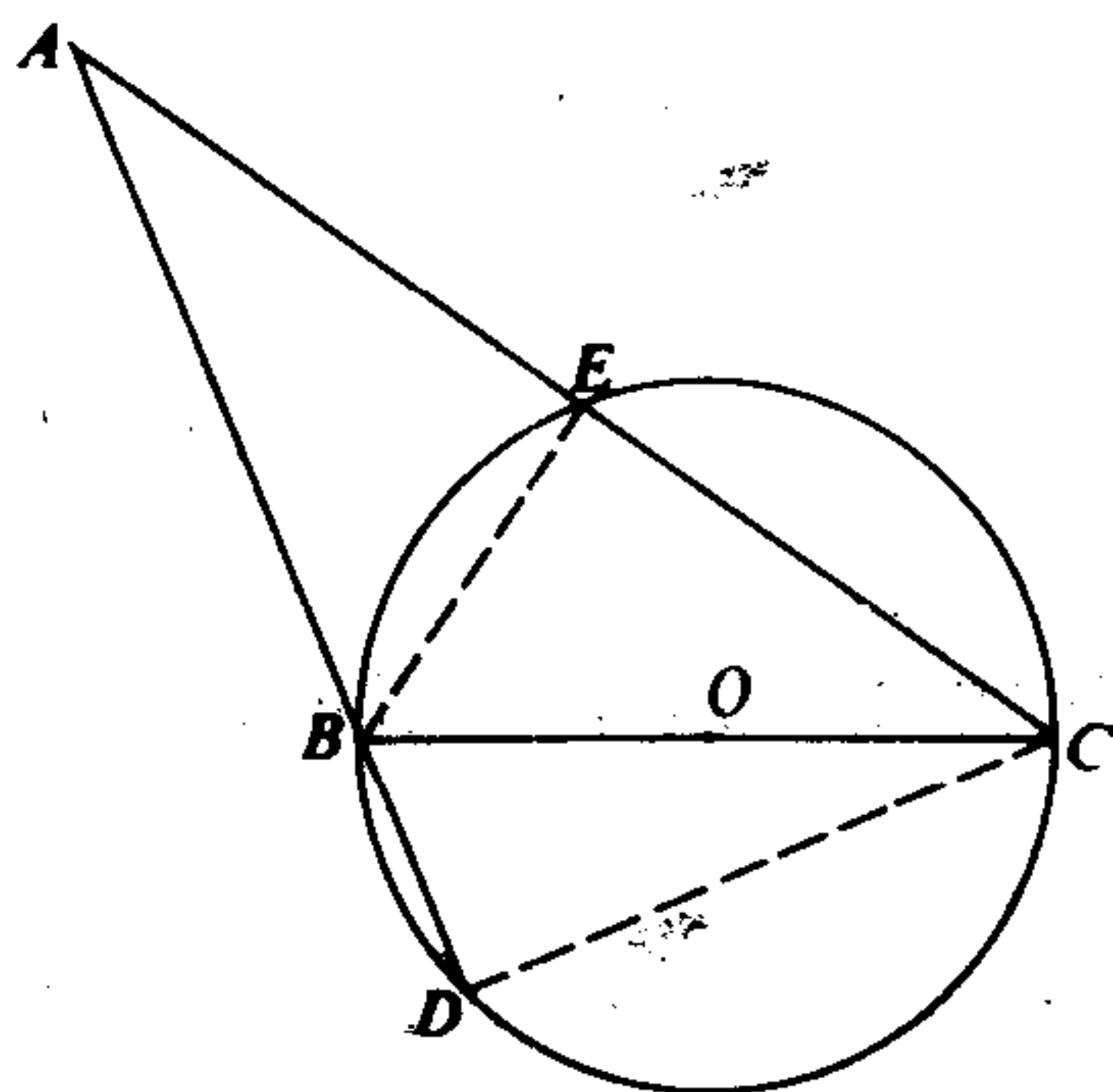


图 6.13

现对上式予以证明. 如

图 6.13, 连结 BE, CD , 则

$$BC^2 = BE^2 + CE^2, \quad (6.14)$$

$$BC^2 = CD^2 + BD^2. \quad (6.15)$$

而

$$BE^2 = BA^2 - EA^2,$$

$$CD^2 = CA^2 - DA^2,$$

分别代入 (6.14), (6.15), 然

后相加得

$$\begin{aligned} 2BC^2 &= BA^2 - EA^2 + CE^2 + CA^2 - DA^2 + BD^2 \\ &= BA^2 - (BA + BD)^2 + BD^2 + CA^2 - (CA - CE)^2 + CE^2 \\ &= -2BD \cdot BA + 2CE \cdot CA, \end{aligned}$$

即
$$BC^2 = -BD \cdot BA + CE \cdot CA.$$

将 BA 继续旋转到如图 6.14 所示的位置, 这时可猜想 (6.10) 中的 $CE \cdot CA$ 应在前面加上负号, 即 $-CE \cdot CA$, 于是

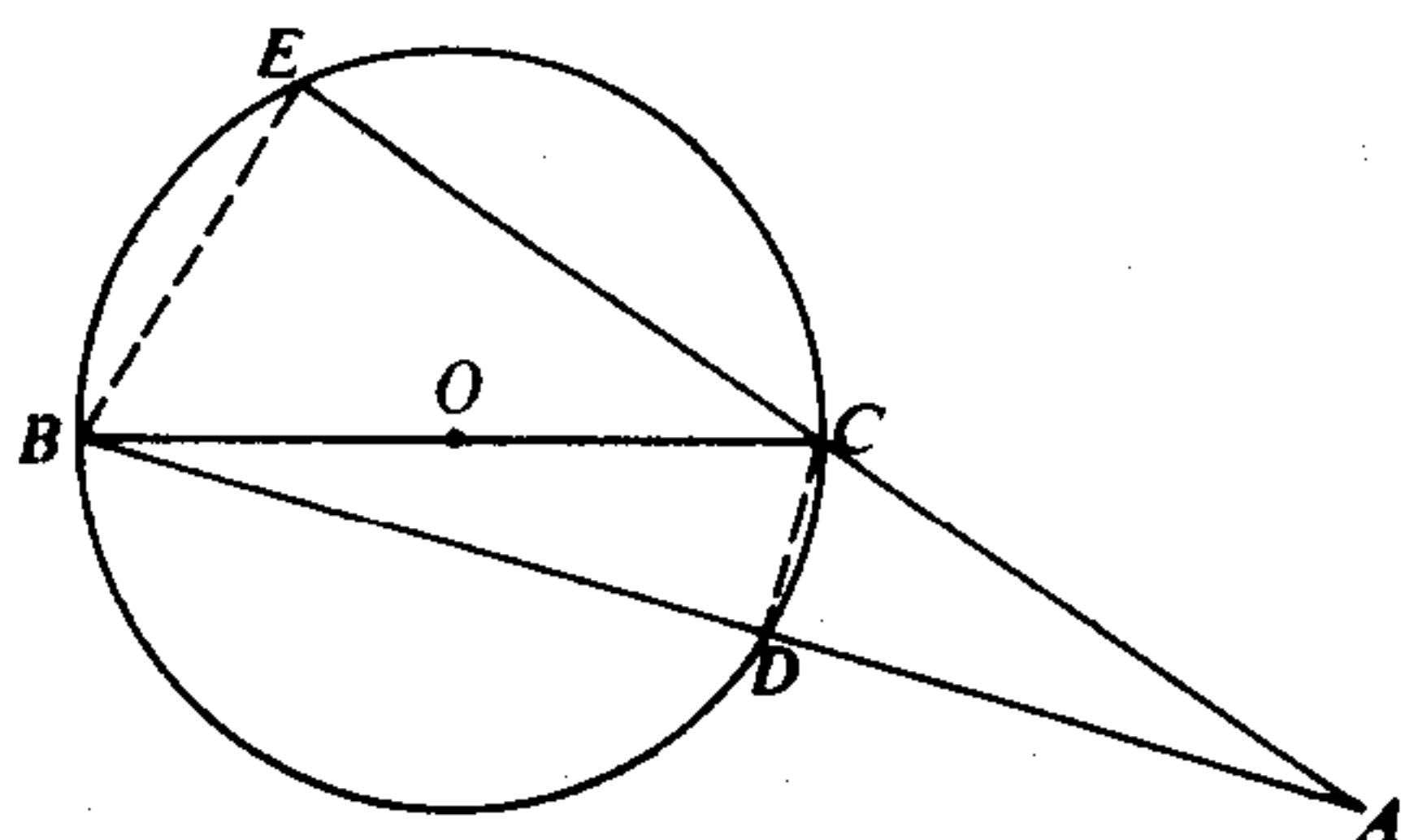


图 6.14

(6.10)变成

$$BC^2 = BD \cdot BA - CE \cdot CA. \quad (6.16)$$

现对上式予以证明. 如图 6.14, 连结 BE, CD , 则

$$BC^2 = BE^2 + CE^2, \quad (6.17)$$

$$BC^2 = CD^2 + BD^2. \quad (6.18)$$

而

$$BE^2 = BA^2 - EA^2,$$

$$CD^2 = CA^2 - DA^2,$$

分别代入(6.17), (6.18), 然后相加得

$$\begin{aligned} 2BC^2 &= BA^2 - EA^2 + CE^2 + CA^2 - DA^2 + BD^2 \\ &= BA^2 - (BA - BD)^2 + BD^2 + CA^2 - (CA + CE)^2 + CE^2 \\ &= 2BD \cdot BA - 2CE \cdot CA, \end{aligned}$$

即 $BC^2 = BD \cdot BA - CE \cdot CA.$

如果引入方向线段, 比如规定在 BC 上方的线段取正值, 在 BC 下方的线段取负值, 线段 BC 既可取正值, 也可取负值, 于是式(6.10), (6.11), (6.12), (6.13), (6.16)就可统一

起来,得到命题 6.4.

命题 6.4 自圆的直径 BC 的两端引相交于 A 的二直线,若它们分别与圆周相交于 D, E ,且如上述规定线段的方向,则有

$$\overline{BC}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{BA} + \overline{CE} \cdot \overline{CA}. \quad (6.19)$$

显然,命题 6.4 可以看做勾股定理与圆联系以后的一种推广.

6.4 动静结合

在探讨几何极值问题时,常常可以让某些点按照某种规律运动,通过这种运动过程,从几何直观猜测极值所在的特定位置,这可以说是动中求静;然后,又以静窥动,再取其他位置上的点,证明这些其他的点都不符合题意,从而达到解题的目的.

例 6.1 一个士兵要探明一个正三角形区域的内部或边界上是否埋有地雷,探测器的有效范围等于这个正三角形的高的一半.这个士兵从三角形的一个顶点开始探测,问他应选择怎样的探测路线才能使探遍整个区域的路程最短?(第 15 届国际数学奥林匹克试题)

解 如图 6.15,不妨设该士兵从给定正三角形 ABC (其高为 h)的顶点 A 出发,为了探测距点 A 最远的 C, B 两点的布雷情况,其探测路线必须经过以 C, B 为圆心,以 $\frac{h}{2}$ 为半径的两个圆弧 $\widehat{KQ}$ 与 $\widehat{MN}$. 在 $\widehat{KQ}$ 上选一点 D , 在 $\widehat{MN}$ 上选一点 E ,

由于两点间的距离以直线为最短,因此问题也就归结为:如何在两段弧上分别选取 D, E ,使得 $AD+DE$ 最短. 由于 $BE = \frac{h}{2}$ 为定值,因而问题又可等价归结为在 $CD = \frac{h}{2}$ 的条件下,求 $AD+DB$ 的最小值.

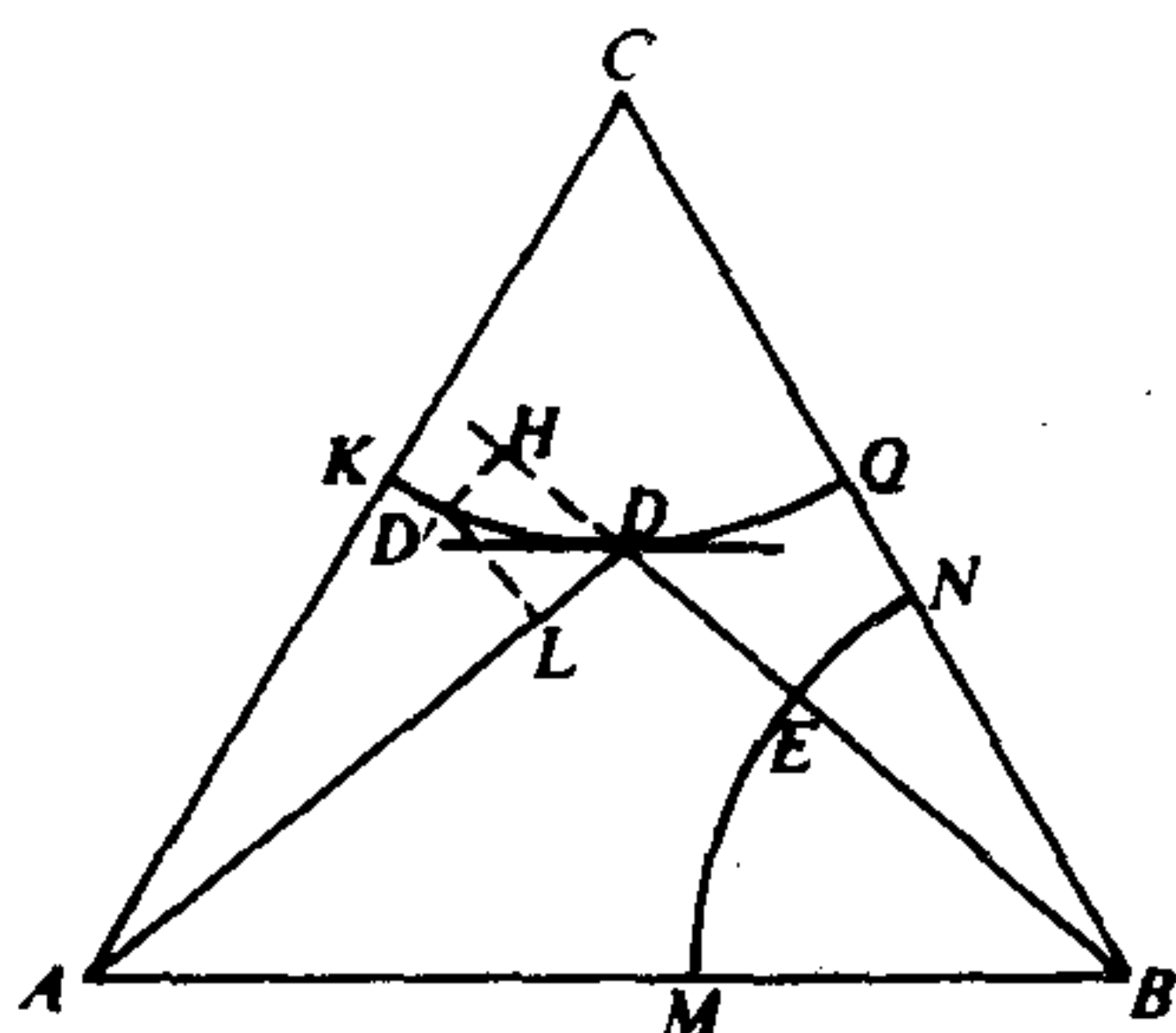


图 6.15

现让点 D 在 $\widehat{KQ}$ 上移动,从直观上猜想距直线 AB 最近的那一点 D ,即从顶点 C 到 AB 的高的中点 D ,可能符合问题要求. 为了验证这一结论,就需要在 $\widehat{KQ}$ 上任取一点 D' ,然后证明 $AD' + D'B > AD + DB$.

不妨取 $\widehat{KD}$ 上的一点 D' ,过 D' 分别向 AD 与 BD 的延长线作垂线,交 AD 与 BD 的延长线于点 L, H . 由于过点 D 且平行于 AB 的直线,既是 $\widehat{KQ}$ 在点 D 处的切线,又是 $\angle LDH$ 的平分线,所以 D', H 必在 $\angle LDH$ 的平分线的同侧,从而 $HD' < D'L$. 又在 $\text{Rt}\triangle D'HD$ 和 $\text{Rt}\triangle D'LD$ 中,由勾股定理知 $HD > LD$,即 $HD - LD > 0$,于是有

$$\begin{aligned} AD' + D'B &> AL + HB \\ &= (AD - LD) + (HD + DB) \\ &= AD + DB + HD - LD \\ &> AD + DB. \end{aligned}$$

如果进一步问,这条路线是否能保证不会有遗漏点?让我

们来看一下.

在路线 ADE 上任取一点 P , 过 P 作 $JK \perp AB$, 交 AC 于 J , 交 AB 于 K ; 过 E 作 $QR \perp AB$, 交 BC 于 Q , 交 AB 于 R (图 6.16).

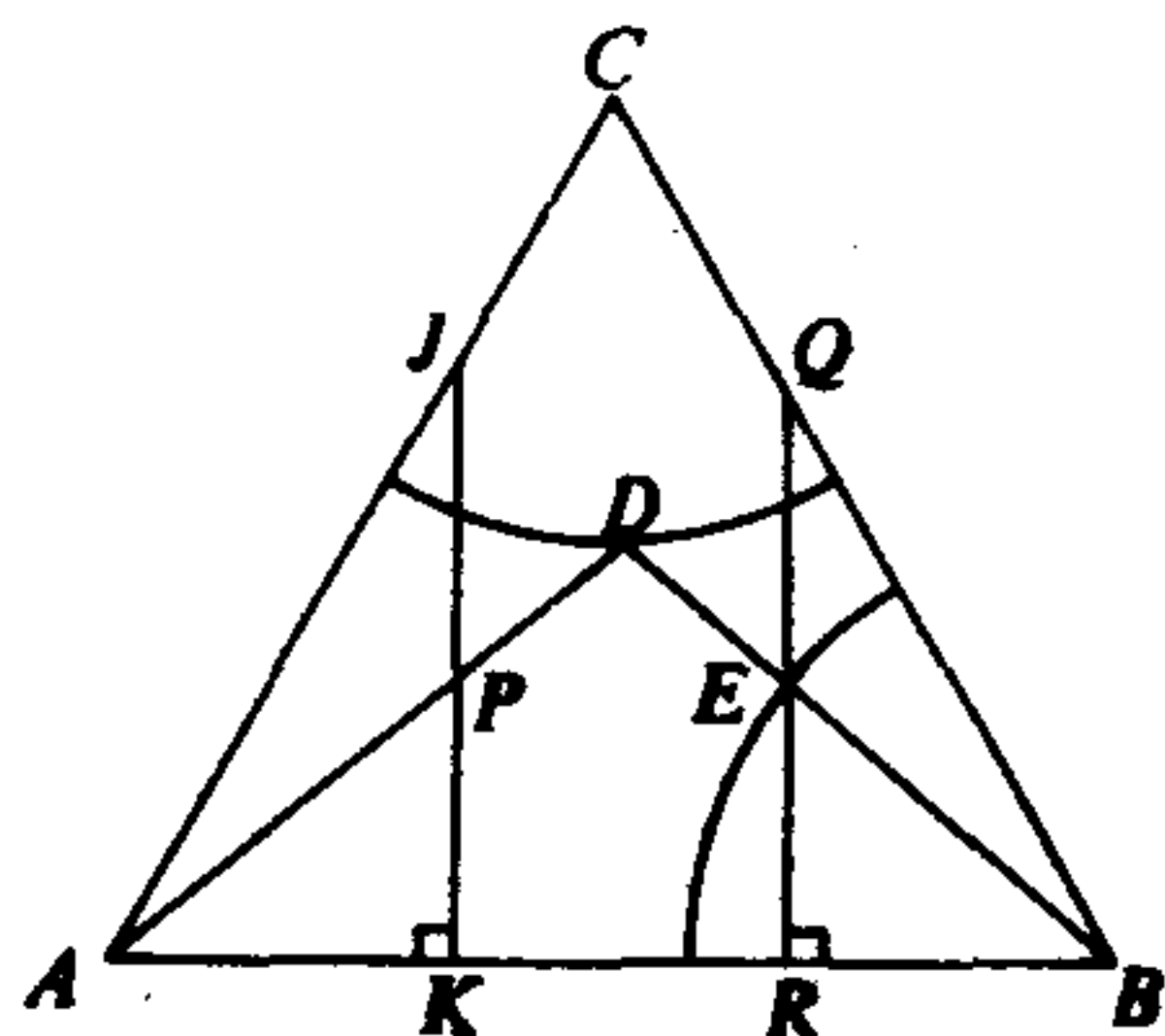


图 6.16

显然 $PJ \leq CD = \frac{h}{2}$, $PK \leq \frac{h}{2}$. 因此, 当点 P 沿着 ADE 运动时, 圆心为 P , 半径为 $\frac{h}{2}$ 的圆面纸片将覆盖四边形区域 $ARQC$, 即士兵沿着路线 ADE 行走, 可以探遍整个四边形 $ARQC$ 的内部及其边界. 其次, 当士兵位于

E 处时, 以 E 为圆心, 以 $\frac{h}{2}$ 为半径的圆面将会覆盖 $\triangle BQR$ 的内部及边界, 从而士兵也就探遍了整个正三角形 ABC 的内部及边界.

例 6.2 如图 6.17, y 轴正半轴上有点 $A(0, a)$, $B(0, b)$, 且 $b > a$. 试在 x 轴正半轴上求一点 P , 使 $\angle APB$ 最大.

解 我们可以把这个求最大角的问题予以具体化. 不妨设 Ox 轴是一条

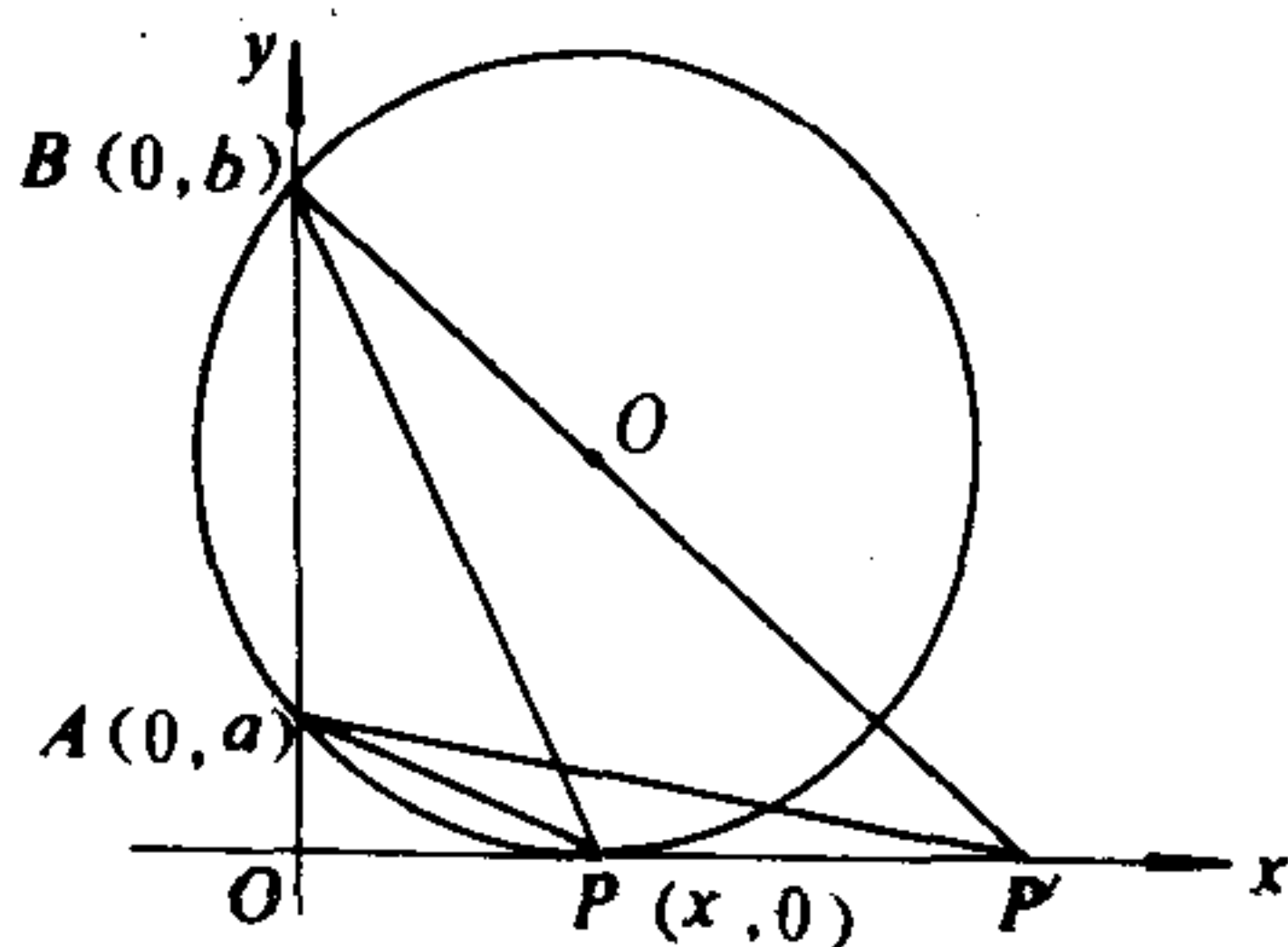


图 6.17

路,一个人望着目标 AB 沿此路从点 O 开始从左向右走. 最初 AB 的视角为零,然后这个角度逐渐增大;在走的过程中离开 AB 越来越远,其视角又逐渐缩小,特别地,在走到无穷远处,这个视角会变成零. 在这个视角等于零的两个极端情况之间,必然存在一点,使视角达到最大值. 这一点究竟在哪里呢? 假若在视角逐渐增大时,我们选一点为 X ,在此点视角为 θ ,那么当视角达到最大值,然后逐渐缩小时,必定也有一点 X' ,其视角也为 θ . 于是我们由圆周角的性质推知, X 和 X' 必定位于通过 A, B 两点的同一圆周上,如图 6.18 所示.

为此,我们可以通过已知的点 A, B 作若干个圆,若记圆与直线 Ox 分别相交于两点 X, X' , 则 $\angle AXB = \angle AX'B$. 当直线 XX' 越来越短,特别当 $XX' = 0$ 时,圆切于点 P ,此时形成的视角 $\angle APB$ 最大.

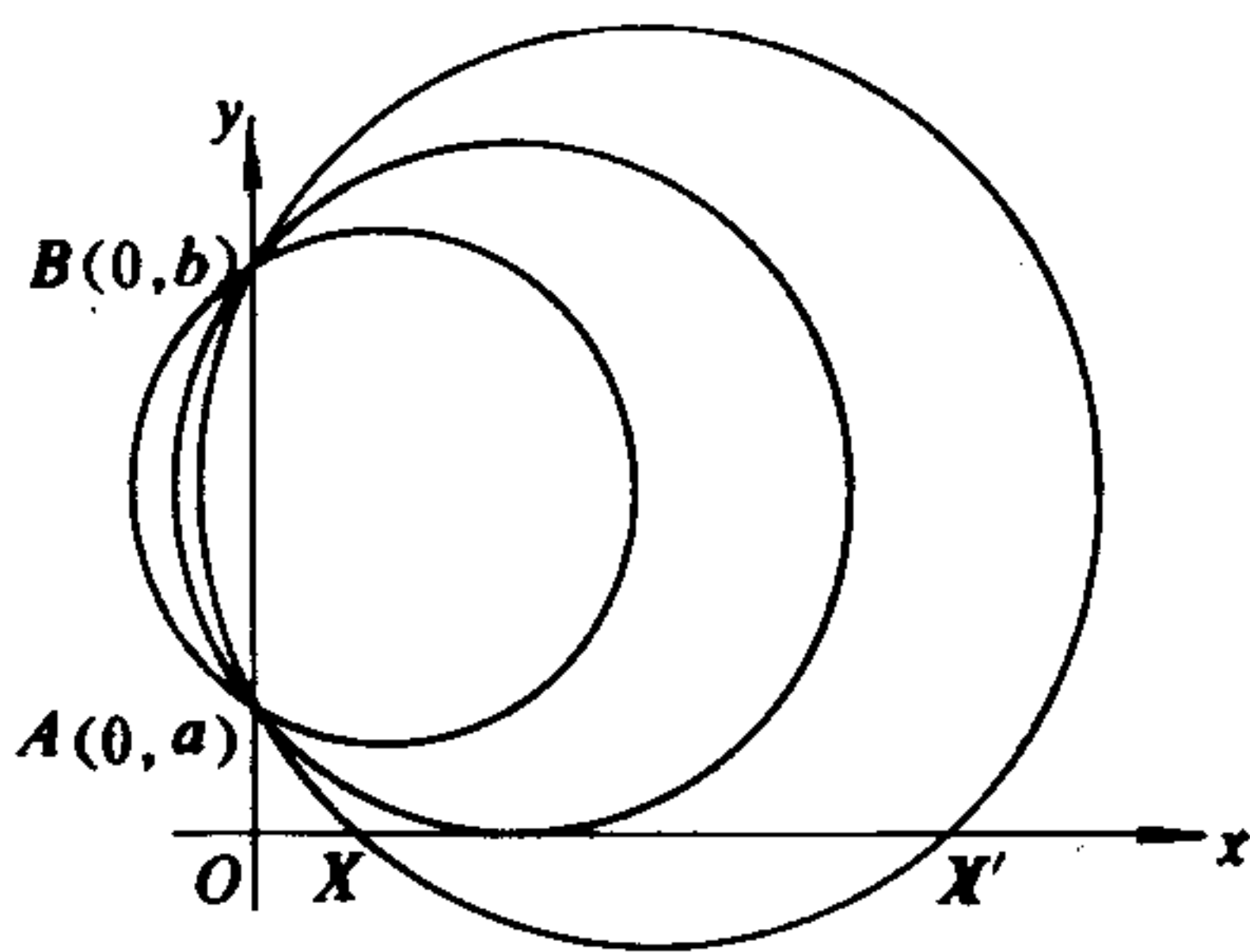


图 6.18

为了证明这一点,在 Ox 上任取一点 P' (图 6.17), 则有 $\angle AP'B$ 与 $\angle APB$ 是位于圆弧上的角,而 $\angle AP'B$ 为圆外角, $\angle APB$ 为圆周角,故有 $\angle AP'B < \angle APB$.

由切割线定理知, $OP^2 = OA \cdot OB$, 即 $x^2 = ab$, $x = \sqrt{ab}$, 所以点 P 的坐标为 $(\sqrt{ab}, 0)$.

6.5 极端情况

在有些几何图形中,当图形的某些元素按一定规律运动时,与其有关的另外的元素却可以在一定的范围内保持恒定不变,这就是几何中的定值问题.

欲证的定值问题究竟是多大,事先并未给出,因此定值的探求就成为解决问题的关键.

如果把图形看成集合,那么给定的图形中某些元素按一定规律运动时,这种动态已是集合中所谓的映射或对应,于是几何动态就可以用代数语言来描述.

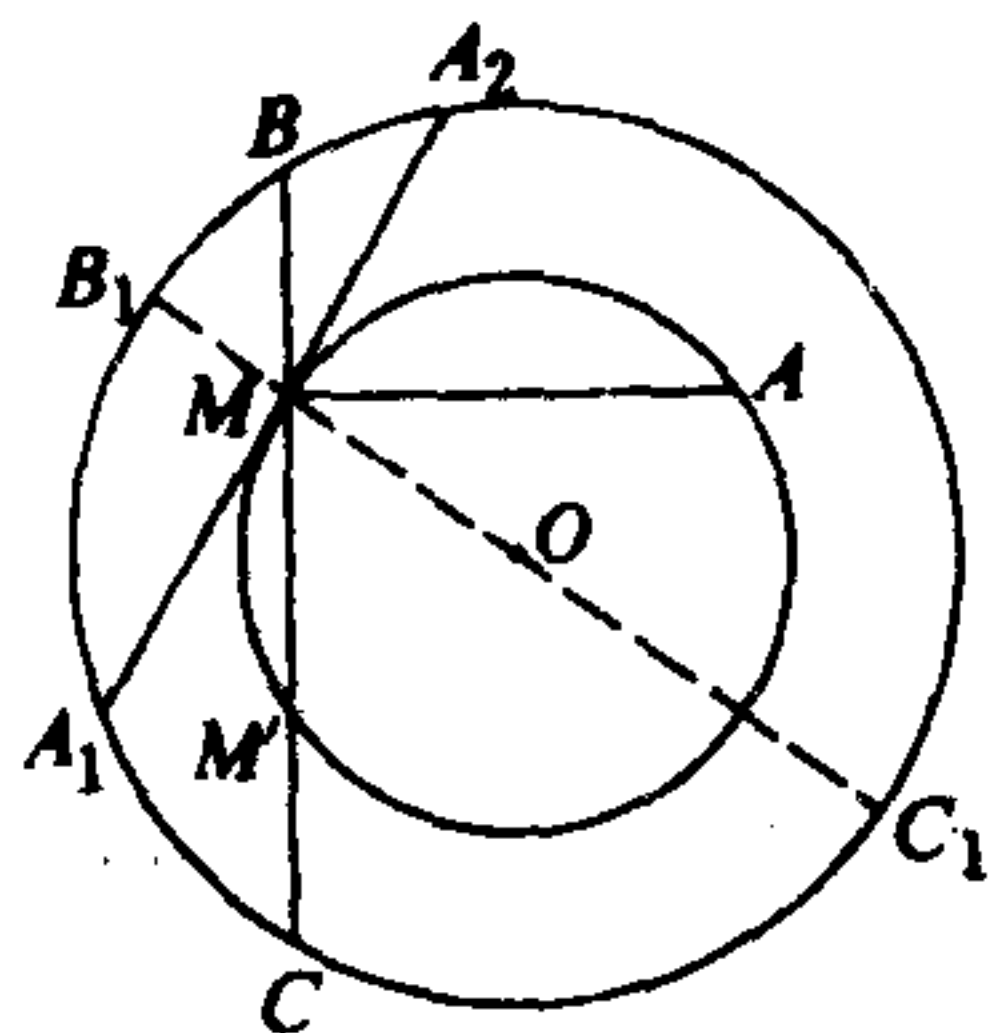


图 6.19

当某个平面图形上的任一点 A , 按某种运动规律运动时, 它对应平面上确定的一点 A' , 且对于任一点 A' 只有 A 与之相对应, 则称这种对应为平面到其自身的一一变换, 这时称点 A' 为 A 通过对应而产生的像, 而点 A 为 A' 的“原像”. 这样一来, 几何动态就是为了解题的需要,

把“原像”变化到易于发现规律的“像”上, 从而使定值得以确定.

例 6.3 如图 6.19, 已知以 O 为圆心, 分别以 R 和 r 为半径的两个同心圆, 过小圆上一定点 M 作小圆的弦 MA 和大圆的弦 BMC , 且使 $MA \perp BC$. 求证 $AB^2 + BC^2 + CA^2$ 为定值.

分析 如图 6.19, 当 AM 越来越小时, 特别是当点 A 与

点 M 重合时, 则过点 M 的弦的方向 AM 变为过点 M 的切线的方向 A_2MA_1 , 此时因 $MA \perp BC$, 故有 $B \rightarrow B_1, C \rightarrow C_1$, 即 $BC \rightarrow B_1C_1$. 又因为 $B_1C_1 \perp A_1A_2$, 所以 B_1C_1 为过圆心 O 的直径, 此时 $AB \rightarrow MB_1, AC \rightarrow MC_1$. 于是

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CA^2 &= MB_1^2 + B_1C_1^2 + MC_1^2 \\ &= (R-r)^2 + (2R)^2 + (R+r)^2 \\ &= 6R^2 + 2r^2. \end{aligned}$$

当点 A 处在极端位置上时就得到了定值, 然后再让 A 处在一般位置上, 给出理论上的证明.

证 上述探求过程启发我们, 可把 AB, BC, CA 用 R, r 来表示, 于是连结 OA, OB, OC , 这时有

$$AB^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \angle AOB,$$

$$BC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \angle BOC,$$

$$CA^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \angle AOC.$$

下一步的问题就是如何消去 $\angle AOB, \angle BOC, \angle AOC$. 考虑到 $MA \perp BC$ 这个条件没有用上, 于是运用“直径对直圆周角”而连结 A, M' , AM' 必过点 O (图 6.19), 这样 $\angle AOB$ 与 $\angle BOM'$ 互补, $\angle AOC$ 与 $\angle COM'$ 互补, 因而有

$$\begin{aligned} AB^2 + M'B^2 &= R^2 + r^2 - 2Rr \cos \angle AOB + R^2 + r^2 \\ &\quad - 2Rr \cos \angle BOM' \\ &= 2R^2 + 2r^2, \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} CA^2 + M'C^2 &= R^2 + r^2 - 2Rr \cos \angle AOC + R^2 + r^2 \\ &\quad - 2Rr \cos \angle COM' \\ &= 2R^2 + 2r^2. \end{aligned} \quad (6.21)$$

这时,问题就转化为建立 BC^2 与 $M'B^2$ 和 $M'C^2$ 的关系了. 因为

$$BC^2 = (M'B + M'C)^2 = M'B^2 + 2M'B \cdot M'C + M'C^2, \quad (6.22)$$

因此,只剩下使 $M'B, M'C$ 与 R, r 建立关系了. 在大圆 O 中, 应用圆幂定理(定理 6.2), 有

$$M'B \cdot M'C = R^2 - r^2. \quad (6.23)$$

于是由式(6.20)~(6.23)有

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CA^2 &= AB^2 + M'B^2 + 2M'B \cdot M'C \\ &\quad + M'C^2 + CA^2 \\ &= (AB^2 + M'B^2) + 2M'B \cdot M'C \\ &\quad + (CA^2 + M'C^2) \\ &= 2R^2 + 2r^2 + 2(R^2 - r^2) + 2R^2 \\ &\quad + 2r^2 \\ &= 6R^2 + 2r^2. \end{aligned}$$

6.6 整体审视

利用几何动态探求轨迹问题是一种常用的方法,它可以帮助我们加深对题意的理解,从整体上审视轨迹大致的图像,防止遗漏情况,并有的放矢地去寻找解题途径.

例 6.4 设 AB 为定圆 O 内一定直径,引任意弦 AC ,在 AC 上取 $AP = BC$,求点 P 的轨迹.

分析 用动态观点考虑,当 $C \rightarrow B$ 时,线段 CB 及 AP 的长度蜕化为零,于是 $P \rightarrow A$,所以点 A 应属于轨迹上的点. 而

当 BC 越来越长时, AC 越来越短, 点 P 的轨迹可猜想为一圆弧, 特别当 $C \rightarrow A$ 时, 显然 $BC \rightarrow BA$, 这时 AC 由割线到达极限位置, 就变成切线. 切线上一点 D 就是点 P 所对应的像, 且满足 $AD=AB$, 因此点 D 亦是所求轨迹的特殊点.

连结 DP . 因为 $AP=BC$, $AD=AB$, $\angle DAP=\angle ABC$, 所以 $\angle APD=90^\circ$, 因此可推知点 P 的轨迹应是以 AD 为直径的相切于点 A 的半圆弧. 对称地, 还应有以 AD' 为直径的相切于点 A 的半圆弧, 如图 6.20 所示. 证明从略.

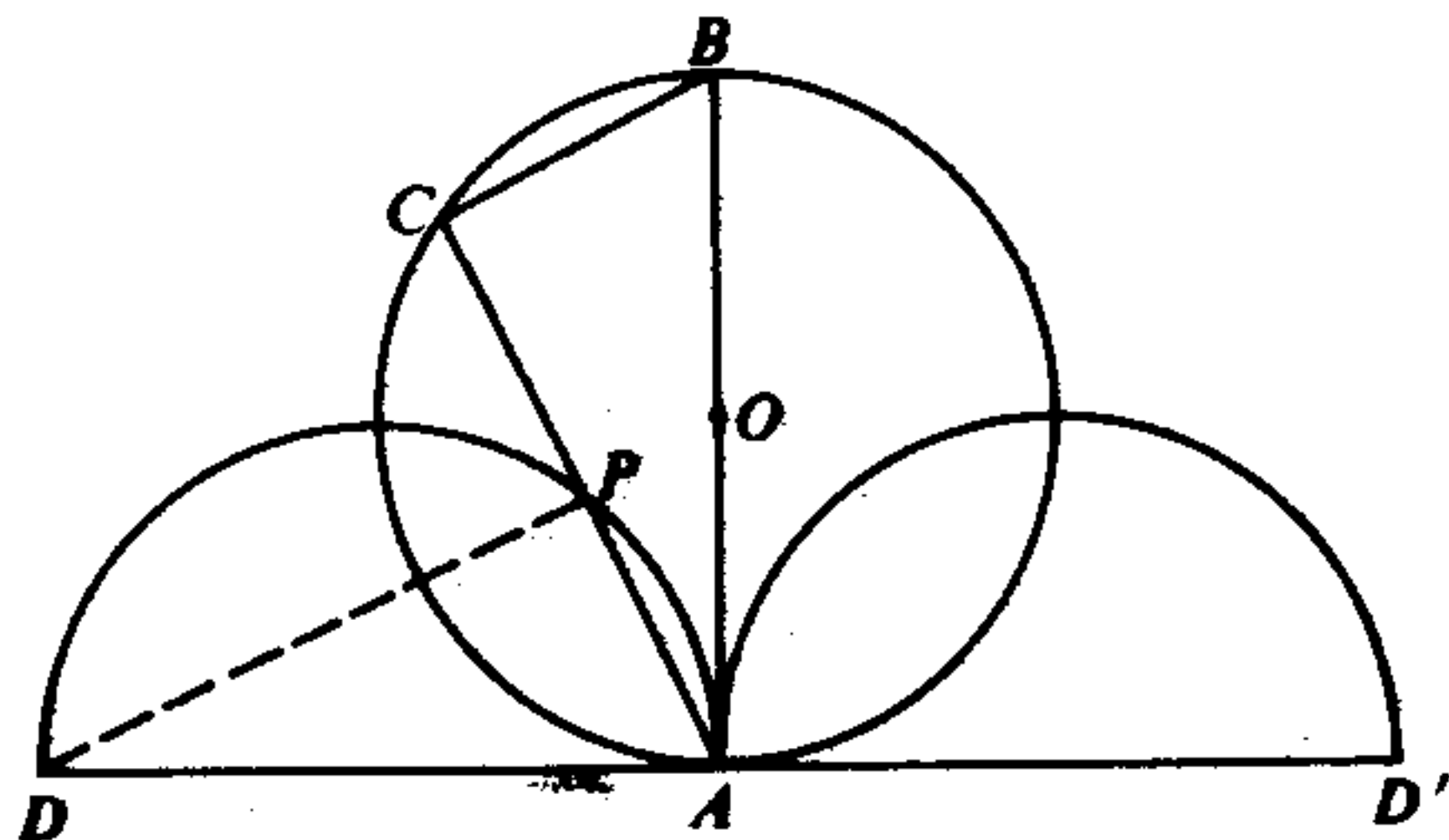


图 6.20

习 题 6

1. 下面三个小题有什么联系?

(1) 如图 6.21, 延长圆内接四边形 $ABCD$ 的两组对边, 分别相交于点 M, N . 求证: 所成的 $\angle AMD$ 和 $\angle ANB$ 的平分线互相垂直.

(2) 如图 6.22, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, 切线 CM 交 AB 的延长线于点 M , $\angle ACB$ 的平分线 CE 交 AB 于 E , $\angle AMC$ 的平分线 MH 分别交 BC, AC 于点 F, H . 求证: $MH \perp CE$ 且 $CF=CH$.

(3) 如图 6.23, 四边形 $ABDC$ 内接于 $\odot O$, AB, CD 的延长线相交于

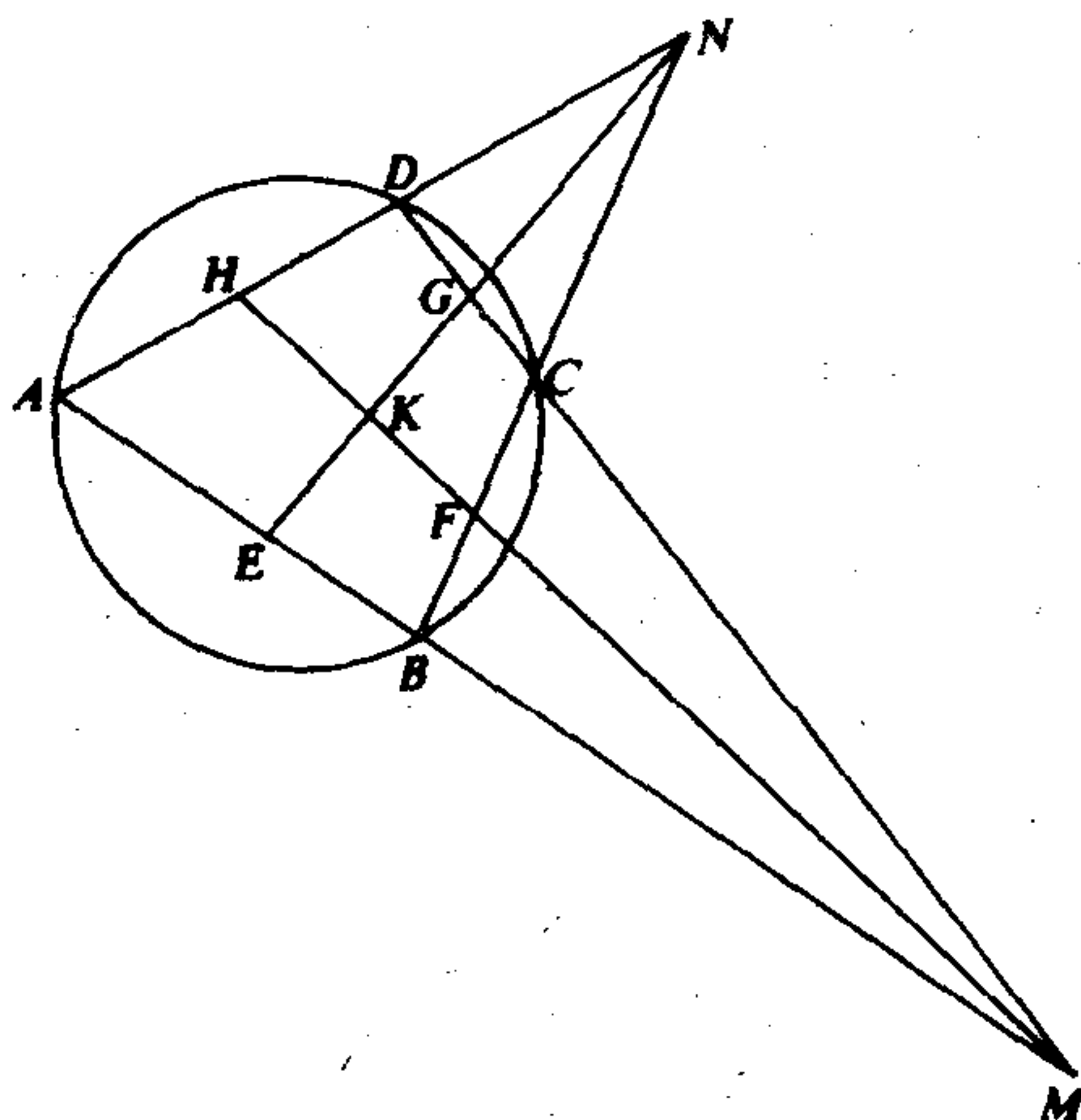


图 6.21

点 M , $\angle AMC$ 的平分线 MH 交 AC 于点 H , AD, BC 相交于点 N . 试证: 若 $NE \perp MH$, 则 NE 平分 $\angle ANB$.

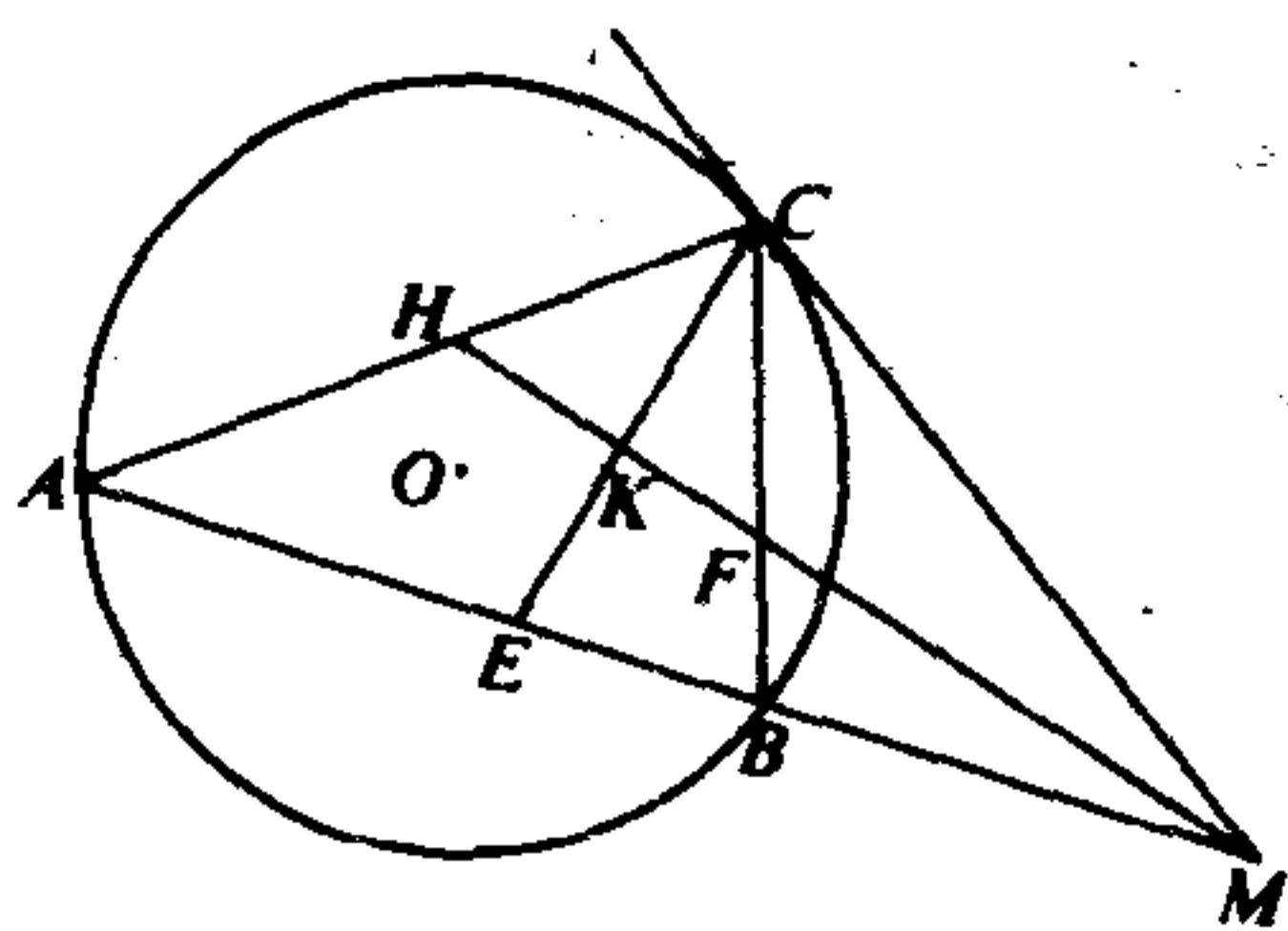


图 6.22

2. 下面四个小题有什么联系?

(1) 如图 6.24, 已知线段 $AB = CD$, 连结 BC, AD , 分别取其中点 E, F , 连结 EF 并延长之, EF 的延长线与 BA, CD 的延长线分别

交于 G, H . 求证 $\angle AGF = \angle DHF$.

(2) 如图 6.25, $\triangle ABC$ 中, D 为 AC 上一点, 且 $CD = AB$, E 是 BC 的中点, F 是 AD 的中点, 过 EF 的直线与 BA 的延长线交于 G . 求证 $\triangle AGF$ 是等腰三角形.

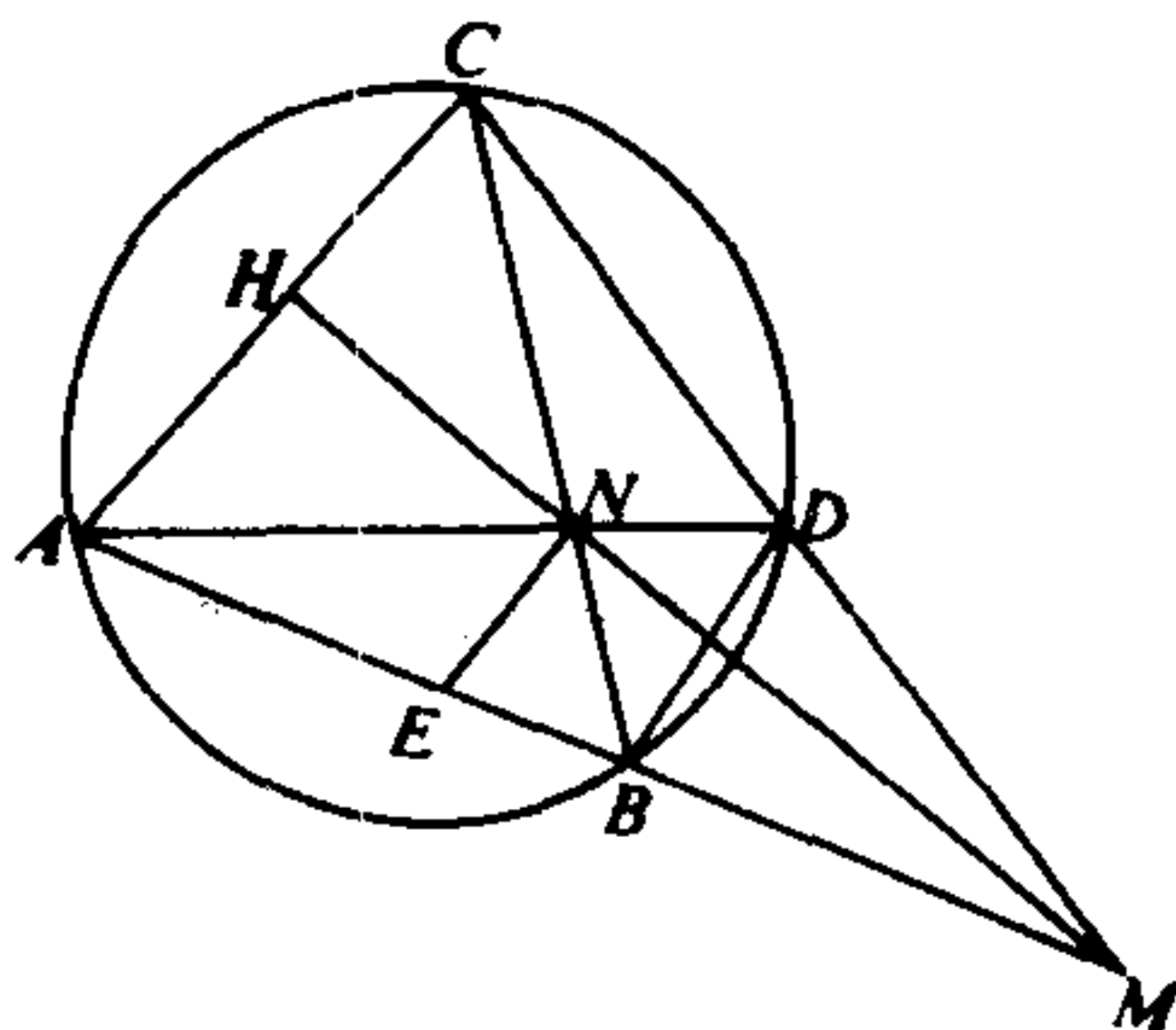


图 6.23

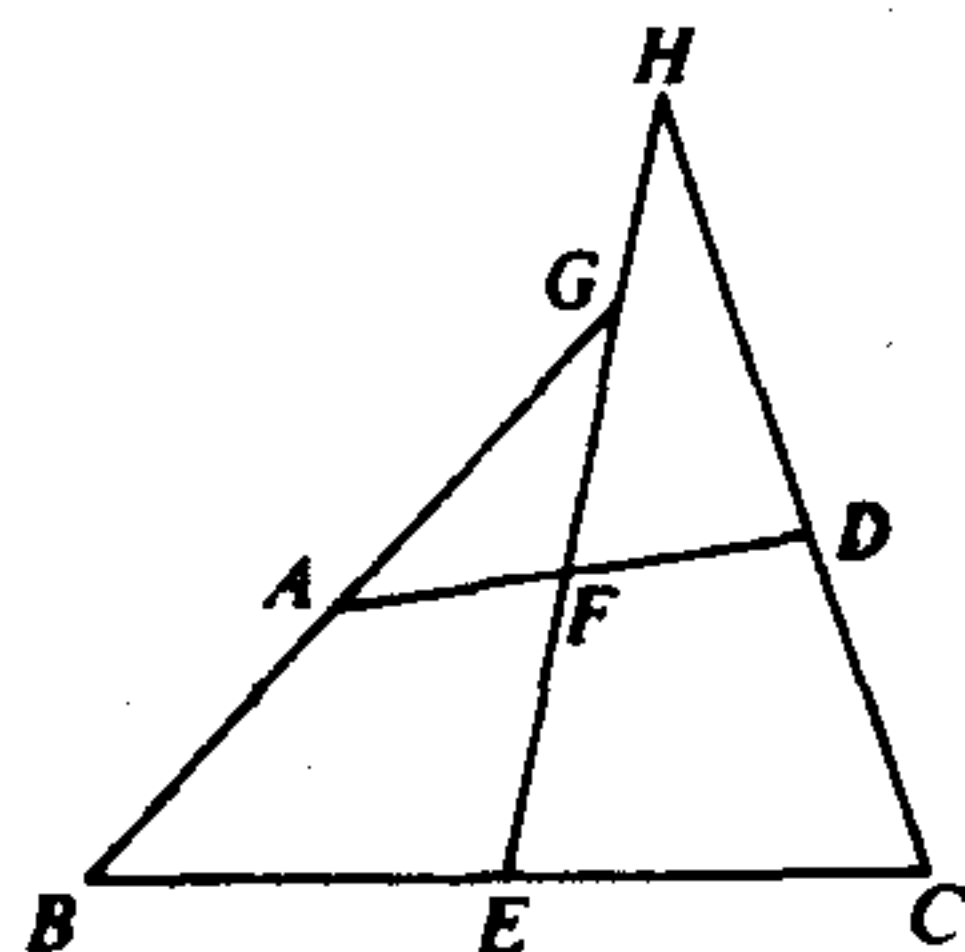


图 6.24

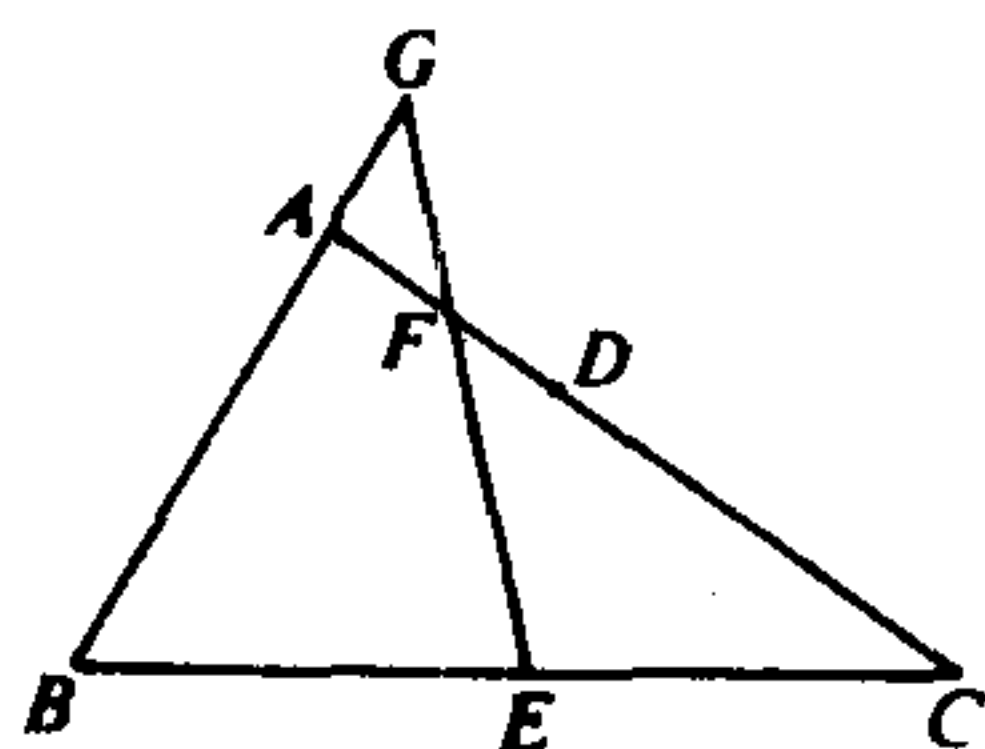


图 6.25

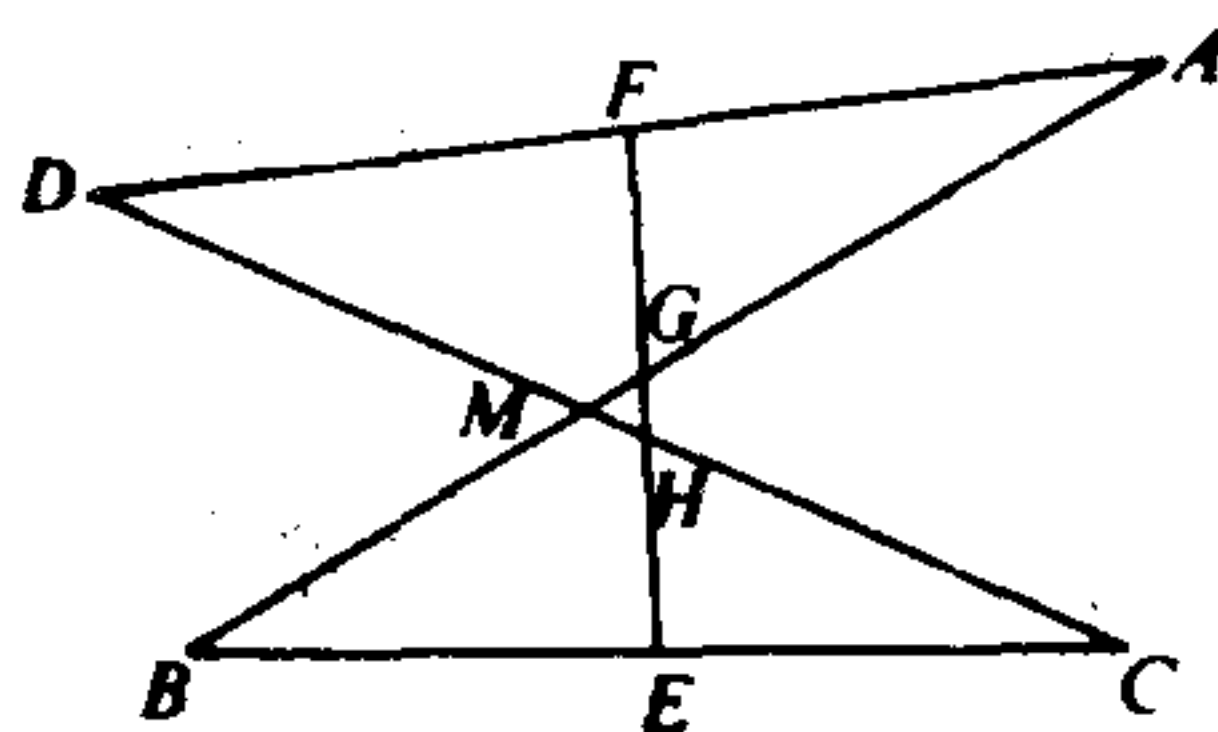


图 6.26

(3)如图 6.26, AB, CD 相交于 M , 且 $AB=CD$, 连结 BC, AD , 分别取其中点 E, F , 连结 EF , 分别交 AB, CD 于点 G, H . 求证 $\angle MGH = \angle MHG$.

(4)线段 AB, CD 相交于点 M , 连结 AD, BC , 有点 E, F 把 BC, AD 各分为两段, 即 $AF : FD = BE : EC = AB : CD$, 连结 EF , 分别交 AB, CD 于点 G, H . 求证 $\angle MGH = \angle MHG$.



由变动图形位置想开来

本章我们将运用几何动态的观点,探索一个开放性的问题:

试探讨两条相交直线与两个圆所存在的各种关系.

通过变动直线或圆的位置,我们将一步步演变出各种命题.

7.1 变动直线的位置

通过几何直观,我们猜想有如下命题.

命题 7.1 如图 7.1, $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 A, B , 经过点 A 的直线 CD 与 $\odot O_1$ 交于点 C , 于 $\odot O_2$ 交于点 D , 经过点 B 的直线 EF 与 $\odot O_1$ 交于点 E , 与圆 $\odot O_2$ 交于点 F , 则 $CE \parallel FD$.

证 连结 AB . $\because ABEC$ 是圆内接四边形,

$\therefore \angle BAC + \angle BEC = 180^\circ$; 同样有 $\angle BFD + \angle BAD = 180^\circ$.
而 $\angle BAC + \angle BAD = 180^\circ$, 所以 $\angle BEC + \angle BFD = 180^\circ$, 故 $CE \parallel FD$.

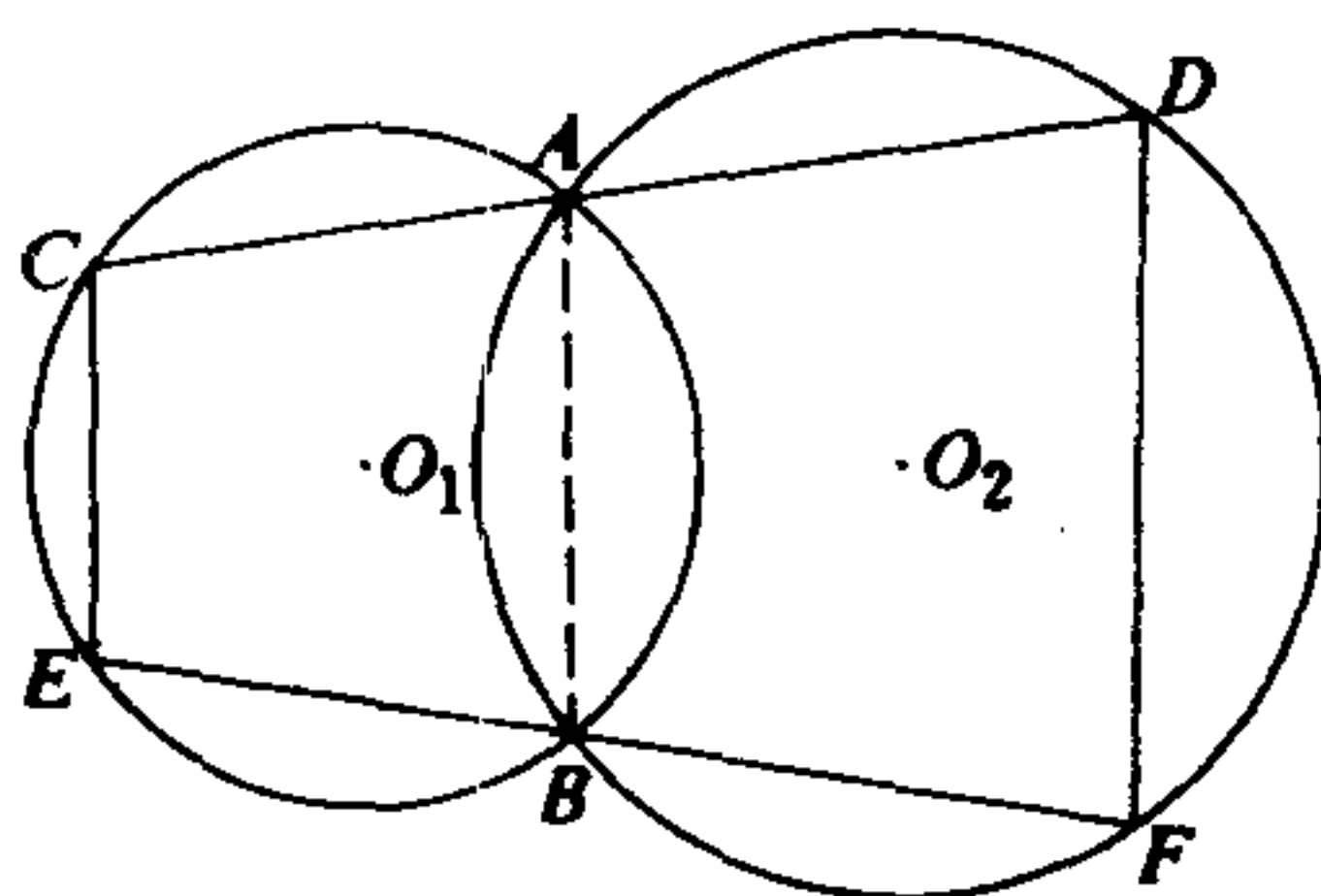


图 7.1

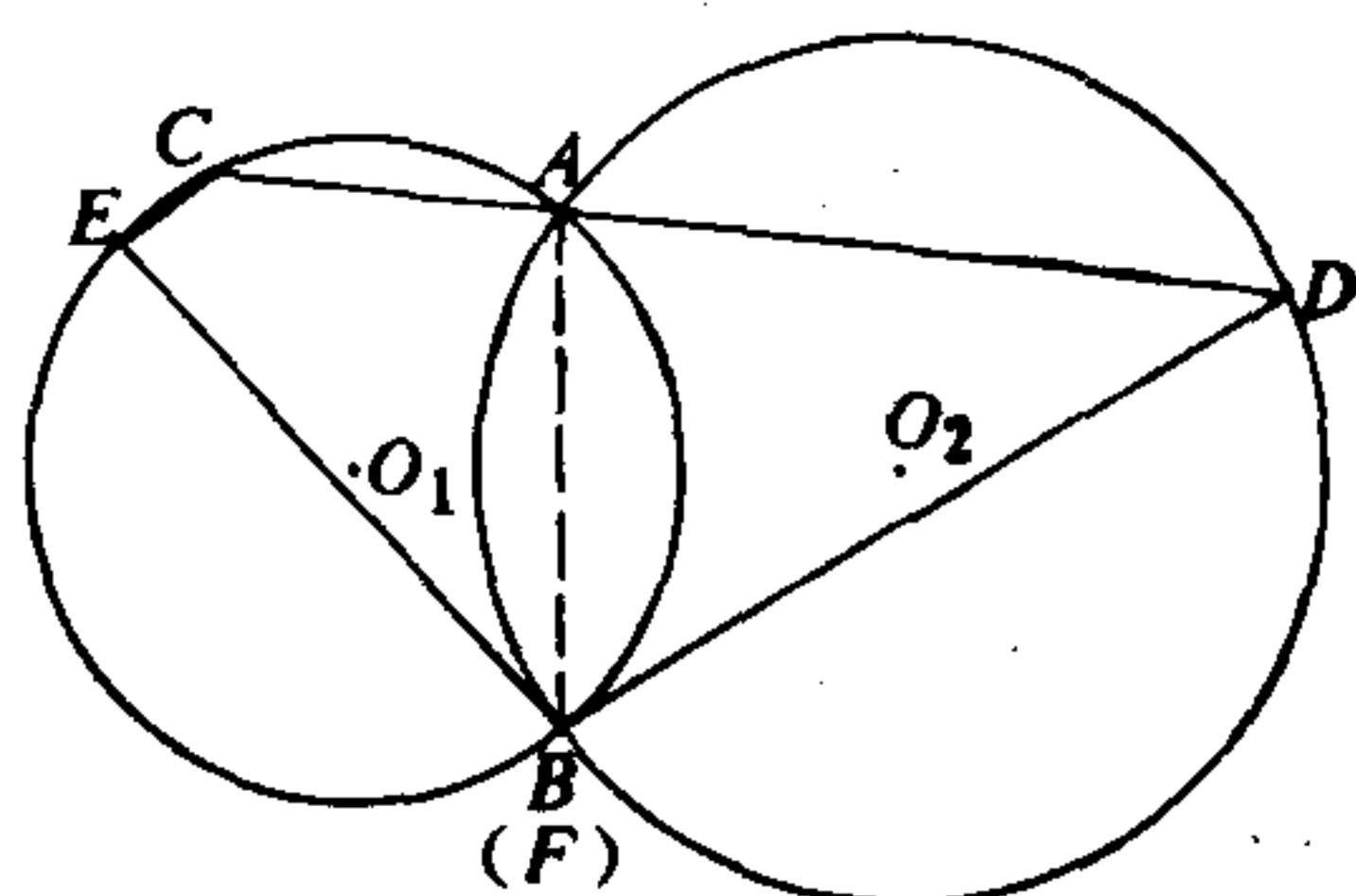


图 7.2

在图 7.1 的基础上, 如果以 B 为定点, 将直线 EBF 顺时针旋转一周, 其余条件不变, 在 EBF 所处的各种特殊位置上, 看看 CE 与 FD 的平行性是否保持不变, 这样就得到了如下一些命题.

命题 7.2 如图 7.2, 如命题 7.1 所述, 此时 B 与 F 重合, BE 为 $\odot O_2$ 的切线, 则 $CE \parallel BD$.

证 连结 AB . $\because ABEC$ 为圆内接四边形, $\therefore \angle ACE + \angle ABE = 180^\circ$. 而 $\angle ABE = \angle ADB$, 故 $\angle ACE + \angle ADB = 180^\circ$, 因此 $CE \parallel BD$.

命题 7.3 如图 7.3, 如命题 7.1 所述, 则 $CE \parallel FD$.

证 连结 AB . $\because ABEC$ 为圆内接四边形, $\therefore \angle ABE + \angle ECA = 180^\circ$. 而 $\angle ADF = \angle ABF = \angle ABE$, 故 $\angle ADF + \angle ECA = 180^\circ$, 因此 $CE \parallel FD$.

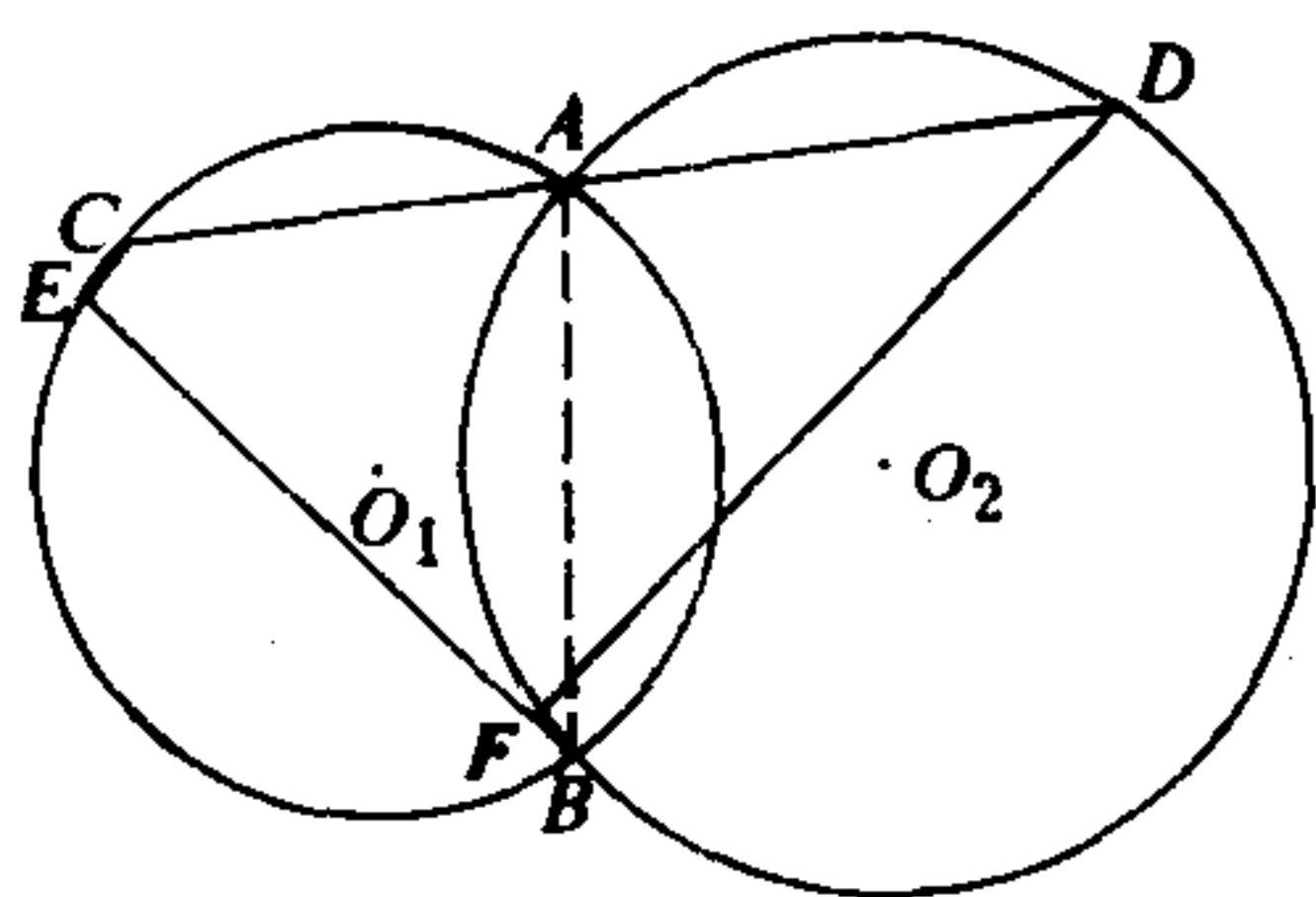


图 7.3

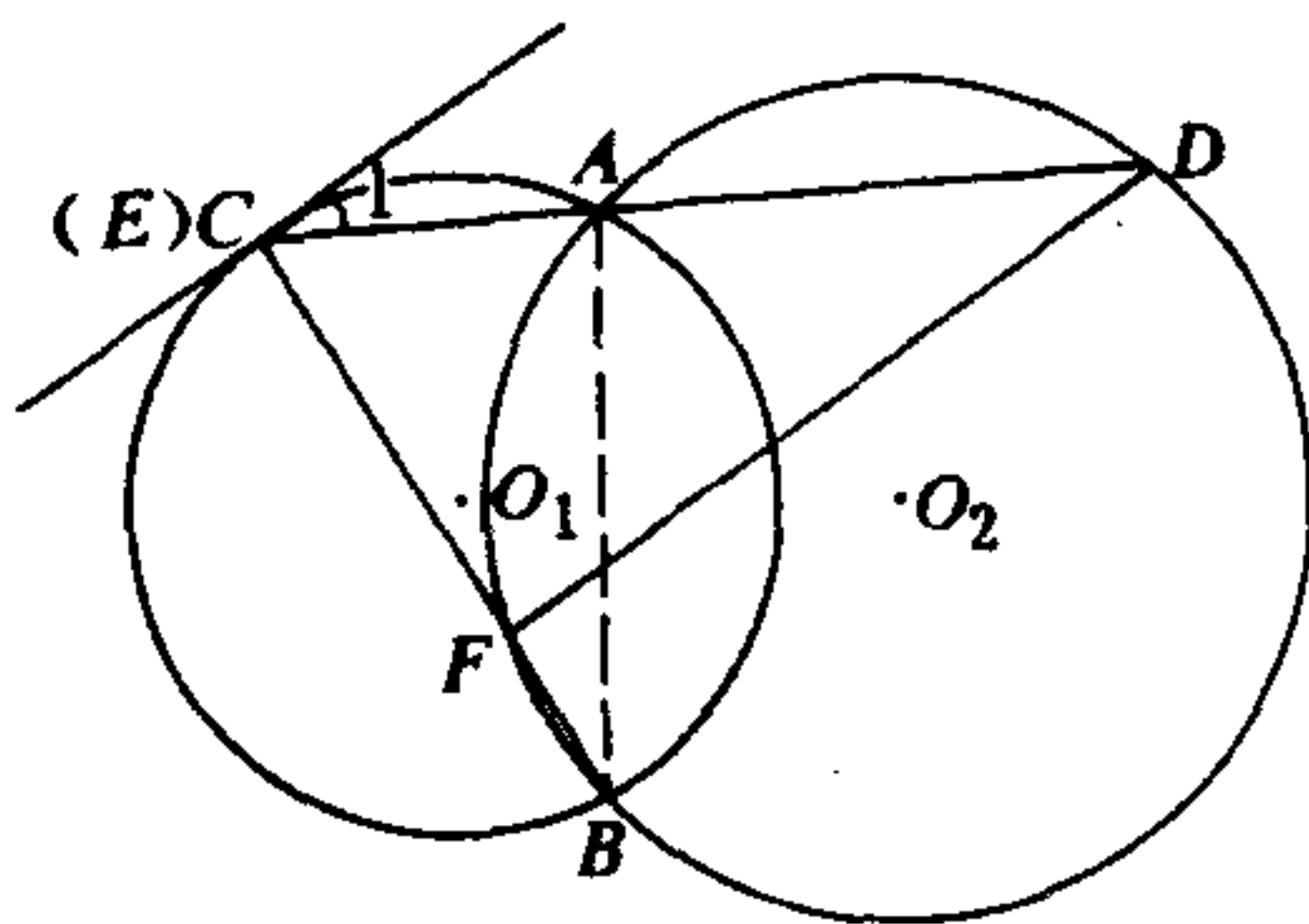


图 7.4

命题 7.4 如图 7.4, 如命题 7.1 所述, E 与 C 重合, 此时 $C(E)$ 为 $\odot O_1$ 的切线, 则 $C(E) \parallel FD$.

证 连结 AB . 由于 $\angle ADF$ 与 $\angle ABF$ 含同样的弧 $\widehat{AF}$, 故 $\angle ADF = \angle ABF$. 又 $\angle 1$ 为弦切角, 故 $\angle 1 = \angle ABC = \angle ABF$. 所以 $\angle ADF = \angle 1$. 故有 $C(E) \parallel FD$.

命题 7.5 如图 7.5, 如命题 7.1 所述, 则 $CE \parallel FD$.

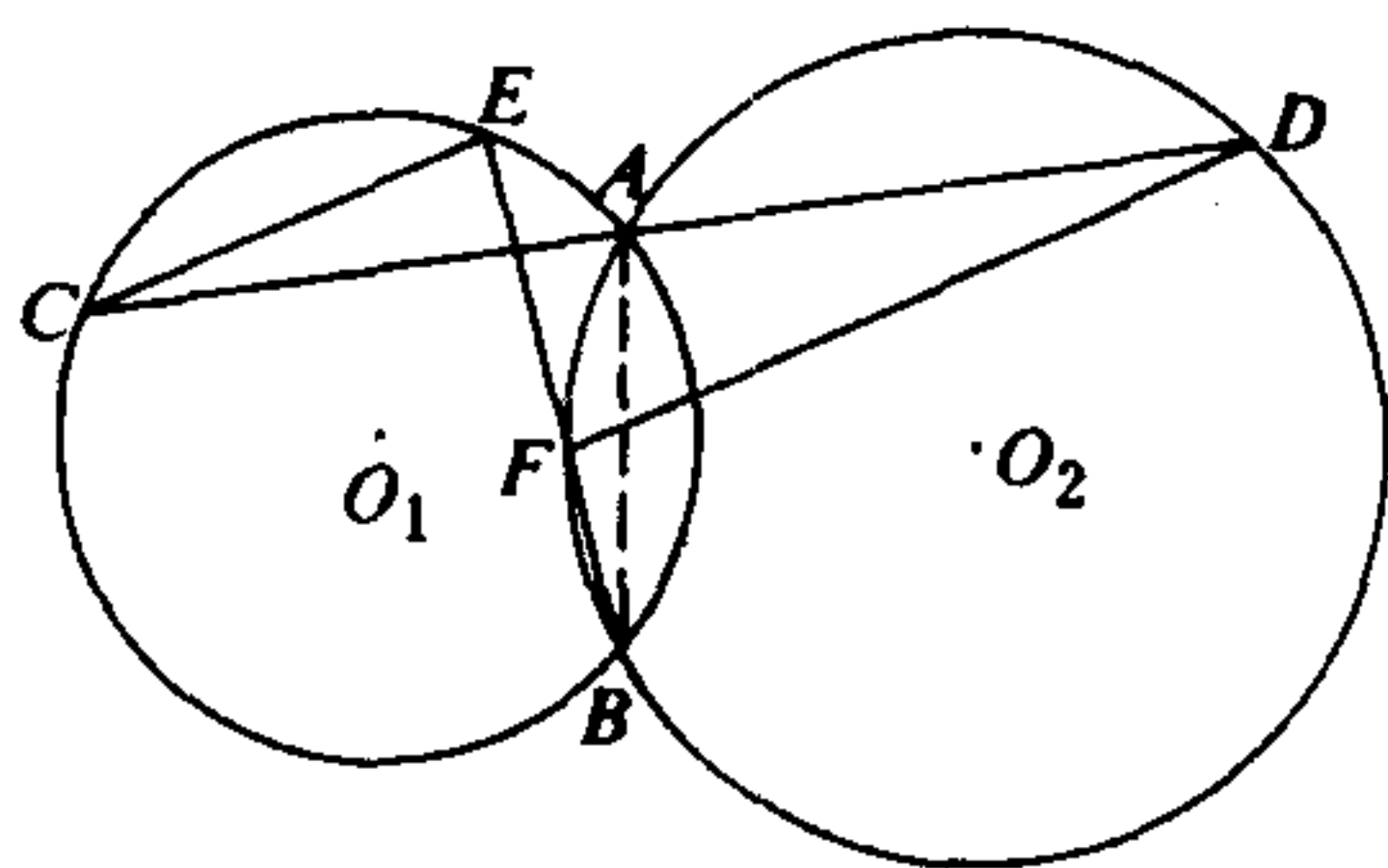


图 7.5

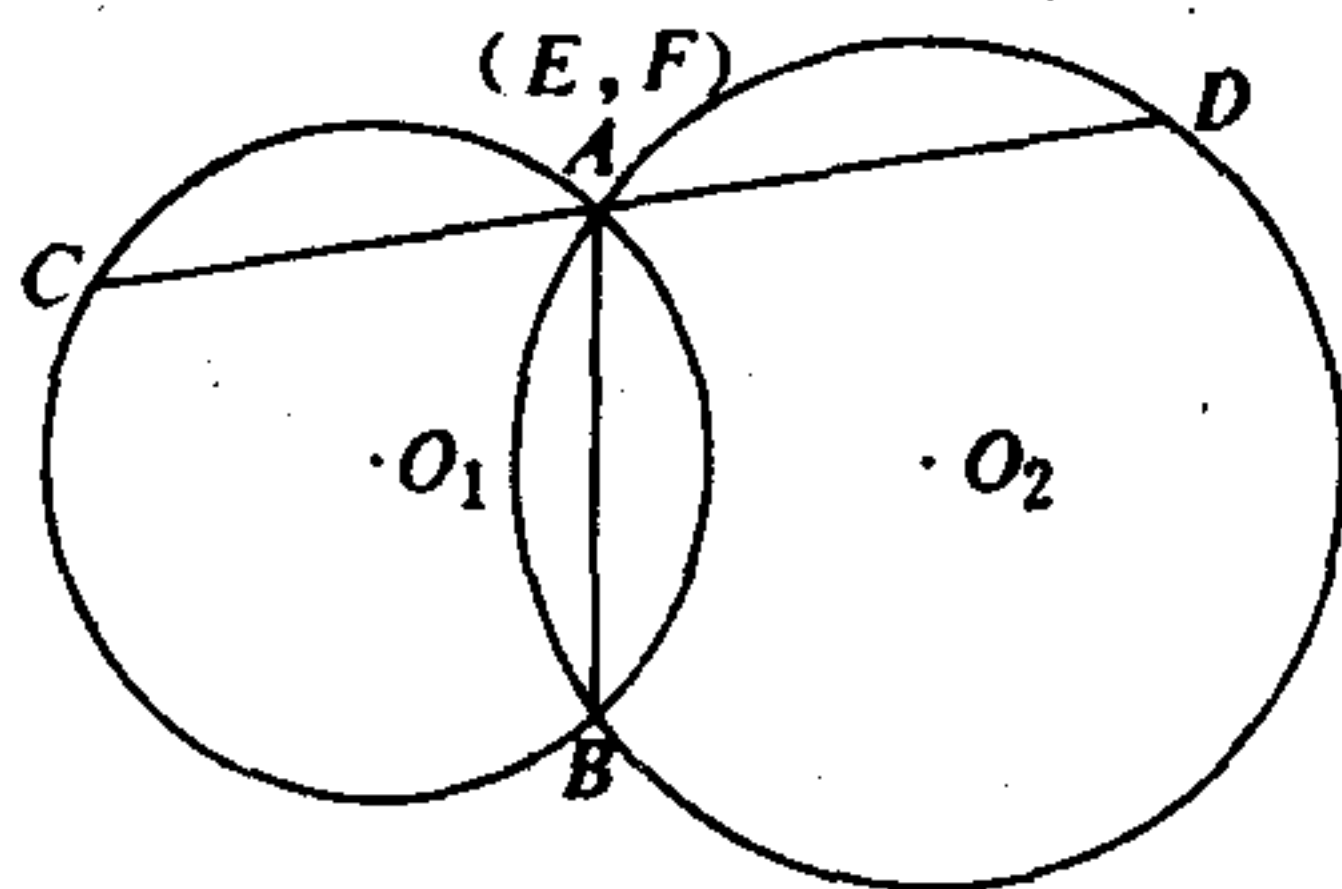


图 7.6

证 连结 AB . $\because \angle ADF = \angle ABF = \angle ABE = \angle ECA$, $\therefore CE \parallel FD$.

命题 7.6 如图 7.6, 如命题 7.1 所述, 此时 E, F 与 A 重

合, CE 与 FD 重合.

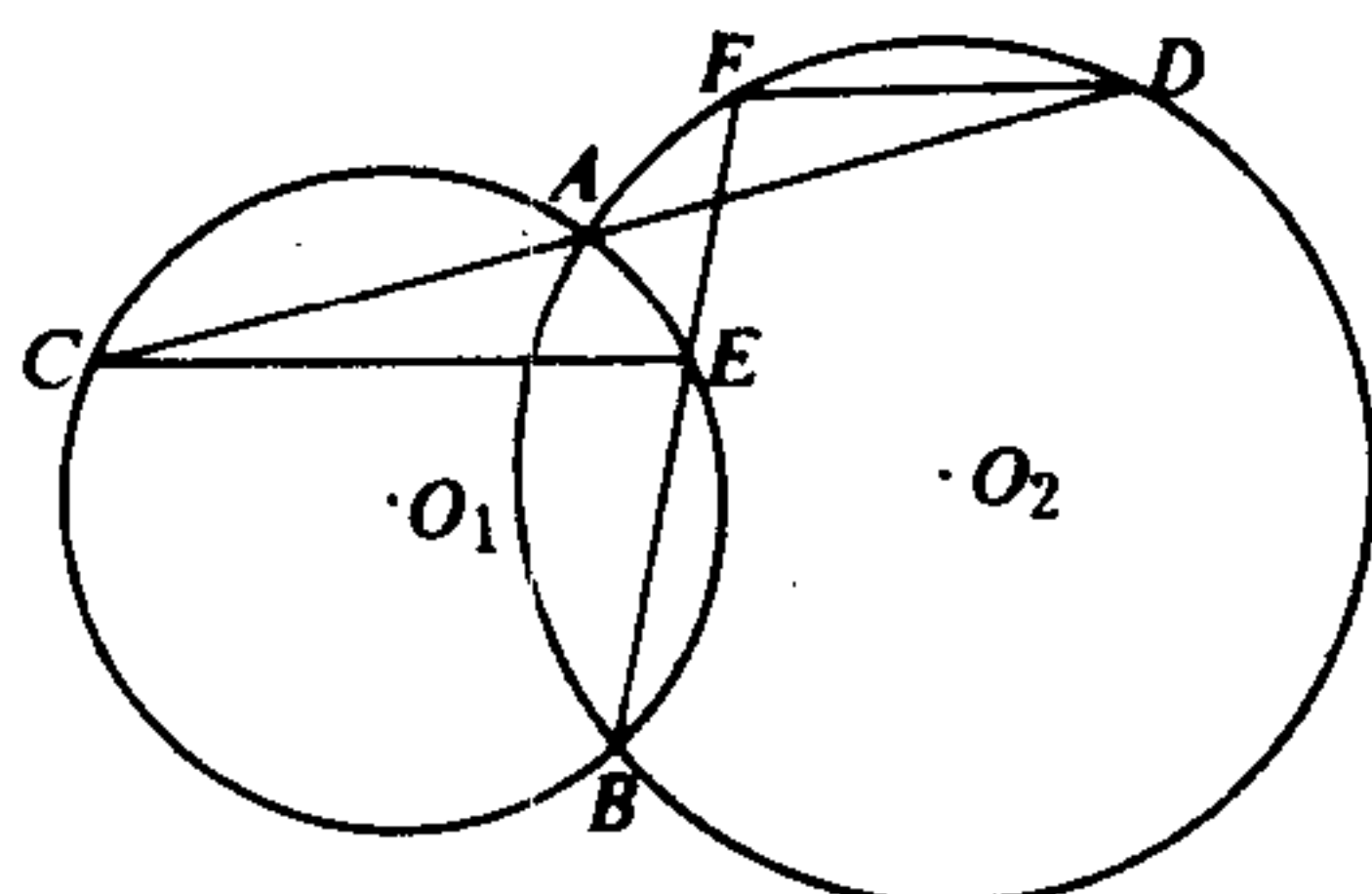


图 7.7

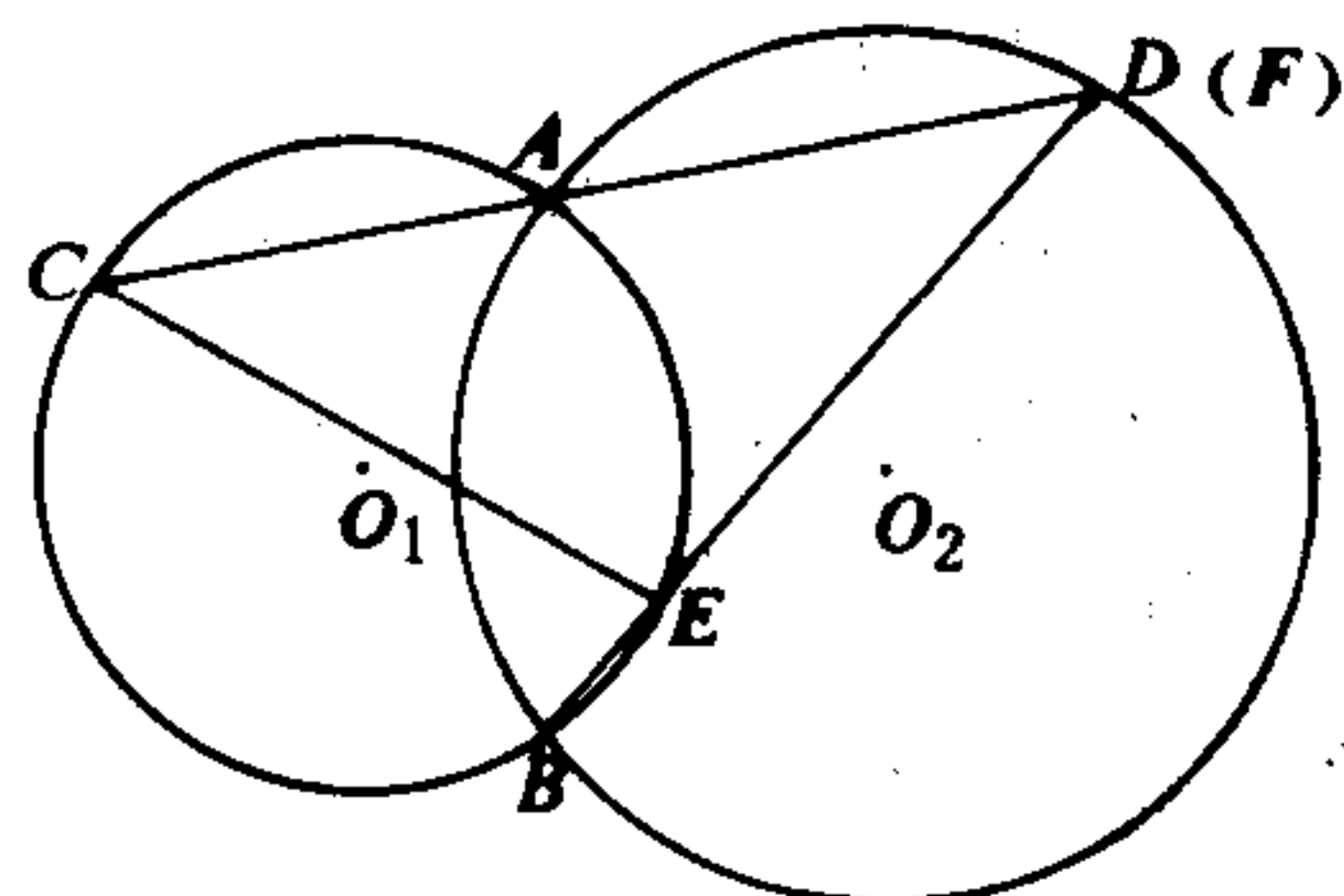


图 7.8

命题 7.7 如图 7.7, 如命题 7.1 所述, 则 $CE \parallel FD$.

证明同命题 7.5.

命题 7.8 如图 7.8, 如命题 7.1 所述, 此时 F 与 D 重合, $D(F)$ 为圆的切线, 则 $CE \parallel D(F)$.

证明同命题 7.4.

命题 7.9 如图 7.9, 如命题 7.1 所述, 则 $CE \parallel FD$.

证明同命题 7.3.

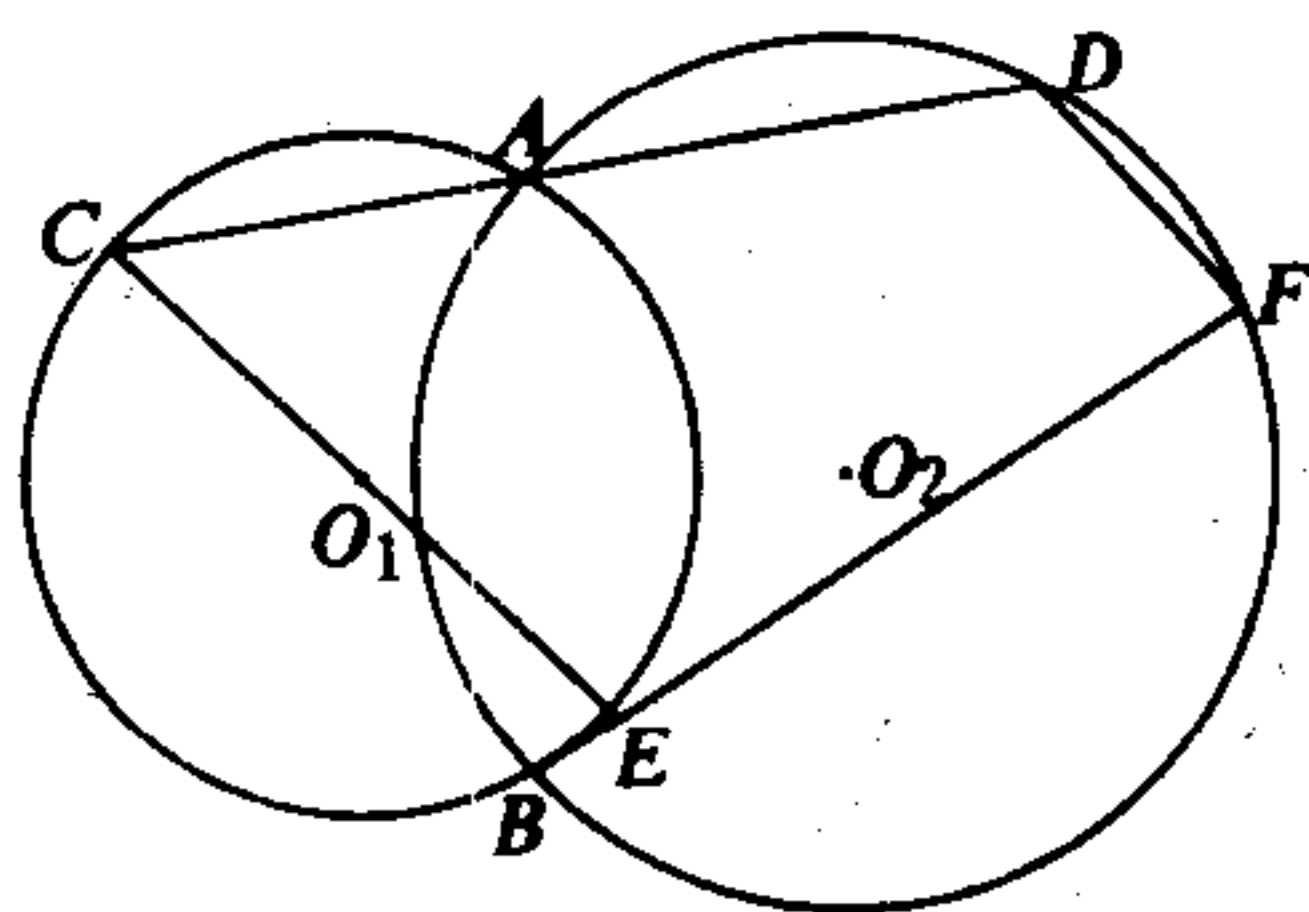


图 7.9

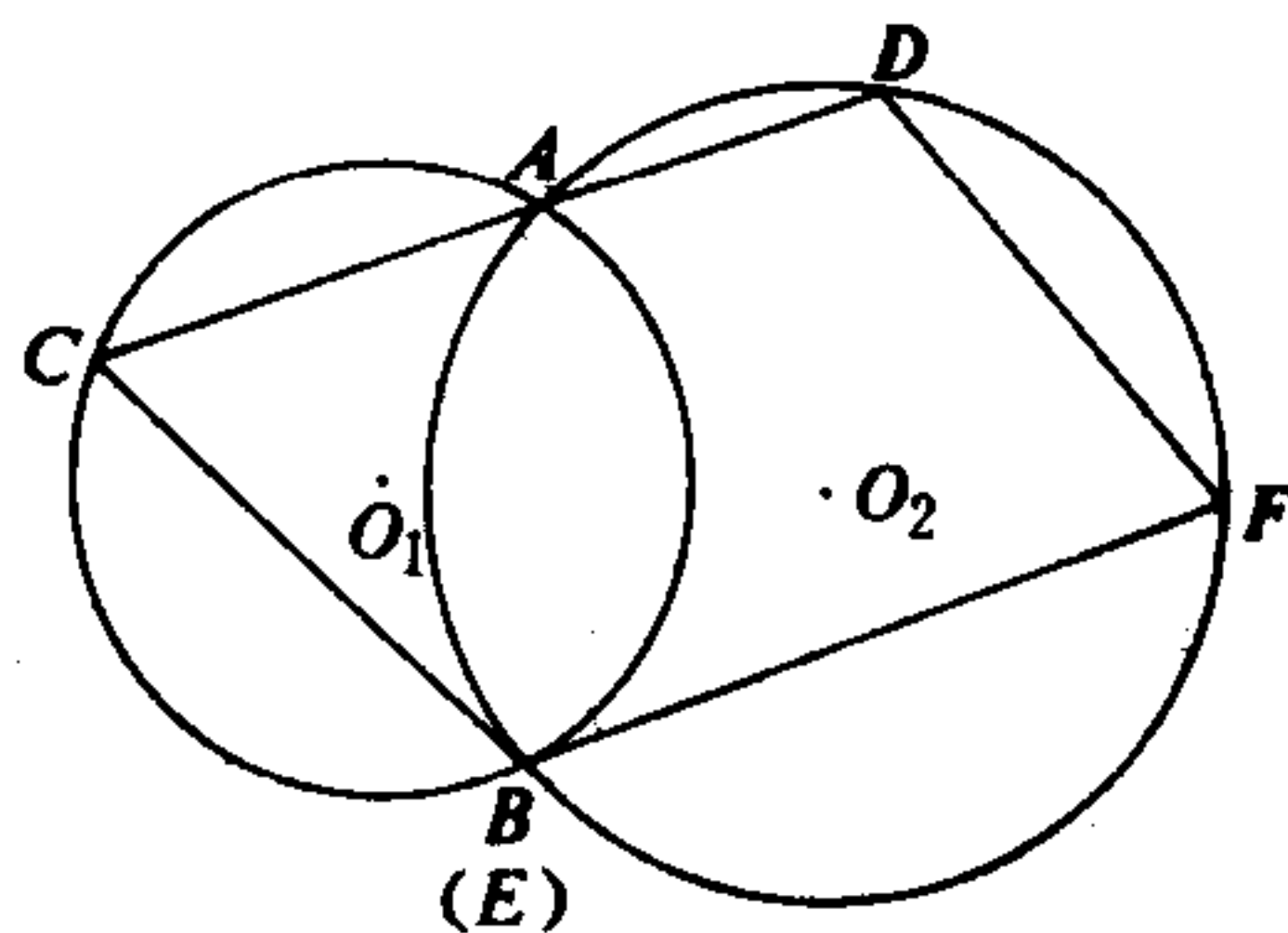


图 7.10

命题 7.10 如图 7.10, 如命题 7.1 所述, 此时 B 与 E 重合, 则 $CB \parallel FD$.

证明同命题 7.2.

在图 7.2 的基础上, 以 A 为定点, 将直线 CAD 沿逆时针方向旋转一周, 其余条件不变, 在 CAD 所处的各种特殊位置上, 看看 CE 与 $B(F)D$ 的平行性是否保持不变, 于是就得到如下一些命题.

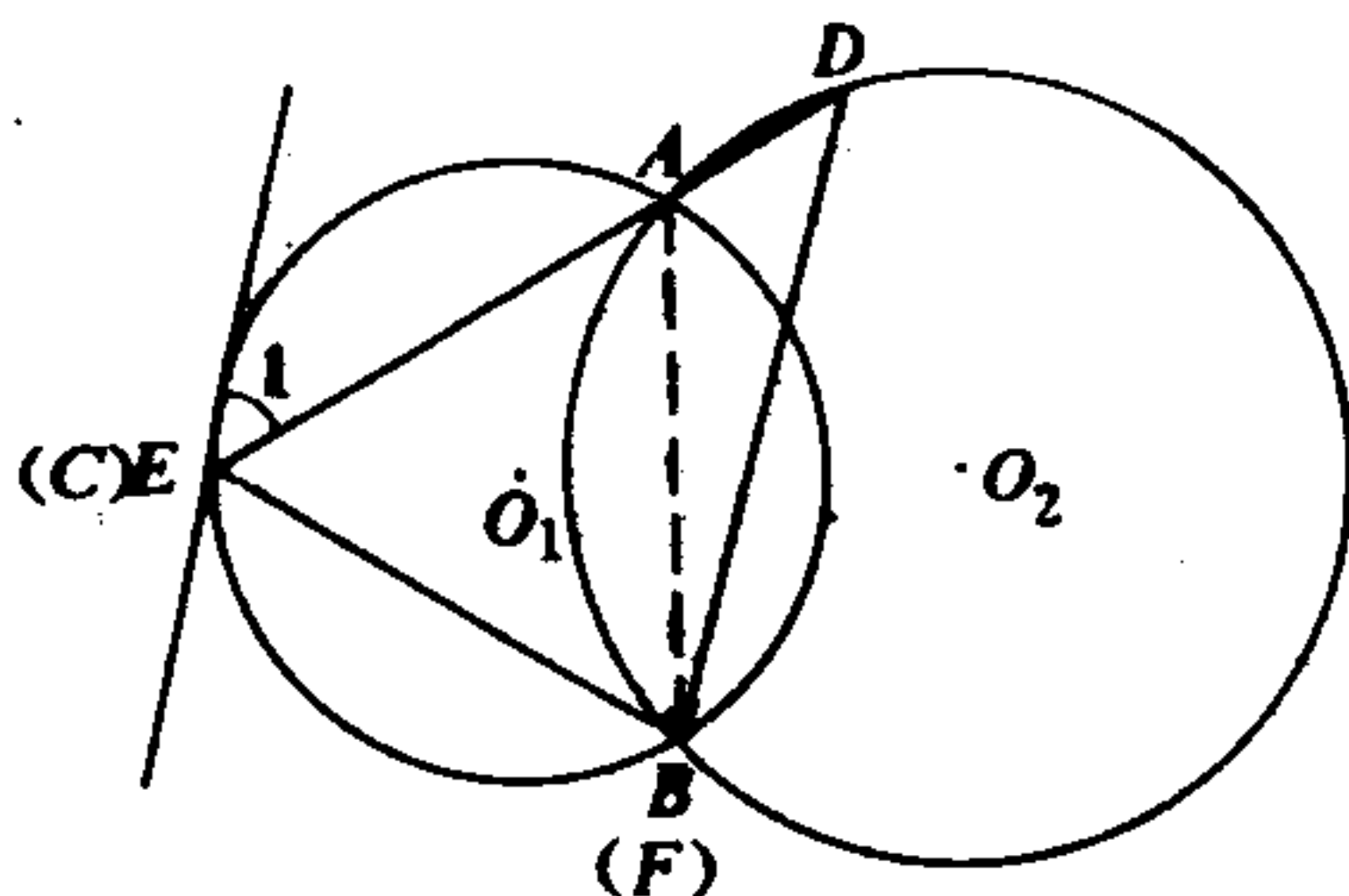


图 7.11

命题 7.11 如图 7.11, 如命题 7.2 所述, 此时 C 与 E 重合, $(C)E$ 为切线, 则 $(C)E \parallel DB$.

证 连结 AB .
 $\angle ADB = \angle ABE = \angle 1$,
 故 $(C)E \parallel DB$.

命题 7.12 如图 7.12, 如命题 7.2 所述, 则 $EC \parallel DB$.

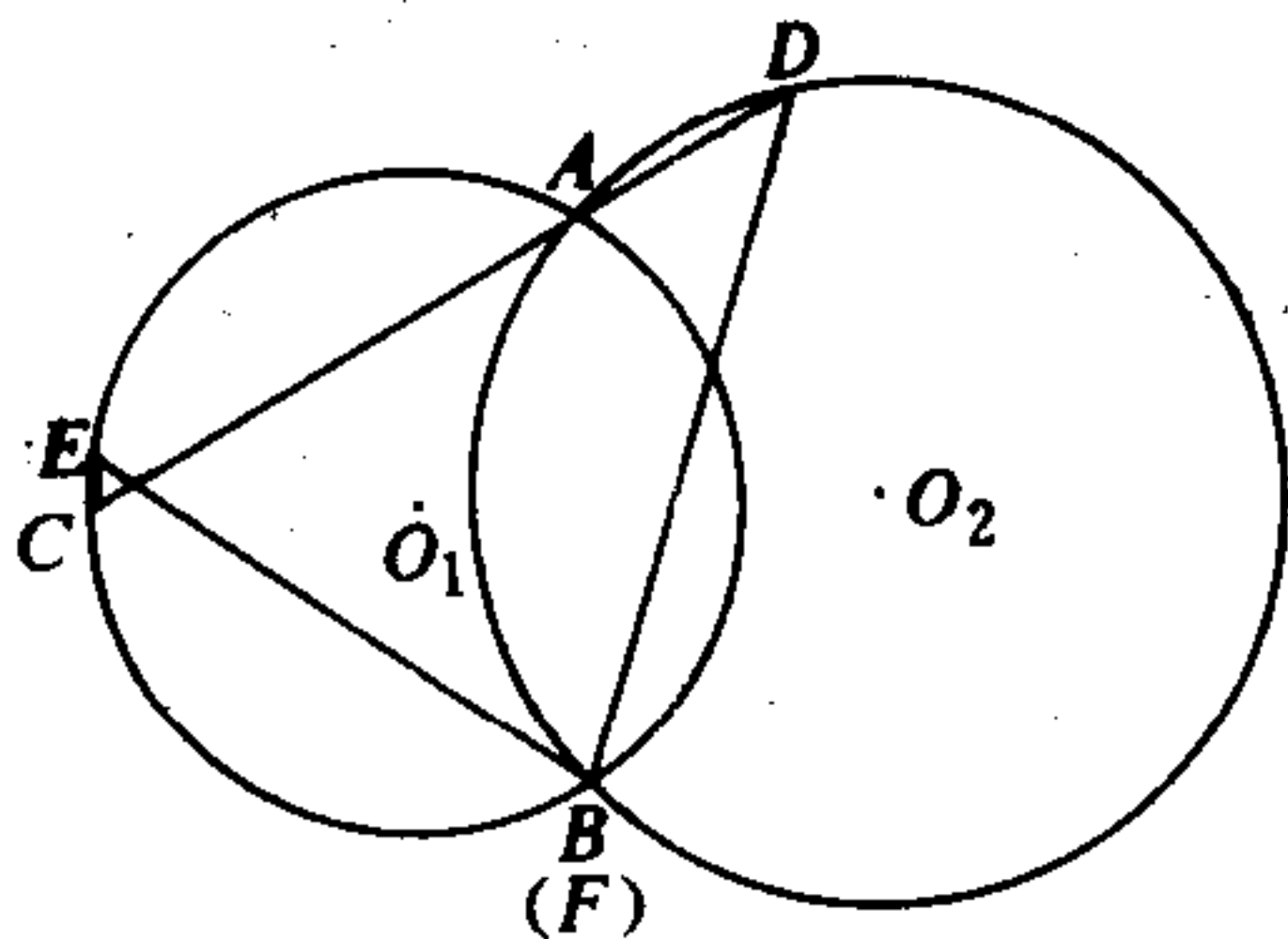


图 7.12

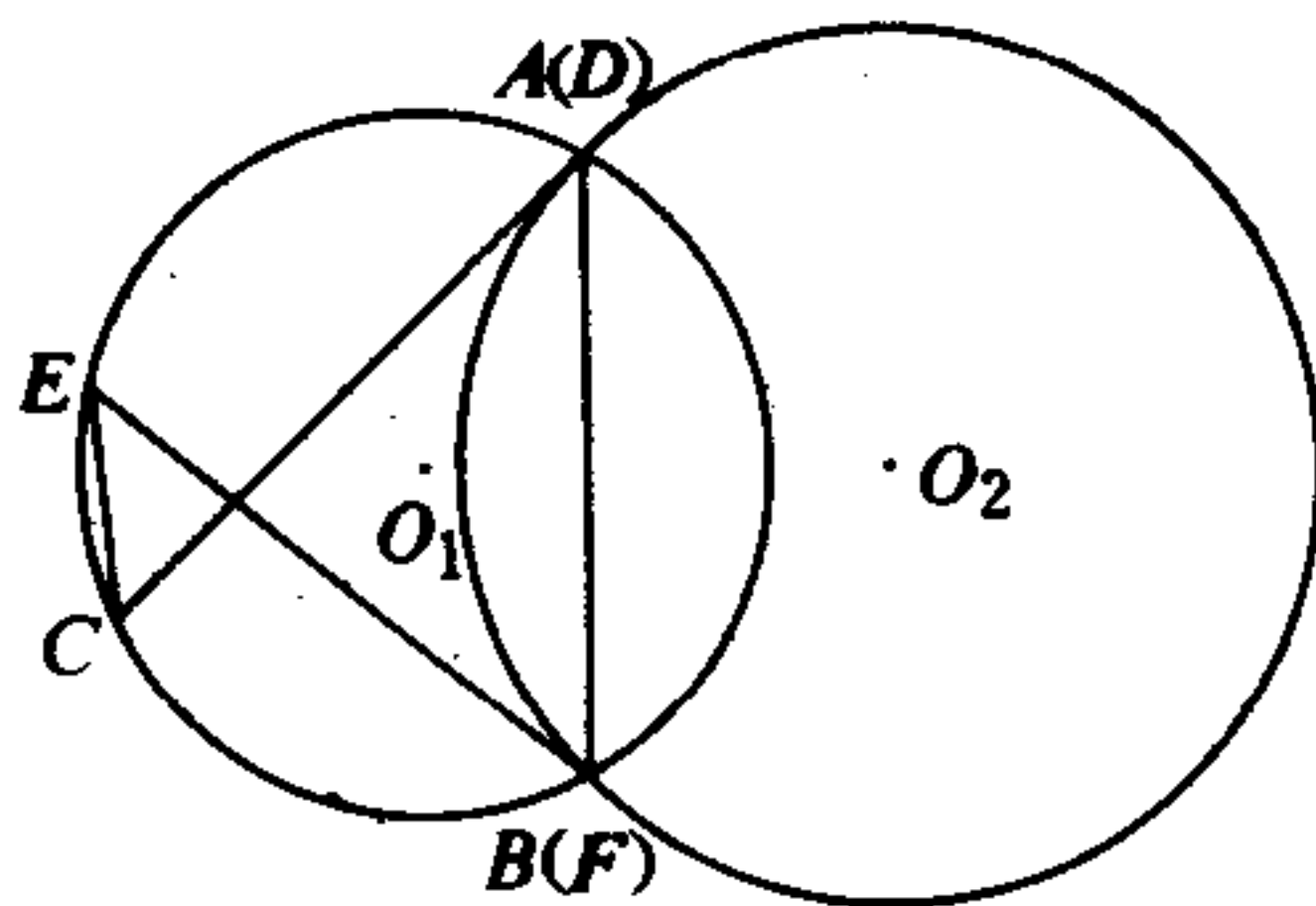


图 7.13

证明同命题 7.4.

命题 7.13 如图 7.13, 如命题 7.2 所述, 此时 A 与 D 重合, 则 $AB \parallel EC$.

证 $\because \angle ACE = \angle ABE = \angle CAB, \therefore AB \parallel EC$.

命题 7.14 如图 7.14, 如命题 7.2 所述, 则 $EC \parallel DB$.

证明同命题 7.5.

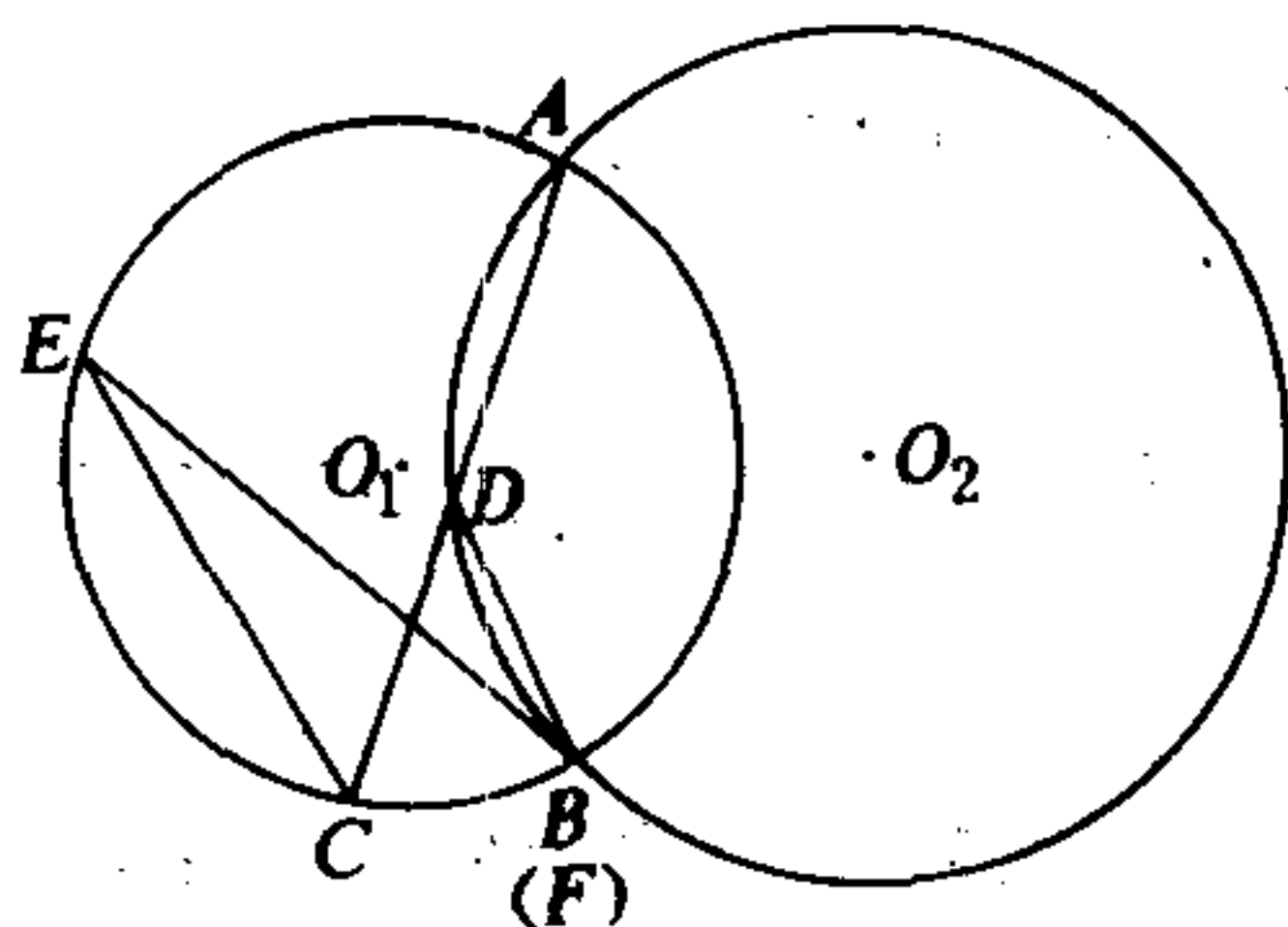


图 7.14

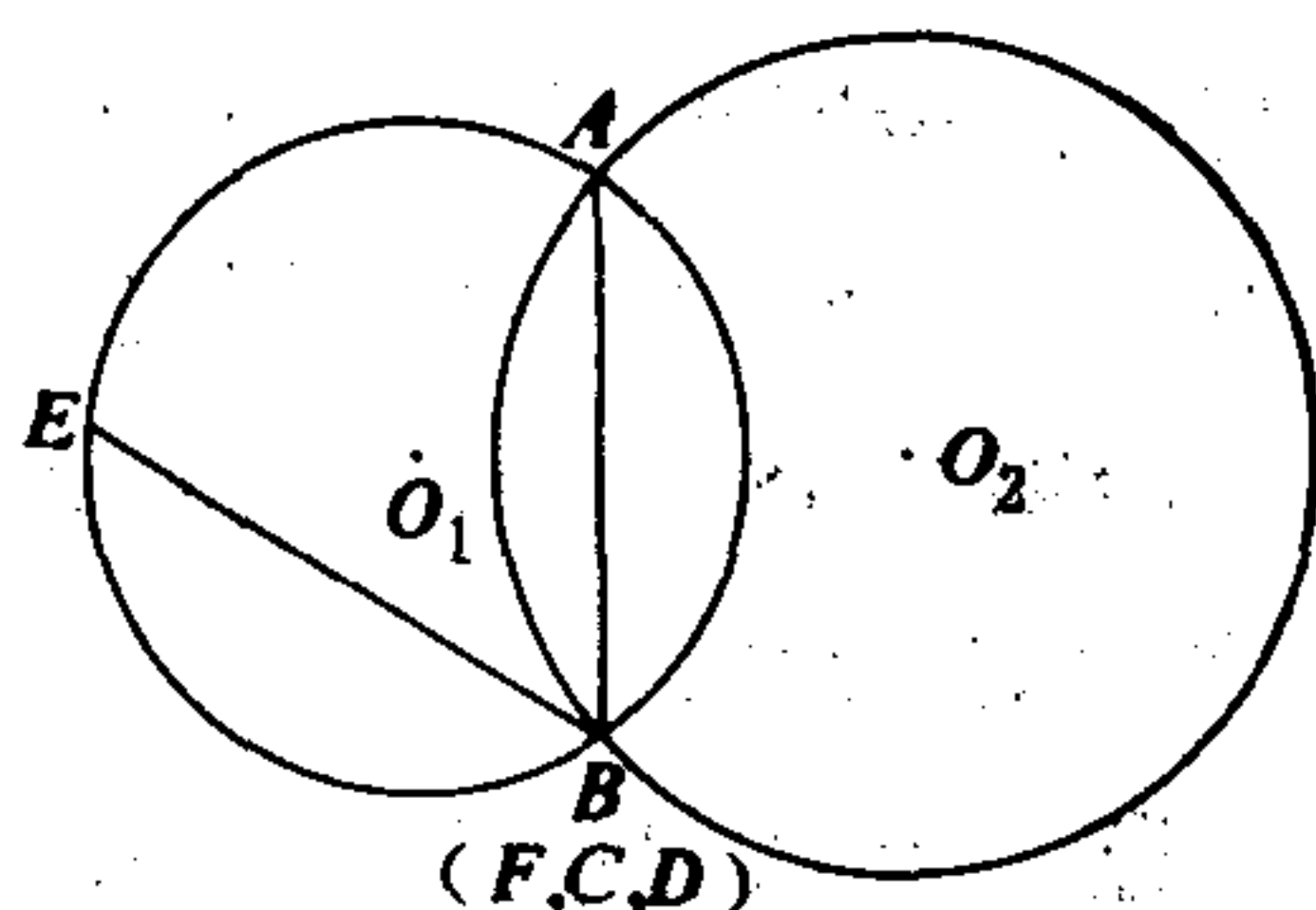


图 7.15

命题 7.15 如图 7.15, 如命题 7.2 所述, 此时 C, D 与 B 重合, CE 与 DF 重合.

命题 7.16 如图 7.16, 如命题 7.2 所述, 则 $EC \parallel BD$.

证 连结 AB . $\because \angle BEC = \angle BAC = \angle BAD$, 又 $\angle BAD = \angle 1, \therefore \angle BEC = \angle 1$, 故 $EC \parallel BD$.

命题 7.17 如图 7.17, 如命题 7.2 所述, 此时 C 与 A 重合, 则 $EA \parallel BD$.

证 连结 AB , $\because \angle \alpha = \angle BAD = \angle AEB, \therefore EA \parallel BD$.

在图 7.3 的基础上, 以 A 为定点, 将直线 CAD 沿逆时针方向旋转一周, 其余条件不变, 在 CAD 所处的特殊位置 (除

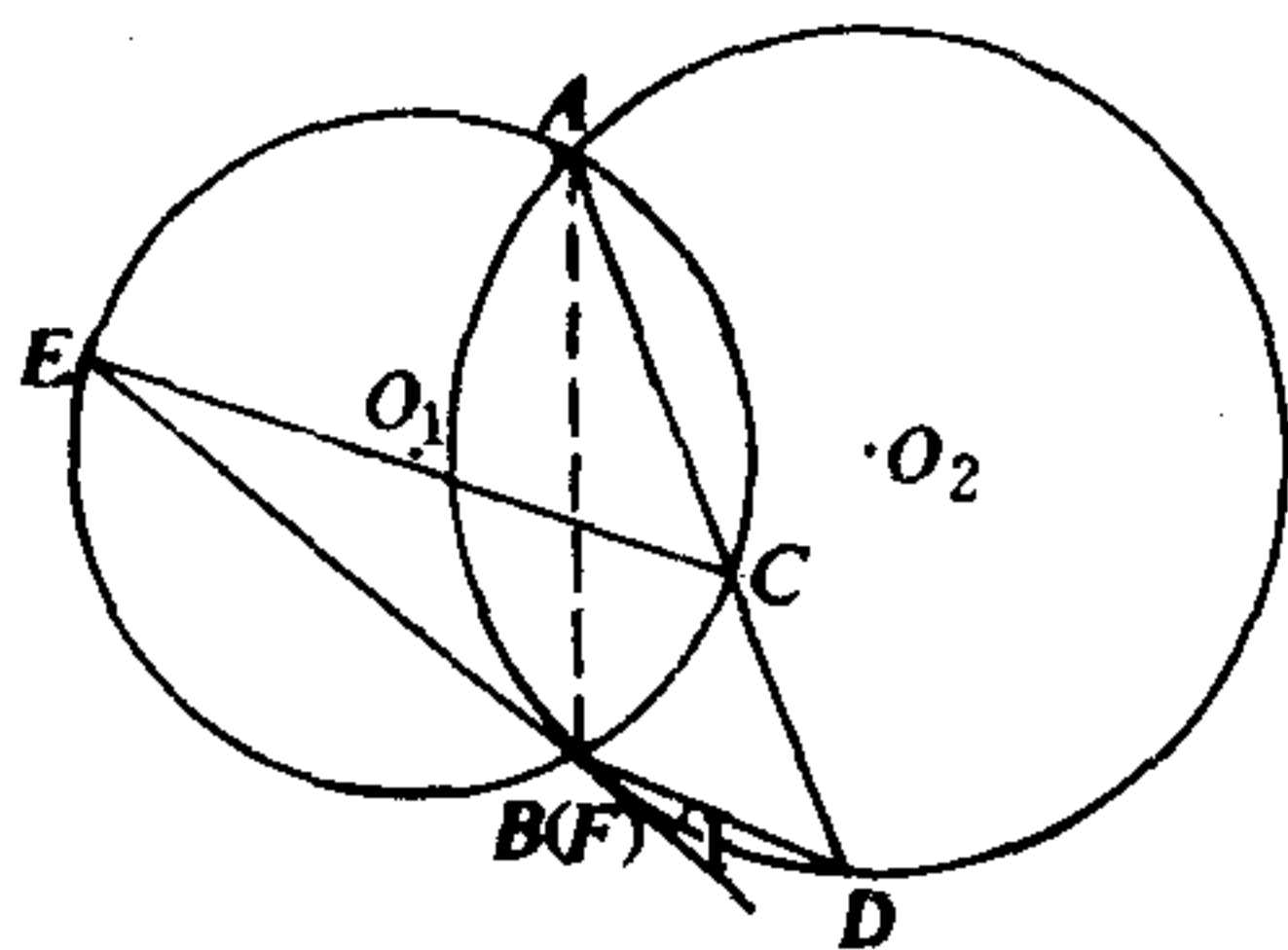


图 7.16

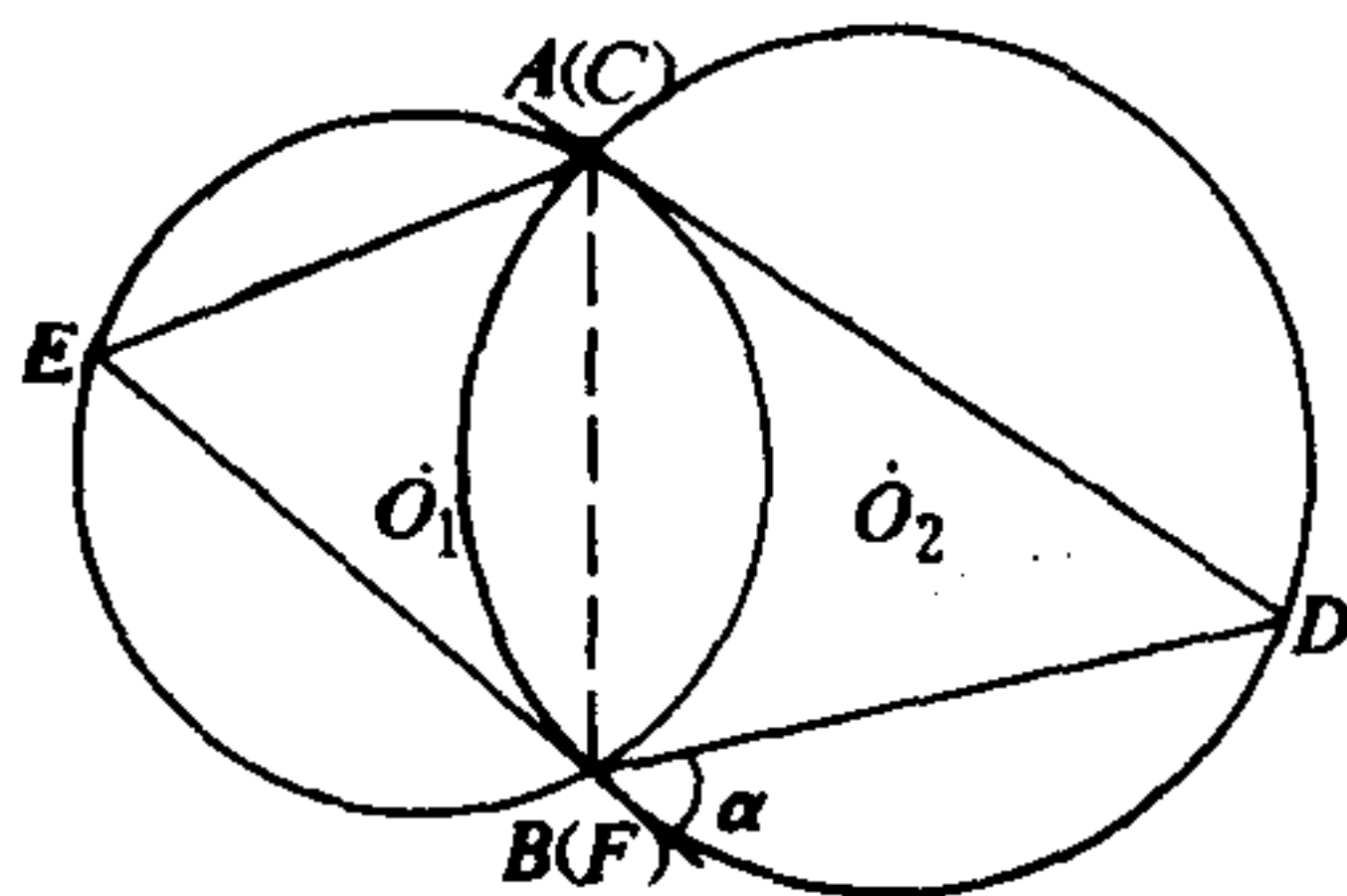


图 7.17

了与前面情况重复的以外)上,看 CE 与 DF 的平行性是否保持不变,于是又得到如下命题.

命题 7.18 如图 7.18,如命题 7.3 所述,此时 D 与 A 重合,则 $EC \parallel DF$.

证 连结 AB . $\because \angle CAF = \angle ABF = \angle ABE = \angle ECA$,
 $\therefore EC \parallel DF$.

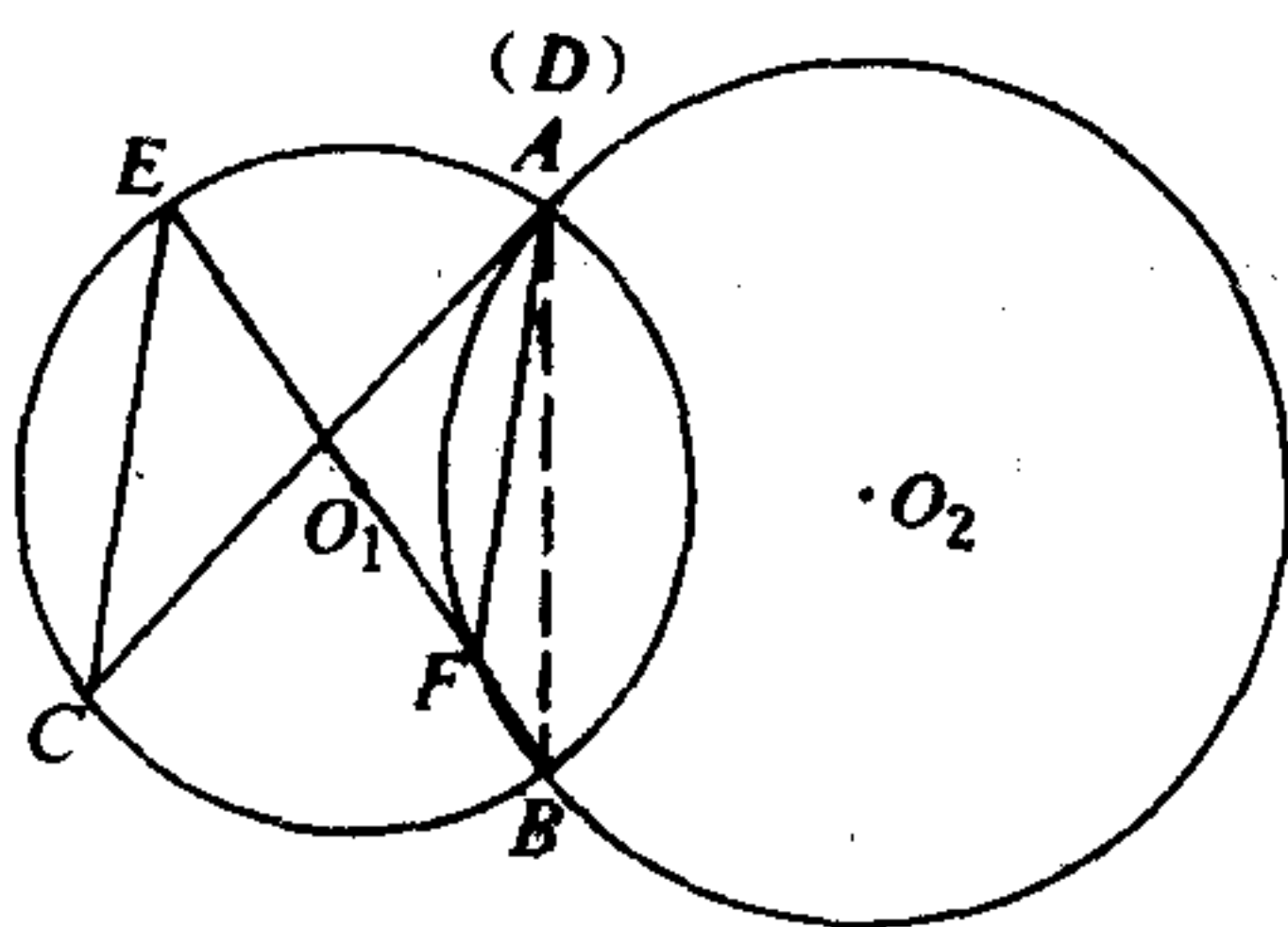


图 7.18

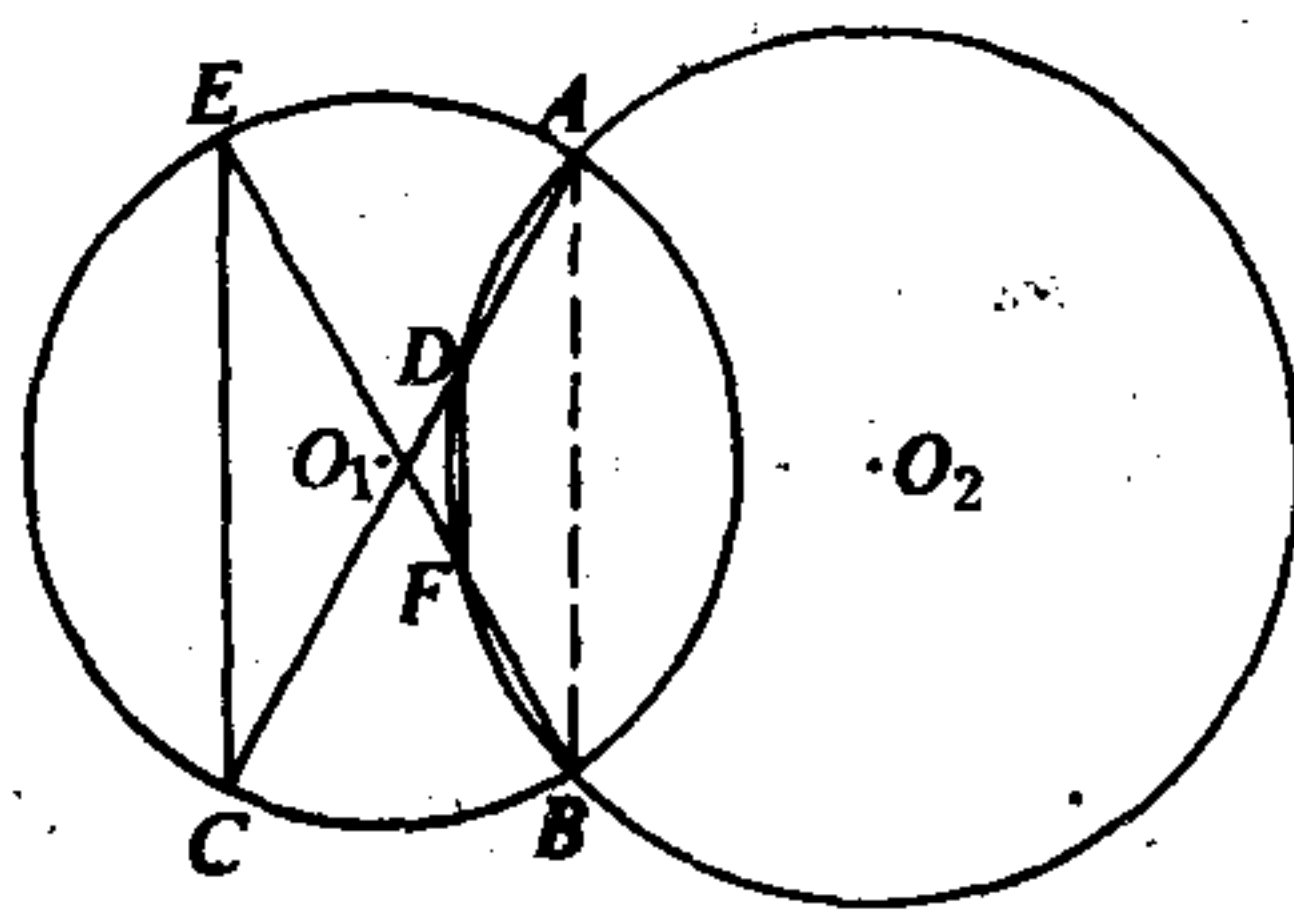


图 7.19

命题 7.19 如图 7.19,如命题 7.3 所述,则 $EC \parallel DF$.

证 连结 AB . $\because \angle EBA + \angle FDA = 180^\circ$, $\angle FDA + \angle CDF = 180^\circ$, $\therefore \angle CDF = \angle EBA = \angle ECA$,故 $EC \parallel DF$.

命题 7.20 如图 7.20, 如命题 7.3 所述, 此时 D 与 F 重合. 如果把点 F 与 EC 视为两线平行的极端情况, 仍有 $EC \parallel F(D)$.

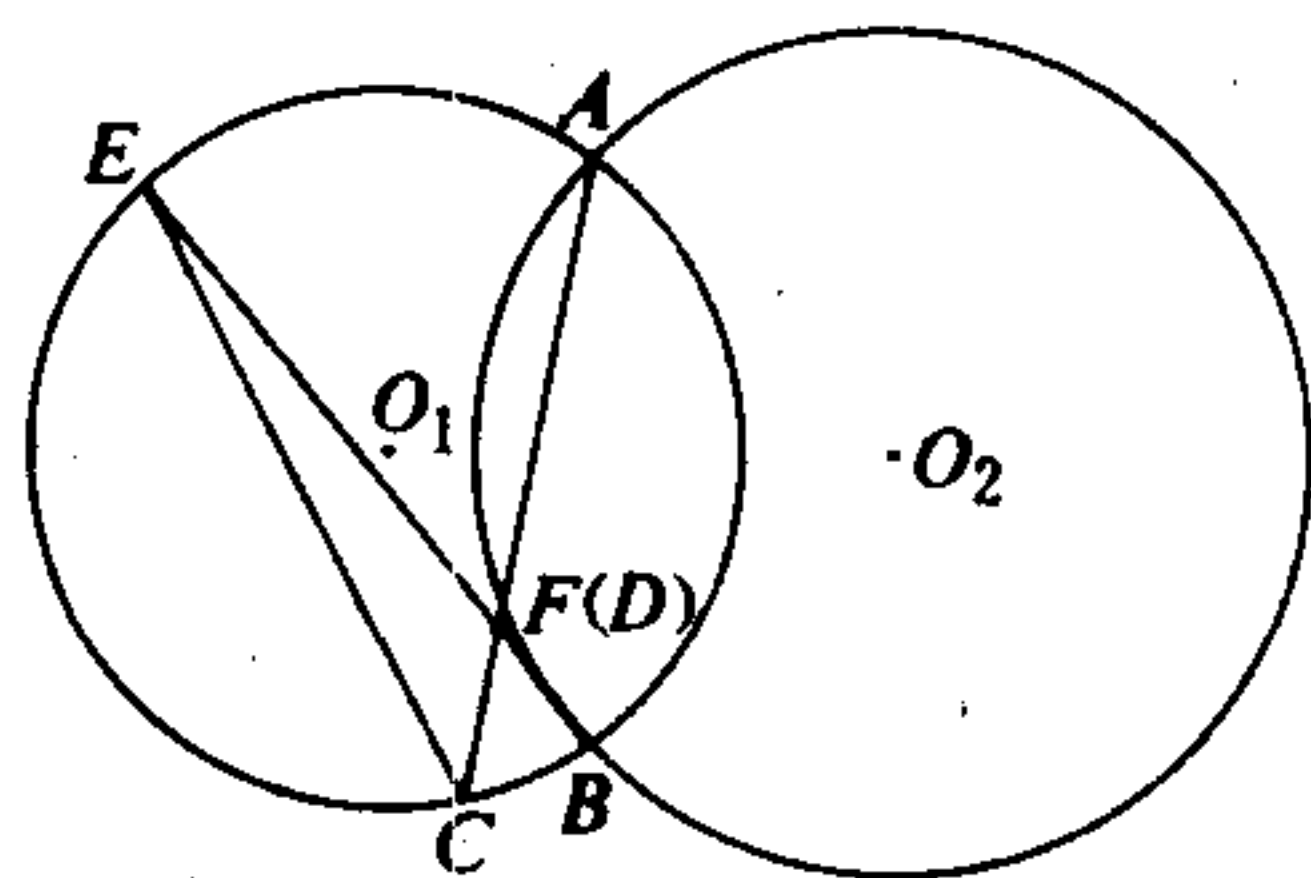


图 7.20

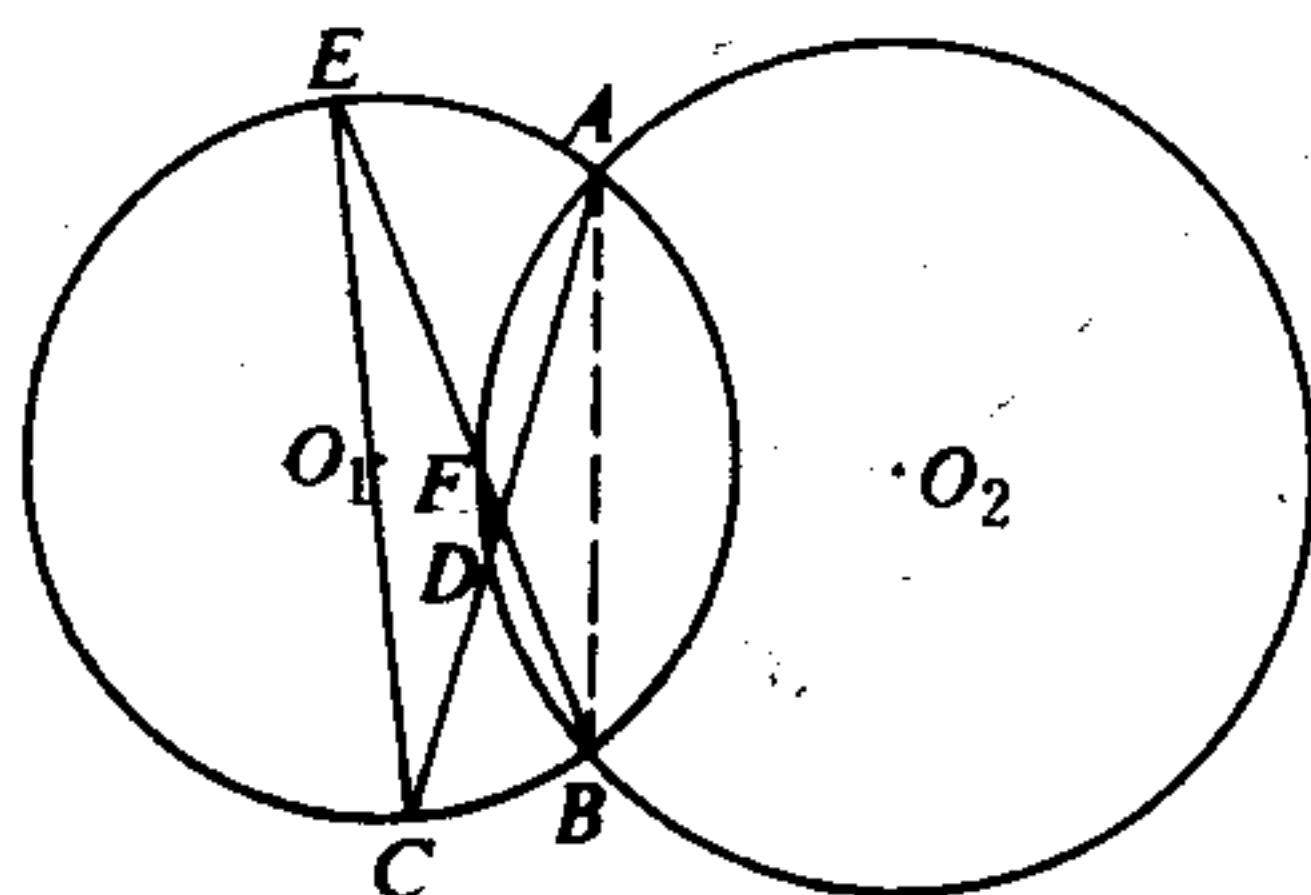


图 7.21

命题 7.21 如图 7.21, 如命题 7.3 所述, 则 $EC \parallel FD$.

证 连结 AB . $\because \angle CEB = \angle CAB = \angle DAB = \angle DFB$,
 $\therefore EC \parallel FD$.

命题 7.22 如图 7.22, 如命题 7.3 所述, 此时 D, C 与 B 重合, EC 与 FD 重合.

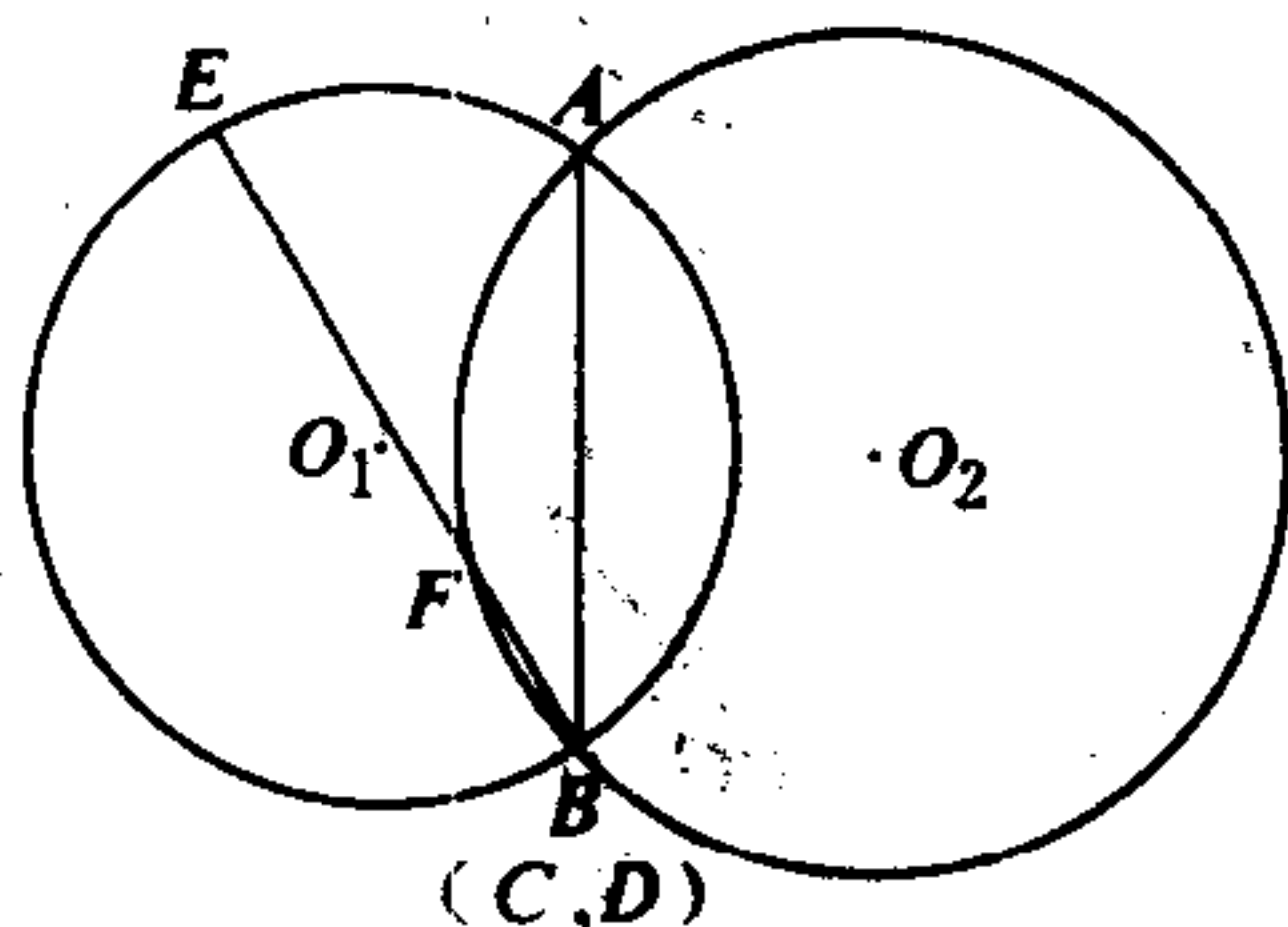


图 7.22

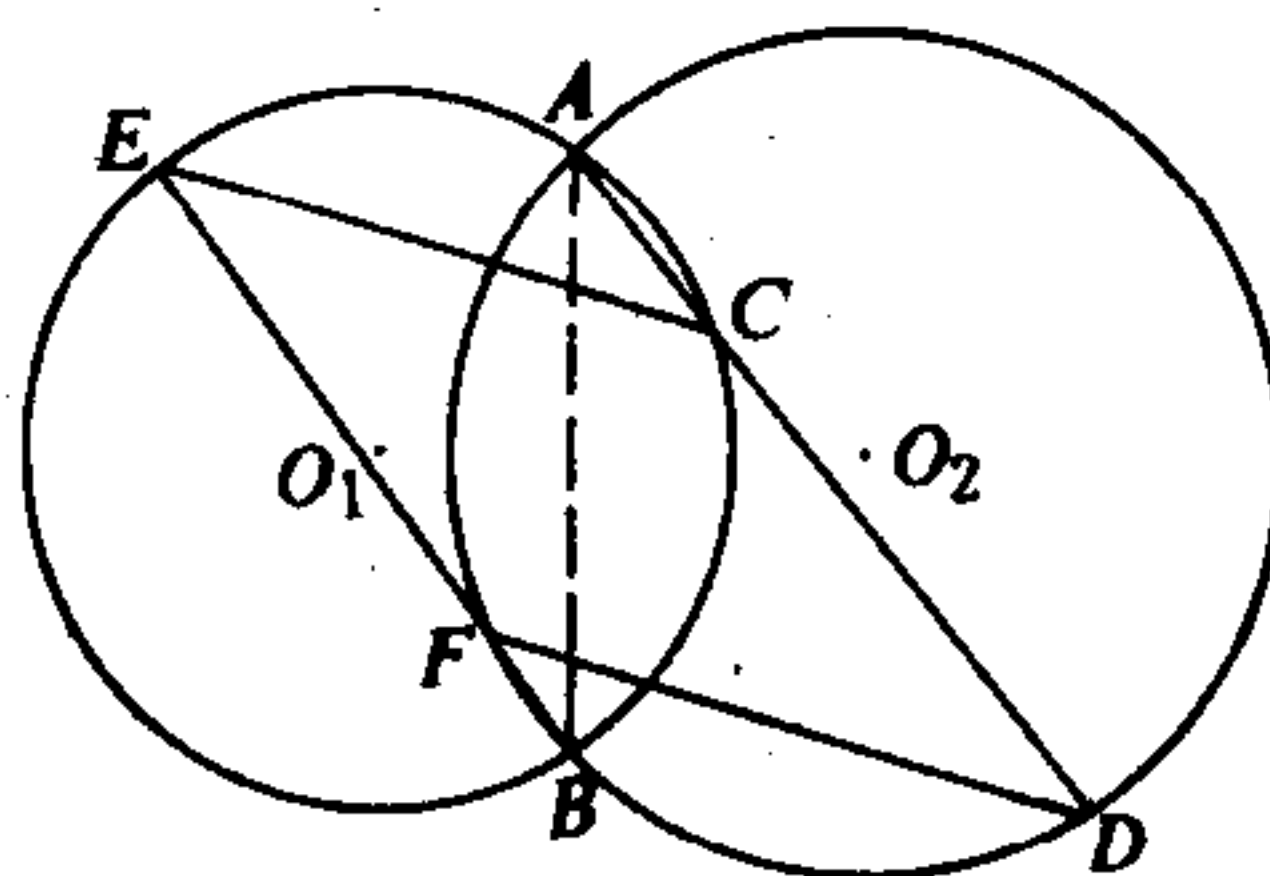


图 7.23

命题 7.23 如图 7.23, 如命题 7.3 所述, 则 $EC \parallel FD$.

证 连结 AB . $\because \angle ACE = \angle ABE = \angle ABF = \angle ADF$,
 $\therefore EC \parallel FD$.

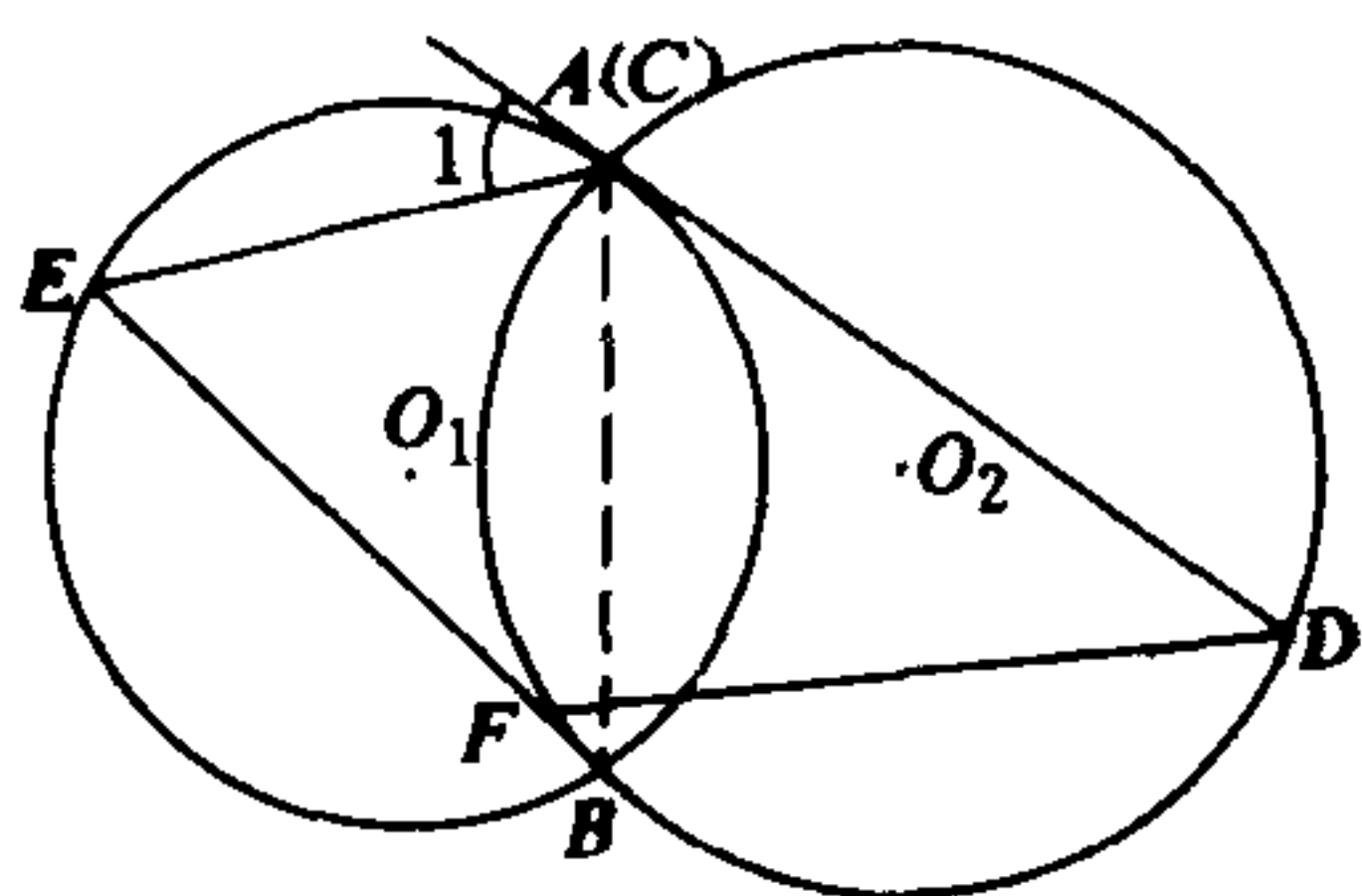


图 7.24

命题 7.24 如图 7.24, 如命题 7.3 所述, 此时 C 与 A 重合, 则 $AE \parallel DF$.

证 连结 AB . $\because \angle 1 + \angle EAD = 180^\circ$, $\angle 1 = \angle EBA = \angle FBA = \angle FDA$, $\therefore \angle FDA + \angle EAD = 180^\circ$. 故 $AE \parallel DF$.

在图 7.6 的基础上, 以 A 为定点, 将直线 CAD 沿顺时针方向旋转一周, 其余条件不变, 通过考察 CAD 所处的特殊位置, 可得到如下命题.

命题 7.25 如图 7.25, 如命题 7.6 所述, 此时 C 与 A (E, F) 重合, 则 CE, DF 在一直线上.

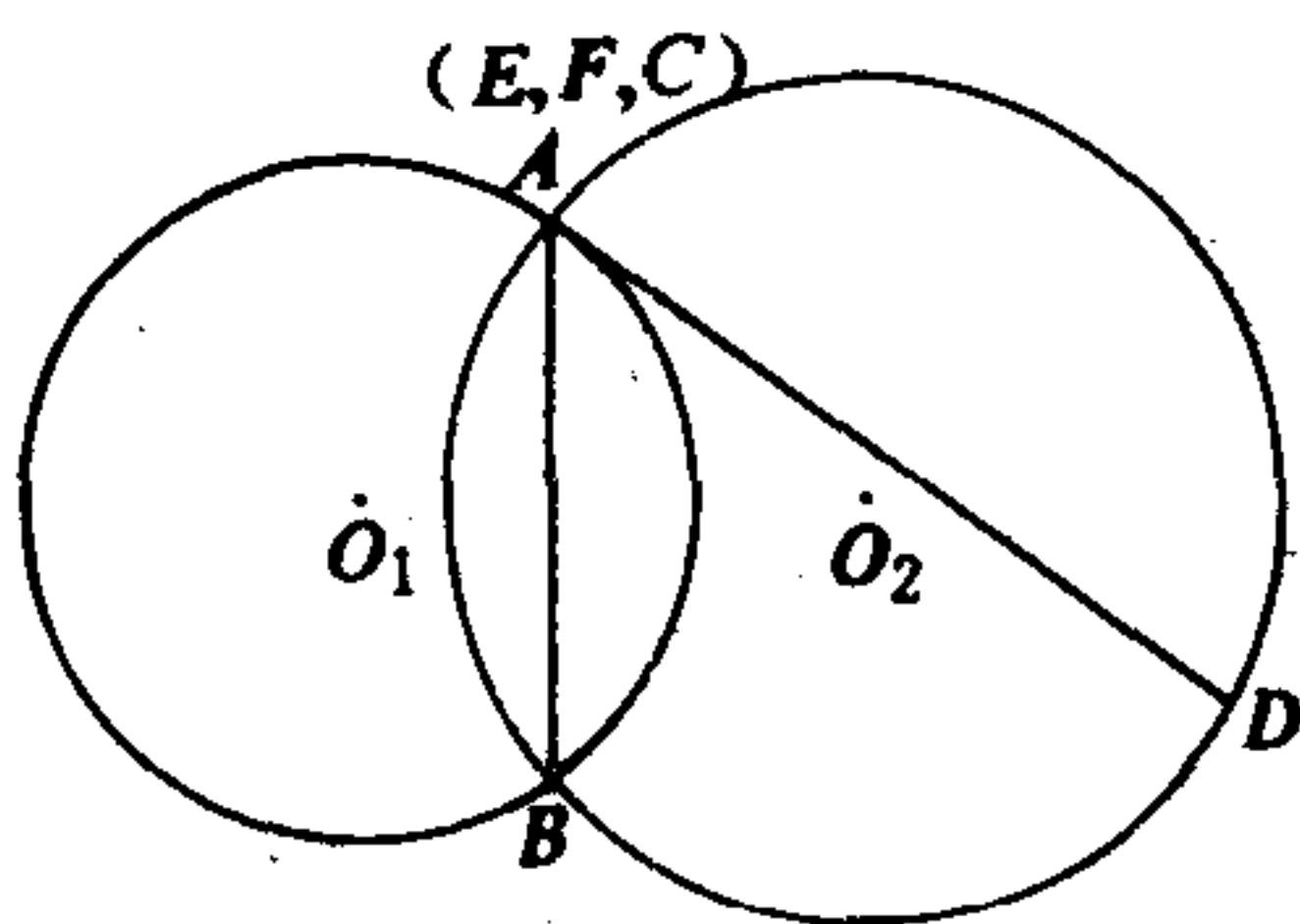


图 7.25

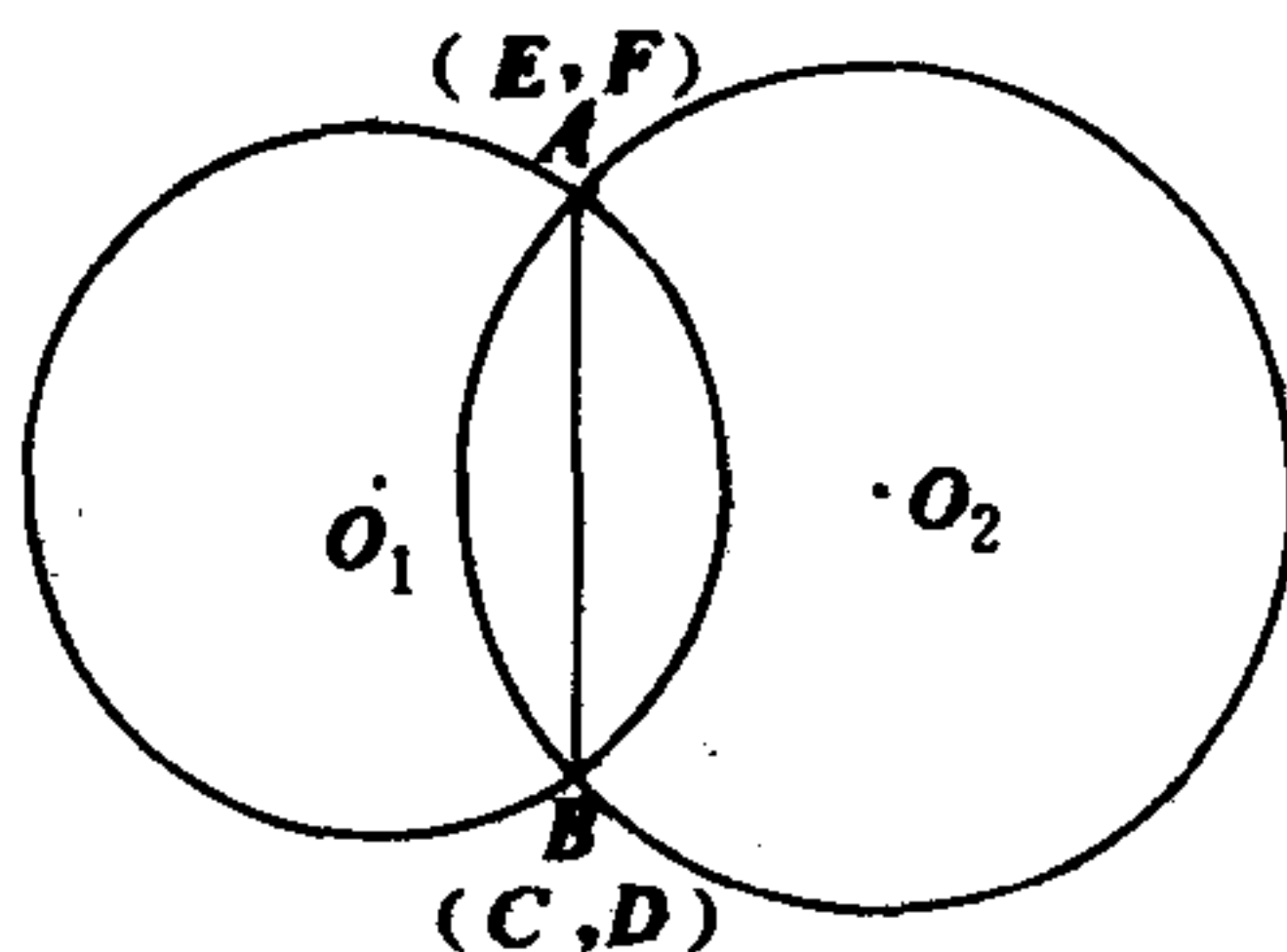


图 7.26

命题 7.26 如图 7.26, 如命题 7.6 所述, 此时 C, D 与 B

重合,则 CE, DF 与 AB 重合.

综上所述,考虑到 A, C, D 与 B, E, F 诸点间的相互位置关系,以及它们之间相互重合的情况,就可以获得如下的一般命题.

命题 7.27 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 A, B 两点,过点 A 的直线 CD 与 $\odot O_1$ 交于点 C ,与 $\odot O_2$ 交于点 D ,过点 B 的直线 EF 与 $\odot O_1$ 交于点 E ,与 $\odot O_2$ 交于点 F ,则 CE 与 FD 平行或重合.

我们把上述各个命题统一成命题 7.27,显示了数学的统一美.但其证明又要分那么多种情况予以讨论,实在是太烦琐了!能否有一个更简捷的证明呢?通过比较分析可知,上述证明的共同特点是都涉及角的问题.下面我们引入广义角的概念,即可对命题 7.27 给出简捷的证明.

7.2 广义角

7.2.1 什么是广义角?

一直线绕定点旋转,可有两种方向,一种是顺时针方向,一种是逆时针方向,如果将其中一种选为正方向,则另一种方向就为负方向.通常我们规定逆时针方向为正,顺时针方向为负.

定义 7.1 两直线形成的角,若按如下方法测定,就称为广义角.假定有两直线 a, b ,它们或相交或平行或重合.任选定一点 O ,通过 O 作两直线 $a' b'$,分别平行(或重合)于 a, b .然后将 a' 绕点 O 沿任意方向旋转,而每当 a' 重合于 b' 一次,

a' 便转过一个角度, 该角度或小于二直角, 或大于二直角, 甚至大于若干周角, 其角度是正值还是负值视其旋转方向而定. 这样获得的角度就作为 a 与 b 所形成的广义角, 记为 $\angle' a, b$.

直线 AB 与 AC 所形成的广义角记为 $\angle' AB, AC$, 简记为 $\angle' BAC$.

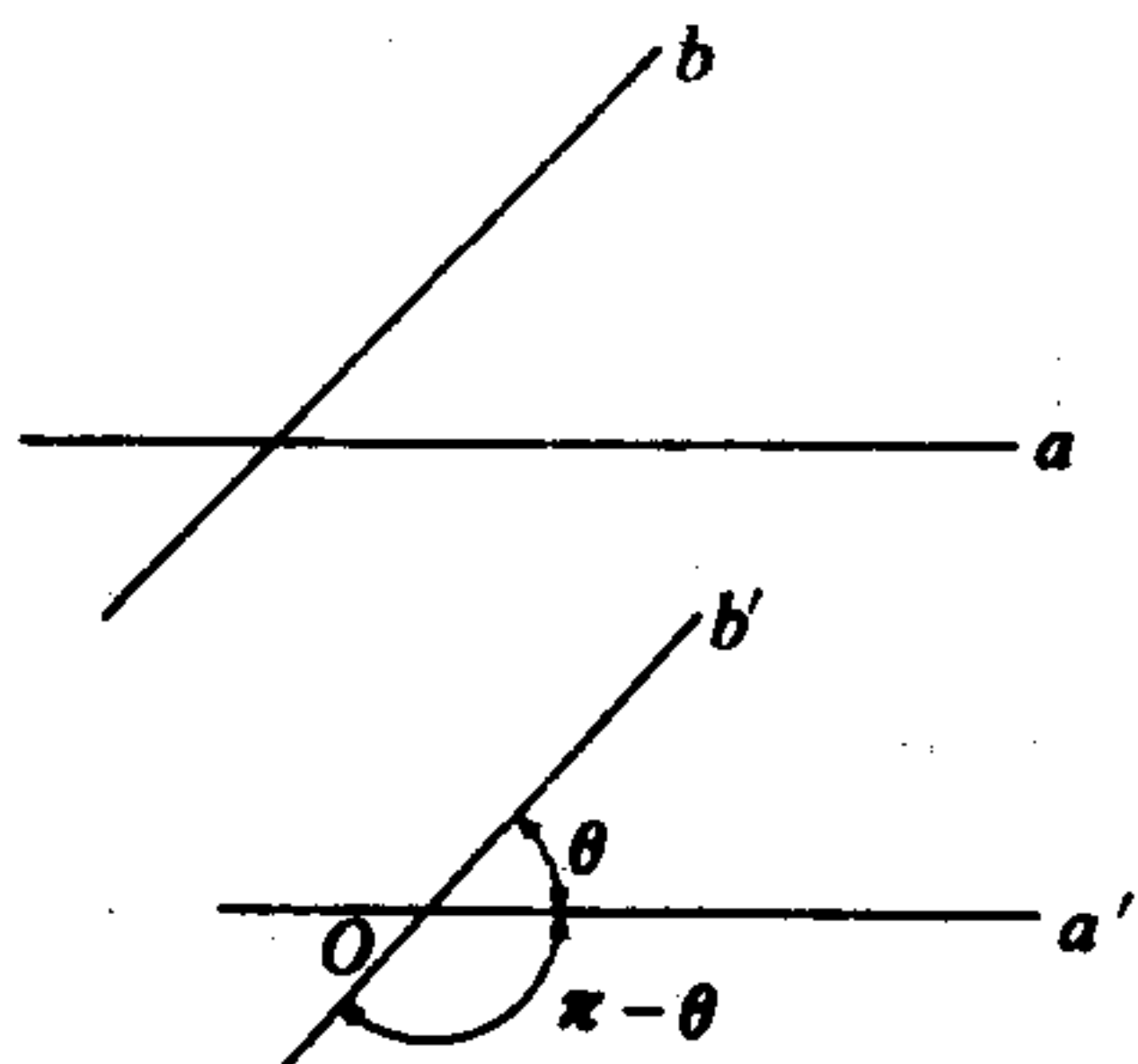


图 7.27

在旋转运动过程中, 由于 a' 与 b' 可随意重合多次, 因此广义角是多值的. 如图 7.27, 设 a' 按正向旋转, 当第一次重合于 b' 时, a' 转过的角度记为 θ ($0 \leq \theta < \pi$); 当第二次重合于 b' 时, a' 转过的角度就为 $\pi + \theta$. 依此类推, 在第 $n+1$ 次重合时, 其值便为

$\theta + n\pi$. 因旋转方向为正向, 故其值为正值.

设 a' 按负向旋转, 当 a' 第一次重合于 b' 时, a' 所转过的角度为 $\pi - \theta$ (图 7.27); 第 n 次重合时, 其值为 $n\pi - \theta$. 因旋转方向为负向, 故其值为负值.

综上所述, 得知 $\angle' a, b$ 的通值为

$$\theta + m\pi,$$

其中 $0 \leq \theta < \pi$, m 为任一整数, 称 θ 为 $\angle' a, b$ 的最小非负值. 特别地, 当 a 与 b 平行或重合时, 则 a' 与 b' 重合, $\theta = 0$, 故 $\angle' a, b = 0$.

7.2.2 广义角的相等

定义 7.2 两个广义角的通值能够一对一地对应相等,就说这两个广义角相等.

定理 7.1 两个广义角是否相等,取决于其最小非负值是否相等.

证 假设两个广义角 $\angle' a, b$ 与 $\angle' a', b'$ 的最小非负值都为 θ , 即

$$\angle' a, b = \theta + m\pi,$$

$$\angle' a', b' = \theta + m'\pi.$$

令 $m = m'$, 就能使 $\theta + m\pi = \theta + m'\pi$. 这就意味着通值能够对应相等, 据定义知 $\angle' a, b = \angle' a', b'$.

推论 若直线 a 与 a' , b 与 b' 分别平行或重合, 则 $\angle' a, b$ 与 $\angle' a', b'$ 相等.

定理 7.2 若两个广义角相等, 则其最小非负值必相等.

证 设 $\angle' a, b = \theta + m\pi$, $\angle' a', b' = \theta' + m'\pi$, 且 $\angle' a, b = \angle' a', b'$. 因此存在一种对应, 以 m_1 代 m , m_1' 代 m' , 可使

$$\theta + m_1\pi = \theta' + m_1'\pi.$$

由此得 $\theta - \theta' = (m_1' - m_1)\pi$,

其中 $m_1' - m_1$ 为一整数. 但 $0 \leq \theta < \pi$, 且 $0 \leq \theta' < \pi$, 因此有 $m_1' - m_1 = 0$, 故推得 $\theta = \theta'$.

推论 若 $\angle' a, b$ 与 $\angle' a', b'$ 相等, 且 a 与 a' 平行或重合, 则 b 与 b' 平行或重合.

定理 7.3 如果两个广义角的任一值之差等于 $k\pi$ (k 为任一整数), 那么这两个广义角相等.

定理 7.4 直线 a 与 b 平行或重合的充要条件为 $\angle' a, b = 0$.

证 先证必要性. 若 a 与 b 平行或重合, 则 $\angle' a, b = m\pi$, 略去 $m\pi$, 便得知 $\angle' a, b = 0$.

再证充分性. 假定 $\angle' a, b = 0$, 由上述证明知 $\angle' a, a = 0$, 于是 $\angle' a, a = \angle' a, b$, 因此 a 与 b 平行或重合.

7.2.3 几个重要定理

由定理 7.4 和定理 7.2 的推论可得如下定理.

定理 7.5 三点 A, B, C 共线的充要条件为下列二者之一:

(i) $\angle' ABC = 0$;

(ii) $\angle' PAB = \angle' PAC$,

其中 P 是异于 A 的任意一点.

定理 7.6 四点 A, B, C, D 共圆的充要条件为

$$\angle' ACB = \angle' ADB \neq 0. \quad (7.1)$$

证 先证必要性. 因 A, B, C, D 四点共圆, 则 $\angle' ACB$ 与 $\angle' ADB$ 的最小非负值永远相等且不为零 (因 A, B, C, D 中无三点共线), 再据定理 7.1 知式 (7.1) 必成立.

再证充分性. 由于 $\angle' ACB \neq 0$, 故可过 A, B, C 三点作一圆. 假设该圆交 AD 于点 D' , 据上所证应有

$$\angle' ACB = \angle' AD' B.$$

与 (7.1) 比较, 得知

$$\angle' AD' B = \angle' ADB.$$

由定理 7.2 的推论得知直线 BD' 与 BD 必重合, 因而 D' 与 D

同为一点.

推论 设直线 $a \perp a'$ 且 $b \perp b'$, 则 $\angle' a, b = \angle' a', b'$.

定理 7.7 直线 AT 切 $\odot ABC$ 的充要条件为

$$\angle' TAB = \angle' ACB.$$

其证明与定理 7.6 的证明相似, 此处从略.

由广义角还可引出其他一些定理, 这里就不详述了. 现用广义角的有关结论, 给出命题 7.27 的简捷证明:

连结 AB , 由定理 7.6 和定理 7.7 知

$$\angle' ACE = \angle' ABE = \angle' ABF = \angle' ADF,$$

又 AD 与 AC 重合, 故由定理 7.2 及其推论知, CE 与 FD 平行或重合.

这是多么简捷的证明啊! 当然这里用到了广义角的概念以及由此推出的定理. 如果只是为了证明命题 7.27, 自然没有必要这样“大动干戈”, 但实际上, 应用广义角的概念可以解决欧几里得几何中一些比较复杂的问题, 它常常使一些命题熔于一炉, 并使证法更具有普遍性. 对欧氏几何有兴趣的读者, 不妨用这一有力工具再解决一些问题.

7.3 变动圆的位置

上面通过两个固定的圆, 以运动的观点考察了两条相交直线的各种位置关系, 最后得到了统一的命题 7.27. 这个美好的结果可否予以推广? 又怎样推广呢? 我们不禁想起了几句苏轼的词: “人有悲欢离合, 月有阴晴圆缺, 此事古难全. 但愿人长久, 千里共婵娟.” 两圆相交好比月亮被地球遮住了一

部分,因此形成月牙形,但月亮还有复圆的时候.这就启发我们,可以通过变动两圆的位置关系,看看原命题是否仍然成立.下面我们就来考虑两圆外切、相离和内切的情况.

7.3.1 外切

对于图 7.1,缩小 AB ,特别当 A, B 重合时,公共弦就变成了切线,则命题 7.27 的结论仍然成立,并且通过观察图形,我们猜测还有 $O_1E \parallel O_2F$,即有

命题 7.28 如图 7.28, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于点 A ,过切点作直线 CD, EF ,与两圆分别交于点 C, D 和 E, F . 则有

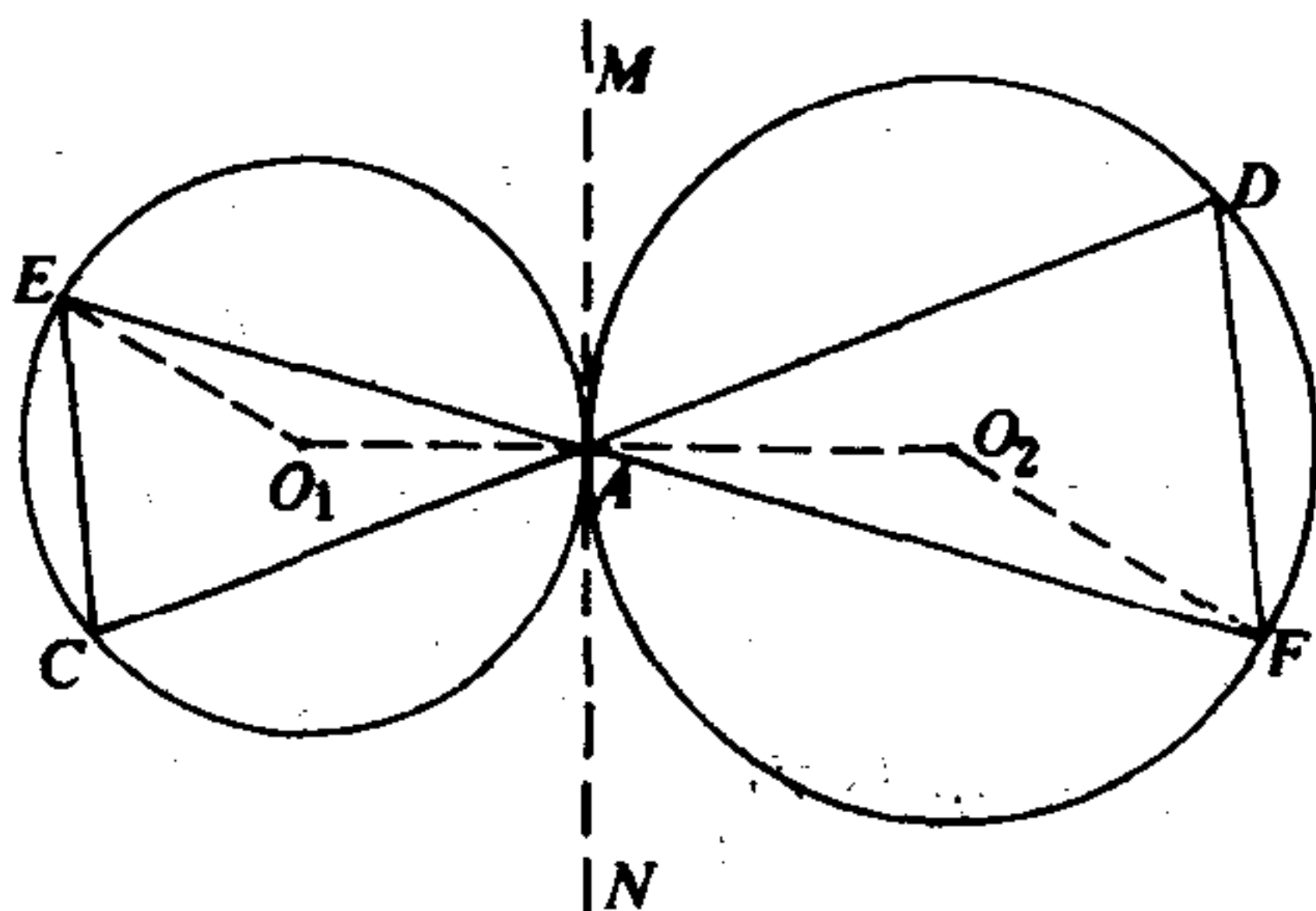


图 7.28

(i) EC 与 DF 平行或重合;

(ii) $O_1E \parallel O_2F$.

证 (i) 过 A 作公切线 MN . $\because AFD = MAD = CAN = CEA, \therefore CE \parallel DF$.

以 A 为定点,将直线 EF 沿顺时针(或逆时针)方向旋转一周,会出现两种特殊情况:① E 与 C 重合、 D 与 F 重合,以

及 E 与 D 重合、 F 与 C 重合,这均可视为两直线平行的极端情况;② E, F 与 A 重合,这时 EC, DF 重合.

(我们还可以用广义角的概念给(i)以简证:据定理 7.7 有 $\angle' ECA = \angle' EAM = \angle' FAN = \angle' ADF$,再由定理 7.2 及其推论知 CE 与 DF 平行或重合.)

(ii)连结 O_1O_2, O_1E, O_2F . $\because \angle EO_1A = 2\angle EAM, \angle FO_2A = 2\angle FAN$, 而 $\angle EAM = \angle FAN, \therefore \angle EO_1A = \angle FO_2A$. 故 $O_1E \parallel O_2F$.

我们在图 7.28 的基础上进行特殊化,可得到如下命题.

命题 7.29 如图 7.29,使直线 ED 分别切 $\odot O_1, \odot O_2$ 于 E, D 两点,连结 EA 并延长之交 $\odot O_2$ 于点 F , 连结 DA 并延长之交 $\odot O_1$ 于 C . 则有

- (i) $EC \parallel DF$;
- (ii) $EF \perp DC$;
- (iii) EC, DF 分别为 $\odot O_1, \odot O_2$ 的直径;

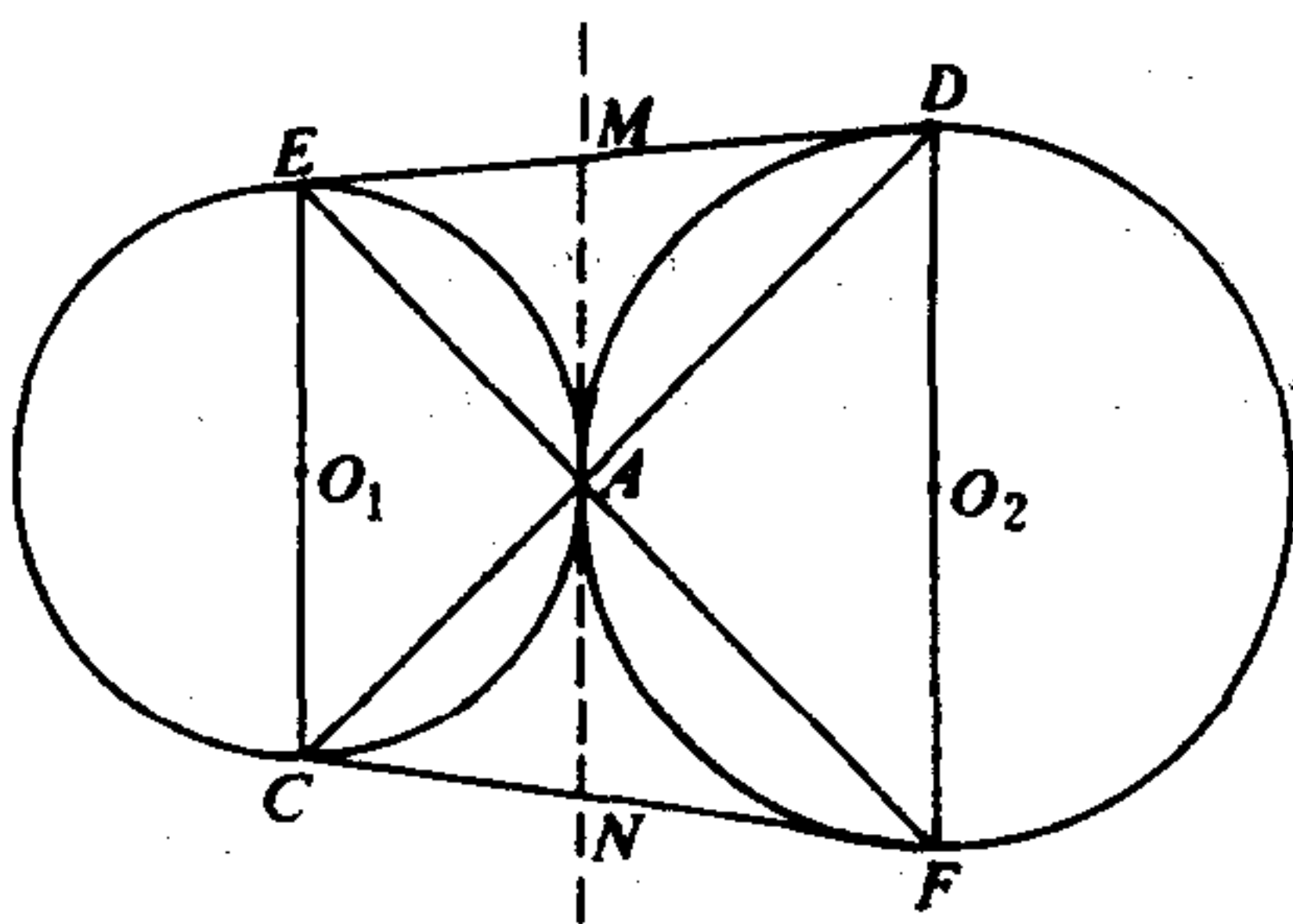


图 7.29

$$(iv) ED^2 = EC \cdot DF;$$

$$(v) ED^2 = EA \cdot AF + CA \cdot AD.$$

证 (i) 图 7.29 是图 7.28 所处的特殊位置, 当然结论成立.

(ii) 过 A 作两圆的公切线 MN 交 ED 于 M , 由 $\angle MAE = \angle MEA$, $\angle MAD = \angle MDA$, 且

$$\angle MEA + \angle MAE + \angle MAD + \angle MDA = 180^\circ,$$

故 $\angle MAE + \angle MAD = \angle EAD = 90^\circ$.

因此 $DA \perp EA$, 即 $EF \perp DC$.

(iii) 由 $\angle EAC = \angle DAF = 90^\circ$ 知 $\widehat{EC}$, $\widehat{DF}$ 各为半圆周, 故 EC , DF 分别过圆心 O_1, O_2 , 即 EC, DF 分别为 $\odot O_1, \odot O_2$ 的直径.

$$(iv) \because \triangle CED \sim \triangle EDF, \therefore \frac{ED}{DF} = \frac{EC}{ED}, \text{ 即}$$

$$ED^2 = EC \cdot DF.$$

$$(v) \because AD^2 = EA \cdot AF, AE^2 = CA \cdot AD,$$

$$\therefore ED^2 = AD^2 + AE^2 = EA \cdot AF + CA \cdot AD.$$

7.3.2 相离

现在考虑两个圆相离的情况. 在图 7.28 的基础上, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 逐渐相离, 这时过 A 的公切线, 变成两条内公切线: 一条是 EAF , 分别切 $\odot O_1$ 于 E , 切 $\odot O_2$ 于 F ; 一条是 CAD , 分别切 $\odot O_1$ 于 C , 切 $\odot O_2$ 于 D (图 7.30). 这时显然有 $EC \parallel DF$. 连结 O_1O_2, O_1C, O_2D , 可知 $\triangle ACO_1 \sim \triangle ADO_2$, 故有

$$\frac{AC}{AD} = \frac{O_1C}{O_2D} = \frac{r}{R}.$$

由此我们猜想：两个不等圆的两条内公切线相交于内相似中心. 实际上, 这是一个几何中的定理, 于是得到了如下的命题.

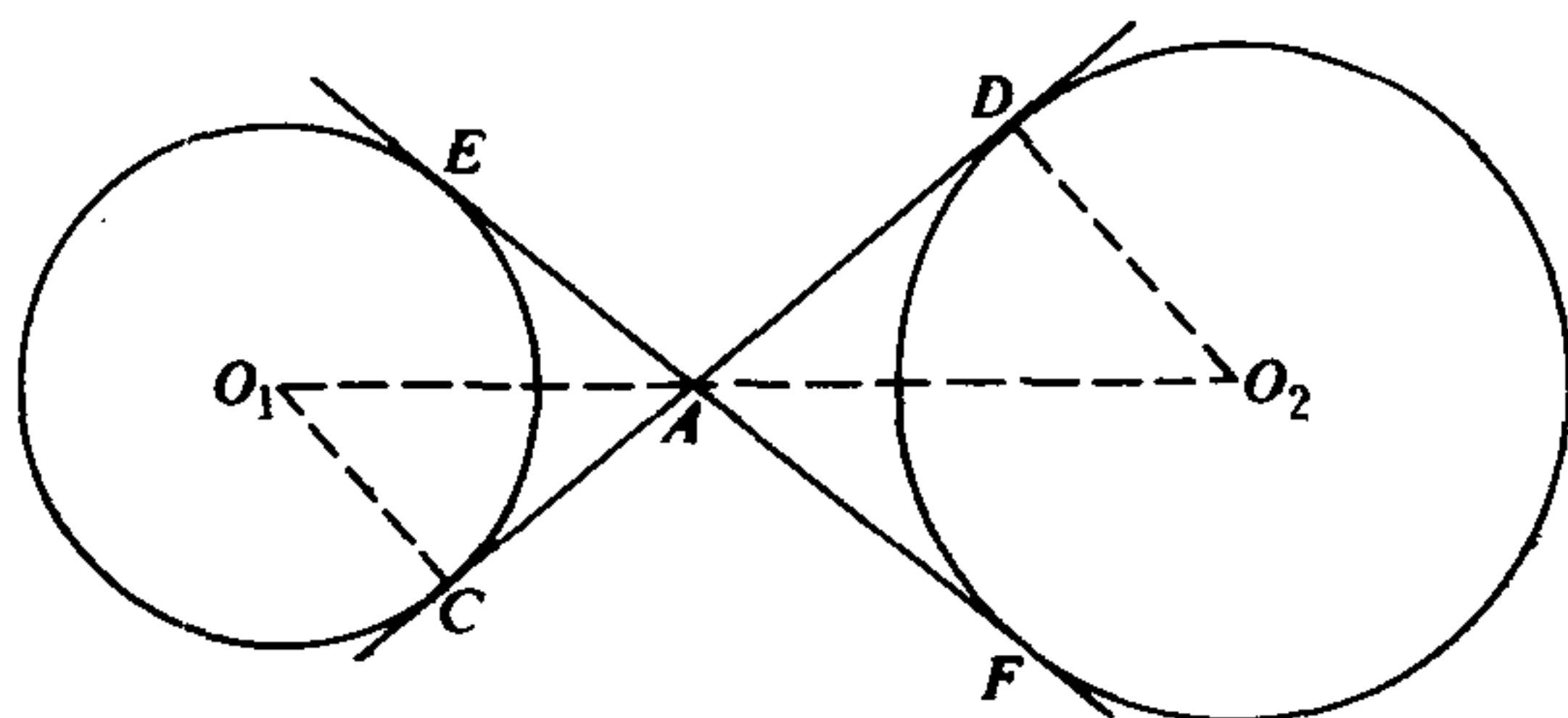


图 7.30

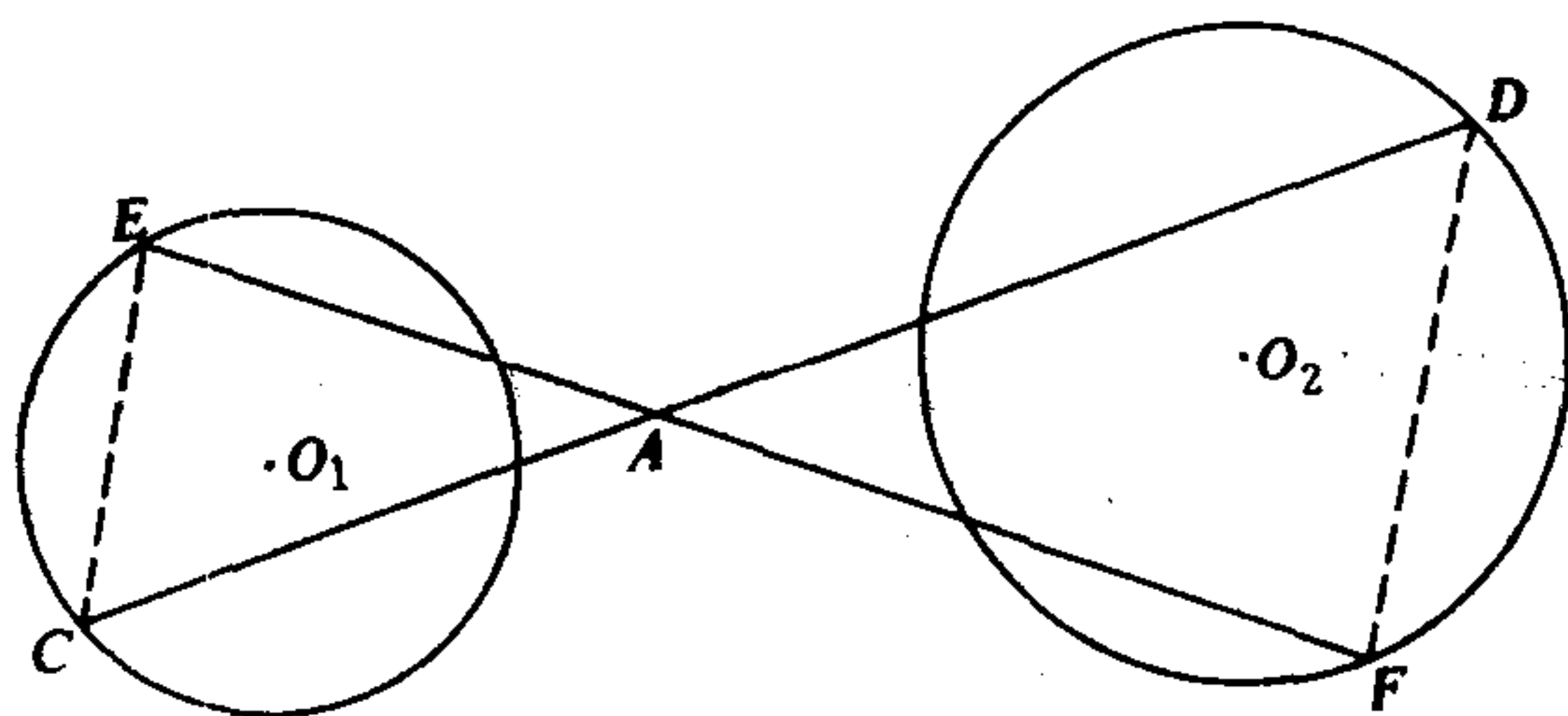


图 7.31

命题 7.30 如图 7.31, 过 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 两条内公切线的交点 A 的直线 CD, EF 分别交 $\odot O_1, \odot O_2$ 于点 C, E 和 D, F , 则 $EC \parallel DF$.

证 由于交点 A 为两圆内相似中心, 故推知 $\triangle AEC \sim \triangle AFD$, 所以 $\angle AEC = \angle AFD$. 故 $EC \parallel DF$.

很自然地, 我们可由内公切线想到外公切线, 由内相似中

心想到外相似中心,故有如下命题.

命题 7.31 如图 7.32,过 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的两条外公切线的交点 A 的直线 EF 和 CD 分别交 $\odot O_1$, $\odot O_2$ 于点 E,F 和 C,D ,则有 $EC \parallel FD$.

特别地,当给定的两圆 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相等时,则有如下结果.

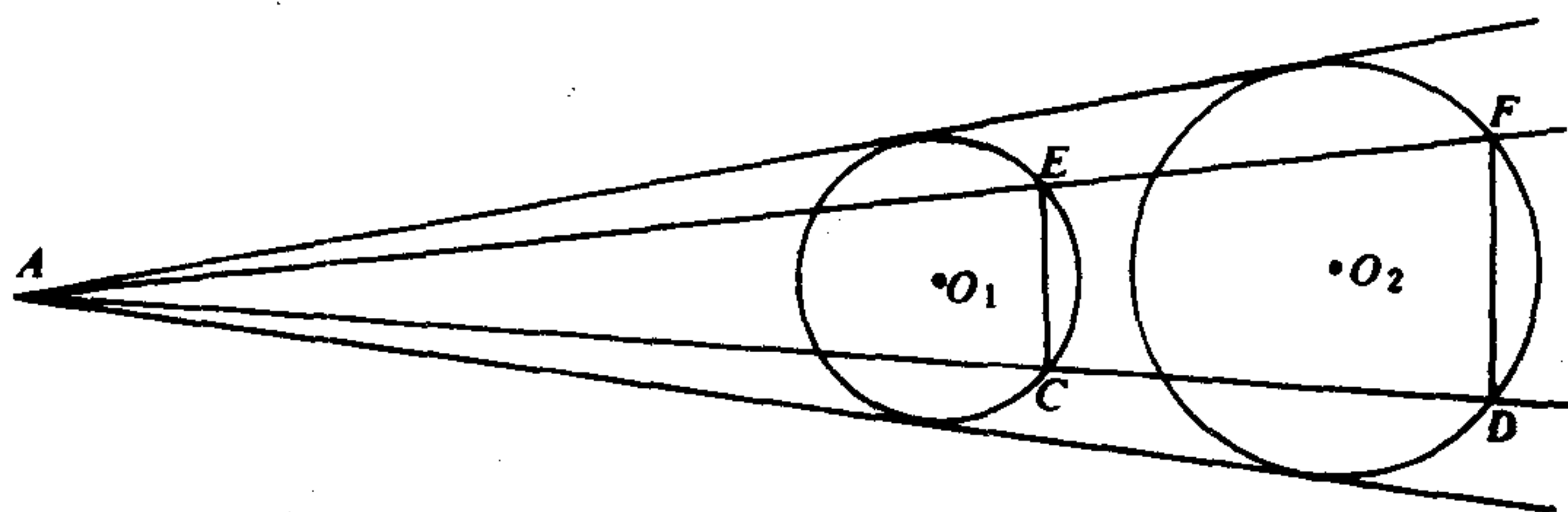


图 7.32

命题 7.32 设两个等圆 $\odot O_1$, $\odot O_2$ 相离,任意两条与连心线 O_1O_2 平行的直线 CD 和 EF 分别交 $\odot O_1$, $\odot O_2$ 于点 C,E 和 D,F ,而有 $CE \parallel DF$.

7.3.3 内切

把图 7.1 中的 $\odot O_1$ 向右移动,使 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 内切,过切点 A 作两直线,与两圆分别相交,则上述结论亦成立,即有

命题 7.33 如图 7.33, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 内切于 A ,过切点 A 作直线 CD 和 EF 与两圆分别交于点 C,D 和 E,F ,则有 $CE \parallel DF$.

证 过 A 作切线 MN . $\because \angle ECA = \angle EAN, \angle FDA =$

$\angle FAN = EAN, \therefore \angle ECA = \angle FDA$. 故 $CE \parallel DF$.

特别地, 当 DF 切于 $\odot O_1$ 时有

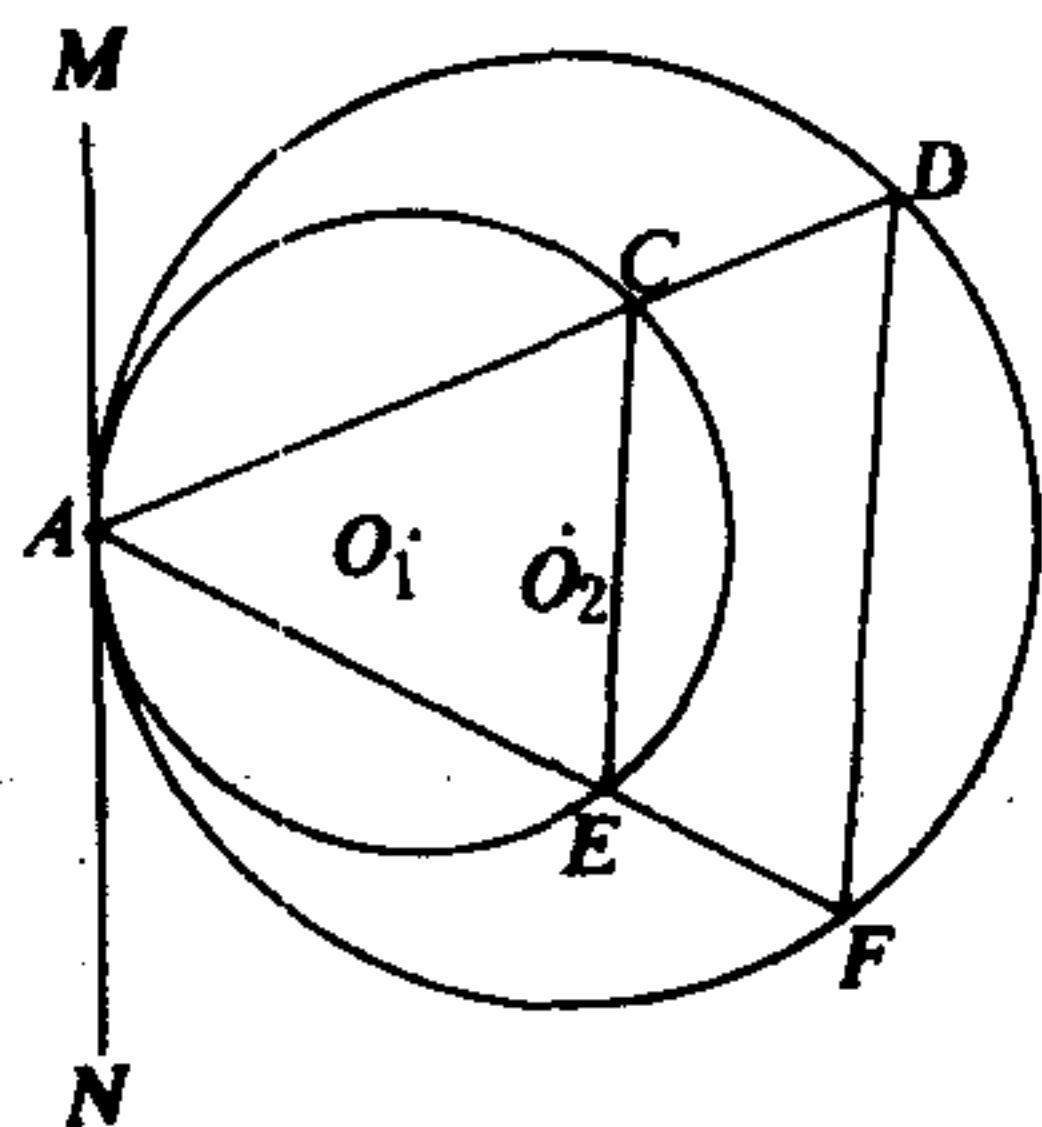


图 7.33

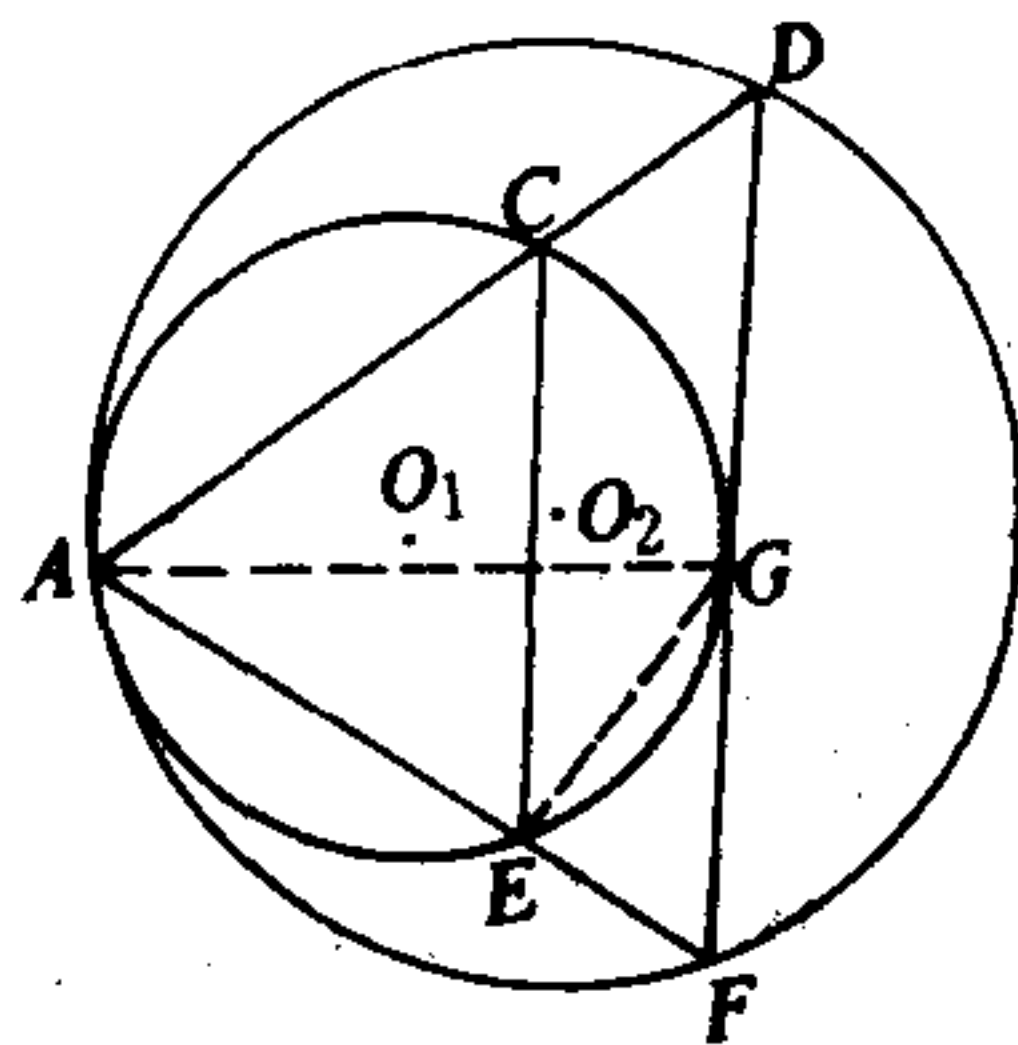


图 7.34

命题 7.34 如图 7.34, DF 切 $\odot O_1$ 于点 G , 则有

- (i) $CE \parallel DF$;
- (ii) AG 平分 $\angle DAF$;
- (iii) $AG^2 = AD \cdot AE$.

证 (i) 同命题 7.33 的证明.

(ii) 连结 EG . $\because CE \parallel DF, \therefore \angle EGF = \angle CEG$. 而 $\angle EGF = \angle EAG, \angle CEG = \angle CAG$, 故 $\angle CAG = \angle EAG$, 即 AG 平分 $\angle DAF$.

(iii) $\because \angle CAG = \angle EAG, \angle AGE = \angle ACE = \angle ADG$, $\therefore \triangle ADG \sim \triangle AGE$. 故有 $\frac{AG}{AE} = \frac{AD}{AG}$, 即 $AG^2 = AD \cdot AE$.

7.4 换一个角度看问题

如果从另一个角度来看图 7.34, 把 AF 和 DF 看做两条

相交直线,其中一条直线过内切点,两条直线的交点在一个圆周上.从这一观点审视,又可得到如下的一些命题.

命题 7.35 如图 7.35, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 内切于点 A , 过 A 的直线交 $\odot O_1$ 于点 C , 交 $\odot O_2$ 于点 B , 过 B 与 $\odot O_1$ 相切于点 D 的直线交 $\odot O_2$ 于 E , 则有

(i) AD 平分 $\angle EAC$;

(ii) $AD^2 = AE \cdot AC$.

在图 7.35 中,以 B 为定点,沿逆时针方向旋转 BE , 得到图 7.36, 我们有如下命题.

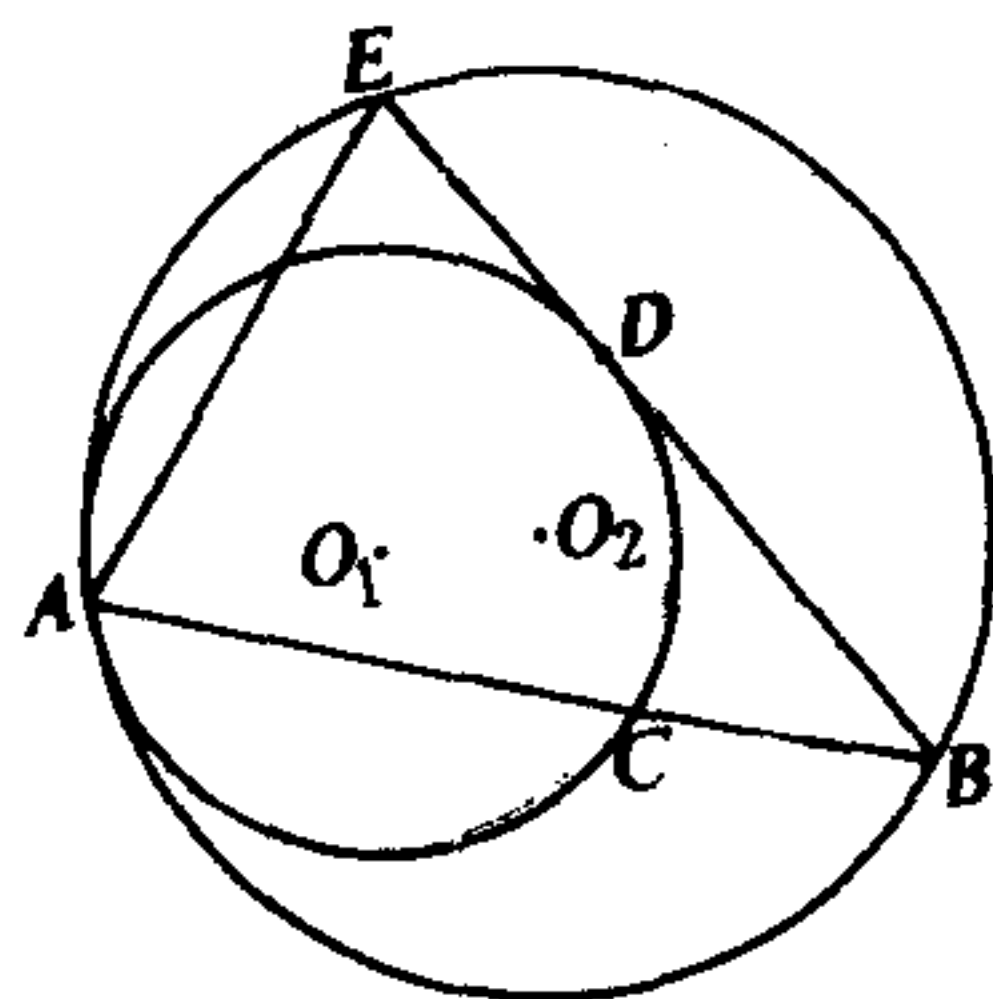


图 7.35

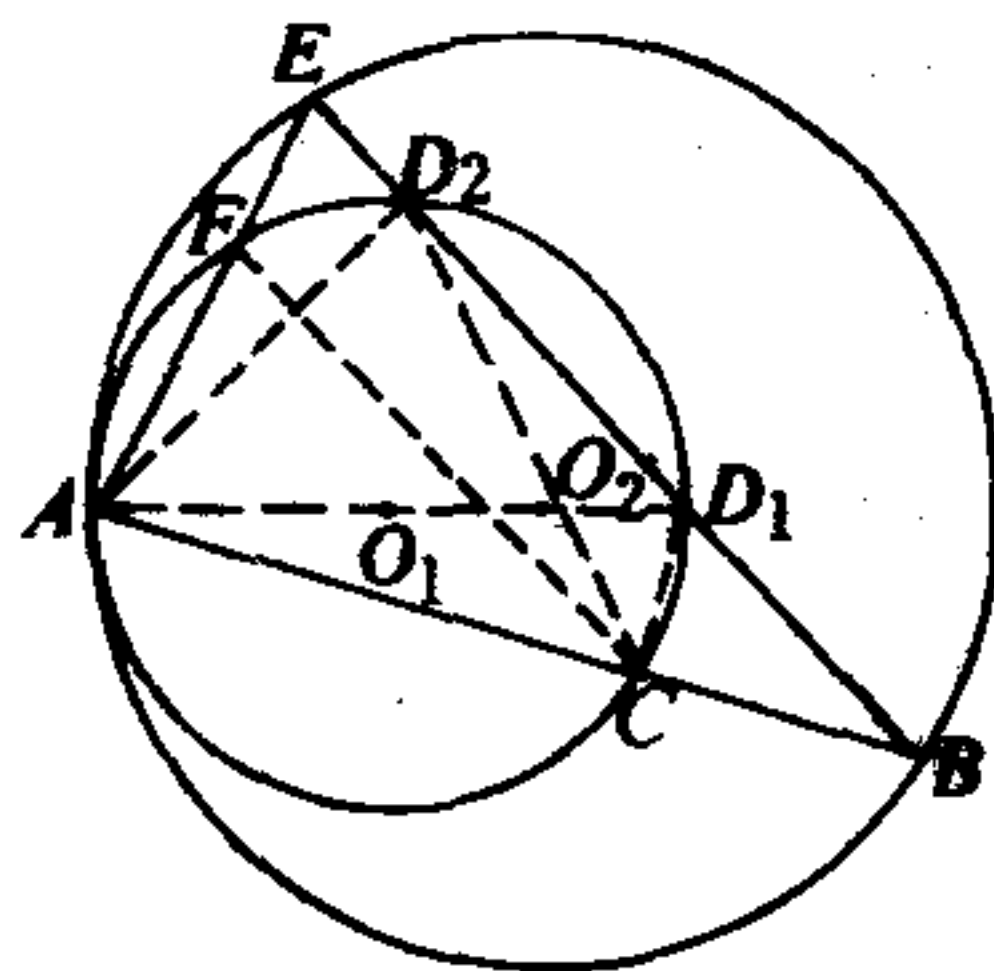


图 7.36

命题 7.36 如图 7.36, $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 内切于点 A , 过 A 的直线交 $\odot O_1$ 于点 C , 交 $\odot O_2$ 于点 B , 过 B 的直线交 $\odot O_1$ 于 D_1, D_2 , 交 $\odot O_2$ 于 E , 则有

(i) $\angle BAD_1 = \angle D_2AE$;

(ii) $AD_1 \cdot AD_2 = AC \cdot AE$.

证 (i) 设 AE 交 $\odot O_1$ 于 F , 连结 FC , 可知 $FC \parallel EB$, 故 $\angle D_2CF = \angle CD_2D_1$. 而 $\angle D_2CF = \angle D_2AF = \angle D_2AE$,

$\angle CD_2D_1 = \angle CAD_1 = \angle BAD_1$, 故 $\angle BAD_1 = \angle D_2AE$.

(ii) 连结 CD_1 , $\angle AD_1C = \angle AFC$, 而 $\angle AFC = \angle AED_2$, 故 $\angle AED_2 = \angle AD_1C$. 又由 (i) 知 $\angle D_2AE = \angle BAD_1$, 所以 $\triangle AED_2 \sim \triangle AD_1C$. 因此 $\frac{AD_2}{AC} = \frac{AE}{AD_1}$, 即 $AD_1 \cdot AD_2 = AC \cdot AE$.

考虑两个圆内切之后, 我们接着再次考虑两个圆相交的情况. 从图 7.37 看, 我们猜想有如下命题.

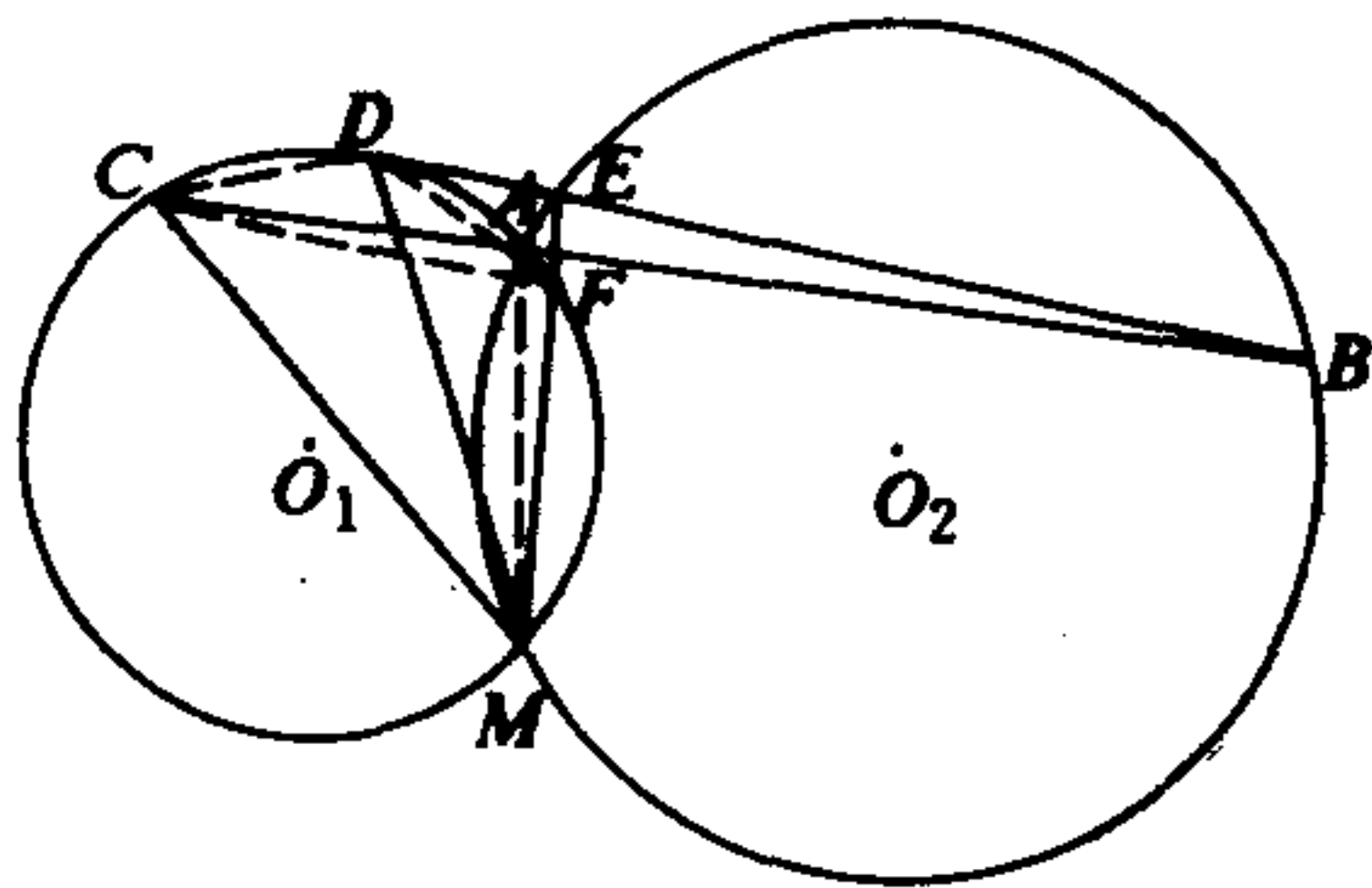


图 7.37

命题 7.37 如图 7.37, $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 A, M 两点, 过 A 的直线交 $\odot O_1$ 于点 C , 交 $\odot O_2$ 于点 B , 过点 B 和 $\odot O_1$ 相切于点 D 的直线交 $\odot O_2$ 于点 E , 则有

(i) $\angle EMD = \angle DMC$;

(ii) $MD^2 = ME \cdot MC$.

证 (i) ME 交 $\odot O_1$ 于 F , 连结 CF, DF, AM , 有 $\angle ACF = \angle AMF = \angle AME = \angle ABE$, 故有 $CF \parallel DB$, 从而 $\angle FDE = \angle CFD$. 而 $\angle CFD = \angle DMC$, $\angle FDE = \angle DMF = \angle EMD$. 故 $\angle EMD = \angle DMC$.

(ii) $\because \angle DCM = \angle EDM, \angle EMD = \angle DMC, \therefore \triangle CMD \sim \triangle DME$. 因此 $\frac{MC}{MD} = \frac{MD}{ME}$, 即 $MD^2 = ME \cdot MC$.

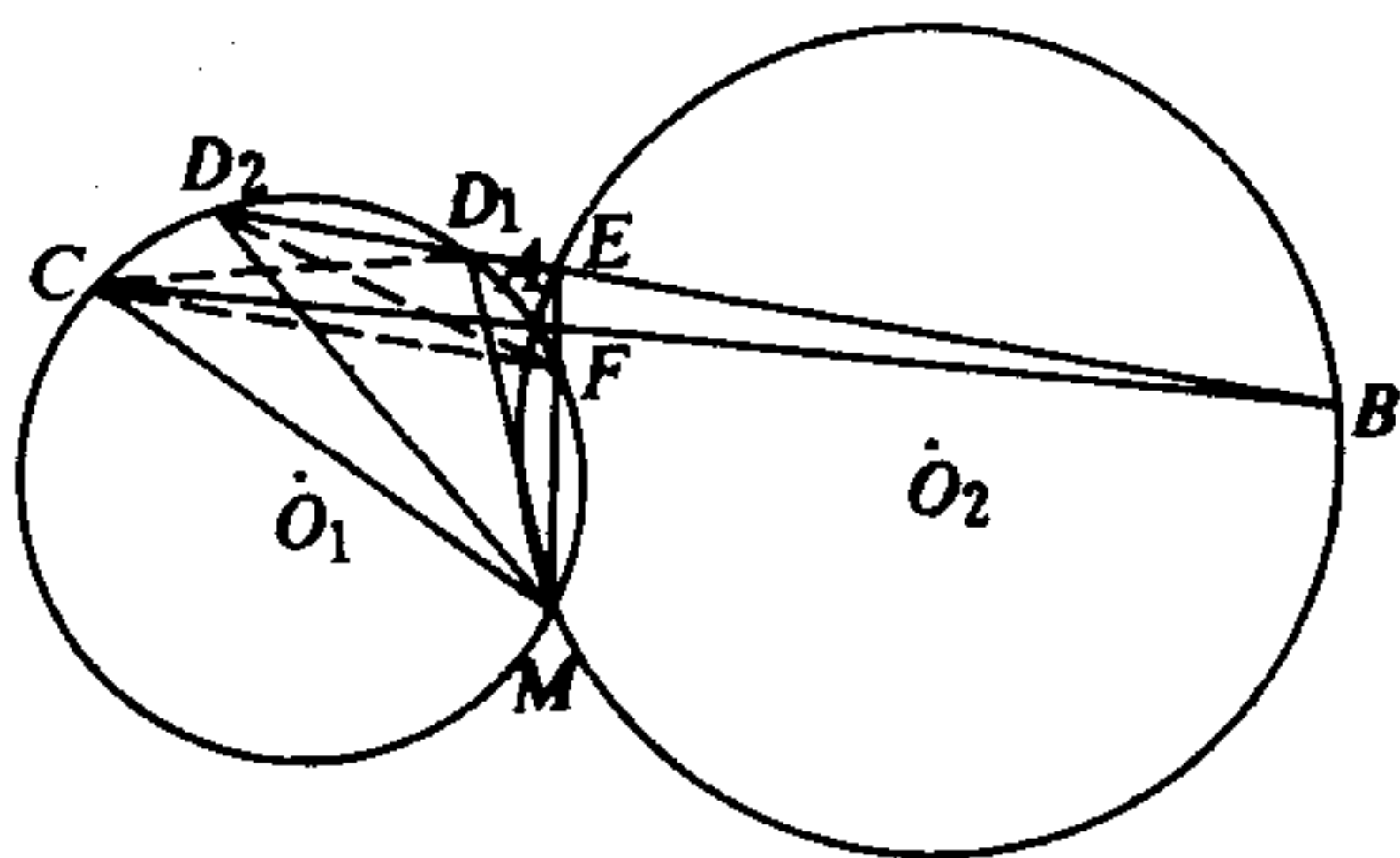


图 7.38

命题 7.38 如图 7.38, $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 A, M 两点, 过 A 的直线交 $\odot O_1$ 于点 C , 交 $\odot O_2$ 于点 B , 过点 B 和 $\odot O_1$ 交于 D_1, D_2 的直线交 $\odot O_2$ 于点 E , 则有

(i) $\angle EMD_1 = \angle CMD_2$;

(ii) $MD_1 \cdot MD_2 = MC \cdot ME$.

证 (i) 设 ME 交 $\odot O_2$ 于 F , 连结 CF, AM , 有 $\angle ACF = \angle AMF = \angle AME = \angle ABE$, 故有 $CF \parallel D_2B$, 从而 $\angle BD_2F = \angle D_2FC$. 而 $\angle D_2FC = \angle CMD_2$, $\angle BD_2F = \angle FMD_1 = \angle EMD_1$, 故 $\angle EMD_1 = \angle CMD_2$.

(ii) 连结 CD_1 , 易知 $\triangle D_1CM \sim \triangle ED_2M$, 故 $\frac{MD_1}{ME} = \frac{MC}{MD_2}$, 即 $MD_1 \cdot MD_2 = MC \cdot ME$.

继续考虑两个圆外切的情况, 亦有相应的结论.

命题 7.39 如图 7.39, $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 外切于点 A , 过 A 的直线交 $\odot O_1$ 于点 C , 交 $\odot O_2$ 于点 B , 过点 B 和 $\odot O_1$ 相切于点 D 的直线交 $\odot O_2$ 于点 E , 则有

(i) AD 平分 $\angle EAC$;

(ii) $AD^2 = AE \cdot AC$.

证 (i) 过 A 作公切线 MN 交 DE 于 N , $\angle NAE =$

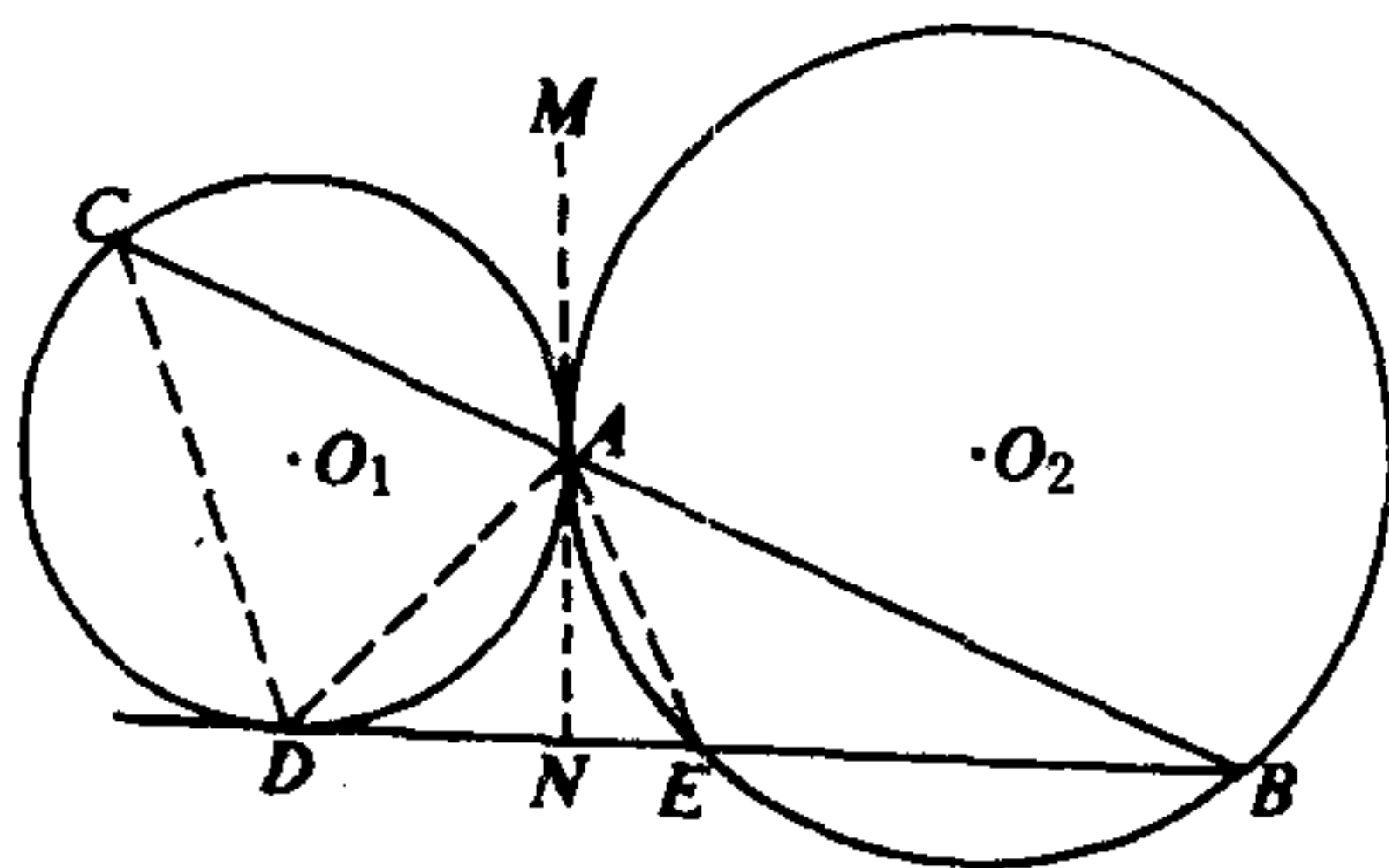


图 7.39

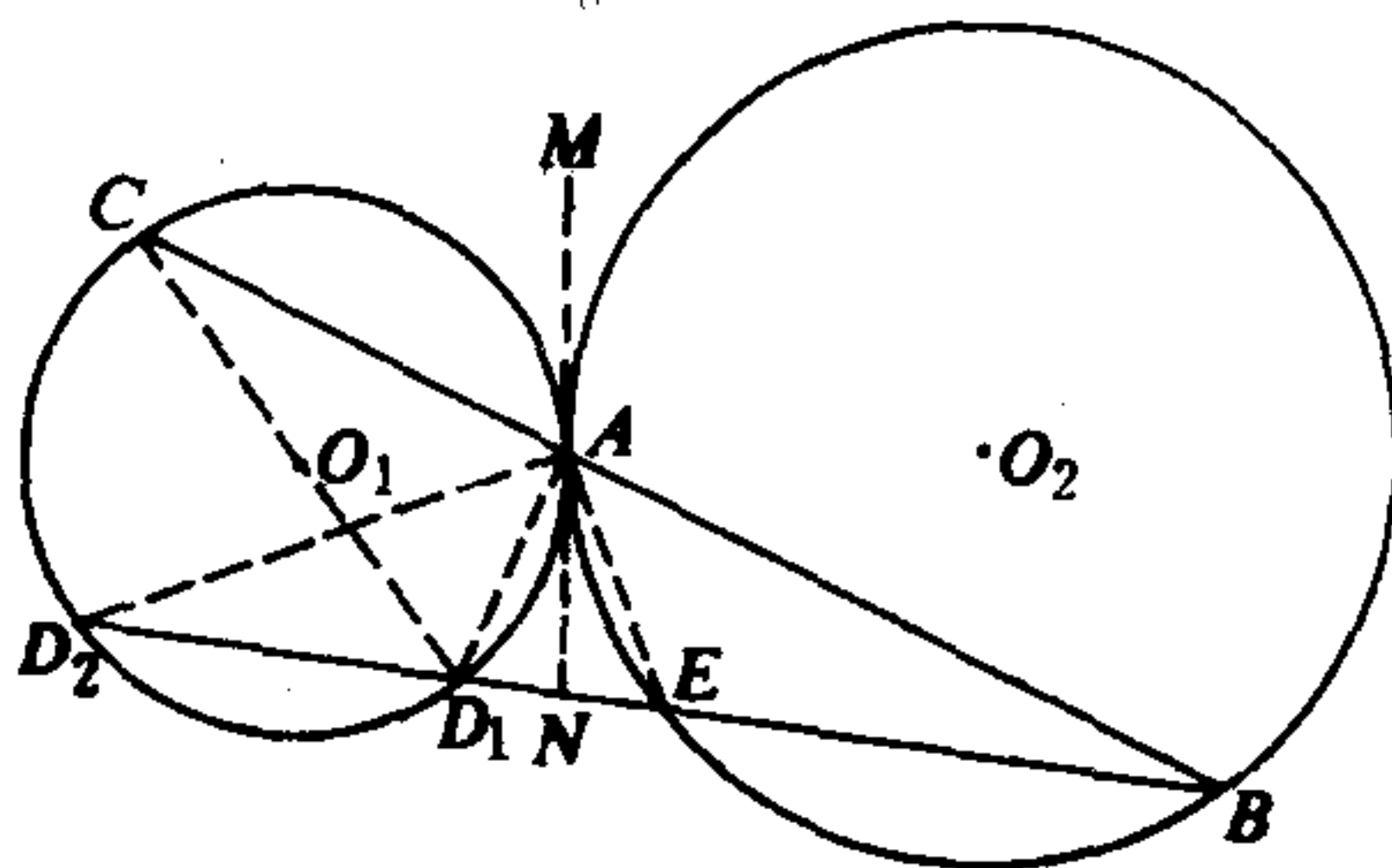


图 7.40

$\angle ABE$, $\angle NAD = \angle ADN$. 而 $\angle CAD = \angle ADN + \angle ABE$, $\angle DAE = \angle NAD + \angle NAE$, 所以 $\angle CAD = \angle DAE$, 即 AD 平分 $\angle EAC$.

(ii) $\angle DCA = \angle ADE$, 由 (i) 知 $\triangle ACD \sim \triangle ADE$, 所以 $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AD}$, 即 $AD^2 = AE \cdot AC$.

命题 7.40 如图 7.40, $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 外切于点 A , 过 A 的直线交 $\odot O_1$ 于点 C , 交 $\odot O_2$ 于点 B , 过点 B 的割线交 $\odot O_2$ 于点 E , 交 $\odot O_1$ 于点 D_1, D_2 , 则有

(i) $\angle EAD_1 = \angle D_2AC$;

(ii) $AD_1 \cdot AD_2 = AE \cdot AC$.

证 (i) 过 A 作公切线 MN 交 D_1E 于 N , $\angle NAE = \angle ABE$, $\angle NAD_1 = \angle AD_2D_1$. 而 $\angle D_2AC = \angle AD_2D_1 + \angle ABE$, $\angle NAE + \angle NAD_1 = \angle EAD_1$, 故 $\angle EAD_1 = \angle D_2AC$.

(ii) 连结 CD_1 , 易知 $\triangle CAD_1 \sim \triangle D_2AE$, 故 $\frac{AD_1}{AE} = \frac{AC}{AD_2}$, 即

$$AD_1 \cdot AD_2 = AE \cdot AC.$$

7.5 变中的不变量

我们在考虑相交弦定理与割线定理的统一性时,曾由定理 6.2 获得了定值的结论.类似地,也可考虑两个圆和两条相交直线的定值问题.对于给定的两个相交圆,除了两个圆的半径是固定的之外,由两个相交点连结起来的弦是定长,因此所对应的弧的度数是定值,由弧所对应的角度亦是定值,于是可获得如下命题.

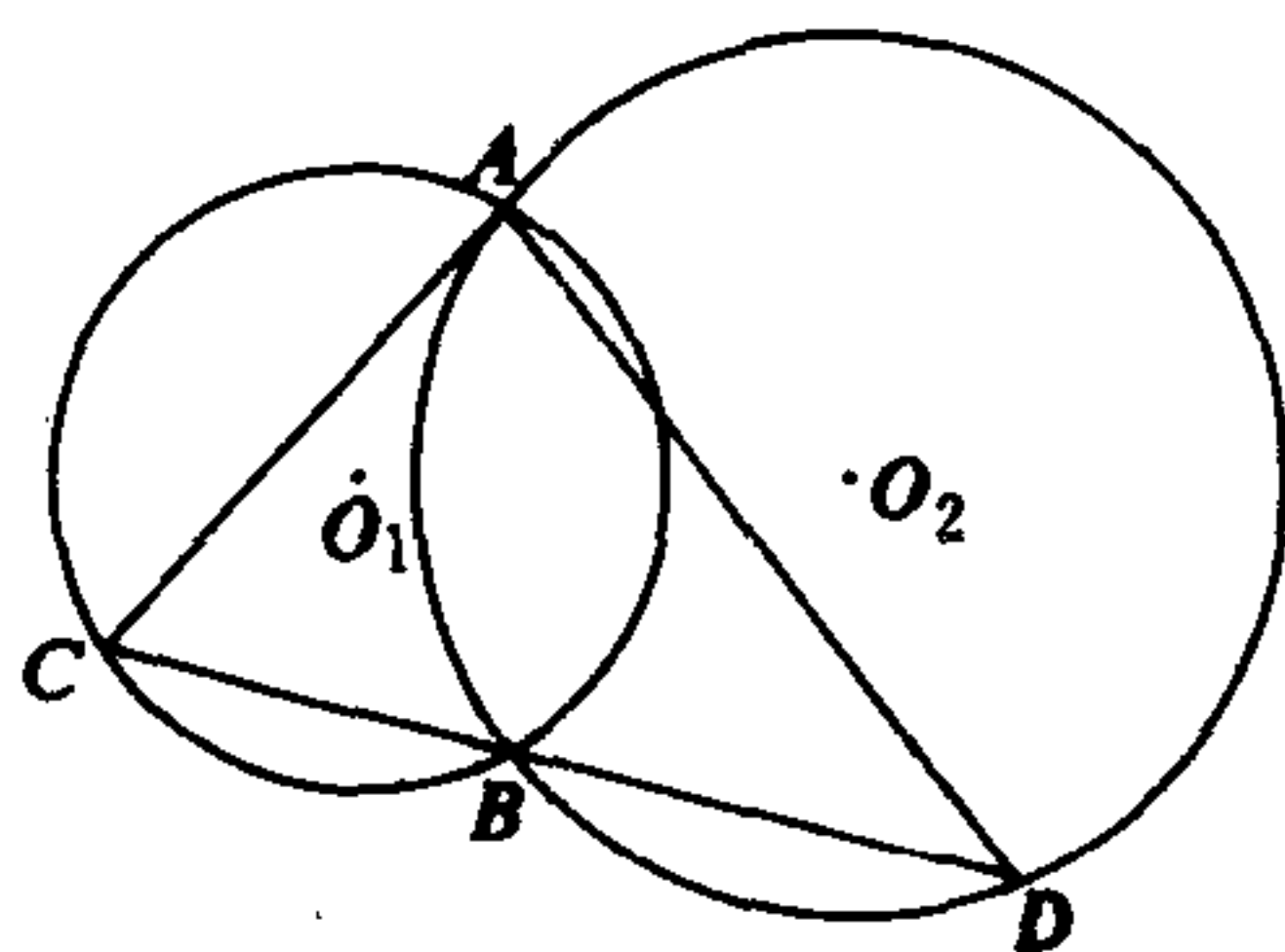


图 7.41

命题 7.41 如图 7.41, 设 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于点 A, B , 过 B 任作一直线交 $\odot O_1$ 于点 C , 交 $\odot O_2$ 于点 D , 连结 AC, AD , 则 $\angle CAD$ 为定值.

证 因为 AB 为定长, 则 $\angle BCA$ 一定, $\angle BDA$ 也一定. 而 $\angle CAD = 180^\circ - (\angle BCA + \angle BDA)$, 故 $\angle CAD$ 为定值.

在图 7.41 的基础上, 延长 CA 交 $\odot O_2$ 于 E (图 7.42), 由 $\angle EAD = 180^\circ - \angle CAD$, 知该角也一定, 因此所对应的 ED 为定长, 于是获得如下命题.

命题 7.42 如图 7.42, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于点 A, B , 由 $\odot O_1$ 上任一点 C 引 CA, CB 与 $\odot O_2$ 分别交于 E, D , 则 ED 为

定值.

接着可想,在图 7.41 中,过 C 作 $\odot O_1$ 的切线,过 D 作 $\odot O_2$ 的切线,二者交于 M (图 7.43),则由 $\angle MCD$ 与 $\angle MDC$ 为定值,可知 $\angle CMD = 180^\circ - (\angle MCD + \angle MDC)$ 亦为定值. 因此获得如下命题.

命题 7.43 如图 7.43, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于点 A, B , 过 B 作直线交 $\odot O_1$ 于点 C , 交 $\odot O_2$ 于点 D , 过 C, D , 分别作两圆的切线交于 M , 则 $\angle CMD$ 为定值.

在图 7.41 中,既然 $\angle C, \angle D$ 为定值,因此将 $\triangle ACD$ 转动后其对应边的比值也不变. 特别地,当

AC 通过 O_1 时, AD 就通过 O_2 , 即此对应边的比值等于两圆直径之比. 因此获得如下命题.

命题 7.44 如图 7.41, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于点 A, B , 过 B 作直线交 $\odot O_1$ 于点 C , 交 $\odot O_2$ 于点 D , 则 $AC : AD$ 为定值.

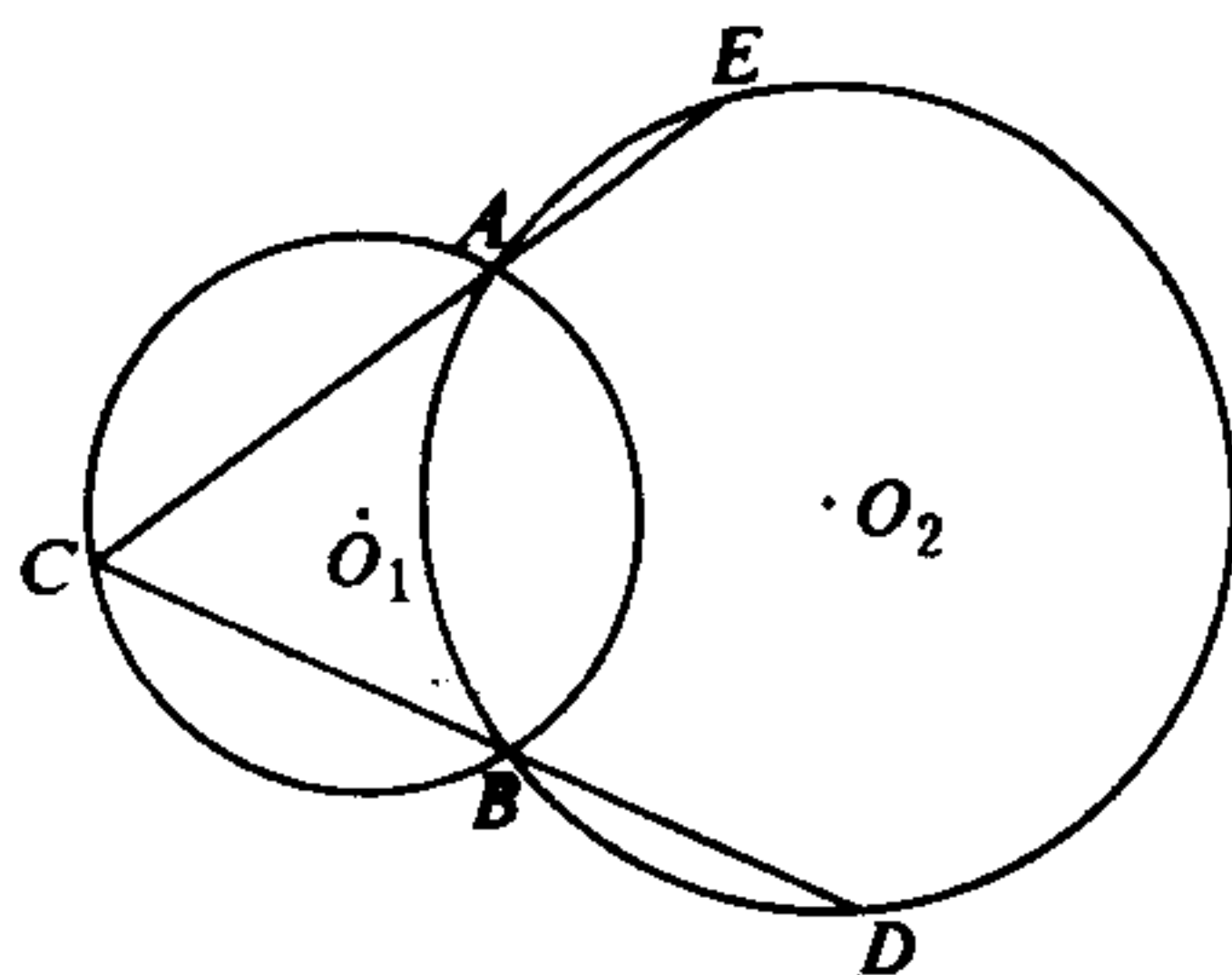


图 7.42

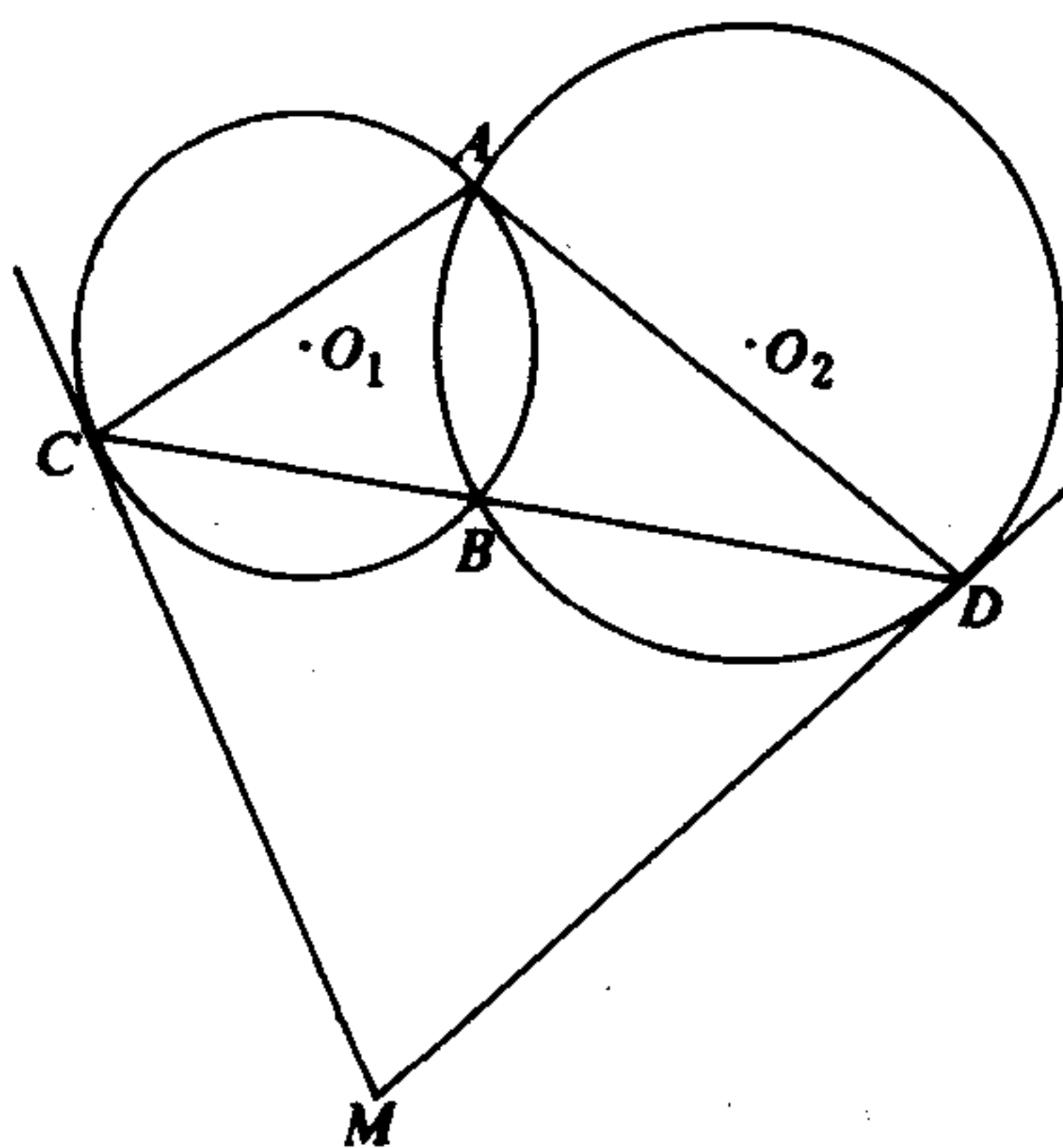


图 7.43

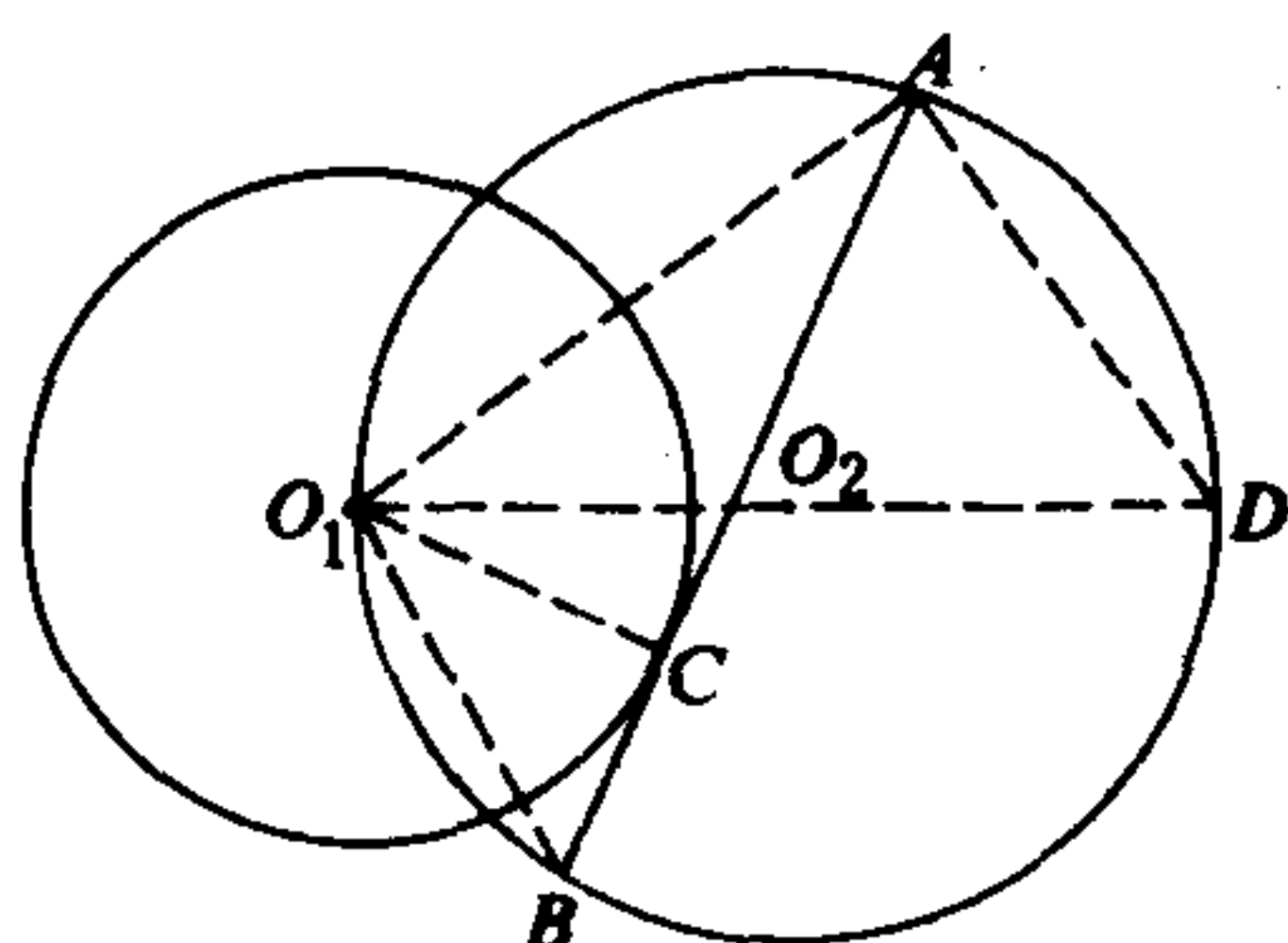


图 7.44

当我们思考与两个圆的半径有关的定值问题时,联想到“三角形一边上的高与其外接圆的直径的积等于其他两边的积”,那么,如果这一边上的高恰是另外一圆的半径,则换一个角度看问题,就得到如下命题.

命题 7.45 如图 7.44,定圆 $\odot O_2$ (半径为 R) 通过定圆 $\odot O_1$ (半径为 r) 的圆心 O_1 , $\odot O_2$ 的弦 AB 切 $\odot O_1$ 于 C , 则 $O_1A \cdot O_1B$ 为定值.

分析 首先使图形处于特殊位置,以便求得其定值. 为此不妨将切点 C 选在 O_1O_2 的连心线上,于是有 $AC=BC$,这样可得 $O_1A \cdot O_1B = r \cdot 2R$. 而要推广到一般情况,只须证明 $\frac{O_1A}{2R} = \frac{r}{O_1B}$ 即可. 这样我们就联想到构造两个相似三角形,于是得到如下证法.

证 如图 7.44, 连结 O_1O_2 并延长之交 $\odot O_2$ 于 D , 连结 AD, O_1A, O_1C, O_1B . $\because \angle ADO_1 = \angle CBO_1, \therefore \text{Rt} \triangle ADO_1 \sim \text{Rt} \triangle CBO_1$, 故有 $\frac{O_1A}{O_1C} = \frac{O_1D}{O_1B}$, 即 $O_1A \cdot O_1B = O_1C \cdot O_1D = r \cdot 2R$.

习 题 7

1. 如图 7.45, $\odot O_1, \odot O_2$ 外切于点 A , EF 是 $\odot O_1, \odot O_2$ 的外公切

线, 连心线 O_1O_2 的延长线交 $\odot O_1$ 于点 C . 求证:

(i) $CE \parallel AF$;

(ii) $AE^2 = CE \cdot AF$.

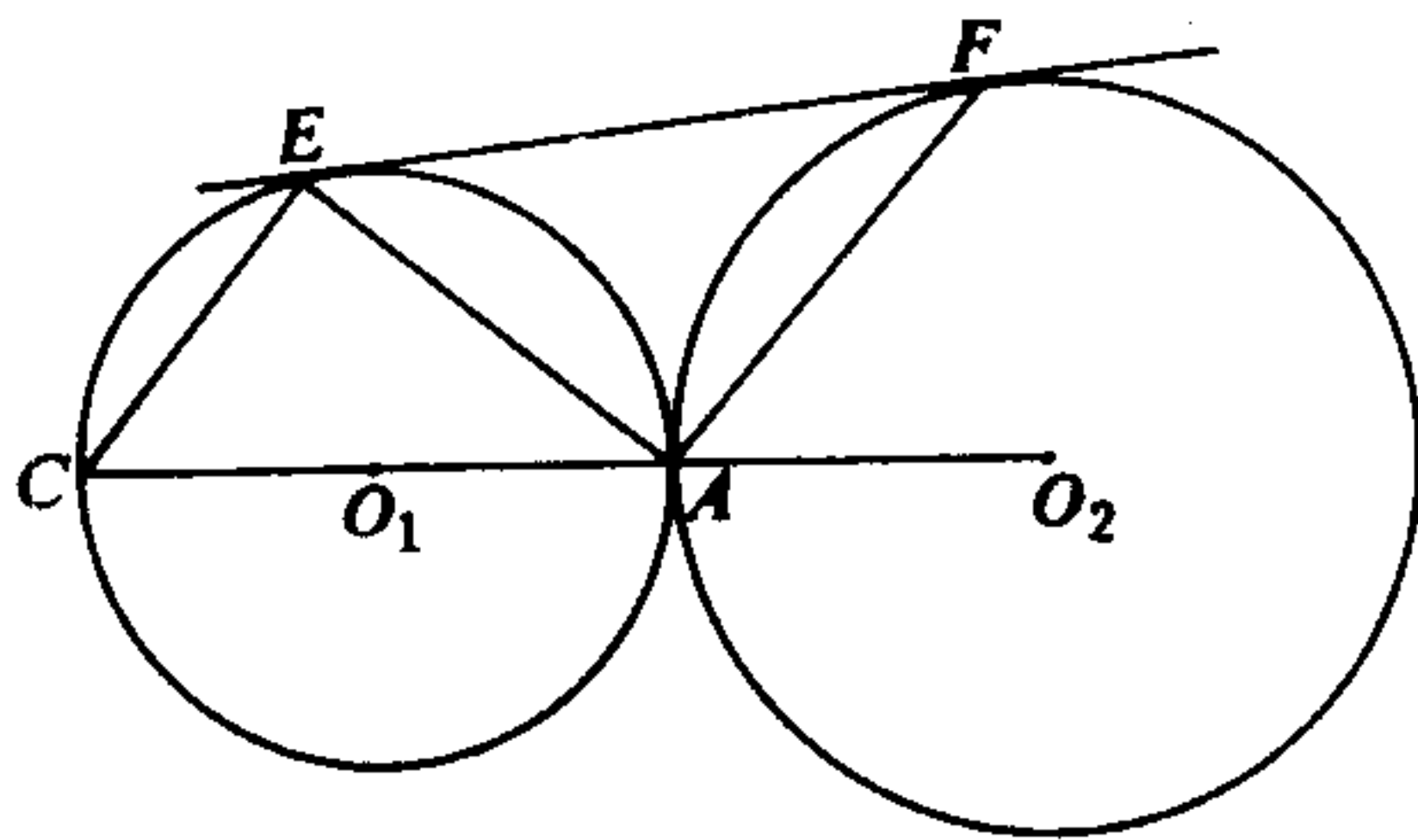


图 7.45

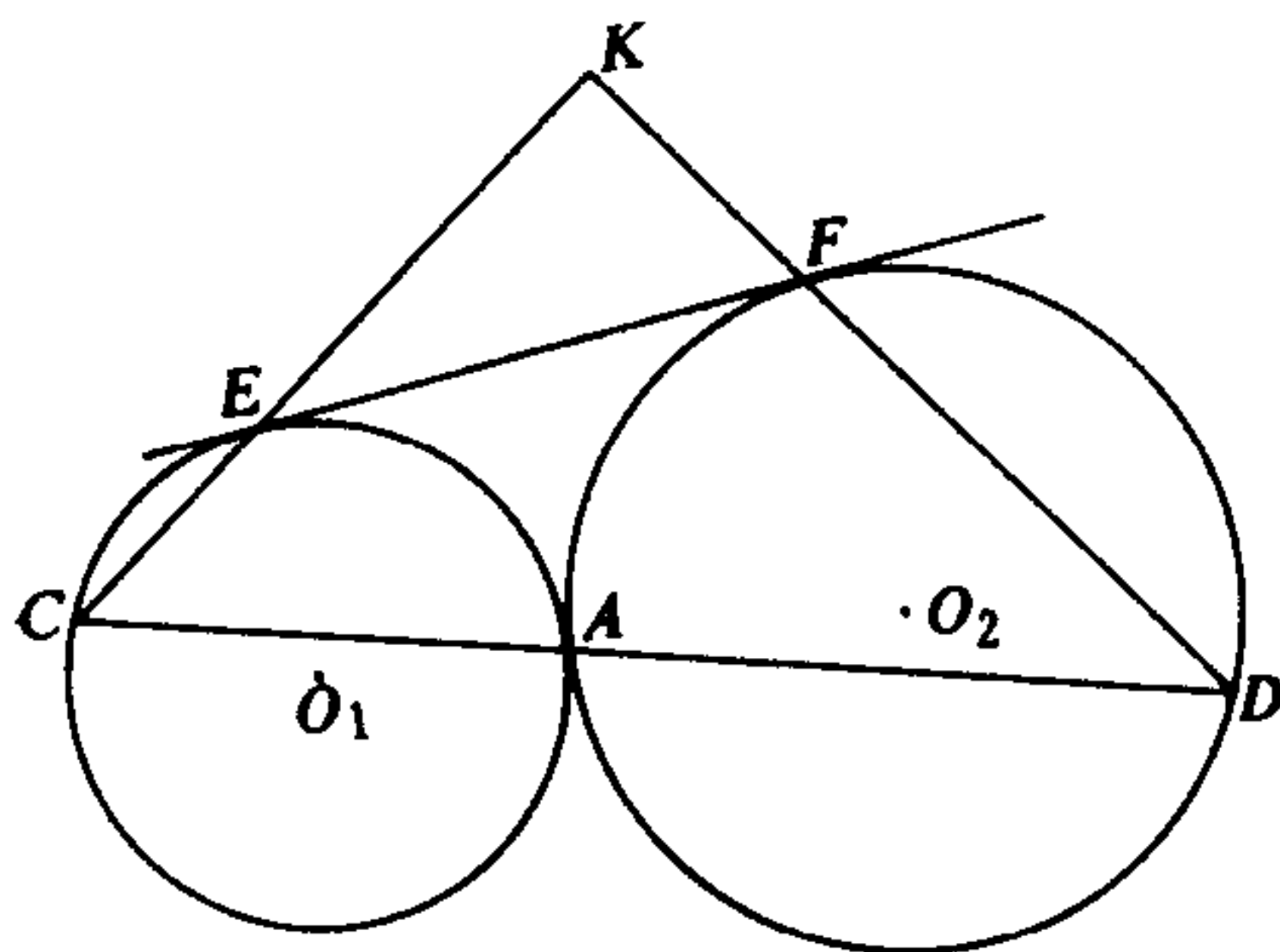


图 7.46

2. 如图 7.46, $\odot O_1, \odot O_2$ 外切于点 A , EF 是 $\odot O_1, \odot O_2$ 的外公切线, 过 A 的直线分别交 $\odot O_1, \odot O_2$ 于点 C, D , 直线 CE, DF 交于点 K . 求证:

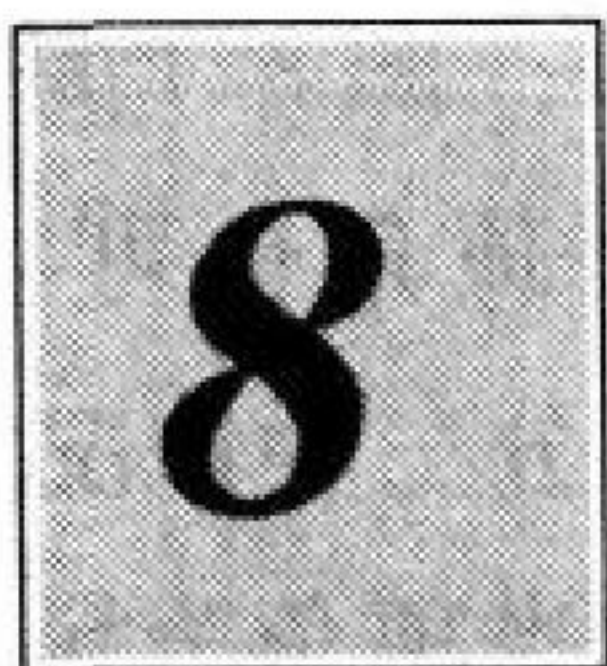
(i) $CE \perp DF$;

(ii) A, E, K, F 四点共圆;

(iii) $AK \perp CD$.

3. 平面上的三个圆 K_1, K_2, K_3 两两彼此相切于三个不同的点. 将 K_1 和 K_2 的切点和其他两个切点连接成线段. 证明: 这两个线段或它们的延长线与圆 K_3 的交点是一条直径的两个端点.

4. 试设计一种宇宙飞船的轨道, 使得从该轨道上每一点看地球和月球时, 两者的大小都是一样的.



变动点的位置

通过有关命题的特定点想到任意点,由线段上的任意点想到线段延长线上的任意点,当获得了各种情况的有关结论之后,又以更高的观点把几种情况统一起来,从而获得适用于各种情况的更一般的结论——这种动态的思维方法是非常有启发意义的.本章将通过对几个典型命题的探讨向读者具体介绍这种方法.

8.1 关于等腰三角形的一个命题

8.1.1 三种证法

命题 8.1 等腰三角形底边上的任一点与两腰的距离之和等于腰上的高.

如图 8.1, 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 过其底边 BC 上一点 P 作 $PD \perp AB$ 且交 AB 于 D ,

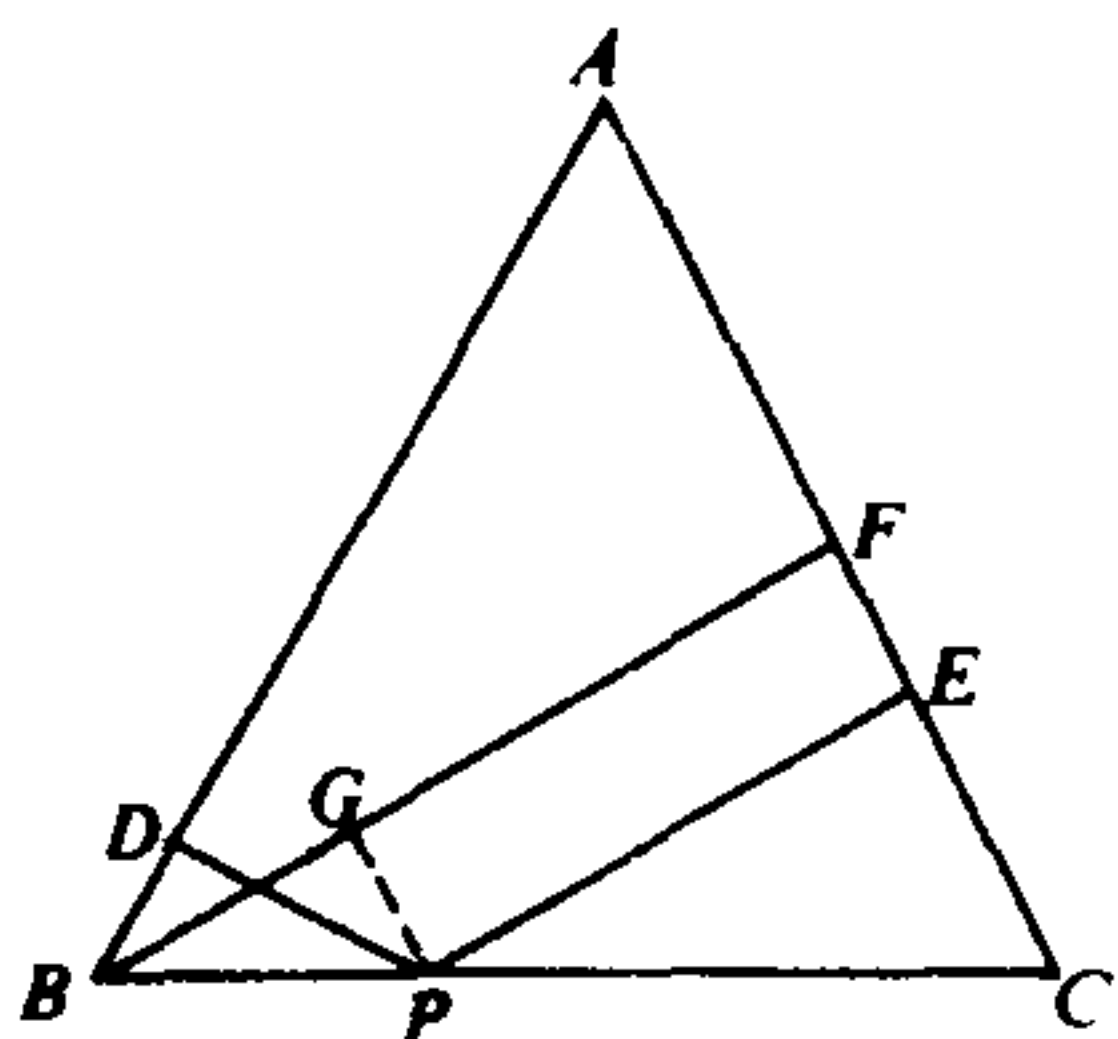


图 8.1

作 $PE \perp AC$ 且交 AC 于 E , 并作 $BF \perp AC$, 且交 AC 于 F , 则 $PD + PE = BF$.

证 1 图 8.1 是顶角为锐角的情况, 而顶角也可以是直角或钝角, 故须分三种情况加以证明.

(1) 当顶角为锐角时(图 8.1).

在 BF 上取一点 G 使 $GF = PE$, 四边形 $PGFE$ 为矩形, 故 $PG \perp BF$, $PG \parallel CA$, $\angle BPG = \angle PCA$. 而 $\angle PCA = \angle CBA$, 故 $\angle BPG = \angle CBA$. 又 $\angle BDP = \angle BGP = 90^\circ$, $BP = PB$, 因而 $\triangle BDP \cong \triangle PGB$, 从而有 $PD = BG$. 故有 $PD + PE = BG + GF = BF$.

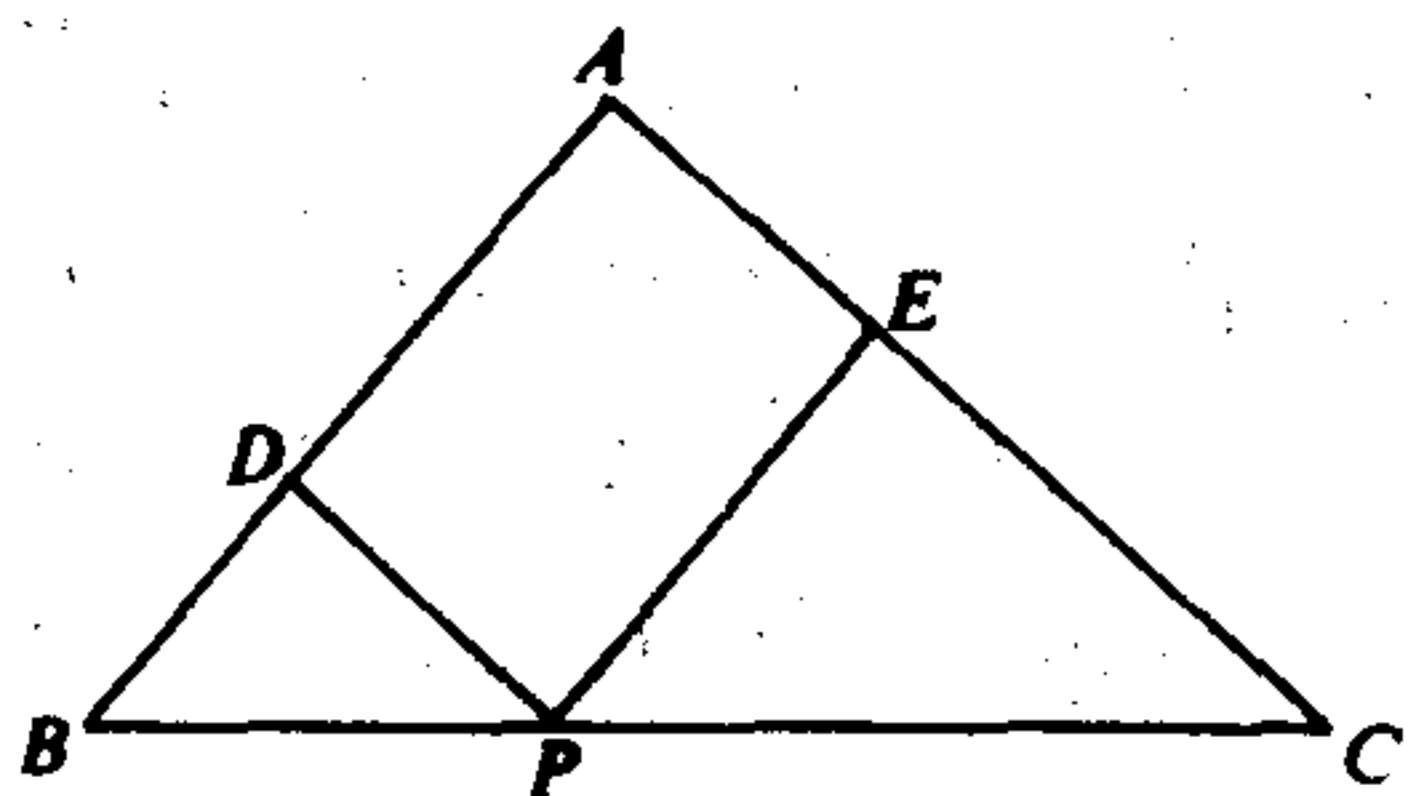


图 8.2

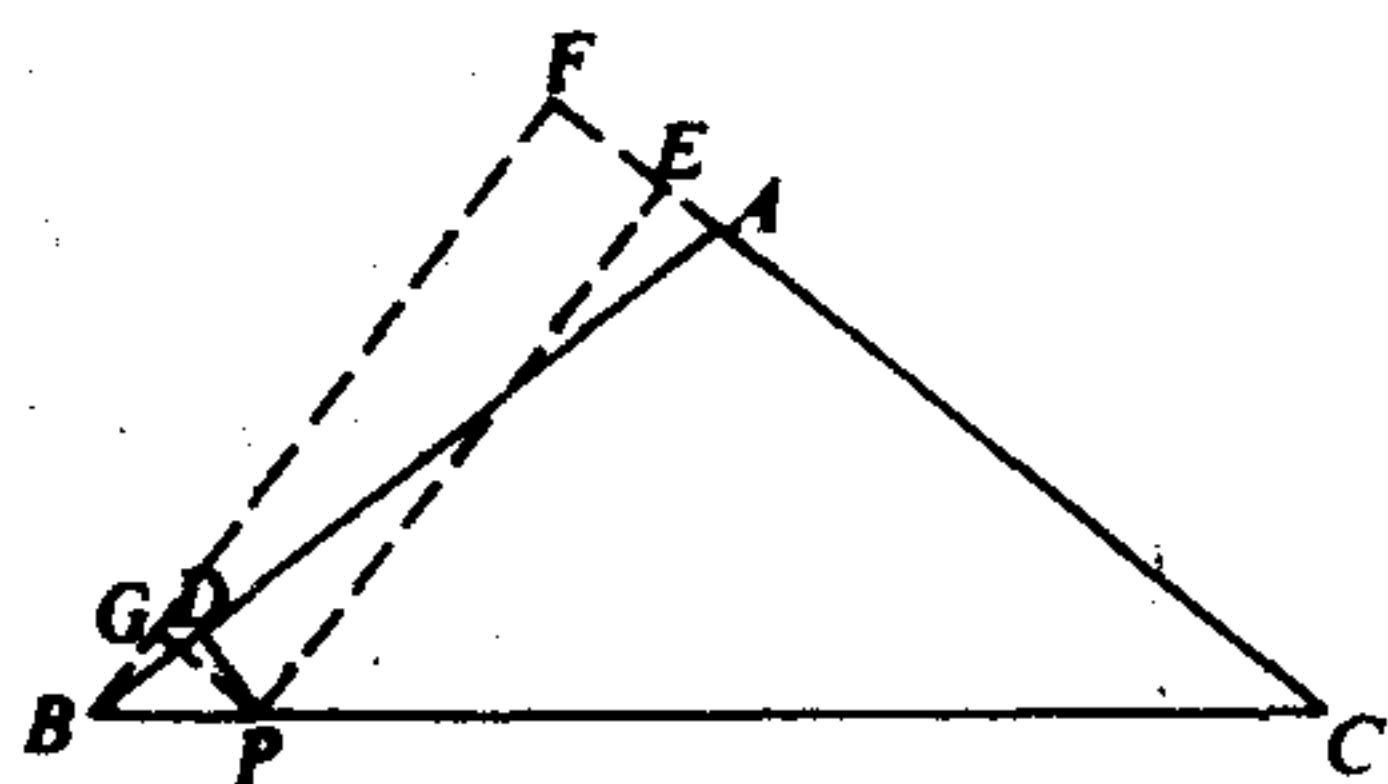


图 8.3

(2) 当顶角为直角时(图 8.2). 由于四边形 $PDAE$ 为矩形, 所以 $\triangle BDP$ 为等腰直角三角形, 故 $PD + PE = BD + DA = BA$.

(3) 当顶角为钝角时(8.3). 作 $PE \perp CA$, 并交 CA 的延长线于 E , 作 $PD \perp BA$, 交 AB 于 D . 作 $BF \perp CA$ 交 CA 的延长

线于 F . 在 BF 上取一点 G , 使 $GF = PE$, 四边形 $PGFE$ 为矩形, 故 $PG \perp BF$. 而 $\triangle PGB \cong \triangle BDP$, 故 $PE + PD = GF + GB = BF$.

综上所述, 命题得证.

简评 上面的证 1, 作辅助线的方法是把长的线段分为两部分, 我们也可以从“分”的对立面——“补”的方面进行考虑, 即通过将短的线段加长来达到证题的目的. 如图 8.4, 将短的线段 EP 延长至 D' , 使 $PD' = PD$, 连结 BD' , 可推证 $BD' \parallel AC$, 从而推知 $BF = D'E = D'P + PE = PD + PE$. 在图 8.4 中将 BD' 延长至 A' , 使 $BA' = BA$, 连结 $A'C$, 于是四边形 $ABA'C$ 为一菱形 (图 8.5). 这样一来, 图 8.4 就是图 8.5 的一部分, 即由局部转化为整体. 从整体 (图 8.5) 来推证命题 8.1 的结论就会十分简明:

证 2 以 BC 为对称轴, 作 $\triangle ABC$ 的对称图形 $\triangle A'BC$, 得到菱形 $ABA'C$, 如图 8.5 所示. 延长 EP 交 BA' 于点 D' , 由于

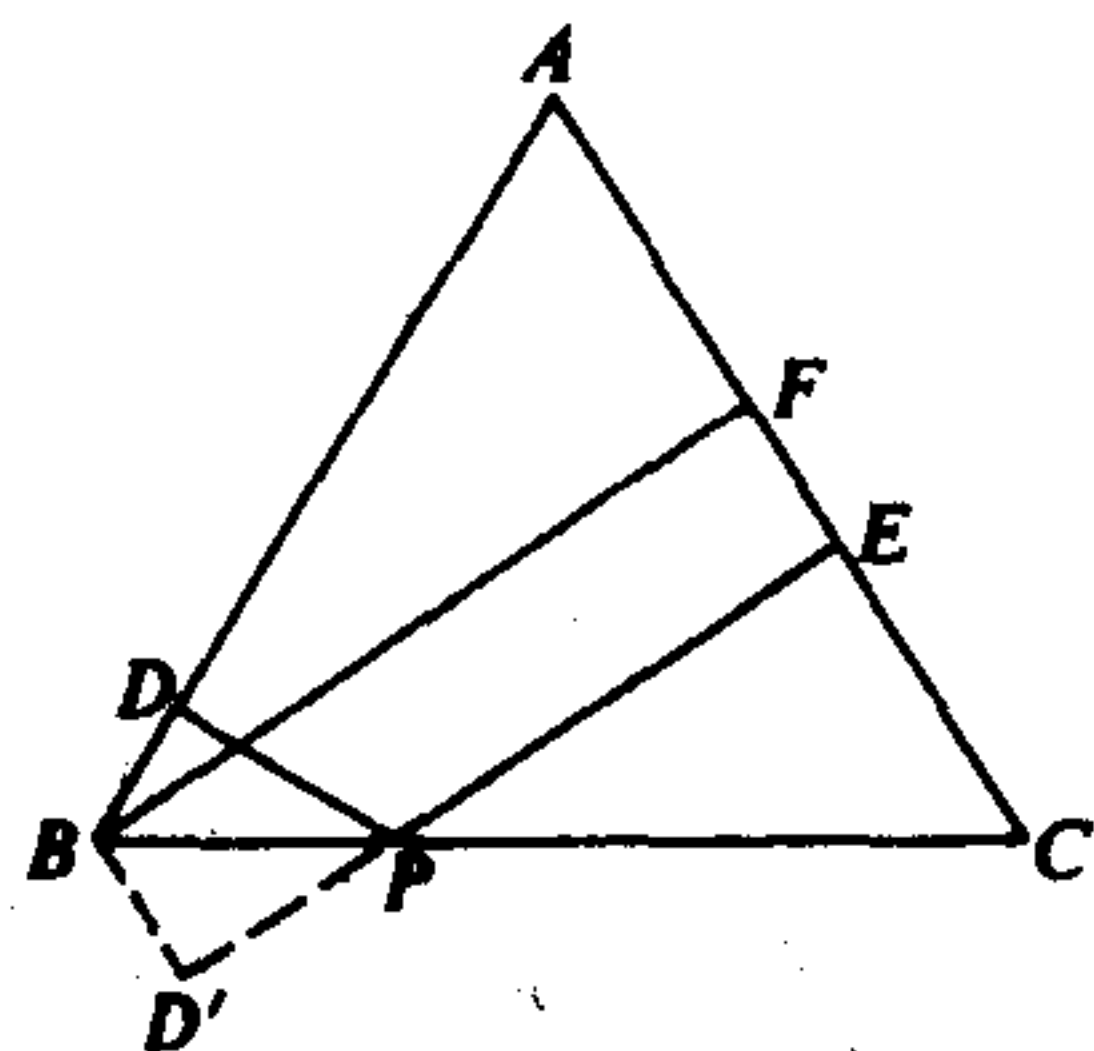


图 8.4

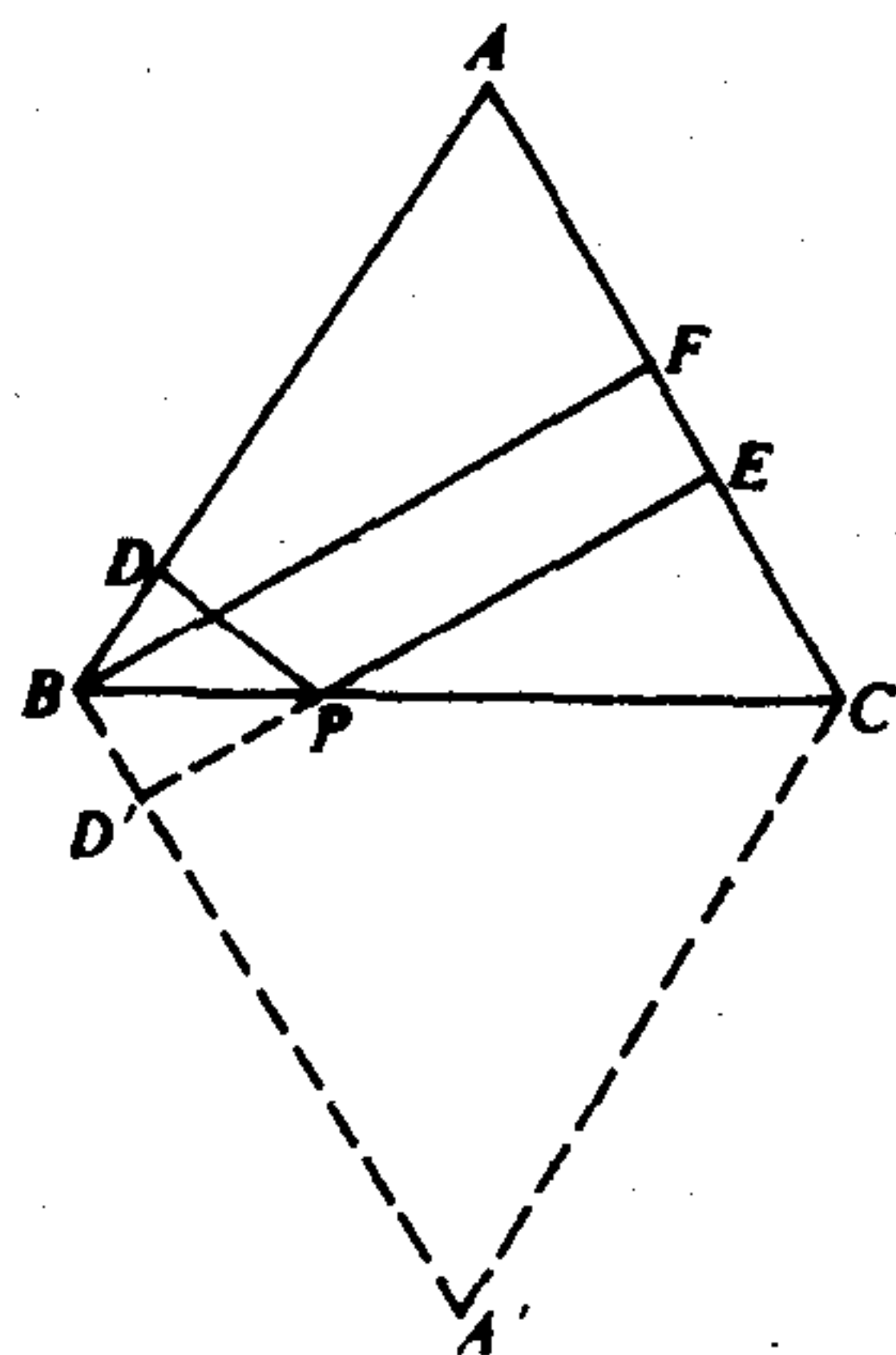


图 8.5

$AC \parallel BA'$, 所以 $PD' \perp BA'$. 又 BC 是 $\angle ABA'$ 的平分线, 易知 $PD' = PD$, 故 $BF = D'E = PE + PD' = PE + PD$.

如果注意到同一图形的面积可用不同方式来表达, 就可以列出等式, 这有助于证明线段相等问题, 于是又得到了如下的面积证法.

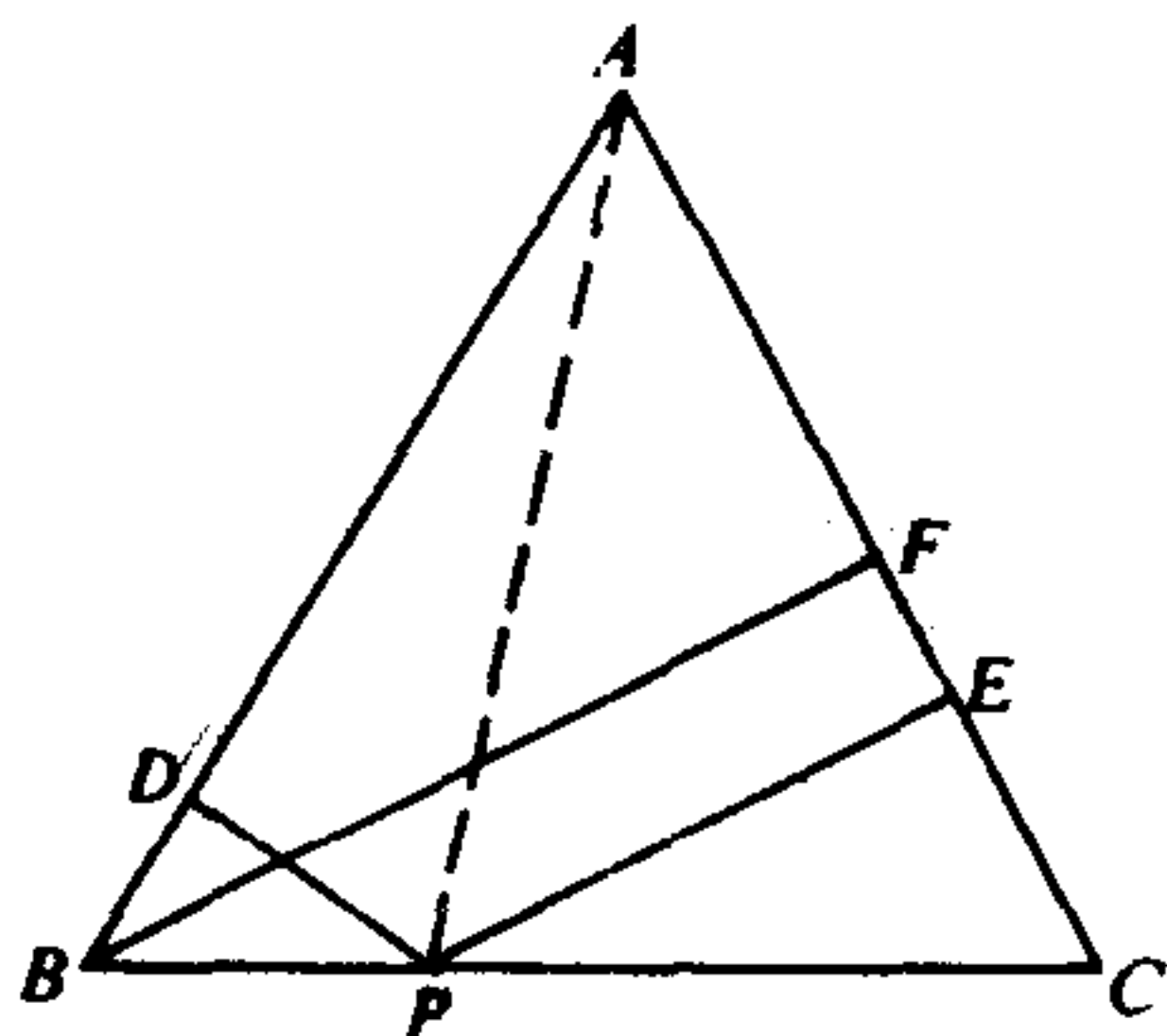


图 8.6

证 3 如图 8.6, 连结 AP ,

由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABP} + S_{\triangle ACP}$ 得

$$\frac{1}{2}BF \cdot AC = \frac{1}{2}PD \cdot AB + \frac{1}{2}PE \cdot AC.$$

而 $AB = AC$, 故 $BF = PD + PE$.

8.1.2 由线段到延长线,

由和到差

命题 8.1 是从线段 BC 上取一点 P 向两腰作垂线. 如果点 P 不是取在 BC 上, 而是取在 BC 的延长线上, 会有什么结论呢? 从图 8.7 看来, 线段 PE 比 BF 长, 线段 PD 比 BF 短. 点 P 在线段上是和, 点 P 在线段外就应该猜想为线段之差, 即猜想有 $BF = PE - PD$, 于是推想有如下的命题.

命题 8.2 等腰三角形底边延长线上任一点与两腰的距离之差等于腰上的高.

我们可以把命题 8.1 的三种证明方法都平移到这一命题上来.

证 1 从略.

证 2 如图 8.7, 以 BC 为对称轴, 作 $\triangle ABC$ 的对称图形 $\triangle A'BC$, 得到菱形 $ABA'C$. $A'B$ 的延长线交 PE 于点 D' . 由于 $AC \parallel BA'$, 所以 $PD' \perp BA'$. 由于 BC 是 $\angle ABA'$ 的平分线, 易推知 $PD' = PD$, 故 $BF = D'E = PE - PD' = PE - PD$.

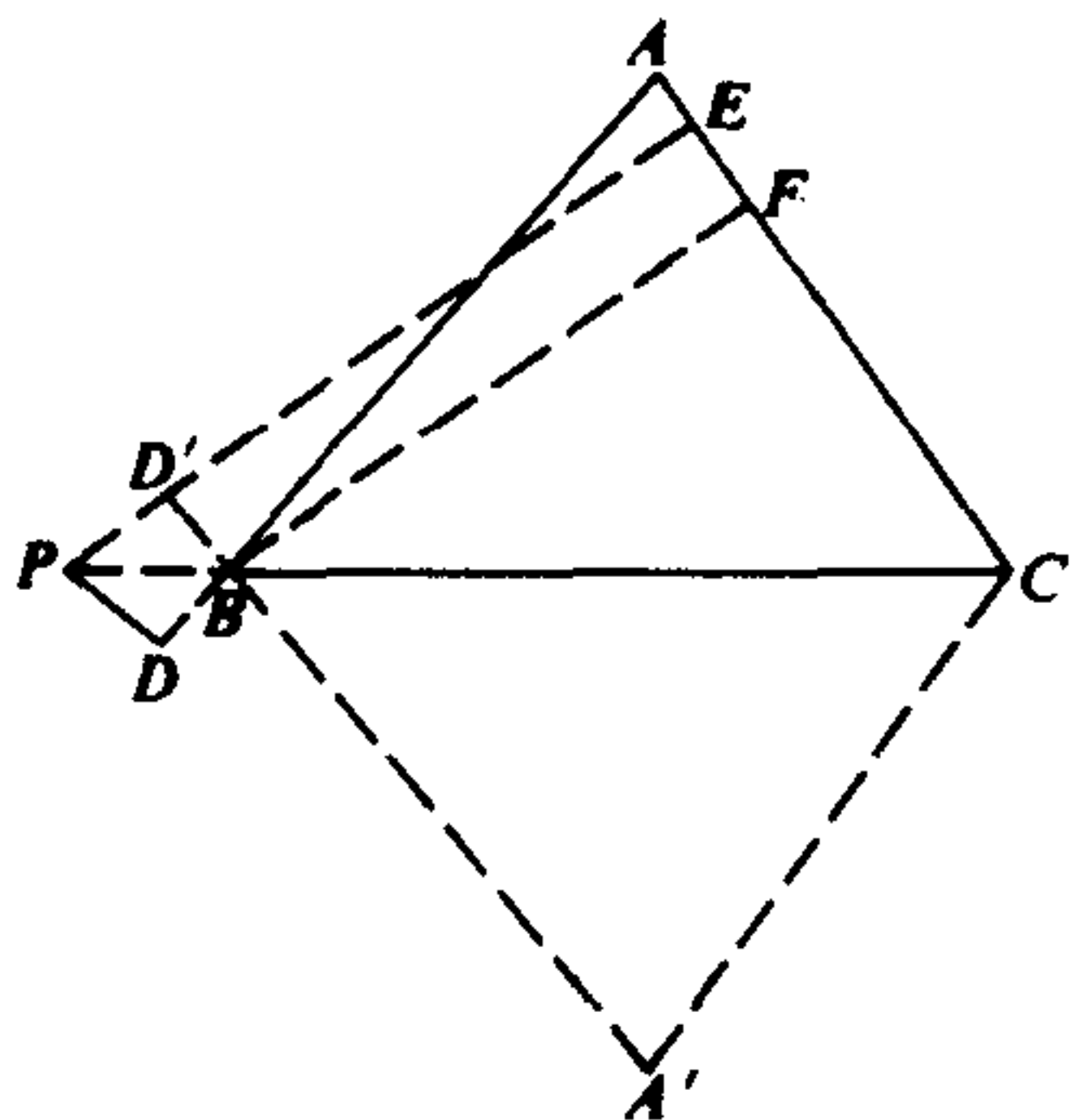


图 8.7

证 3 如图 8.8, 连结 AP , 由 $S_{\triangle APC} - S_{\triangle APB} = S_{\triangle ABC}$ 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}PE \cdot AC - \frac{1}{2}PD \cdot AB \\ &= \frac{1}{2}BF \cdot AC, \end{aligned}$$

而 $AB = AC$, 故 $PE - PD = BF$.

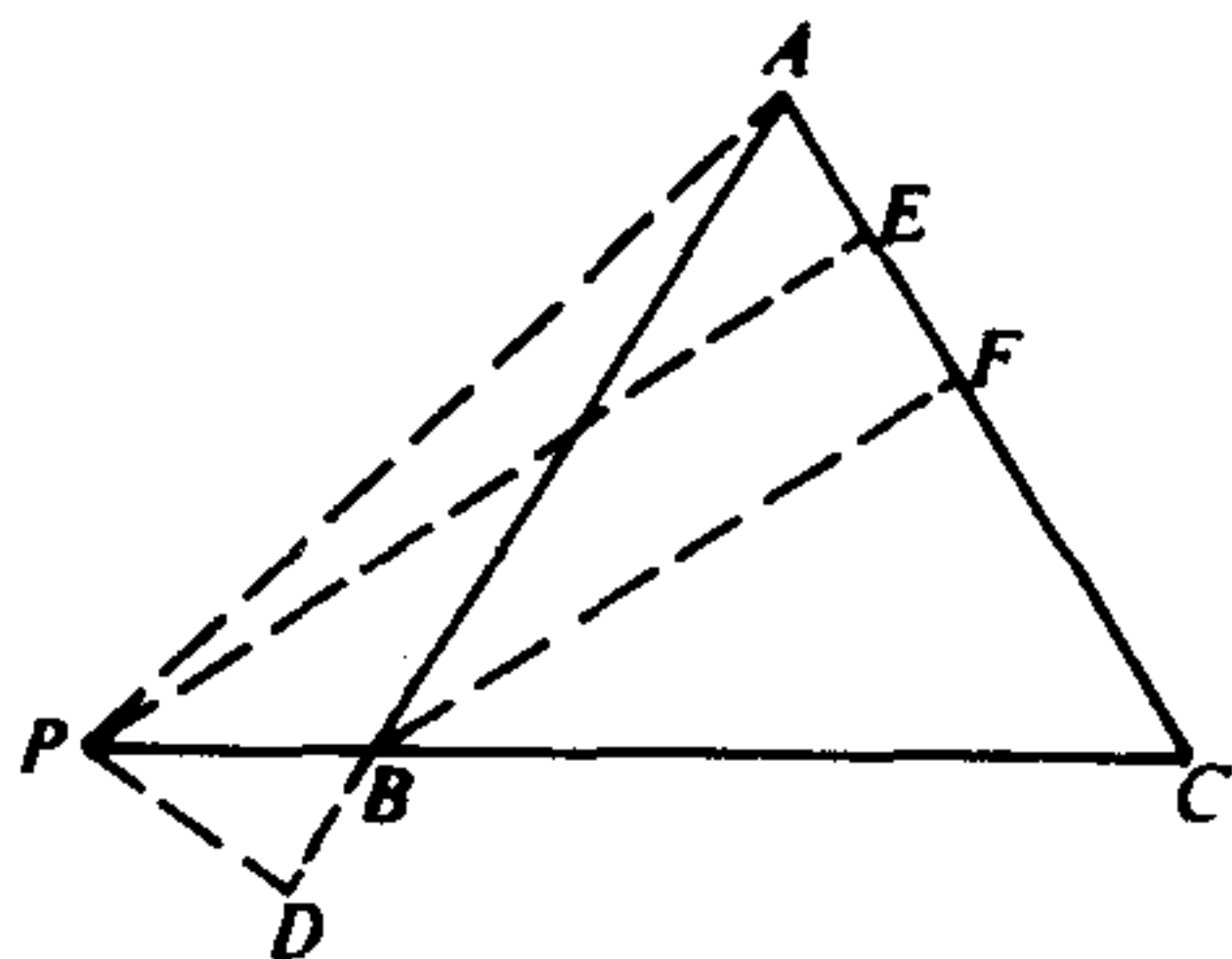


图 8.8

8.1.3 从三角形到菱形

从命题 8.1 (或命题 8.2) 证 2 的叙述过程可以看出, $\triangle ABC$ 的边 BC (或其延长线) 上任一点到两腰的距离之和 (或差) 等于腰上的高, 如果换一个角度看, 就是在菱形 $ABA'C$ 的对角线 (或其延长线) 上任一点到菱形在该对角线任一侧的两边距离之和 (或差) 等于菱形对边的距离. 这样一

来,上述关于等腰三角形的命题,便可相应地改为关于菱形的命题.

命题 8.3 (i)菱形对角线上任一点到菱形在该对角线任一侧的两边距离之和等于菱形对边的距离.

(ii)菱形对角线的延长线上任一点到菱形在该对角线任一侧的两边距离之差等于菱形对边的距离.

8.1.4 命题的统一与推广

命题 8.3 中的(i)和(ii)的相异之处在于,一个是和,另一个是差,和与差可由代数和来统一.因此,如果引入代数和的概念,便可把(i)与(ii)统一起来.

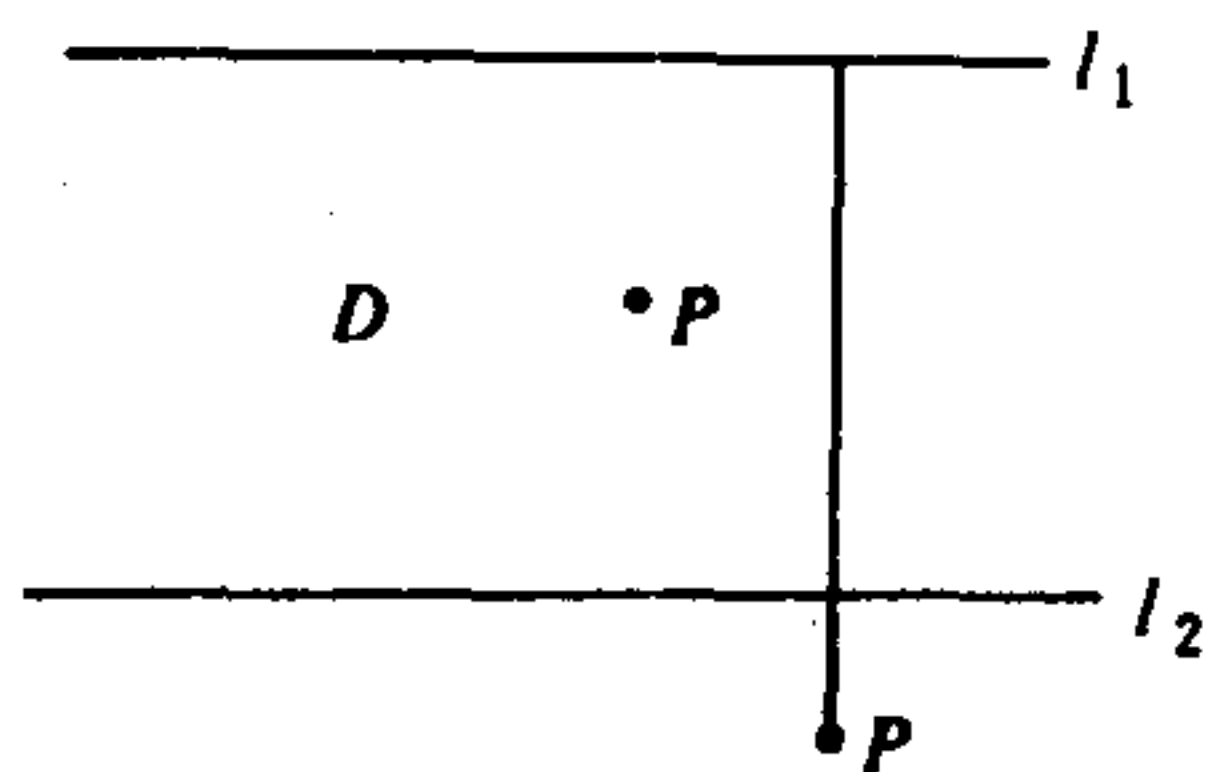


图 8.9

经过进一步分析可知,这是两对平行线内部区域的公共部分,因此菱形的位置状况的实质在于两平行线内部区域的位置状况.如图 8.9,已知两平行线 l_1, l_2 间的距离为 d ,把两平行线的区域记为 D .如果点 P 在 D 内,则

P 到 l_1 的距离为 m , P 到 l_2 的距离为 n ,则 $m+n=d$;如果 P 在 D 的外部,则有 $m-n=d$;如果 P 在 l_2 上,则 $n=0, m=d$.由图可知, P 在 D 的外部时, P 与 D 分别在 l_2 的两侧,因此 P 到 l_2 的代数距离需要在 n 前加负号.为此,可引入一点到直线的代数距离的定义:

定义 8.1 对于平面内两条平行线,其间的区域记为 D ,平面内有一点 P ,两平行线中任取一条为 l , P 到 l 的距离记

为 d , 则 p 到 l 的代数距离定义为

$$|d| = \begin{cases} d, & \text{当 } P \text{ 与 } D \text{ 在 } l \text{ 同侧;} \\ -d, & \text{当 } P \text{ 与 } D \text{ 在 } l \text{ 异侧;} \\ 0, & \text{当 } P \text{ 在 } l \text{ 上.} \end{cases}$$

菱形对角线或其延长线上一点 P 到该线一侧两边有命题 8.3 所述的性质. 对称地, 到该线另一侧亦有上述性质. 这样一来, 命题 8.3 就可以概括为如下命题.

命题 8.4 菱形对角线或其延长线上任一点到菱形四边所在直线的代数距离之和为常数(常数值为菱形对边距离的 2 倍).

还可进一步猜想, 如果所取的点不限制在菱形对角线或其延长线上, 而是平面内任一点, 上述命题的结论是否也成立呢? 答案是肯定的. 这就得到如下更一般的命题.

命题 8.5 平面内任一点到菱形四边所在直线的代数距离之和为常数(常数值为菱形对边距离的 2 倍).

我们知道, 菱形是平行四边形的特殊情况. 那么这一优美的结论, 对于平行四边形是否也成立呢? 答案也是肯定的. 这就把命题又拓广了.

命题 8.6 平面内任一点到平行四边形四边所在直线的代数距离之和为常数(常数值为平行四边形对边距离之和).

8.1.5 换一个角度的思考

等腰三角形可视为菱形的一部分, 由命题 8.1 演变到命题 8.5, 这是由局部到整体; 而菱形是特殊的平行四边形, 我们又由命题 8.5 演变到命题 8.6, 这是由特殊到一般. 现在我

们再换一个角度来考虑命题 8.1. 在图 8.2 中, $PD \perp AB$, 即 $PD \parallel CA$, $PE \perp AC$, 即 $PE \parallel BA$. 如果将垂直条件用平行条件来替换, 可得到如下命题.

命题 8.7 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, P 为底边 BC 上任一点, 作直线 $PD \parallel CA$, 交 BA 于 D , 作直线 $PE \parallel BA$, 交 CA 于 E , 则四边形 $ADPE$ 的周长为定值.

这个命题, 是先将命题 8.1 特殊化, 替换条件之后再一般化而得到的.

在命题 8.7 中, 如果点 P 不在底边 BC 上, 而是在 BC 的延长线上, 设这点为 P' , 其相应的点记为 D', E' , 则四边形 $AD'P'E'$ 的邻边之差的绝对值恰等于 AC , 亦为定值.

在命题 8.1 中, 如果 $AB=AC=BC$, 则可推得如下命题.

命题 8.8 正三角形中任一点到三边的距离之和等于该三角形的高.

如果这“任一点”在正三角形外, 那么, 此点到三边的距离应有怎样的与命题 8.8 类似的结论呢? 这留给读者去思考.

8.2 关于三角形中线长的命题

8.2.1 命题与证明

三角形中线长与三边之间的关系有如下结论.

命题 8.9 如图 8.10, 在 $\triangle ABC$ 中, 设 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, D 为 BC 的中点, 则

$$4AD^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2.$$

分析 在结论中出现了三角形边长的平方的代数和, 这

就使我们联想到利用余弦定理来证明该命题.

证 如图 8.10, 根据余弦定理有

$$\begin{aligned} c^2 &= AD^2 + BD^2 \\ &\quad - 2AD \cdot BD \cdot \cos \angle ADB, \quad (8.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= AD^2 + DC^2 \\ &\quad - 2AD \cdot DC \cdot \cos \angle ADC. \quad (8.2) \end{aligned}$$

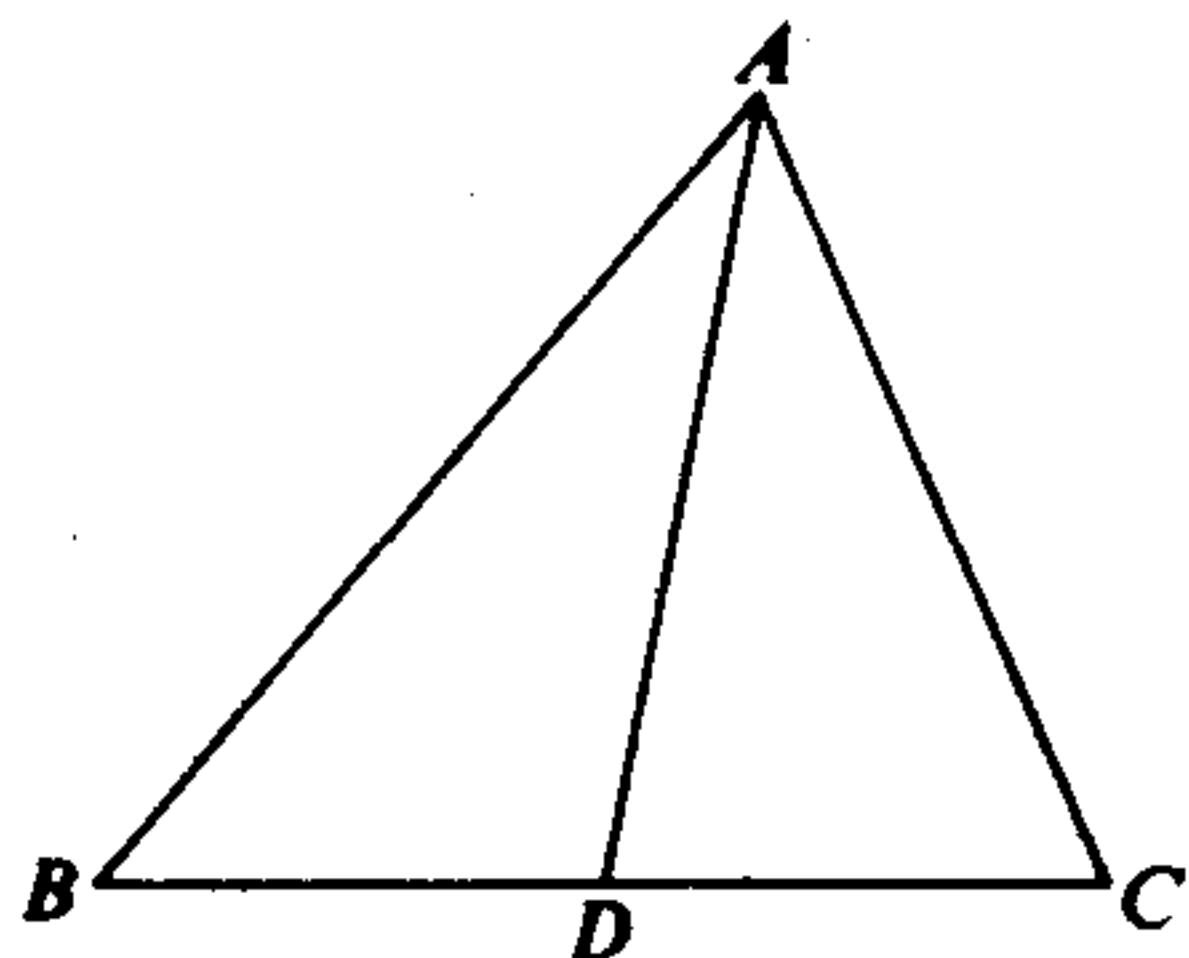


图 8.10

又 $\because \angle ADB + \angle ADC = \pi, \therefore \cos \angle ADB = -\cos \angle ADC$.

而 D 为 BC 的中点, 故 $BD = DC = a/2$. 代入 (8.1), (8.2) 且两式相加得

$$b^2 + c^2 = 2AD^2 + a^2/2,$$

整理即得

$$4AD^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2. \quad (8.3)$$

8.2.2 线段上的任意点

在命题 8.9 中, D 为边 BC 的中点, 对于 BC 来说, 这是一个特殊点, 如果把这一点一般化, 将有怎样的结论呢? 设 D 为 BC 上的任一点, 且 $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$, 这时有

$$BD = \frac{m}{m+n}a, \quad DC = \frac{n}{m+n}a.$$

将此值代入 (8.1), (8.2) 且 (8.1) + (8.2), 整理得

$$(m+n)^2 AD^2 = (m+n)(mb^2 + nc^2) - mna^2. \quad (8.4)$$

于是得到如下命题.

命题 8.10 在 $\triangle ABC$ 中, 设 $BC = a, CA = b, AB = c, D$

为边 BC 上的任意一点, 设 $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$, 则式(8.4)成立.

特别地, 在(8.4)中当 $m=n$ 时就得到(8.3).

8.2.3 线段延长线上的任意点

线段是直线的一部分, 线段相对于它所在的直线来说是一个特定位置, 所以在获得命题 8.10 之后, 还可提出如下问题: 如果点 D 不在 BC 上, 而是在 BC 的延长线上的任一点, 设 $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$, 那么线段 AD 之长与 $\triangle ABC$ 三边之长又有怎样的关系呢? 仍用余弦定理, 得

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \angle ACB, \quad (8.5)$$

$$AD^2 = b^2 + DC^2 - 2b \cdot DC \cos \angle ACD. \quad (8.6)$$

又 $\cos \angle ACB = -\cos \angle ACD$, 而由 $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$ 得 $\frac{BC}{DC} = \frac{m-n}{n}$, 即

$DC = \frac{na}{m-n}$. 代入(8.5), (8.6), 且(8.5)+(8.6), 整理得

$$(m-n)^2 \cdot AD^2 = (m-n)(mb^2 - nc^2) + mna^2. \quad (8.7)$$

如果 D 在 CB 的延长线上, 且 $\frac{BD}{DC} = \frac{m}{n}$, 对称地, 得

$$(n-m)^2 \cdot AD^2 = (n-m)(nb^2 - mc^2) + mna^2. \quad (8.8)$$

8.2.4 概括

(8.4), (8.7), (8.8)三式, 形式上非常相似, 如果我们把线段赋予方向, 规定与 BC 方向相同者为正值, 否则为负值, 这样就可以把这三式统一起来, 得到下面一般形式的命题.

命题 8.11 在 $\triangle ABC$ 中, 设 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, D 为边 BC 上或者是在该线段延长线上的任一点, 规定 $\overrightarrow{BC}$ 的正向是由 B 指向 C , 与该线段方向一致的线段取正值, 否则取负

值,则有

$$\begin{aligned}(\overline{BD} + \overline{DC})^2 \cdot AD^2 &= (\overline{BD} + \overline{DC})(\overline{BD} \cdot b^2 + \overline{DC} \cdot c^2) \\ &\quad - \overline{BD} \cdot \overline{DC} \cdot a^2.\end{aligned}\quad (8.9)$$

8.2.5 特殊化

记

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

在命题 8.11 中, BD 是边 BC 上任意长的线段, 特别取 D 为点 A 在 BC 上的垂足, 这时其高记为 h_a . 类似地, 边 CA 上的高记为 h_b , 边 AB 上的高记为 h_c , 就得到命题 8.12. 特别取 D 在 $\angle A$ 的平分线上, 该平分线记为 t_a . 类似地 $\angle B$ 的平分线记为 t_b , $\angle C$ 的平分线记为 t_c , 就得到命题 8.13.

命题 8.12 $\triangle ABC$ 的三边分别设为 $BC=a, CA=b, AB=c$, 三边上的高分别记为 h_a, h_b, h_c , 则

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

命题 8.13 $\triangle ABC$ 的三个角的平分线分别记为 t_a, t_b, t_c , 则

$$t_a = \frac{2}{b+c} (\sqrt{bcs(s-a)}),$$

$$t_b = \frac{2}{c+a} \sqrt{cas(s-b)},$$

$$t_c = \frac{2}{a+b} \sqrt{abs(s-c)}.$$

8.3 关于两个三角形面积之比

8.3.1 命题

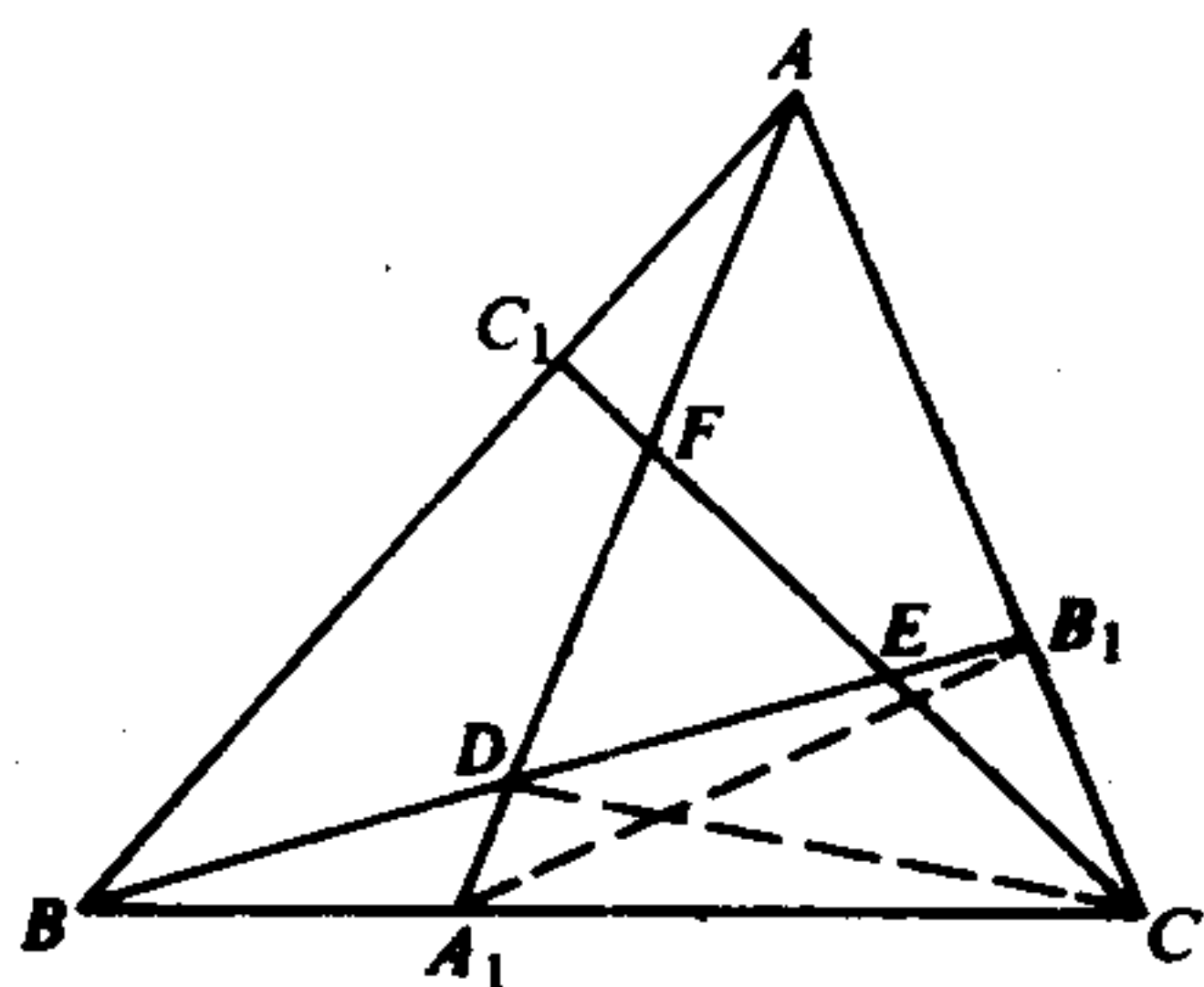


图 8.11

命题 8.14 如图 8.11, 在 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 上分别有三点 A_1, B_1, C_1 , 且有 $BA_1 = \frac{1}{2} A_1C$, $CB_1 = \frac{1}{2} B_1A$, $AC_1 = \frac{1}{2} C_1B$. AA_1, BB_1, CC_1 两两相交于 D, E, F . 若 $\triangle DEF$ 的面积记为 $S_{\triangle DEF}$, $\triangle ABC$ 的面积记为 $S_{\triangle ABC}$, 则

有

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{7}.$$

特别地, 当 $\triangle ABC$ 为正三角形时, 此命题就变为 1942 年 ~1943 年匈牙利数学奥林匹克试题.

8.3.2 分析与证明

分析 1 因为 $S_{\triangle DEF} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BCE} - S_{\triangle CAF}$, 所以欲证 $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{7}$, 只要知道 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}$ 即可. 而 $\frac{S_{\triangle ABB_1}}{S_{\triangle ABC}}$ 可知, 因此这又归结到只要 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABB_1}}$ 可知即可, 也就是 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADB_1}}$ 可知即可, 而这又归结到 $\frac{BD}{DB_1}$ 可知即可, 从而转化为如果 $\frac{S_{\triangle BDA_1}}{S_{\triangle DB_1A_1}}$ 可知, 那么

问题也就解决了. 而通过 $S_{\triangle DA_1C}$ 作为中介, 就可达到目的. 因为 $\triangle BDA_1$ 与 $\triangle DA_1C$ 同高, 因此其面积的比值就转化为已知的比值 $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{1}{2}$. $\triangle DB_1A_1$ 与 $\triangle DA_1C$ 为同底, 故其面积之比就转化为其对应的高之比, 这又可通过已知比值 $\frac{CB_1}{B_1A}$ 求出来. 这样我们就得到证 1.

证 1 如图 8.11, 连结 A_1B_1, DC . 在 $\triangle DA_1C$ 与 $\triangle DB_1A_1$ 中, DA_1 为共同的底边, 所以其面积之比就等于从顶点 C, B_1 到边 DA_1 的高之比. 由 $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{1}{2}$ 可推出这两个高之比为 $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$, 于是

$$\frac{S_{\triangle DA_1C}}{S_{\triangle DB_1A_1}} = \frac{3}{2}. \quad (8.10)$$

在 $\triangle BDA_1$ 和 $\triangle DA_1C$ 中, 由公共顶点 D 到对边的高相同, 故

$$\frac{S_{\triangle BDA_1}}{S_{\triangle DA_1C}} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{1}{2}. \quad (8.11)$$

(8.10) $\times$ (8.11) 得

$$\frac{S_{\triangle BDA_1}}{S_{\triangle DB_1A_1}} = \frac{3}{4}.$$

因为在 $\triangle BDA_1$ 和 $\triangle DB_1A_1$ 中, 由公共顶点 A_1 到对边的高相同, 所以有

$$\frac{S_{\triangle BDA_1}}{S_{\triangle DB_1A_1}} = \frac{BD}{DB_1} = \frac{3}{4}.$$

由此可推出 $\frac{BD}{BB_1} = \frac{3}{7}$, 于是

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABB_1}} = \frac{3}{7}. \quad (8.12)$$

而

$$\frac{S_{\triangle ABB_1}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{B_1A}{AC} = \frac{2}{3}, \quad (8.13)$$

(8.12) × (8.13) 得

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2}{7}.$$

同理, $\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle CAF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2}{7}$. 于是得到

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} = 1 - \frac{2}{7} - \frac{2}{7} - \frac{2}{7} = \frac{1}{7}.$$

分析 2 由分析 1 得知, 欲计算 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}$, 只要求出 $\frac{BD}{DB_1}$ 即可. 这可通过面积法予以转化, 从而获得证 2; 也可利用习题 5 第 8 题的结果求得 $\frac{BD}{DB_1}$; 通过三角的方法予以转化, 亦可求得 $\frac{BD}{DB_1}$, 这就得到证 3; 通过 B_1 作 $B_1G \parallel AA_1$ 交 BC 于 G , 也可推得 $\frac{BD}{DB_1}$, 这样就得证 4; 截线 ADA_1 对 $\triangle BCB_1$ 来说, 满足梅涅劳斯定理, 故利用该定理可求得 $\frac{BD}{DB_1}$, 从而获得证 5.

欲计算 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}$, 通过求 $\frac{A_1D}{DA}$ 亦可, 仿照上面的分析, 亦可获得相应的方法, 比如通过面积转化即可获得证 6.

证 2 如图 8.11, 连结 A_1B_1 .

$$\frac{BD}{DB_1} = \frac{S_{\triangle ABA_1}}{S_{\triangle AA_1B_1}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{S_{\triangle ABA_1}}{S_{\triangle AA_1C}} \cdot \frac{S_{\triangle AA_1C}}{S_{\triangle A_1B_1C}} \cdot \frac{S_{\triangle A_1B_1C}}{S_{\triangle AA_1B_1}} \\
&= \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{AC}{B_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

以下推导同证 1.

证 3 如图 8.11, 在 $\triangle ABA_1$ 和 $\triangle AA_1C$ 中, 有

$$\frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle AA_1B} = \frac{BA_1}{AB}, \quad \frac{\sin \angle AA_1C}{\sin \angle A_1AC} = \frac{AC}{A_1C},$$

于是

$$\frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle A_1AC} = \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \angle ABC}{\sin \angle ACB}.$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADB_1$ 中,

$$\frac{BD}{AB} = \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle ADB}, \quad \frac{AB_1}{DB_1} = \frac{\sin \angle ADB_1}{\sin \angle DAB_1},$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{BD}{DB_1} &= \frac{AB}{AB_1} \cdot \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle DAB_1} \\
&= \frac{AB}{\frac{2}{3}AC} \cdot \frac{\sin \angle BAA_1}{\sin \angle A_1AC} \\
&= \frac{2R \sin \angle BCA}{\frac{2}{3} \times 2R \sin \angle ABC} \cdot \frac{\sin \angle ABC}{2 \sin \angle BCA} \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

以下推导同证 1.

证 4 如图 8.12, 过 B_1 作 $B_1G \parallel AA_1$, 与 BC 交于 G , 则有

$$\frac{BD}{DB_1} = \frac{BA_1}{A_1G}, \quad \frac{A_1G}{AB_1} = \frac{A_1C}{AC}.$$

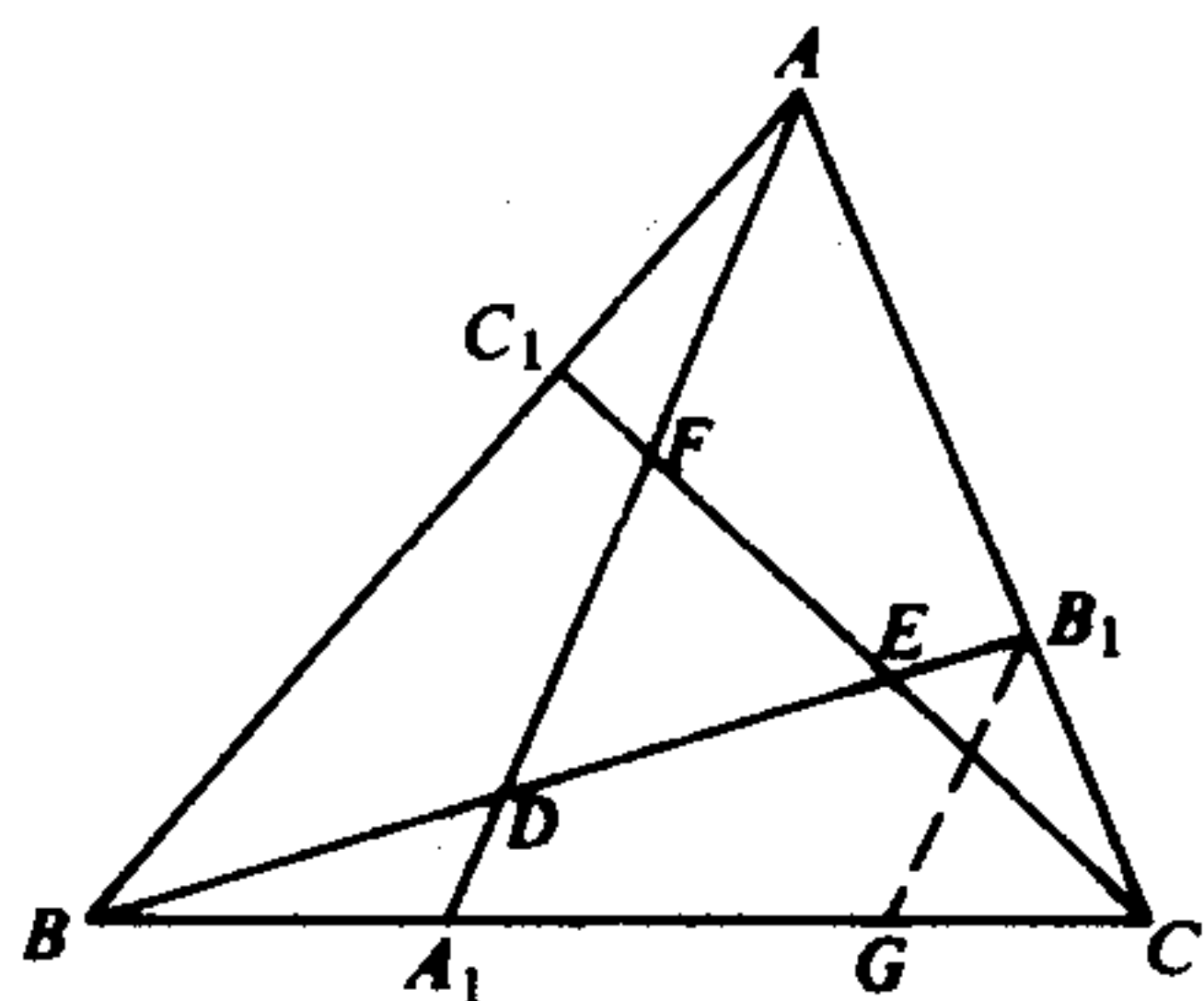


图 8.12

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{BD}{DB_1} &= \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{AC}{AB_1} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

以下推导同证 1.

证 5 如图 8.12, 截线 ADA_1 对 $\triangle BCB_1$ 来说, 满足梅涅劳斯定理, 故有

$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1A}{AC} = 1.$$

因此

$$\frac{BD}{DB_1} = \frac{A_1B}{CA_1} \cdot \frac{AC}{B_1A} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

以下推导同证 1.

证 6 如图 8.11, 连结 A_1B_1 , 则有

$$\begin{aligned} \frac{A_1D}{AD} &= \frac{S_{\triangle BB_1A_1}}{S_{\triangle ABB_1}} = \frac{S_{\triangle BB_1A_1}}{S_{\triangle A_1B_1C}} \cdot \frac{S_{\triangle A_1B_1C}}{S_{\triangle BB_1C}} \cdot \frac{S_{\triangle BB_1C}}{S_{\triangle ABB_1}} \\ &= \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{A_1C}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

于是得 $\frac{AD}{AA_1} = \frac{6}{7}$. 因此

$$S_{\triangle ABD} = \frac{6}{7} S_{\triangle ABA_1} = \frac{6}{7} \times \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{2}{7} S_{\triangle ABC}.$$

以下推导同证 1.

分析 3 若 D, E, F 三点的坐标能求出来, 则由这三点确定的面积 $S_{\triangle DEF}$ 就可求出来; 如果三直线 AA_1, BB_1, CC_1 的方程能求出来, 则三直线方程两两联立就可以确定 D, E, F 的坐标; 而三直线的方程由两点式就可确定. 这样就得到如下的

解析法.

证 7 如图 8.13, 设 A, B, C 的坐标分别为 $A(b, c), B(0, 0), C(a, 0)$, 可求得

$$A_1\left(\frac{a}{3}, 0\right), B_1\left(\frac{b+2a}{3}, \frac{c}{3}\right), C_1\left(\frac{2b}{3}, \frac{2c}{3}\right).$$

由两点坐标求出 AA_1, BB_1, CC_1 的直线方程分别为

$$3cx + (a - 3b)y - ac = 0,$$

$$cx - (2a + b)y = 0,$$

$$2cx + (3a - 2b)y - 2ac = 0.$$

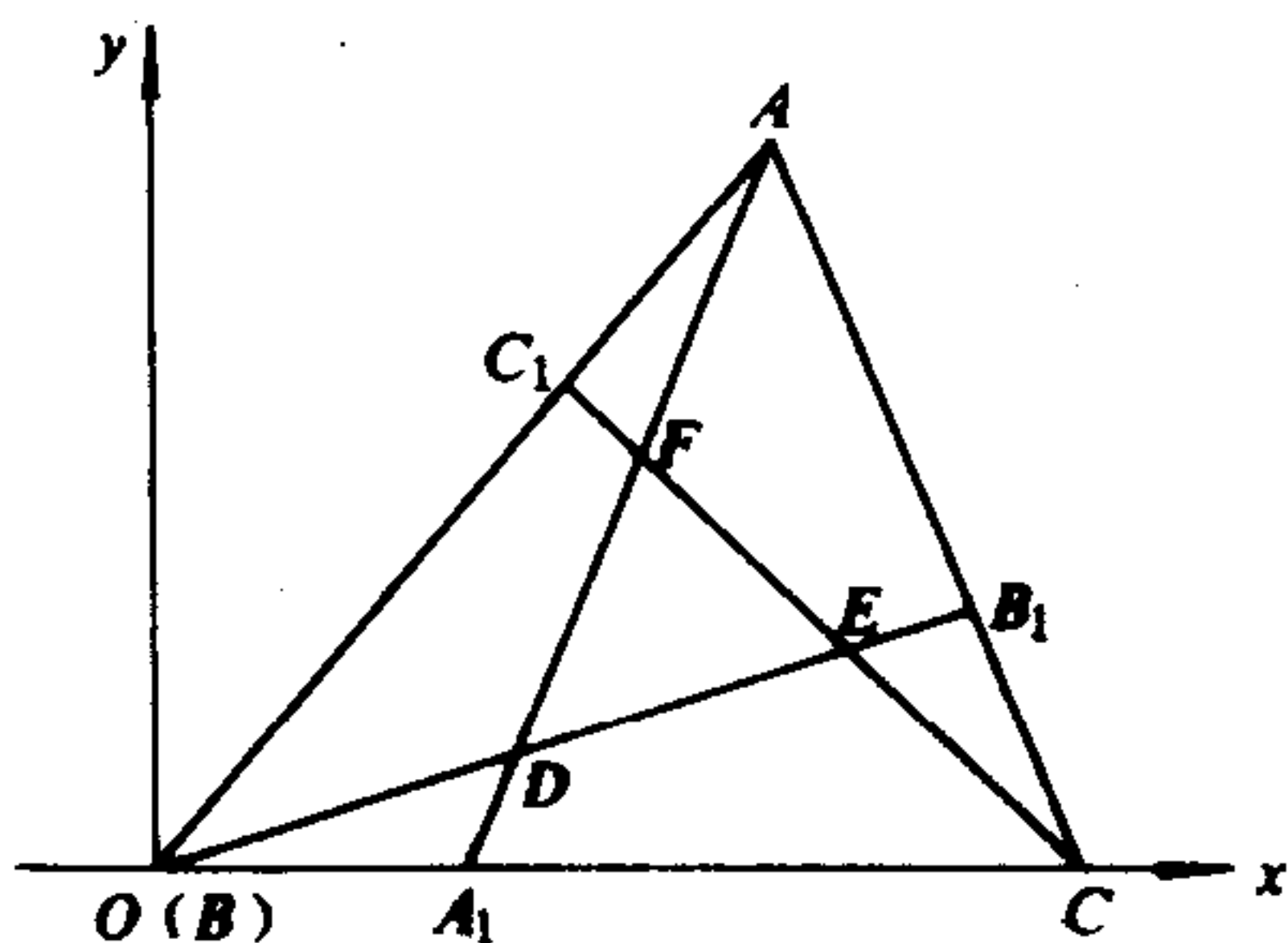


图 8.13

由上述三方程可两两确定 D, E, F 的坐标分别为

$$D\left(\frac{2a+b}{7}, \frac{c}{7}\right), E\left(\frac{2(2a+b)}{7}, \frac{2c}{7}\right), F\left(\frac{a+4b}{7}, \frac{4c}{7}\right).$$

于是得 $\triangle DEF$ 的面积

$$S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{2a+b}{7} & \frac{c}{7} & 1 \\ \frac{2(2a+b)}{7} & \frac{2c}{7} & 1 \\ \frac{a+4b}{7} & \frac{4c}{7} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{14}ac.$$

而 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac$, 所以

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{14}ac}{\frac{1}{2}ac} = \frac{1}{7}.$$

命题 8.14 还有其他的证明方法,这里就不赘述了。

8.3.3 线段上的任意点

上面的一些证明方法都没有用到比值的特殊性,因此用同样的证明方法可以把结论推广到更一般的形式. 设 A_1, B_1, C_1 分别是线段 BC, CA, AB 上的任一点, 且有

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \lambda_1, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \lambda_2, \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \lambda_3,$$

则按上面证 1 的步骤, 可推知

$$\frac{S_{\triangle DA_1C}}{S_{\triangle DB_1A_1}} = \lambda_2 + 1, \quad (8.14)$$

$$\frac{S_{\triangle BDA_1}}{S_{\triangle DA_1C}} = \lambda_1. \quad (8.15)$$

(8.14) $\times$ (8.15) 得

$$\frac{S_{\triangle BDA_1}}{S_{\triangle DB_1A_1}} = \lambda_1(\lambda_2 + 1).$$

而 $\frac{S_{\triangle BDA_1}}{S_{\triangle DB_1A_1}} = \frac{BD}{DB_1}$, 故 $\frac{BD}{DB_1} = \lambda_1(\lambda_2 + 1)$, 进而推得

$$\frac{BD}{BB_1} = \frac{\lambda_1(\lambda_2 + 1)}{\lambda_1(\lambda_2 + 1) + 1}.$$

而 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABB_1}} = \frac{BD}{BB_1}$, 所以

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABB_1}} = \frac{\lambda_1(\lambda_2 + 1)}{\lambda_1(\lambda_2 + 1) + 1}. \quad (8.16)$$

又

$$\frac{S_{\triangle ABB_1}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{1+\lambda_2}. \quad (8.17)$$

(8.16) × (8.17) 得

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1(\lambda_2+1)+1}.$$

同理可得

$$\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2(\lambda_3+1)+1},$$

$$\frac{S_{\triangle CAF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\lambda_3}{\lambda_3(\lambda_1+1)+1}.$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} &= 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1(\lambda_2+1)+1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2(\lambda_3+1)+1} - \frac{\lambda_3}{\lambda_3(\lambda_1+1)+1} \\ &= \frac{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3-1)^2}{(1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)(1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)(1+\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)}. \end{aligned}$$

这样我们就得到如下命题.

命题 8.15 在 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 上有三点 A_1, B_1, C_1 , 且 $\frac{BA_1}{A_1C} = \lambda_1, \frac{CB_1}{B_1A} = \lambda_2, \frac{AC_1}{C_1B} = \lambda_3$, AA_1, BB_1, CC_1 两两相交于 D, E, F , 则有

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3-1)^2}{(1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)(1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)(1+\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)}. \quad (8.18)$$

特别地, 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ 时, 则有

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{(\lambda-1)^2}{1+\lambda+\lambda^2}. \quad (8.19)$$

另外, 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 时, A_1, B_1, C_1 为 $\triangle ABC$ 三边的中点, 此时 AA_1, BB_1, CC_1 交于一点, 即 D, E, F 缩为一点, $S_{\triangle DEF} = 0$. 式 (8.18), (8.19) 仍然成立.

8.3.4 命题的进一步推广

从上述的证 7 可以看出,只要知道分点 A_1, B_1, C_1 的坐标,就可以将 AA_1, BB_1, CC_1 三直线的方程求出来,进而两两直线的交点 D, E, F 就可求出来,从而构成的新三角形面积亦可求出.这样一来,所求面积的比值也就确定了.因此,如果分点在线段的延长线上,且线段的比值给定,那么分点的坐标也就求出来了.于是就可把命题推广到分点在线段上或其延长线上任一点的一般情况.

如果这样构成的新的 $\triangle DEF$ 的三条边不一定通过 $\triangle ABC$ 的三个顶点,而是除了分别通过 A_1, B_1, C_1 外,还分别通过 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 上的点 B', C', A' , 且设 $\frac{BB'}{B'C} = \gamma_1, \frac{CC'}{C'A} = \gamma_2, \frac{AA'}{A'B} = \gamma_3$, 则可得如下结论:

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{k}{uvw},$$

其中,

$$k = (1 + \gamma_1 \lambda_2 \lambda_3 + \gamma_2 \lambda_3 \lambda_1 + \gamma_3 \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2,$$

$$u = 1 + \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2 \gamma_1 + \lambda_1 \lambda_2 \gamma_3 + \lambda_1 \lambda_2 \gamma_1 \gamma_3,$$

$$v = 1 + \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_3 \gamma_2 + \lambda_2 \lambda_3 \gamma_1 + \lambda_2 \lambda_3 \gamma_2 \gamma_1,$$

$$w = 1 + \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 - \lambda_1 \gamma_3 + \lambda_3 \lambda_1 \gamma_2 + \lambda_3 \lambda_1 \gamma_3 \gamma_2.$$

这就更一般了.如果再取这个一般形式的各种各样的特殊情况,就可以得出各种各样的推论,这里就不详述了.

习 题 8

1. 连结三角形各边中点所成的三角形面积是原三角形面积的 $1/4$.

如果不是取三角形各边的中点,而是取各边或其延长线上的任意点,问所成的三角形面积与原三角形面积的关系如何?

2. 自圆外一点 P 引圆的切线 PA , A 为切点, M 为 PA 的中点, 过 M 引圆的割线 MBC .

(1) 求证:

(i) $\angle MCP = \angle MPB$;

(ii) $\angle ABP + \angle ACP = 180^\circ$;

(iii) $\frac{PA}{2AB} = \frac{MC}{CA}$;

(iv) $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{MC}{CA}$.

特别地,

(2) 当 MBC 经过圆心时, 可推出什么结论?

(3) 当 $MBC \perp PA$ 时, 又可推出什么结论?

(4) 当 B, C 重合时, 即 MBC 与圆相切时, 又有什么结果?

3. 解决并推广如下问题:

(1) 在凸四边形 $ABCD$ 中, B_1 是边 AB 的中点, D_1 为边 CD 的中点. 求证

$$S_{\text{四边形}AB_1CD_1} = \frac{1}{2} S_{\text{四边形}ABCD}.$$

(2) 已知 P 为 $\triangle ABC$ 的重心, 过 P 任作一直线分别交 AB, AC 于点 M, N , 试求 $\frac{BM}{MA} + \frac{CN}{NA}$ 之值.

4. 在任意 $\triangle ABC$ 的两边上向形外(或形内)作两个正三角形 ACE, ABF . 求证:

(1) $BE = CF$;

(2) BE 与 CF 的交角为 60° .

5. 在任意三角形 ABC 的边 AC 上向形外作正三角形 ACE , 在边 AB 上向形内作正三角形 ABF . 求证:

(i) $BC = FE$;

(ii) BC 与 FE 的交角为 60° .

6. 在任意三角形 ABC 的两边上向形外(或形内)作正方形 ACE_1E 和 ABF_1F . 求证:

(i) $BE = CF$;

(ii) $BE \perp CF$.

7. 在任意三角形 ABC 的两边向形外(或形内)作两个正 n 边形 $CAE\cdots$ 和 $ABF\cdots$. 求证: $BE = CF$, 且它们的交角为 $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$.

8. 在任意三角形 ABC 的两边上向形外作两个正方形 ACE_1E 和 ABF_1F , 又作 $AD \perp BC$ 于 D , 延长 DA 交 EF 于 M . 求证: $EM = MF$.

9

从不等式到排序问题

本章从一个不等式的证明中引发出一个应用广泛的排序原理. 由排序原理又联想到排序问题.

9.1 一个不等式

例 9.1 已知 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是互不相等的正整数, 求证: 对于任何正整数 n , 都有

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \quad (9.1)$$

(第 20 届国际数学奥林匹克试题)

分析 为了便于比较, 可将 (9.1) 两边对应的分母统一起来, 把 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ 改写为 $\sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2}$. 于是只要证明

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2}$$

即可,也就是只要证明

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k - k}{k^2} \geq 0$$

即可. 又由于 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 为互不相同的正整数, 故有 $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 1 + 2 + \dots + n$, 所以得到如下证法.

$$\begin{aligned} \text{证 1} \quad \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{a_k - k}{k^2} \\ &= \frac{a_1 - 1}{1^2} + \sum_{k=2}^n \frac{a_k - k}{k^2} \\ &\geq \frac{a_1 + a_2 - (1 + 2)}{2^2} + \sum_{k=3}^n \frac{a_k - k}{k^2} \\ &\geq \dots \\ &\geq \frac{1}{n^2} [(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (1 + 2 + \dots + n)] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

不等式(9.1)是一个与 n 有关的一般问题, 一般问题不好解决, 可先考虑它的特殊情况, 再把解决特殊问题所用的思路与方法用到一般问题上来. 为此, 又可考虑如下特殊情况.

当 $n=1$ 时, (9.1)显然成立.

当 $n=2$ 时, 即要证

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2}. \quad (9.2)$$

这时有如下两种可能: $a_1 < a_2$ 或 $a_1 > a_2$.

假若 $a_1 < a_2$, 则有 $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2$. 这时, 易见(9.2)成立.

假若 $a_1 > a_2$, 则有 $a_2 \geq 1, a_1 \geq 2$. 由于

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} - \left(\frac{a_2}{1^2} + \frac{a_1}{2^2} \right) = (a_1 - a_2) \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) > 0,$$

从而

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} > \frac{a_2}{1^2} + \frac{a_1}{2^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2}.$$

这说明(9.2)也成立.

受上述特殊情况的证明方法的启发,我们给出式(9.1)的另一种证法.

证 2 给定的 n 个不相同的整数,可能会出现下面两种情况:

(1)若 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, 则有 $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \cdots, a_n \geq n$. 这时(9.1)显然成立.

(2)若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的大小顺序与脚标的顺序不一致时,即至少存在 $k, t \in \{1, 2, \cdots, n\}, k > t$, 但 $a_k < a_t$, 则由于

$$\left(\frac{a_t}{t^2} + \frac{a_k}{k^2} \right) - \left(\frac{a_k}{t^2} + \frac{a_t}{k^2} \right) = (a_t - a_k) \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{k^2} \right) > 0,$$

所以

$$\begin{aligned} & \frac{a_1}{1^2} + \cdots + \frac{a_t}{t^2} + \cdots + \frac{a_k}{k^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2} \\ & > \frac{a_1}{1} + \cdots + \frac{a_k}{t^2} + \cdots + \frac{a_t}{k^2} + \cdots + \frac{a_n}{n^2}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

这时,如果不等式(9.3)的右端分子上的各数,其大小排列次序还不一致的话,就可以按上述同样的方法再作调整,而每调整一次,所得到的和式只能减小,不能增大. 这样经过有限次调整后, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 就变为由小到大排列的 $a_1', a_2', \cdots, a_n'$, 而且

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} > \sum_{k=1}^n \frac{a'_k}{k^2}. \quad (9.4)$$

而(9.4)右端的和式,由于 $a'_1 < a'_2 < \cdots < a'_n$,故又归结为(1)的情况,即

$$\sum_{k=1}^n \frac{a'_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

综上所述,故(9.1)成立.

9.2 排序原理

通过对例 9.1 证 2 的进一步思考,我们可提出如下问题:
给出两列数 $\{a_k\}$ 和 $\{\frac{1}{k^2}\}$, $\{a_k\}$ 按由小到大排列,有

$$a'_1 < a'_2 < \cdots < a'_n; \quad (9.5)$$

$\{\frac{1}{k^2}\}$ 按由小到大排列,有

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)^2} < \cdots < \frac{1}{1^2}. \quad (9.6)$$

(9.5)与(9.6)反序对应相乘,得和式 $\sum_{k=1}^n \frac{a'_k}{k^2}$,且由上节证 2 得知

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} > \sum_{k=1}^n \frac{a'_k}{k^2}.$$

而 $\{\frac{1}{k^2}\}$ 是特殊的 n 个数,如果取一般的数列 $\{b_k\}$,将此数列按由大到小排列,即

$$b'_1 > b'_2 > \cdots > b'_n,$$

是否亦有类似的不等式成立呢? 即

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k > \sum_{k=1}^n a_k' b_k'$$

是否也成立呢？对于和 $\sum_{k=1}^n a_k b_k$ 来说，其对应数相乘并未按一定顺序，而是乱序。按照“乱序乘积之和大于反序乘积之和”这个猜想，我们又可猜想“乱序乘积之和小于同序乘积之和”。上述思考可引出如下问题：

设 $a_1, a_2, \dots, a_n$

和

$$b_1, b_2, \dots, b_n$$

是正实数，而

$$c_1, c_2, \dots, c_n$$

是数 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 的任一排列，作和

$$S = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n,$$

问在所有可能的这种和数中，怎样的和最大，怎样的和最小？

对此问题由上面的猜测可知：反序时其乘积之和最小，同序时其乘积之和最大。为了进一步验证这个猜想，我们不妨先考虑如下的一个具体问题：

有四种不同面值的人民币，分别放在四个盒子里，第一个盒子里的面值为 1 元，第二个盒子里的面值为 2 元，第三个盒子里的面值为 5 元，第四个盒子里的面值为 10 元。甲、乙、丙、丁四人，分别只能取 3, 4, 6, 8 张人民币，且每人只能从某个盒子里取一次，试问他们用怎样的取法，可使取出的人民币总面值最大？用怎样的取法，可使取出的人民币总面值最小？

从直观上猜测，使取出的人民币总面值最大的取法是，先

让允许取最多张数的丁从面值最大的第四个盒子里去取,然后让丙从第三个盒子里取,让乙从第二个盒子里取,最后让甲从第一个盒子里取.而使取出的人民币总面值最小的取法是,甲从第四个盒子里取,乙从第三个盒子里取,丙从第二个盒子里取,丁从第一个盒子里取.这样一来,如果 c_1, c_2, c_3, c_4 表示 3, 4, 6, 8 的任一排列,则有

$$\begin{aligned} & 1 \times 8 + 2 \times 6 + 5 \times 4 + 10 \times 3 \\ & \leq c_1 + 2c_2 + 5c_3 + 10c_4 \\ & \leq 1 \times 3 + 2 \times 4 + 5 \times 6 + 10 \times 8. \end{aligned}$$

通过验算可知,上述不等式总是成立的.

于是我们进一步增强了对原有猜想的信心.在这个具体问题中,在上述所有的和中,最大的和数对应于 $\{a_i\}$ 与 $\{b_i\}$ 同序(即 $\{a_i\}$ 中最大的数对应于 $\{b_i\}$ 中最大的数, $\{a_i\}$ 中次大的数对应于 $\{b_i\}$ 中次大的数,等等)的时候,而最小的和数则对应于 $\{a_i\}$ 与 $\{b_i\}$ 反序(即 $\{a_i\}$ 中最大的数对应于 $\{b_i\}$ 中最小的数, $\{a_i\}$ 中次大的数,对应于 $\{b_i\}$ 中次小的数,等等)的时候,且所有和数都相等的充要条件是 a_i 相等或 b_i 相等.

把我们的猜想用数学语言写出来,就是

$$\text{若 } a_1' \geq a_2' \geq \cdots \geq a_n', \quad b_1' \geq b_2' \geq \cdots \geq b_n',$$

则

$$\begin{aligned} S_{\min} &= a_1' b_n' + a_2' b_{n-1}' + \cdots + a_n' b_1' \\ &\leq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \cdots + a_n c_n \\ &\leq S_{\max} = a_1' b_1' + a_2' b_2' + \cdots + a_n' b_n', \end{aligned} \quad (9.7)$$

$$S_{\min} = S_{\max} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n \text{ 或 } b_1 = b_2 = \cdots = b_n. \quad (9.8)$$

此即排序原理,下面予以证明.

证 1 (1)若 a_i 相等或 b_i 相等,显然一切和数

$$S = a_i(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

或 $S = b_i(a_1 + a_2 + \cdots + a_n).$

(2)若 a_i 与 b_i 中有不相等的数,设 $a_r > a_s$,今考察两个和

$$S = a_1c_1 + \cdots + a_rc_r + \cdots + a_sc_s + \cdots + a_nc_n,$$

$$S' = a_1c_1 + \cdots + a_rc_s + \cdots + a_sc_r + \cdots + a_nc_n,$$

在 S 与 S' 中,仅 c_r 与 c_s 变换了位置,其他 c_i 的位置相同,于是有

$$\begin{aligned} S' - S &= a_rc_s + a_sc_r - a_rc_r - a_sc_s \\ &= a_r(c_s - c_r) - a_s(c_s - c_r) \\ &= (a_r - a_s)(c_s - c_r). \end{aligned}$$

如果 b_i 不全相等,则存在 $c_r \neq c_s$,从而 $S \neq S'$,即所有的和数不可能都相等. 如果 $c_r > c_s$,则 $S > S'$; 如果 $c_r < c_s$,则 $S < S'$. 这表明, a_r, a_s 与 c_r, c_s 的大小顺序相同时的和数要比它们的大小顺序相反时的和数来得大.

由给定的数 $\{a_i\}, \{b_i\}$ 只能构成有限个不同的和数 S ,而在有限个和数中总存在一个最大的,一个最小的. 此最大和数与最小和数正如上面所断言的. 因为对于数 c_i 的每一种排列,所得的和数或者是增大的,或者是减小的.

综上所述,排序原理得到证明.

换一个角度思考,我们可给出排序原理的另一种证明方法. 先证明一个引理.

引理 设 $\{a_i\}, \{b_i\}$ 为两个数列,记 $S_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$,

则

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = S_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} S_i (b_i - b_{i+1}). \quad (9.9)$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \sum_{i=1}^n a_i b_i &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\ &= S_1 b_1 + (S_2 - S_1) b_2 + \cdots + (S_n - S_{n-1}) b_n \\ &= S_1 (b_1 - b_2) + S_2 (b_2 - b_3) + \cdots \\ &\quad + S_{n-1} (b_{n-1} - b_n) + S_n b_n \\ &= S_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} S_i (b_i - b_{i+1}). \end{aligned}$$

用上述引理, 可证排序原理如下.

证 2 设 $S_i' = b_1' + b_2' + \cdots + b_i'$,

$$S_i = c_1 + c_2 + \cdots + c_i,$$

易知 $S_i' \geq S_i (i=1, 2, \cdots, n-1)$, 且 $S_n' = S_n$. 由引理得

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n a_i' b_i' - \sum_{i=1}^n a_i' c_i' \\ &= S_n' a_n' + \sum_{i=1}^{n-1} S_i' (a_i' - a_{i+1}') \\ &\quad - S_n a_n' - \sum_{i=1}^{n-1} S_i (a_i' - a_{i+1}') \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (S_i' - S_i) (a_i' - a_{i+1}') \geq 0, \end{aligned}$$

即

$$\sum_{i=1}^n a_i' b_i' \geq \sum_{i=1}^n a_i' c_i.$$

同理可证

$$\sum_{i=1}^n a_i' c_i \geq \sum_{i=1}^n a_i' b_{n-i+1}'.$$

9.3 排序原理的应用

排序原理有着广泛的应用,可用它证明中学课本中的许多不等式,并且将这些不等式推广为一般形式,还可用它证明一些著名的不等式.现举例如下.

例 9.2 已知 x, y, z 都是正数,求证:

$$(i) \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2;$$

$$(ii) \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3.$$

该题还可以推广为一般形式:

若 $a_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$), 则

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n. \quad (9.10)$$

下面仅对式(9.10)给出证明.

证 因为 $a_i > 0$, 所以

$$(a_i - a_j) \left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_j} \right) \leq 0,$$

故 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 与 $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$ 反序. 根据排序原理, 有

$$\begin{aligned} a_1 \cdot \frac{1}{a_1} + a_2 \cdot \frac{1}{a_2} + \dots + a_n \cdot \frac{1}{a_n} \\ \leq a_1 \cdot \frac{1}{a_2} + a_2 \cdot \frac{1}{a_3} + \dots + a_n \cdot \frac{1}{a_1}, \end{aligned}$$

即
$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

(9.10)还可以进一步推广为更一般的形式:

若 $\alpha > 0, \beta > 0, a_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$), 则

$$\frac{a_1^a}{a_2^\beta} + \frac{a_2^a}{a_3^\beta} + \cdots + \frac{a_n^a}{a_1^\beta} \geq a_1^{a-\beta} + a_2^{a-\beta} + \cdots + a_n^{a-\beta}. \quad (9.11)$$

证 因此 $\alpha > 0, \beta > 0, a_i > 0$, 故有

$$(a_i^a - a_j^a) \left(\frac{1}{a_i^\beta} - \frac{1}{a_j^\beta} \right) \leq 0,$$

因此 $a_1^a, a_2^a, \dots, a_n^a$ 与 $\frac{1}{a_1^\beta}, \frac{1}{a_2^\beta}, \dots, \frac{1}{a_n^\beta}$ 反序. 根据排序原理, 有

$$\begin{aligned} a_1^a \cdot \frac{1}{a_1^\beta} + a_2^a \cdot \frac{1}{a_2^\beta} + \cdots + a_n^a \cdot \frac{1}{a_n^\beta} \\ \leq a_1^a \cdot \frac{1}{a_2^\beta} + a_2^a \cdot \frac{1}{a_3^\beta} + \cdots + a_n^a \cdot \frac{1}{a_1^\beta}, \end{aligned}$$

即
$$\frac{a_1^a}{a_2^\beta} + \frac{a_2^a}{a_3^\beta} + \cdots + \frac{a_n^a}{a_1^\beta} \geq a_1^{a-\beta} + a_2^{a-\beta} + \cdots + a_n^{a-\beta}.$$

例 9.3 已知 a, b 是不相等的正数, 求证:

(i) $a^4 + b^4 > a^3b + ab^3$;

(ii) $a^5 + b^5 > a^3b^2 + a^2b^3$.

证 (i) 因为 $a > 0, b > 0$, 且 $a \neq b$, 易知

$$(a-b)(a^3-b^3) > 0,$$

故排列 a, b 与排列 a^3, b^3 同序. 根据排序原理, 有

$$a \cdot a^3 + b \cdot b^3 > ab^3 + ba^3,$$

即
$$a^4 + b^4 > a^3b + ab^3.$$

(ii) 因为 $a > 0, b > 0$ 且 $a \neq b$, 易知

$$(a^2-b^2)(a^3-b^3) > 0,$$

故排列 a^2, b^2 与 a^3, b^3 同序. 根据排序原理, 有

$$a^2 \cdot a^3 + b^2 \cdot b^3 > a^2 \cdot b^3 + b^2 \cdot a^3,$$

即
$$a^5 + b^5 > a^3b^2 + a^2b^3.$$

上述不等式中,元素的指数可以推广为任意正数,元素的个数可以推广为 n 个:

若 $\alpha > 0, \beta > 0, a_i > 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$, 则

$$\begin{aligned} a_1^{\alpha+\beta} + a_2^{\alpha+\beta} + \dots + a_n^{\alpha+\beta} \\ \geq a_1^{\alpha} a_2^{\beta} + a_2^{\alpha} a_3^{\beta} + \dots + a_n^{\alpha} a_1^{\beta}. \end{aligned} \quad (9.12)$$

证 由已知条件易知

$$(a_i^{\alpha} - a_j^{\alpha})(a_i^{\beta} - a_j^{\beta}) \geq 0,$$

故排列 $a_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}, \dots, a_n^{\alpha}$ 与排列 $a_1^{\beta}, a_2^{\beta}, \dots, a_n^{\beta}$ 同序. 根据排序原理, 有

$$\begin{aligned} a_1^{\alpha} \cdot a_1^{\beta} + a_2^{\alpha} \cdot a_2^{\beta} + \dots + a_n^{\alpha} \cdot a_n^{\beta} \\ \geq a_1^{\alpha} \cdot a_2^{\beta} + a_2^{\alpha} \cdot a_3^{\beta} + \dots + a_n^{\alpha} \cdot a_1^{\beta}, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} a_1^{\alpha+\beta} + a_2^{\alpha+\beta} + \dots + a_n^{\alpha+\beta} \\ \geq a_1^{\alpha} a_2^{\beta} + a_2^{\alpha} a_3^{\beta} + \dots + a_n^{\alpha} a_1^{\beta}. \end{aligned}$$

例 9.4 已知 a, b, c 都是正数, 求证:

$$(i) \frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{a^{-1}+b^{-1}};$$

$$(ii) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right) \geq 9.$$

证 (i) 因为 $a > 0, b > 0$, 所以排列 a, b 与排列 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ 反序. 根据排序原理, 有

$$a \cdot \frac{1}{a} + b \cdot \frac{1}{b} \leq a \cdot \frac{1}{b} + b \cdot \frac{1}{a},$$

即

$$2 \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a},$$

$$2ab \leq a^2 + b^2,$$

$$4ab \leq (a+b)^2,$$

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2},$$

变形即得

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{a^{-1}+b^{-1}}.$$

(ii) 因 $a > 0, b > 0, c > 0$, 所以排列 $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$ 与排列 $\frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{a}{c}$ 反序, 故有

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} + \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} + \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c} \leq \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{a},$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} + \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} + \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c} \leq \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{b},$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} + \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} + \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} + \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} + \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}.$$

上述三式相加得

$$9 \leq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right).$$

将上述不等式的变元推广到 n 个, 就变为下述不等式:

若 $a_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$), 则

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2. \quad (9.13)$$

如果再将上述不等式的指数加以推广, 便有

若 $\alpha > 0, \beta > 0, a_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$), 则

$$\begin{aligned} & a_1^{\alpha-\beta} + a_2^{\alpha-\beta} + \dots + a_n^{\alpha-\beta} \\ & \leq \frac{1}{n} (a_1^\alpha + a_2^\alpha + \dots + a_n^\alpha) \left(\frac{1}{a_1^\beta} + \frac{1}{a_2^\beta} + \dots + \frac{1}{a_n^\beta} \right). \end{aligned} \quad (9.14)$$

证 由已知条件可知,排列 $a_1^a, a_2^a, \dots, a_n^a$ 与排列 $\frac{1}{a_1^\beta},$

$\frac{1}{a_2^\beta}, \dots, \frac{1}{a_n^\beta}$ 反序. 根据排序原理, 有

$$\begin{aligned} a_1^{a-\beta} + a_2^{a-\beta} + \dots + a_n^{a-\beta} &= a_1^{a-\beta} + a_2^{a-\beta} + \dots + a_n^{a-\beta}, \\ a_1^{a-\beta} + a_2^{a-\beta} + \dots + a_n^{a-\beta} &\leq a_1^a a_2^{-\beta} + a_2^a a_3^{-\beta} + \dots + a_n^a a_1^{-\beta}, \\ a_1^{a-\beta} + a_2^{a-\beta} + \dots + a_n^{a-\beta} &\leq a_1^a a_3^{-\beta} + a_2^a a_4^{-\beta} + \dots + a_n^a a_2^{-\beta}, \\ &\dots\dots\dots \\ a_1^{a-\beta} + a_2^{a-\beta} + \dots + a_n^{a-\beta} &\leq a_1^a a_n^{-\beta} + a_2^a a_1^{-\beta} + \dots + a_n^a a_{n-1}^{-\beta}. \end{aligned}$$

上述 n 个式子相加得

$$\begin{aligned} n(a_1^{a-\beta} + a_2^{a-\beta} + \dots + a_n^{a-\beta}) \\ \leq (a_1^a + a_2^a + \dots + a_n^a) \left(\frac{1}{a_1^\beta} + \frac{1}{a_2^\beta} + \dots + \frac{1}{a_n^\beta} \right). \end{aligned}$$

两边同除以 n , 即得 (9.14).

例 9.5 已知 x_i, y_i ($i=1, 2, \dots, n$) 是实数, 且

$$x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n, \quad y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n,$$

又 $z_1, z_2, \dots, z_n$ 是 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 任意重新排列后的数列. 试证

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2.$$

(第 17 届国际数学奥林匹克试题)

证 因为 $z_1, z_2, \dots, z_n$ 是 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 的一个排列, 故有

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2.$$

又因为 $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n, y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$, 故根据排序原理, 有

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \geq x_1 z_1 + x_2 z_2 + \dots + x_n z_n,$$

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{项}} \leq \frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \cdots + \frac{x_n}{c},$$

亦即

$$c \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

式中的等号仅可能在 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 即

$$\frac{x_1}{c} = \frac{x_1}{c} \cdot \frac{x_2}{c} = \frac{x_1}{c} \cdot \frac{x_2}{c} \cdot \frac{x_3}{c} = \cdots = \frac{x_1}{c} \cdot \frac{x_2}{c} \cdot \cdots \cdot \frac{x_n}{c} = 1$$

时成立,这时 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = c$.

上述不等式还有许多其他的证明方法,这里不再赘述.

例 9.8 设 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n, y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$, 则

$$\begin{aligned} & \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n} \\ & \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \\ & \leq \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n}{n}, \end{aligned} \tag{9.15}$$

其中等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 或 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$ 时成立.

不等式(9.15)是 19 世纪的俄国数学大师切比雪夫首先建立的,史称切比雪夫不等式,现用排序原理证明之.

证 因为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 $y_n, y_{n-1}, \cdots, y_1$ 反序,故根据排序原理,有

$$\begin{aligned} x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1 &= x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1, \\ x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1 &\leq x_1 y_{n-1} + x_2 y_{n-2} + \cdots + x_n y_2, \\ x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1 &\leq x_1 y_{n-2} + x_2 y_{n-3} + \cdots + x_n y_3, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

即
$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_1} \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

我们再用配方法对(ii)给出一个证明. 步骤是先作不等式左右两边之差, 进而实施配方:

$$\begin{aligned} & \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} + \frac{x_n^2}{x_1} - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\ &= \left(\frac{x_1^2}{x_2} - 2x_1 + x_2 \right) + \left(\frac{x_2^2}{x_3} - 2x_2 + x_3 \right) + \cdots \\ & \quad + \left(\frac{x_{n-1}^2}{x_n} - 2x_{n-1} + x_n \right) + \left(\frac{x_n^2}{x_1} - 2x_n + x_1 \right) \\ &= \left[\frac{x_1}{\sqrt{x_2}} - \sqrt{x_2} \right]^2 + \left[\frac{x_2}{\sqrt{x_3}} - \sqrt{x_3} \right]^2 + \cdots \\ & \quad + \left[\frac{x_{n-1}}{\sqrt{x_n}} - \sqrt{x_n} \right]^2 + \left[\frac{x_n}{\sqrt{x_1}} - \sqrt{x_1} \right]^2 \geq 0. \end{aligned}$$

于是不等式得证.

例 9.7 求证: 任何正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的几何平均值不大于它们的算术平均值.

证 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的几何平均值为

$$c = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

现在构造两个数列:

$$a = \frac{x_1}{c}, a_2 = \frac{x_1 x_2}{c^2}, \cdots, a_n = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{c^n} = 1;$$

$$b = \frac{1}{a_1}, b_2 = \frac{1}{a_2}, \cdots, b_n = \frac{1}{a_n} = 1.$$

因数列 $\{a_i\}$ 与 $\{b_i\}$ 反序, 故根据排序原理, 有

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \leq a_1 b_n + a_2 b_1 + \cdots + a_n b_{n-1},$$

即

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{项}} \leq \frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \cdots + \frac{x_n}{c},$$

亦即

$$c \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

式中的等号仅可能在 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 即

$$\frac{x_1}{c} = \frac{x_1}{c} \cdot \frac{x_2}{c} = \frac{x_1}{c} \cdot \frac{x_2}{c} \cdot \frac{x_3}{c} = \cdots = \frac{x_1}{c} \cdot \frac{x_2}{c} \cdot \cdots \cdot \frac{x_n}{c} = 1$$

时成立,这时 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = c$.

上述不等式还有许多其他的证明方法,这里不再赘述.

例 9.8 设 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n, y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$, 则

$$\begin{aligned} & \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n} \\ & \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \\ & \leq \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n}{n}, \end{aligned} \tag{9.15}$$

其中等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 或 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$ 时成立.

不等式(9.15)是 19 世纪的俄国数学大师切比雪夫首先建立的,史称切比雪夫不等式,现用排序原理证明之.

证 因为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 $y_n, y_{n-1}, \cdots, y_1$ 反序,故根据排序原理,有

$$\begin{aligned} x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1 &= x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1, \\ x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1 &\leq x_1 y_{n-1} + x_2 y_{n-2} + \cdots + x_n y_2, \\ x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1 &\leq x_1 y_{n-2} + x_2 y_{n-3} + \cdots + x_n y_3, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1 \leq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

上述 n 个式子相加得

$$\begin{aligned} n(x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1) \\ \leq (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n). \end{aligned}$$

由此可见, (9.15) 的前半部分成立. 类似地, 可证 (9.15) 的后半部分成立.

显然, 当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 或 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$ 时, 则不等式 (9.15) 中等号同时成立; 反之, 若 x_i 不全相等, 且 y_i 也不全相等, 则可推知不等式 (9.15) 中两个等号不可能同时成立.

9.4 排序问题

排序原理不仅可以用来证明一些不等式, 还可以用来解决一些实际问题.

例 9.9 设有 10 人各提桶一只, 同到水龙头前提水, 设水龙头注满第 i 人的桶需要 t_i 分钟, 如果这些 t_i 各不相同, 问:

(1) 当只有一个水龙头可用时, 应如何安排这 10 个人的次序, 使他们花费的总时间 (等待时间与注水时间) 最少? 这个总时间是多少?

(2) 当有两个水龙头可用时, 应如何安排这 10 个人的次序, 使他们花费的总时间最少? 这个总时间是多少?

(1978 年全国中学生数学竞赛试题)

分析 本题要求的是 10 人接水所花费的总时间最少的一种安排方法, 而总的花费时间涉及桶的注水时间和桶的等



图 9.1

待时间两个量,因此可以考虑将这两种量按大小关系各自排成一个系列,然后应用排序原理解题.

解 (1)不妨设 $t_1 < t_2 < \dots < t_{10}$, 另一方面有 $10 > 9 > \dots > 1$, 则根据排序原理, 有

$$T_{\min} = 10t_1 + 9t_2 + \dots + 2t_9 + t_{10},$$

即将 t_i 从小到大安排注水的次序, 10 个人接水所花费的总时间最少.

(2)依排序原理, 有

$$\begin{aligned} T_{\min} = & 5(t_1 + t_2) + 4(t_3 + t_4) + 3(t_5 + t_6) \\ & + 2(t_7 + t_8) + (t_9 + t_{10}), \end{aligned}$$

即按 t_i 由小到大的次序, 先让最前面的两个人上去接水, 当其中的一个人注满水桶后, 等在最前面的一个人就上去接水, 这

样依次接水,所花费的总时间最少.

上述解题方法可推广到一般情况:如果有 n 个人,同到 m 个水龙头提水,那么让接水的人按注水时间从小到大的次序排队,然后依次到各个水龙头上接水,哪个水龙头下边的水桶注满了,等待的第一个人就接上去注水,这样,所有提水的人花费的总时间最少.

我们从日常生活中的排序问题,又可联想到生产管理、计划管理中的排序问题.例如,机器零件加工的先后顺序,机器维修与更新的先后安排,工程实施的具体流程安排,学校课程表的设计等,都有一个与次序安排有关的问题.次序安排得好,就会增益,不然就会带来损失.因此,如何根据实际需要合理排序,就成为人们关心的问题.由于客观情况各异,因此概括抽象出的排序模型也就多种多样.像排序原理这样的排序模型是最简单的一种,存在着十分简单的有效算法.但大多数排序模型所能给出的相应的有效解法还是十分有限的.因此有志于在这个领域进行耕耘者,其聪明才智可以得到充分发挥.下面再介绍几种排序模型.

许多零件在机器上加工,就有一个次序安排问题.例如,有 n 个零件 $J_1, J_2, \dots, J_n$ 要在同一台机器上加工,它们各自加工的时间分别为 $T_1, T_2, \dots, T_n$,试问:如何安排 $J_1, J_2, \dots, J_n$ 的加工顺序,使这些零件总的耽搁时间最少? 耽搁的时间为零件加工时间与等待时间之和.这一实际问题,可以归结为与水桶接水相同的排序模型.问题的一般解法是:将零件按加工时间由小到大的次序排列,便可得到最优排列(即在此排序

下总的耽搁时间最少).

如果加工零件的机器不是 1 台,而是 m 台,且每台机器的加工效率也不一定相同,那么应如何安排零件的加工顺序,使总的耽搁时间最少呢? 关于这类问题有如下的一般提法.

例 9.10 设有 n 个零件 $J_1, J_2, \dots, J_n$, 可在 m 台机器 $M_1, M_2, \dots, M_m$ 上进行加工, J_1 在 M_1 上的加工时间为 T_{11} , J_1 在 M_2 上的加工时间为 T_{12} , 一般地, J_i 在 M_j 上的加工时间为 T_{ij} . 这些零件的加工时间列于表 9.1 中. 试问: 这 n 个零件应如何分配到各台机器上加工, 且加工顺序如何, 才能使所有零件的总耽搁时间最少?

表 9.1

	M_1	M_2	...	M_m
J_1	T_{11}	T_{12}	...	T_{1m}
J_2	T_{21}	T_{22}	...	T_{2m}
.....				
J_n	T_{n1}	T_{n2}	...	T_{nm}

目前关于这个问题,仅对一类较特殊的情况,即时间表 9.1 的各列均成比例的情况,才有令人满意的算法. 特别地,当表 9.1 中每一列对第 1 列的比值均为正整数时,其算法特别简便. 下面通过一个具体例子来说明这个算法.

例如,设加工时间表如表 9.2 所示. 表中各行(即对应表 9.1 中的列)均成比例,且每一行对第 1 行的比值均是正整数. 该第 i 行对第 1 行的比值为 k_i , 则表 9.2 中, $k_1=1, k_2=2, k_3=5, k_4=6$.

表 9.2

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}
M_1	3	5	7	8	13	17	19	22	25	28
M_2	6	10	14	16	26	34	38	44	50	56
M_3	15	25	35	40	65	85	95	110	125	140
M_4	18	30	42	48	78	102	114	132	150	168

现将各零件按加工时间从小到大排列如下：

$$J_1, J_2, \dots, J_{10},$$

我们从最后一个零件 J_{10} 开始向左逐一标号： J_{10} 为 1 号， J_9 为 2 号，等等，但是，一旦遇到标号与 k_i 的值相同且为好几个 k_i 的公倍数时，那么它是几个 k_i 的公倍数，就须将此标号重复使用几次。如 J_9 的标号为 2，而 2 是 k_1 与 k_2 的公倍数，因此必须重复使用 2 次，即 J_8 的标号也是 2。下面 J_7 的标号应是 3， J_6 的标号是 4， J_5 的标号是 5，而 5 是 k_1 与 k_3 的公倍数，因此标号 5 必须重复使用 2 次，即 J_4 的标号也是 5。再下面的 J_3 的标号为 6，而 6 是 k_1, k_2, k_4 的公倍数，因此必须重复使用 3 次，即 J_2, J_1 的标号也都是 6。标号结果如下：

$$\begin{array}{cccccccccc} J_1 & J_2 & J_3 & J_4 & J_5 & J_6 & J_7 & J_8 & J_9 & J_{10} \\ \textcircled{6} & \textcircled{6} & \textcircled{6} & \textcircled{5} & \textcircled{5} & \textcircled{4} & \textcircled{3} & \textcircled{2} & \textcircled{2} & \textcircled{1} \end{array}$$

最后，将所有具有不重复标号的零件都分配给 M_1 加工。 J_6, J_7, J_{10} 的标号不重复，故分配给 M_1 加工。而将具有重复标号的零件以任意次序分配给以此标号为公倍数的诸 k_i 所对应的机器加工。例如 J_8, J_9 的标号都是 2，而 2 是 k_1, k_2 的公倍数，因此可将 J_8, J_9 以任意次序分配给 M_1 和 M_2 加工，如此等等。对于每台机器来说，零件的加工次序按时间由小到大排列，这样我们就得到了一个分配方案：

$$M_1: J_1, J_4, J_6, J_7, J_8, J_{10};$$

$$M_2: J_2, J_9;$$

$$M_3: J_5;$$

$$M_4: J_3.$$

在理论上可以证明,上述分配方案是最优的.由上述方案和表 9.2 可知,按此方案加工零件总共耽搁的时间为

$$\begin{aligned} T &= 6T_{11} + 5T_{41} + 4T_{61} + 3T_{71} + 2T_{81} + T_{101} \\ &\quad + 2T_{22} + T_{92} + T_{53} + T_{34} \\ &= 6 \times 3 + 5 \times 8 + 4 \times 17 + 3 \times 19 + 2 \times 22 \\ &\quad + 28 + 2 \times 10 + 50 + 65 + 42 = 432. \end{aligned}$$

一般地,对于上述的标号算法,可概括为如下四步:

第一步,由类似表 9.2 的加工时间表中算出第 i 行与第 1 行的比值 $k_i, i=1, 2, \dots, m$.

第二步,将所有零件按加工时间从小到大的次序排列;然后从最后一个零件起,从 1 号开始向左逐一标号,一旦遇到标号与 k_i 的值相同且为某几个 k_i 的公倍数时,就将此标号重复使用几次,直到所有零件都得到标号为止.

第三步,将无重复标号的零件均分给 M_1 加工;将重复标号的零件以任意次序分配给以此标号为公倍数的诸 k_i 所对应的机器 M_i 加工.

第四步,在每台机器上的零件,均按加工时间由小到大的次序排列.

上述零件加工问题,只涉及一道工序,如果零件加工需要经过多道工序,则问题的一般提法如下所述.

例 9.11 设有 n 个零件 $J_1, J_2, \dots, J_n$, 要在 m 台机器 $M_1, M_2, \dots, M_m$ 上加工. 这些零件须先在 M_1 上加工, 再在 M_2 上加工, $\dots$, 最后在 M_m 上加工, 且零件在每台机器上的加工顺序都是一样的. 如果零件 J_i 在 M_j 上的加工时间为 T_{ij} ($i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m$), 问如何安排零件的加工顺序, 才能使完成全部加工工作的总时间最短?

上述这类问题称为“同顺序的 $m \times n$ 排序问题”. 当 $m=2$ 时, 问题已有求解方法. 但当 $m \geq 3$ 时, 解法就不是那么简单了. 当 $m=3$ 时, 到目前为止, 只有少数特殊情况可以用简便方法求出最优排序.

排序问题还有其他类型, 有兴趣的读者可参阅有关书刊, 这里就不详述了.

习 题 9

1. 设 a, b, c 都是正数, 求证:

$$(i) \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a};$$

$$(ii) \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c.$$

2. 任何 n 个非零正数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的调和平均值不大于它们的几何平均值.

(注: $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$ 称为 n 个数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的调和平均值.)

3. 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 都是正数, 且 $n > 1, x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, 求

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1}{1-x_1} + \frac{x_2}{1-x_2} + \dots + \frac{x_n}{1-x_n}$$

的最小值.

10

函数法

本章概述函数观点和方法及其在中学数学解题中的应用.

10.1 函数观点和方法

宇宙万物无不随着时间的变化而变化,从过去变化到现在,又从现在变化到将来.静止是暂时的,运动是永恒的.暂时的静止与永恒的运动是对立统一的.为了精确描述运动变化的物质世界,便产生了变量数学.变量数学对于现代生产技术、自然科学的发展,就像望远镜对于天文学、显微镜对于生物学的发展一样重要.

恩格斯在《自然辩证法》中指出:“数学中的转折点是笛卡儿的**变数**.有了变数,**运动**进入了数学,有了**变数**,**辩证法**进入了数学,……”变量

数学的产生,带来了数学自身的巨大进步.变量数学是在常量数学发展的基础上出现的,它的产生又反过来深深影响了常量数学的发展.特别是常量数学的各个分支学科,由于变量的渗透而在内容上得到极大丰富,在思想方法上发生了一连串深刻的变革,并由此产生出许多新的分支学科.从常量数学转变到变量数学,其关键在于函数概念的引入.

函数的定义域、值域和对应规律构成了函数的三要素,它的本质在于对应关系.函数中还包括反函数与复合函数.在中学里主要研究如下几类初等函数:一次函数,二次函数,幂函数,指数函数,对数函数,三角函数.函数常见的性质有单调性、对称性(包括奇偶性)、周期性、有界性等.掌握函数的类型及其属性,是用函数观点和方法解决数学问题所应具备的基础知识.

在中学数学中,函数观点和方法是解决数学问题的强有力的工具之一.诸如数列、方程、不等式等内容,都可以统归在函数观点下加以动态的认识:数列就是定义在自然数集或其子集上的函数当自变量从小到大依次取自然数时所对应的一系列函数值;方程 $f(x)=0$ 的解,就是函数 $f(x)$ 的“零值点”;解不等式 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$,就是求出使实函数 $f(x)$ 取正值或取负值的自变量 x 的集合.在第一章里我们用待定系数法求 n 项数列之和就是基于一种函数观点,下面将给出一些用函数观点和方法解题的例子.

10.2 构造函数法

在解题过程中,根据问题的条件与结论的特点,构造出一个辅助函数,通过对函数的考察达到解决问题的目的.这种解决问题的方法,称为构造函数法.

例 10.1 求证

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = 1$$

不论 x 为任何实数都成立,这里 a, b, c 互不相等.

分析 如果用通分化简的方法来证明,不仅计算量大,而且容易出错,可采取构造函数法予以解决.

证 将原式移项得

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} - 1 = 0.$$

等式左边可以看成是关于 x 的不超过二次的多项式. 设

$$f(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} - 1,$$

问题就转化为要证 $f(x) \equiv 0$. 当 $x = a, b, c$ 时, $f(a) = f(b) = f(c) = 0$, 而由已知条件 a, b, c 互不相等, 可知 $f(x)$ 有三个不同的根; 但 $f(x)$ 是不超过二次的多项式, 故至多只能有两个不同的根; 因此, 只能是 $f(x) \equiv 0$.

例 10.2 设 a, b, c 皆为正数, 试证

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{a+b}{2} \sqrt{ab} + \frac{b+c}{2} \sqrt{bc} + \frac{c+a}{2} \sqrt{ca}.$$

分析 此题结论两边为对称的, 所以极有可能出现

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geq \frac{1}{2}(a+b) \sqrt{ab},$$

即 $a^2 + b^2 \geq (a+b) \sqrt{ab}$

之类的情况. 而

$$\begin{aligned} & 2[a^2 + b^2 - (a+b) \sqrt{ab}] \\ &= (\sqrt{ab} - a)^2 + (\sqrt{ab} - b)^2 + (a-b)^2, \end{aligned}$$

故可构造函数

$$f_1(x) = (x-a)^2 + (x-b)^2 + (a-b)^2, \quad (10.1)$$

同样有

$$f_2(x) = (x-b)^2 + (x-c)^2 + (b-c)^2, \quad (10.2)$$

$$f_3(x) = (x-c)^2 + (x-a)^2 + (c-a)^2. \quad (10.3)$$

然后由此展开证明.

证 构造函数如上述的(10.1), (10.2), (10.3). 由于对所有的 x , 皆有 $f_1(x) \geq 0, f_2(x) \geq 0, f_3(x) \geq 0$, 故令

$$x_1 = \sqrt{ab}, \quad x_2 = \sqrt{bc}, \quad x_3 = \sqrt{ca}$$

分别代入 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 中, 则有

$$\begin{aligned} f_1(\sqrt{ab}) &= (\sqrt{ab} - a)^2 + (\sqrt{ab} - b)^2 + (a-b)^2 \\ &= 2[a^2 + b^2 - (a+b) \sqrt{ab}] \geq 0, \end{aligned}$$

即

$$a^2 + b^2 \geq (a+b) \sqrt{ab}; \quad (10.4)$$

同理得

$$f_2(\sqrt{bc}) = 2[b^2 + c^2 - (b+c) \sqrt{bc}] \geq 0,$$

即

$$b^2 + c^2 \geq (b+c) \sqrt{bc}; \quad (10.5)$$

$$f_3(\sqrt{ca}) = 2[c^2 + a^2 - (c+a) \sqrt{ca}] \geq 0,$$

即

$$c^2 + a^2 \geq (c+a) \sqrt{ca}. \quad (10.6)$$

(10.4)+(10.5)+(10.6), 变形即得

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{a+b}{2} \sqrt{ab} + \frac{b+c}{2} \sqrt{bc} + \frac{c+a}{2} \sqrt{ca}.$$

例 10.3 已知 a, b 为实数, 且 $e < a < b$, 其中 e 为自然对数的底, 证明 $a^b > b^a$.

分析 为了证明 $a^b > b^a$, 不等式两边取对数得

$$b \ln a > a \ln b,$$

即
$$\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}.$$

为了证明此不等式成立, 可以将两边视为函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 所取的两个特殊值, 因此问题就归结为证明 $f(x)$ 是单调减函数即可. 这样我们便得到如下证法.

证 1 构造函数

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

对 x 求导数, 有

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $[e, \infty)$ 上是单调减函数. 特别当 $x = a, b$ 时, 由于 $e < a < b$, 故有

$$\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b},$$

变形即得 $a^b > b^a$.

亦可将不等式 $a^b > b^a$ 两边的指数同乘以 $\frac{1}{ab}$, 得 $a^{\frac{1}{a}} > b^{\frac{1}{b}}$.

这样就可构造函数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, 于是得证 2.

证 2 构造函数

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}},$$

对 x 求导, 有 $f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x)$ ($x > 0$), 且有唯一零点 e . 当 $x \in [e, \infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 是单调减函数. 特别当 $x = a, b$ 时, 由于 $e < a < b$, 有

$$a^{\frac{1}{a}} > b^{\frac{1}{b}},$$

变形即得 $a^b > b^a$.

讨论 函数 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, 当 $x \in (0, e]$ 时, 有 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 是单调增函数. 因此, 若题设改为 $0 < a < b < e$, 则有不等式 $a^b < b^a$.

例 10.4 已知 $a > 0, a \neq 1$, 试求使方程 $\log_a(x - ak) = \log_{a^2}(x^2 - a^2)$ 有解的 k 的取值范围. (1989 年全国高考试题)

解 问题等价于求使

$$\begin{cases} (x - ak)^2 = x^2 - a^2, \\ x - ak > 0 \end{cases}$$

有解时 k 的取值范围, 亦等价于求使

$$\begin{cases} x - ak = \sqrt{x^2 - a^2}, \\ x - ak > 0 \end{cases}$$

有解时 k 的取值范围. 令

$$y_1 = x - ak > 0,$$

$$y_2 = \sqrt{x^2 - a^2} > 0,$$

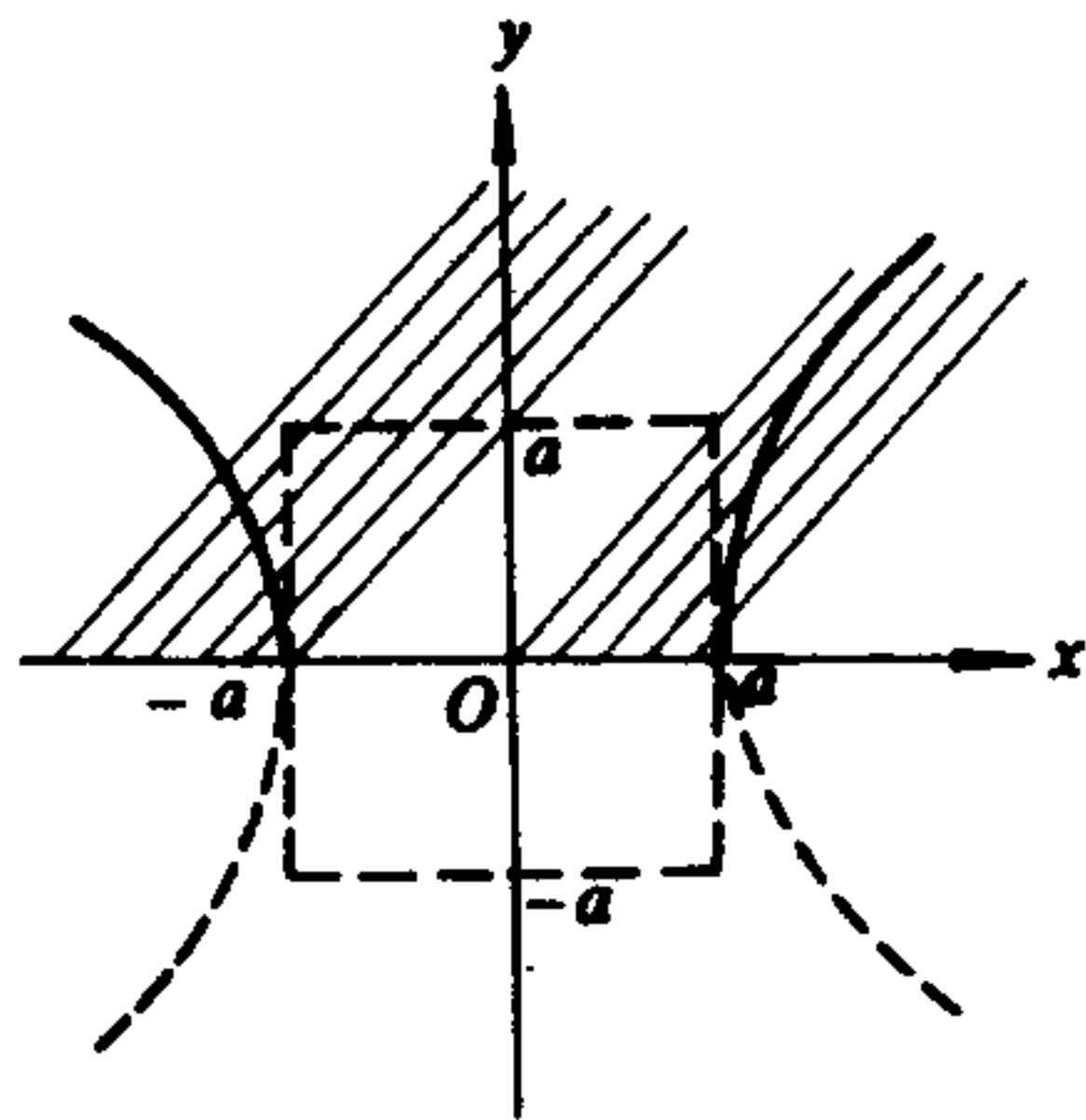


图 10.1

画出上述两个函数的图像(图 10.1), 则该问题又转化成如下问题: k 取什么值时, 半直线 $y = x - ak$ ($y > 0$) 与双曲线

$x^2 - y^2 = a^2$ ($y > 0$) 在 x 轴上方有交点?

半直线在 x 轴上的截距为 ak , 从图像上可以看出 ak 的取值范围为

$$ak < -a \quad \text{或} \quad 0 < ak < a \quad (a > 0).$$

故使原方程有解的 k 的取值范围为

$$k < -1 \quad \text{或} \quad 0 < k < 1.$$

这种解决问题的方法具有一般性, 可概括出交轨模型: 以暂时降低条件的方式处理问题, 把已知条件适当细分为两款, 使得仅考虑一款而不顾另一款时, 均可产生一个轨迹, 则两轨迹的交点即为问题的答案.

例 10.5 如图 10.2, 已知四边形 $ABCD$ 的面积等于 1, H, G 和 E, F 分别为 AD 和 BC 的三等分点, 求证四边形 $EFGH$ 的面积等于 $\frac{1}{3}$.

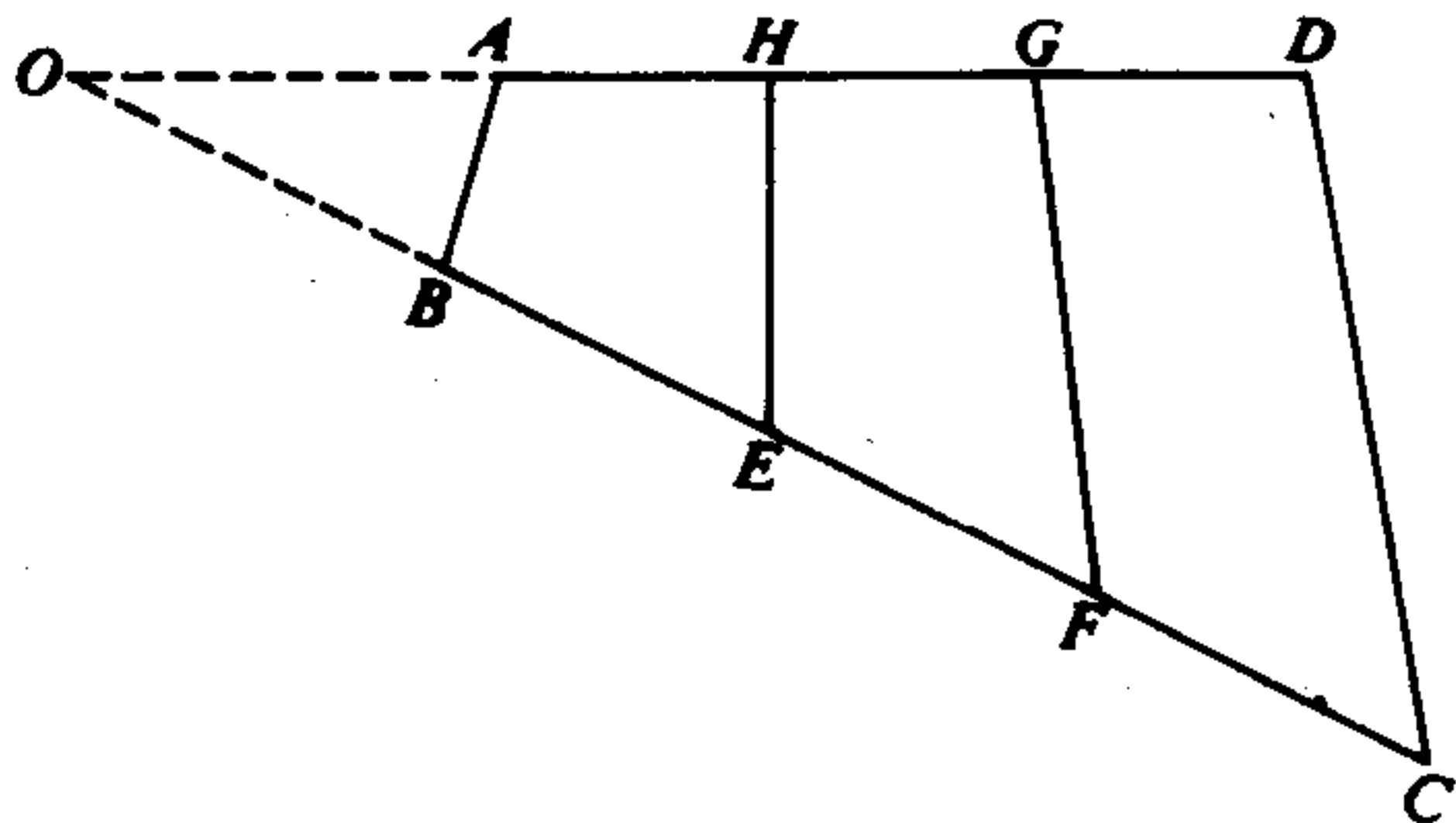


图 10.2

分析 1 设四边形 $EFGH$ 的面积 S 为某个线段长 x 的函数, 即 $S = f(x)$, 然后求出函数值, 若其值为 $\frac{1}{3}$ 问题就解决

了.

证 1 若 $AD \parallel BC$, 则结论显然成立. 故可假定 AD 与 BC 不平行, 设 DA 与 CB 的延长线相交于点 O , 则 OA, OB 为定值, $\angle AOB$ 亦为定值. 设 $OA = a, OB = b, \angle AOB = \theta$. 先设想 H, G 不是 AD 的三分点, 而是 AD 上的两个动点, 且保持 $AH = GD$. 同理, 设 E, F 是 BC 上的两个动点, 且保持 $BE = FC$. 设 $BC = \lambda AD$ (λ 为定值), 且有 $BE = FC = \lambda AH = \lambda GD$.

设 $AH = x, AD = m$, 则 $BC = \lambda m$. 于是

$$S_{\triangle OGF} = \frac{1}{2}(a + m - x)(b + \lambda m - \lambda x)\sin\theta,$$

$$S_{\triangle OHE} = \frac{1}{2}(a + x)(b + \lambda x)\sin\theta,$$

则四边形 $EFGH$ 的面积 S 为 x 的函数:

$$\begin{aligned} S &= f(x) = S_{\triangle OGF} - S_{\triangle OHE} \\ &= \frac{1}{2}(a + m - x)(b + \lambda m - \lambda x)\sin\theta \\ &\quad - \frac{1}{2}(a + x)(b + \lambda x)\sin\theta. \end{aligned}$$

由于 m, a, b, θ, λ 均为常数, 故 $f(x)$ 显然是 x 的一个二次函数, 不妨设

$$f(x) = px^2 + qx + r,$$

然后利用待定系数法求出 p, q, r 的值.

当 $x = 0$ 时, $S_{\triangle OGF} = S_{\triangle ODC}, S_{\triangle OHE} = S_{\triangle OAB}$,

故有 $S = 1$, 即 $f(0) = 1$, 于是

$$r = 1. \tag{10.7}$$

当 $x = \frac{1}{2}m$ 时, $S_{\triangle OGF} = S_{\triangle OHE}$, 故有 $S = 0$, 所以

$$f\left(\frac{1}{2}m\right) = \frac{1}{4}m^2p + \frac{1}{2}mq + r = 0. \quad (10.8)$$

当 $x = m$ 时, $S_{\triangle OGF} = S_{\triangle OAB}$, $S_{\triangle OHE} = S_{\triangle ODC}$, 故有 $S = S_{\triangle OGF} - S_{\triangle OHE} = -1$, 所以

$$f(m) = m^2p + mq + r = -1. \quad (10.9)$$

由(10.7), (10.8), (10.9)得

$$p = 0, \quad q = -\frac{2}{m}, \quad r = 1.$$

故

$$f(x) = 1 - \frac{2x}{m}.$$

在上式中, 令 $x = \frac{m}{3}$, 即得 $S = \frac{1}{3}$.

本题还可用几何方法予以考虑, 现分析如下.

分析 2 由于一般四边形的面积较难计算, 因此我们可把四边形划分为两个三角形, 为此连结 BD . 由于

$$S_{\triangle BDE} = \frac{1}{3}S_{\triangle BDC}, \quad S_{\triangle BDG} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABD},$$

故可想到连结 DE, BG (这种想法是基于三角形“底边在同一直线上, 而又有公共顶点”这一基本几何特征的), 这样就得到如下的证法.

证 2 连结 BG, DE, EG . $\triangle HEG$ 与 $\triangle GED$ 等底等高, 故 $S_{\triangle HEG} = S_{\triangle GED}$. 同理有 $S_{\triangle BGE} = S_{\triangle EGF}$. 于是 $S_{EFGH} = S_{BEDG}$. 连结 BD , 易得

$$S_{\triangle BDE} = \frac{1}{3}S_{\triangle BDC}, \quad S_{\triangle BGD} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABD}.$$

于是 $S_{BEDG} = S_{\triangle BDE} + S_{\triangle BGD}$

$$= \frac{1}{3}(S_{\triangle BDC} + S_{\triangle ABD})$$

$$= \frac{1}{3} S_{\triangle ABCD} = \frac{1}{3}.$$

从而命题得证.

分析 3 上面是用等积变换的几何方法予以证明的. 如果对图形分割所得的数据作代数运算, 通过代数变形可得证 3.

证 3 若 $AD \parallel BC$, 则结论显然成立. 若 AD 与 BC 不平行, 设二者相交于点 O , 并设 $\angle AOB = \theta$, $BE = a$, $AH = b$, 于是有

$$\begin{aligned} S_{\triangle EOH} &= \frac{1}{2} (BO + a)(AO + b) \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \sin \theta (BO \cdot AO + AO \cdot a + BO \cdot b + ab), \\ S_{\triangle FOG} &= \frac{1}{2} (BO + 2a)(AO + 2b) \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \sin \theta (BO \cdot AO + 2a \cdot AO + 2b \cdot BO + 4ab). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } S_{EFGH} &= S_{\triangle FOG} - S_{\triangle EOH} \\ &= \frac{1}{2} \sin \theta (a \cdot AO + b \cdot BO + 3ab). \end{aligned}$$

$$\text{同理 } S_{ABCD} = \frac{3}{2} \sin \theta (a \cdot AO + b \cdot BO + 3ab).$$

$$\text{故有 } S_{EFGH} = \frac{1}{3} S_{ABCD} = \frac{1}{3}.$$

简评 上述问题用三种方法加以解决, 比较一下不难发现: 几何方法解题过程简捷, 但须添加辅助线, 不易想到; 代数方法、计算函数值方法, 计算过程较繁杂, 但解题思路直接, 且计算函数值方法, 不受题目所给的特殊条件限制, 更适于解一

般性的题目.

10.3 建立变量等式

例 10.6 求证

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n.$$

证 由二项式定理知

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n.$$

当 $x=1$ 时, 即有

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n.$$

例 10.7 求证:

$$(i) C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1};$$

$$(ii) C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \cdots + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0.$$

证 由二项式定理知

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n,$$

上式两边对 x 求导, 得

$$\begin{aligned} n(1+x)^{n-1} &= C_n^1 + 2C_n^2 x + \cdots + (n-1)C_n^{n-1} x^{n-2} \\ &\quad + nC_n^n x^{n-1}. \end{aligned} \quad (10.10)$$

在(10.10)中令 $x=1$, 得

$$n \cdot 2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n.$$

于是(i)得证.

在(10.10)中令 $x=-1$, 得

$$0 = C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \cdots + (-1)^{n-1} nC_n^n.$$

于是(ii)得证.

例 10.8 求证

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = \frac{(2n)!}{n! \, n!}.$$

证 因为 $(1+x)^n \cdot (1+x)^n = (1+x)^{2n}$, 所以

$$\sum_{k=0}^n C_n^k x^k \cdot \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = (1+x)^{2n}.$$

将上式右边利用二项式定理展开, 比较两边含 x^n 项的系数, 得

$$C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + C_n^2 C_n^{n-2} + \cdots + C_n^n C_n^0 = C_{2n}^n.$$

由于 $C_n^k = C_n^{n-k}$, 故有

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = \frac{(2n)!}{n! \, n!}.$$

上面三个例子还可以利用其他方法予以证明. 但相比之下, 利用辅助函数与二项式定理证明组合恒等式更显得简捷.

10.4 参数法

在数学问题中, 已知与未知、条件与结论、函数与自变量, 以及轨迹上动点的流动坐标之间存在的联系, 有时需要借助于参变量予以沟通. 参变量的作用在于刻画事物的变化状态, 揭示变化因素之间的内在联系. 如解析几何中的直线系、圆系、二次曲线系方程中的任意常数 λ 就是参变量, 在方程、不等式、函数的研究中, 各项的字母系数也都可视为参变量. 利用参变量解决问题的方法, 称为参数法.

例 10.9 解方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{5}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (10.11)$$

解 由原方程组得

$$\frac{x(y+z)}{5} = \frac{y(z+x)}{4} = \frac{z(x+y)}{3} = x+y+z.$$

令上式之值为 λ , 则有

$$\begin{cases} x(y+z) = 5\lambda, \\ y(z+x) = 4\lambda, \\ z(x+y) = 3\lambda. \end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases} xy = 3\lambda, \\ yz = \lambda, \\ zx = 2\lambda. \end{cases}$$

所以 $x = 3z, y = \frac{3}{2}z$, 将此值代入方程组 (10.11) 中的任一个

方程, 可得 $z = \frac{11}{3}$, 进而得 $x = 11, y = \frac{11}{2}$. 经检验知, 原方程组

的解为 $x = 11, y = \frac{11}{2}, z = \frac{11}{3}$.

例 10.10 从抛物线 $y = x^2$ 上的一定点 A 引两条互相垂直的弦 AM, AN , 证明直线 MN 过某个定点.

证 设 A, M, N 三点的坐标分别为 $(a, a^2), (m, m^2), (n, n^2)$, 这里 a 为常量, m, n 为参变量. 由题意知 $m - a \neq 0, n - a \neq 0$. 由于 $AM \perp AN$, 故

$$\frac{m^2-a^2}{m-a} \cdot \frac{n^2-a^2}{n-a} = -1,$$

$$(m+n)a + mn + a^2 = -1. \quad (10.12)$$

直线 MN 的方程为

$$y - m^2 = (m+n)(x-m),$$

即 $y = (m+n)x - mn. \quad (10.13)$

这样一来,问题就变为在(10.12)的条件下,证明直线系方程(10.13)过定点.由条件(10.12)得

$$m = -\frac{an+a^2+1}{a+n},$$

将此值代入(10.13)中,得

$$y = -\left(\frac{an+a^2+1}{a+n} - n\right)x + \frac{an+a^2+1}{a+n}n.$$

将该方程整理为关于参变量 n 的二次方程,即

$$(x+a)n^2 + (a^2 - y + 1)n - (a^2x + x + ay) = 0.$$

由恒等式成立的充要条件得

$$\begin{cases} x+a=0, \\ a^2-y+1=0, \\ a^2x+x+ay=0. \end{cases}$$

解上述方程组,得 $x = -a, y = a^2 + 1$. 因此,直线 MN 过定点 $(-a, a^2 + 1)$.

例 10.11 已知两点 $C(-2, 2), D(0, 2)$ 以及直线 $l: y = x$, 设长为 $\sqrt{2}$ 的线段 AB 在 l 上移动(图 10.3). 求直线 CA 和 DB 的交点的轨迹方程.

分析 由于 A, B 在直线 l 上,故其纵坐标与横坐标相等,所以可以用 A (或 B)的横坐标 a 做参数,这样便得到解 1;

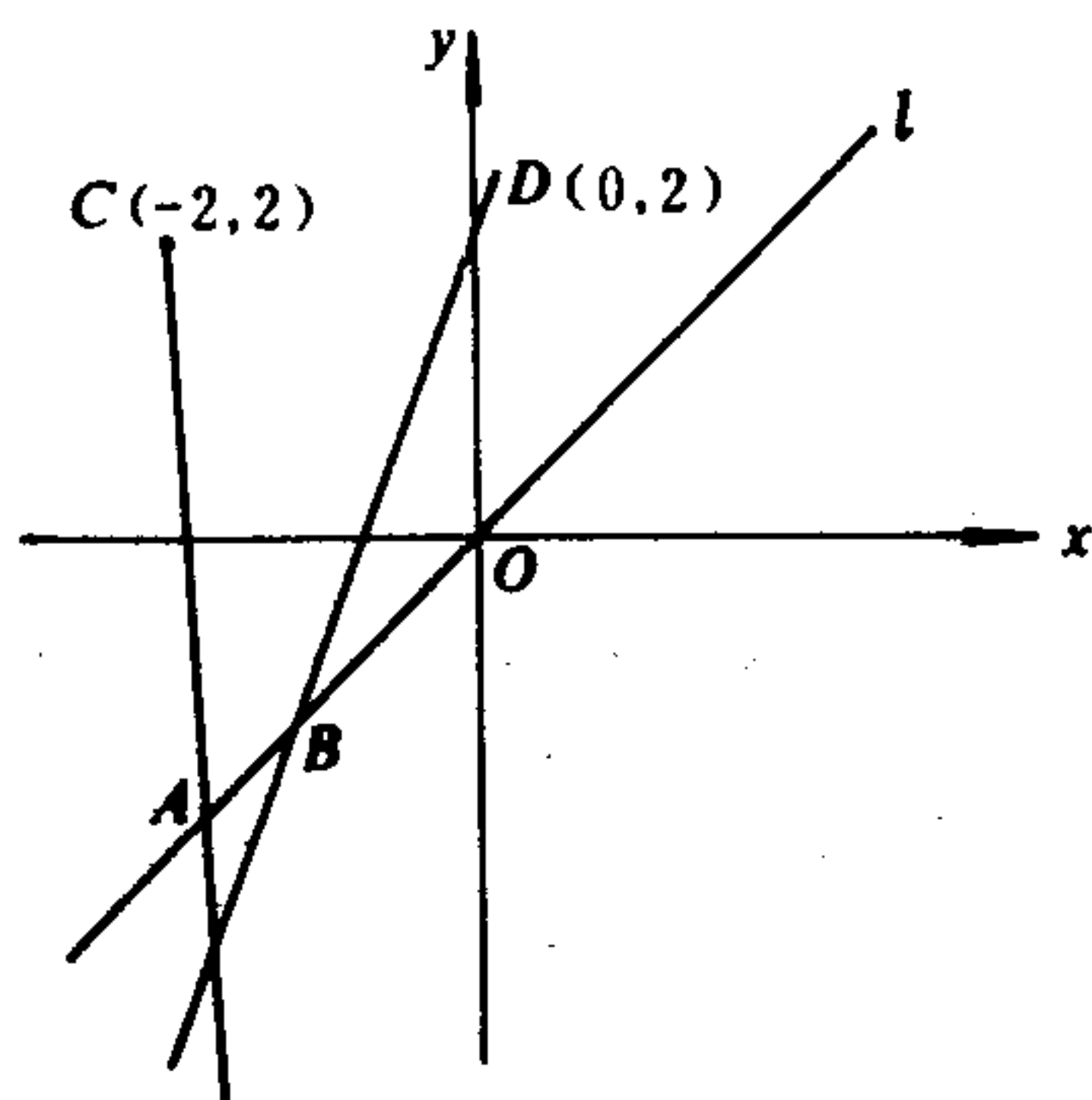


图 10.3

也可通过建立 CA, DB 的方程来解, 这样就得到解 2.

解 1 设点 A 的坐标为 (a, a) , 则

$$x_B = a + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}$$

$$= a + 1,$$

$$y_B = a + \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= a + 1.$$

于是得 CA, DB 的直线方

程分别为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ a & a & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ a+1 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

即 $CA: (a-2)x - (a+2)y + 4a = 0, \quad (10.14)$

$DB: (a-1)x - (a+1)(y-2) = 0. \quad (10.15)$

(10.15) - (10.14) 得

$$a = \frac{1}{2}(x+y+2).$$

将 a 代入 (10.15), 得到轨迹方程

$$x^2 - y^2 + 2x - 2y + 8 = 0.$$

解 2 将 (10.14) 与 (10.15) 改写为

$$\begin{cases} (x-y+4)a - 2(x+y) = 0, \\ (x-y+2)a - (x+y-2) = 0. \end{cases}$$

关于 x', y' 的线性齐次方程组

$$\begin{cases} (x-y+4)x' - 2(x+y)y' = 0, \\ (x-y+2)x' - (x+y-2)y' = 0 \end{cases}$$

有非零解 $(a, 1)$ 的充要条件是

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} x-y+4 & -2(x+y) \\ x-y+2 & -(x+y-2) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & -x-y-2 \\ x-y+2 & -(x+y-2) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

即待求轨迹方程为

$$x^2 - y^2 + 2x - 2y + 8 = 0.$$

习 题 10

1. 比较实数 $|x|^2$ 与 $|x|$ 的大小.

2. n 是大于 2 的自然数, 求证

$$n^{n+1} > (n+1)^n.$$

3. 已知关于 x 的方程 $|(x-1)(x-3)| = mx$ 有四个不同的实根, 求 m 的取值范围.

4. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC > AB$, 在 CA 上截取 $|CD| = |AB|$, E, F 分别是 AD, BC 的中点, FE 交 BA 的延长线于 G , 若 $\angle CEF = 60^\circ$, 求证

$$|AD|^2 = |AG|^2 + |DG|^2.$$

5. 点 O_1 绕定点 O 沿逆时针方向以匀角速 ω 旋转, 点 P 绕 O_1 沿顺时针方向以匀角速 $k\omega$ (k 为常数) 旋转, 且 $|O_1P| = R$, $|OO_1| = L$, $0 < R < L$, $L - R \ll R$. 试求点 P 的轨迹方程.

11

切西瓜中的数学问题

本章从日常生活中的一个切西瓜的趣题,抽象出一个特殊的数学问题.为了解决这一特殊问题,首先将该问题一般化,考虑它的一般情况,然后同时考虑与这个一般情况类似的一组问题,从而达到解题的目的.这种由特殊到一般,由一到多的思维过程,正是运用动态思维的结果.

11.1 理想化与一般化

今有如下一个趣题:

一个西瓜切 5 刀,问最多能把西瓜切成几块?

我们不妨把西瓜理想化为整个空间,把刀理想化为一个平面.这样一来,上述切西瓜问题

就抽象为一个数学问题：空间最多能被 5 个平面分成几部分？

为了解决这个问题，可将该问题一般化，也就是首先考虑这样的问题：空间最多能被 n 个平面分成几部分？

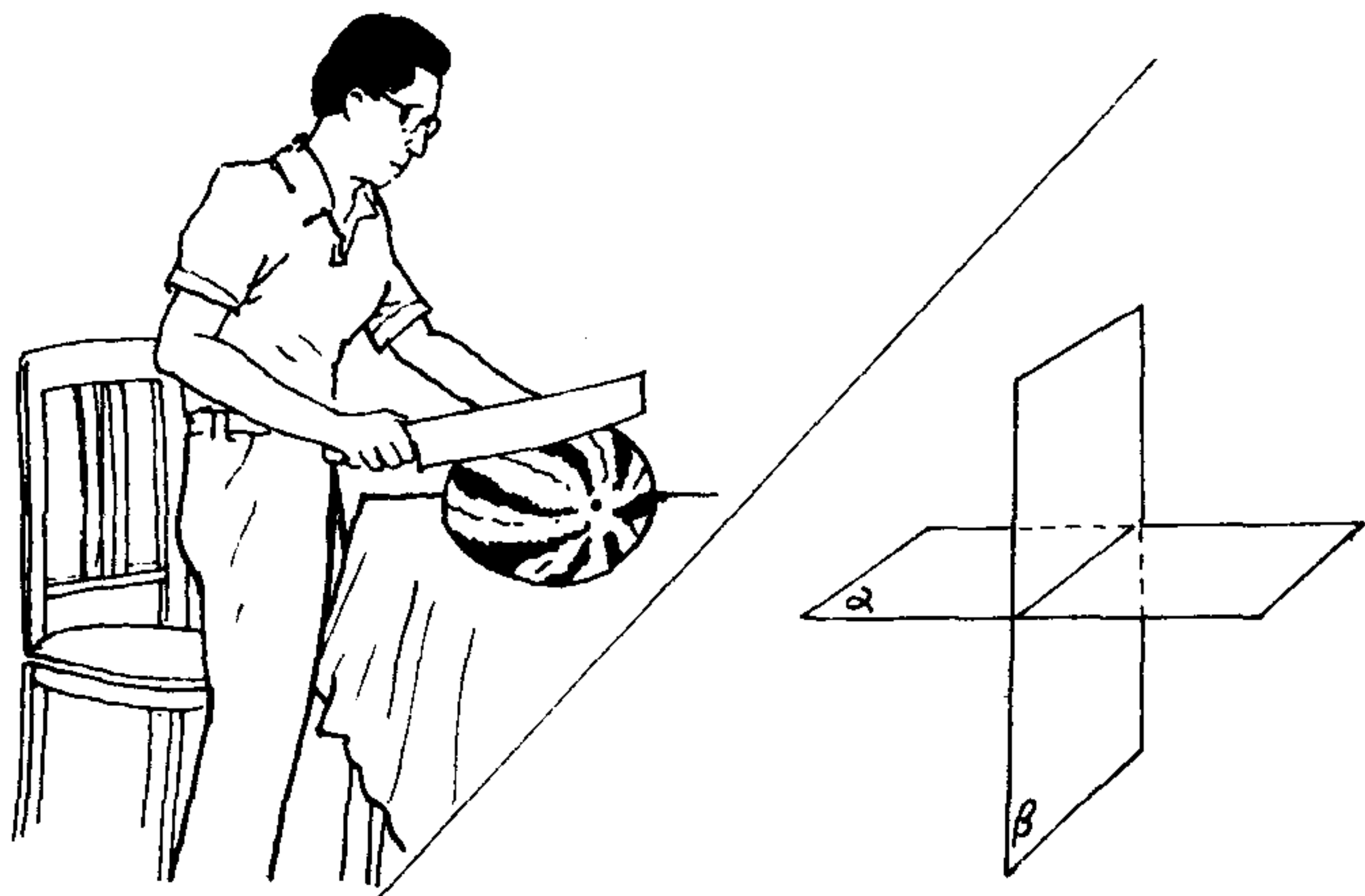


图 11.1

为了解决这个一般问题，我们转而又从特殊情况入手. 通过几何直观易知，1 个平面将空间分成两部分；2 个平面最多能将空间分成 4 部分；3 个平面最多能将空间分成 8 部分；4 个平面最多能将空间分成几部分呢？这就比较难想了. 我们把已得到的结果列于表 11.1 中.

表 11.1

平面数	最多被分成的空间数
1	2
2	4
3	8

通过观察表 11.1 可知,每增加一个平面,最多被分成的空间数就增加 1 倍.由此可猜想:当平面为 4 时,空间数变为 16.这个猜想是对的吗?如何验证?

11.2 一组类似问题

处在一般位置的 4 个平面所分割出来的各部分空间,其中有一个是有限的,它是由 4 个三角形所围成的四面体,如图 11.2 所示.为了确定由 4 个平面所决定的空间的数目,可考虑如下的类似问题:

处在一般位置上的 3 条直线将平面分成几块?

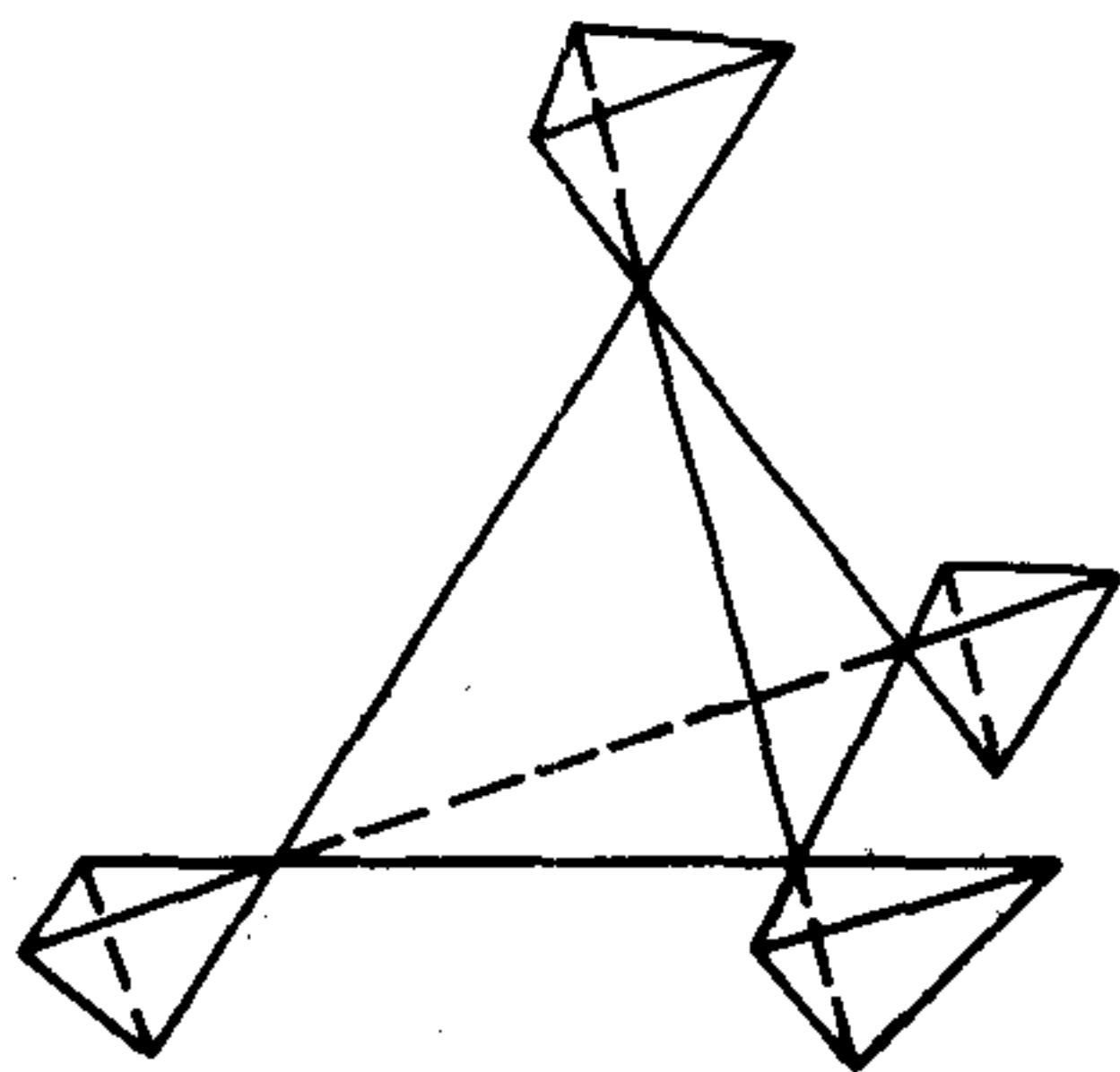


图 11.2

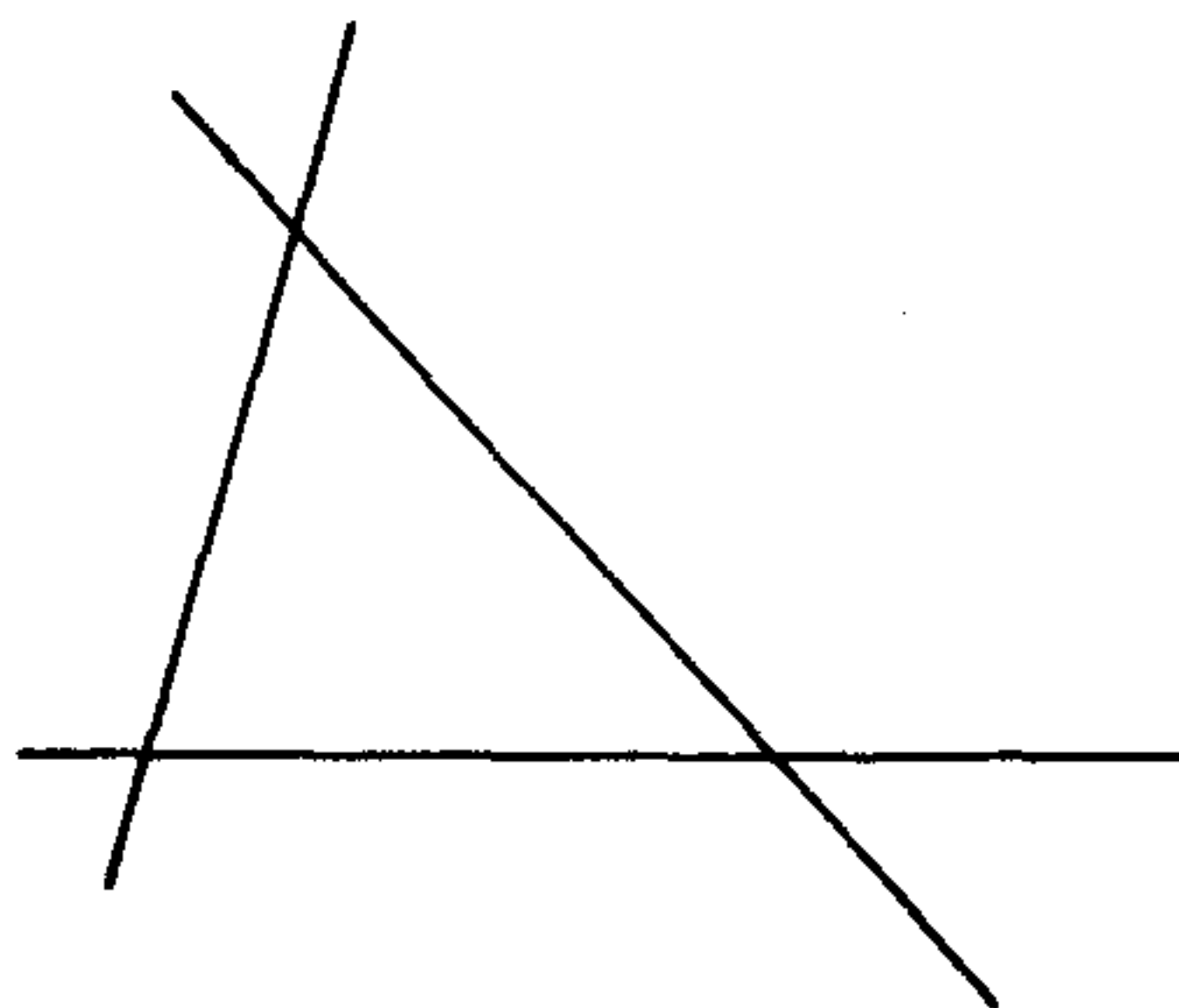


图 11.3

处在一般位置上的三条直线将平面分割出来的各部分如图 11.3 所示.其中 1 个部分是有限的,这是三角形内部;与三角形有公共边的无限部分有 3 个;仅与三角形有公共顶点的无限部分也有 3 个.故分割出的平面区域总数为 $1+3+3=7$.

仿此可知,处在一般位置的 4 个平面将空间分割出的数目为:1 个部分是有限的,这是四面体的内部;与四面体有公共面的有 4 部分;与四面体有公共棱边的有 6 部分;与四面体有公共顶点的有 4 部分. 故分割出的空间总数为 $1+4+6+4=15$. 因此可知上一节末尾的猜想是不对的. 但根据上面几个数字,我们仍得不出关于一般问题的结论. 为了考虑用 n 个平面分割空间的问题,我们需要同时再考虑 n 条直线分割平面的问题以及 n 个点分割直线的问题. 对于 n 个点分割直线的问题,易看出,1 个点将直线分成 2 段,2 个点将直线分成 3 段,一般地, n 个点将直线分成 $n+1$ 段. 如果把极端情况也考虑进去,即把不分割的空间、平面和直线,看成是零个元素分割的结果,我们便可把上述结果统一列于表 11.2 中.

表 11.2

分割元素的数目	被分割出的数目		
	空间被平面分割出的数目	平面被直线分割出的数目	直线被点分割出的数目
0	1	1	1
1	2	2	2
2	4	4	3
3	8	7	4
4	15		5
...	...	...	...
n			$n+1$

11.3 观察与猜想

上面我们已将三个类似问题以表 11.2 的形式排列出来,下面我们就来观察这一组问题,看它们之间有什么联系,其中有什么规律性的东西.

观察空间被平面分割的第二列,可以发现,数列

$$1, 2, 4, 8, 15, \dots$$

前四项是以 2 为公比的等比数列,可惜第五项不是 16,而是 15,不然就可猜想这一数列为等比级数,现在只好另寻规律.

通过观察表 11.2 的横行,可发现如下的规律:从第二行开始,第二列(空间被平面分割出的数目)的某一数是其上一行中第二列与第三列(平面被直线分割出的数目)的数字之和.例如,表中 4 行 2 列的数是 8,恰为 3 行 2 列的 4 与 3 行 3 列的 4 之和;5 行 2 列的数是 15,恰为 4 行的 8 与 7 之和.

同样,表中第三列的数字也有类似的规律.例如,3 行 3 列的数是 4,恰为 2 行 3 列的 2 与 2 行 4 列的 2 之和;4 行 3 列的数是 7,恰为 3 行中的 4 与 3 之和.

表 11.2 中未列出数字的空格是否也有此规律呢?不妨猜想它是成立的,据此我们可把该表中的空格一直填到对解答我们前面提到的问题有用的数字为止,这样就得到了表 11.3.表中带方框的数字,是根据上述猜想推算出来的: $7+4=11$, $15+11=26$. 如果这个猜想是对的,那么处在一般位置的 5 个平面,最多可把空间分割成 26 个部分.

表 11.3

分割元素 的数目	空间被平面 分割出的数目	平面被直线 分割出的数目	直线被点 分割出的数目
0	1	1	1
1	2	2	2
2	4	4	3
3	8	7	4
4	15	11	5
5	26		

11.4 验证与分析

上面我们根据猜想已经求出处在一般位置的 4 条直线可把平面分割成 11 个部分,这个猜想是对的吗?通过画图验证可知,数字 11 确实是正确的.进一步再问:为什么 4 条直线把平面分割出的 11 部分,恰好是 3 条直线对平面的分割结果再加上 4 部分呢?这增加的 4 部分,难道是巧合吗?为什么不是多一部分,或者少一部分呢?为了回答上述问题,可从 3 条直线分割平面为 7 部分开始考虑.在图 11.3 中任作一条虚线,如图 11.4 所示.这条虚线与原来的 3 条直线各交于一点,共有 3 个交点.这 3 点将虚线分成 4 段,每段把原来分割出的平面又分成两部分.也就是说,这 4 段虚线产生了 8 份新的分割,并消除了 4 份原来的分割,从而使分割数恰好增加了 4,这样就得到了

$$7+4=11.$$

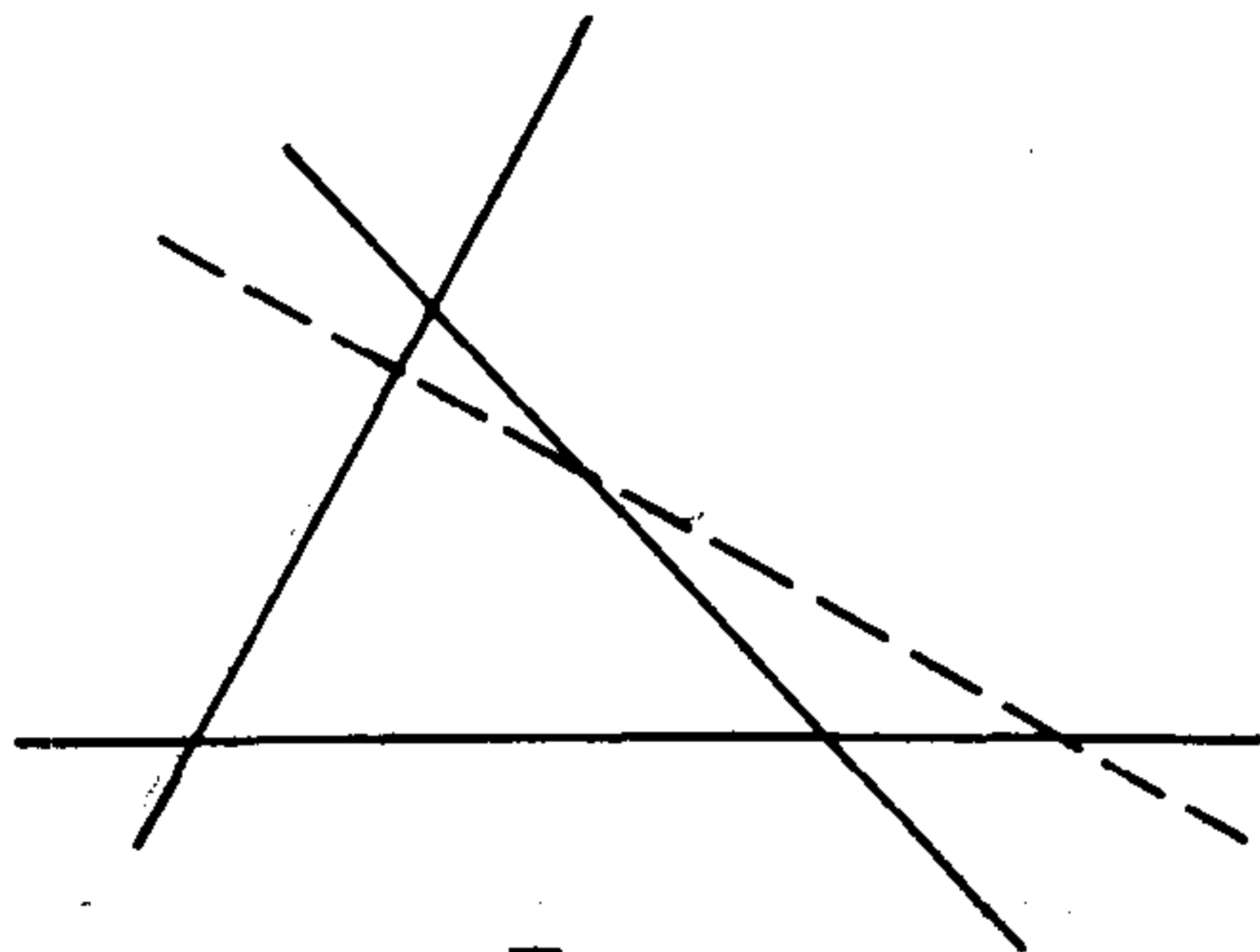


图 11.4

11.5 由特殊到一般

上面从 3 条直线分割平面过渡到 4 条直线分割平面的分析,启发我们仿此去考虑一般情况. 设 n 条处在一般位置的直线分割出的平面区域数用 L_n 表示,我们来证明

$$L_{n+1} = L_n + n + 1. \quad (11.1)$$

n 条处在一般位置的直线将平面分割成 L_n 部分,再增加一条直线,它与前 n 条直线各交于一点,交点数为 n . 这 n 个点把新增直线分为 $n+1$ 段,每一段都把原有的平面部分分成两个新部分,并消除原有的部分,这样总共增加了 $n+1$ 部分. 于是式(11.1)成立.

下面我们来推导 L_n 的具体表达式.

由上述可知,

$$L_n = L_{n-1} + n,$$

$$L_{n-1} = L_{n-2} + n - 1,$$

.....

$$L_3 = L_2 + 3,$$

$$L_2 = L_1 + 2,$$

$$L_1 = L_0 + 1.$$

将上面 n 个等式加起来得

$$L_n = L_0 + 1 + 2 + \cdots + n = L_0 + \frac{n(n+1)}{2},$$

而 $L_0 = 1$, 故有

$$L_n = 1 + \frac{(1+n)n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + n + 1.$$

11.6 由平面到空间

上面给出了直线分割出的平面区域数的具体公式, 通过类比, 可给出平面分割出的空间区域数的具体公式.

设处在一般位置的 n 个平面分割空间为 S_n 个部分. 下面先证明

$$S_{n+1} = S_n + L_n. \quad (11.2)$$

n 个处在一般位置的平面将空间分成 S_n 个部分, 再增加一个平面, 它与前 n 个平面相交于 n 条处于一般位置的直线, 这些直线把它划分成 L_n 个区域. 每个这样的平面区域都分割原有的空间部分成两个新部分, 即消除了一个原来的部分而出现两个新部分. 这样一来, 总共增加了 L_n 个部分. 于是式 (11.2) 得证.

下面再给出 S_n 的具体公式. 由于

$$L_n = \frac{n(n-1)}{2} + n + 1,$$

于是可得

$$S_n = S_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n,$$

$$S_{n-1} = S_{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{2} + n-1,$$

.....

$$S_3 = S_2 + \frac{2 \times 1}{2} + 3,$$

$$S_2 = S_1 + 0 + 2,$$

$$S_1 = S_0 + 0 + 1.$$

上面 n 个等式两边相加得

$$S_n = S_0 + \frac{1 \times 2}{2} + \frac{2 \times 3}{2} + \cdots + \frac{(n-2)(n-1)}{2} + 1 + 2 + \cdots + n$$

$$= 1 + \frac{(n-2)(n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(1+n)n}{2}$$

$$= 1 + n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3.$$

习 题 11

1. 处在一般位置的 n 条直线可将平面分割成多少个有限部分, 多少个无限部分?

2. 由处在一般位置的 5 个平面分割出的 26 个空间部分中, 有几个是无限的?

3. 过球心的处于一般位置的 5 个平面, 最多能把球面分割成几部分?

4. 处于一般位置的 5 个相互交叉的圆, 最多能把平面分割成几部分? 试把本题一般化.

12

人、熊过河问题

本章从一个“人、熊过河”的趣题说起,对这个题目,我们不是简单地通过试验方法予以回答就完事大吉,而是通过图形化、数字化把它逐步理想抽象为一个点线图问题,同时又考虑了类似的问题.专门研究这种由一组点和连结着点的一组线所组成的图的问题的数学分支称为图论.图论是现代数学的一个分支,在计算机科学、运筹学、电子技术、系统工程、经济学等方面有广泛的应用.

12.1 图形化

现有一个有趣的“人、熊过河”问题:今有两个人和两只熊要过河,但只有一条空船,它一次最多能载两个乘客(人或熊),但若人比熊少时,

则熊就会把人吃掉. 假设人与熊均会划船, 问应如何过河?



图 12.1

为了解决这一问题, 我们可用理想化抽象方法. 所谓理想化抽象, 是指通过对真实事物或现象(即现实原型)进行简单化、完善化的分析处理, 引出抽象的概念的方法. 例如, 几何概念点、线、面等的引进, 就是理想化抽象的典型例子.

我们用圆圈表示人, 用带阴影的圆圈表示熊, 用一个箭头表示船过河一次, 便可把上述人、熊过河问题抽象为点线图问题. 这是理想化抽象的一种常用技巧. 通过简单的试验, 可得到如图 12.2 所示的 4 种不同的过河方法.

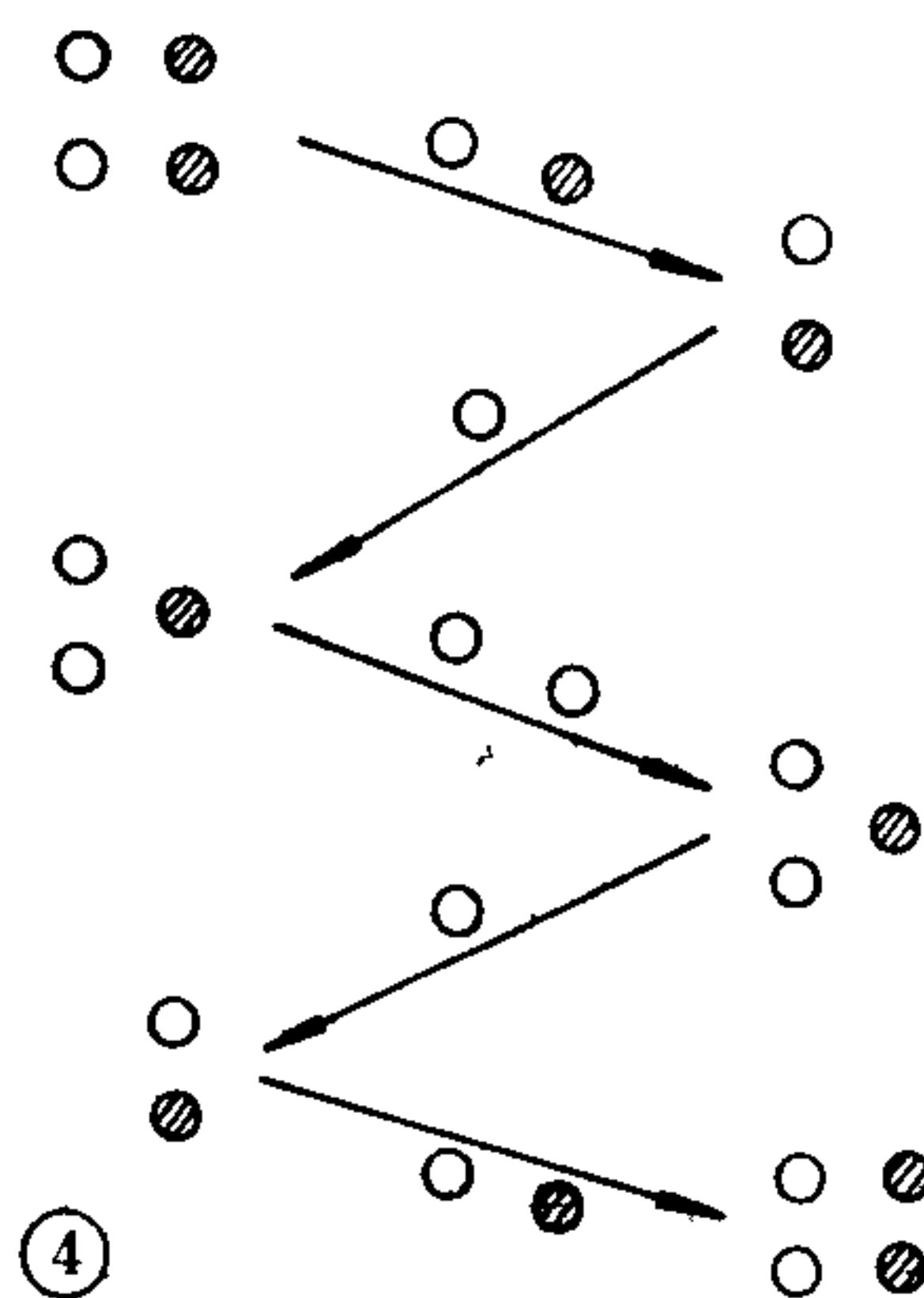
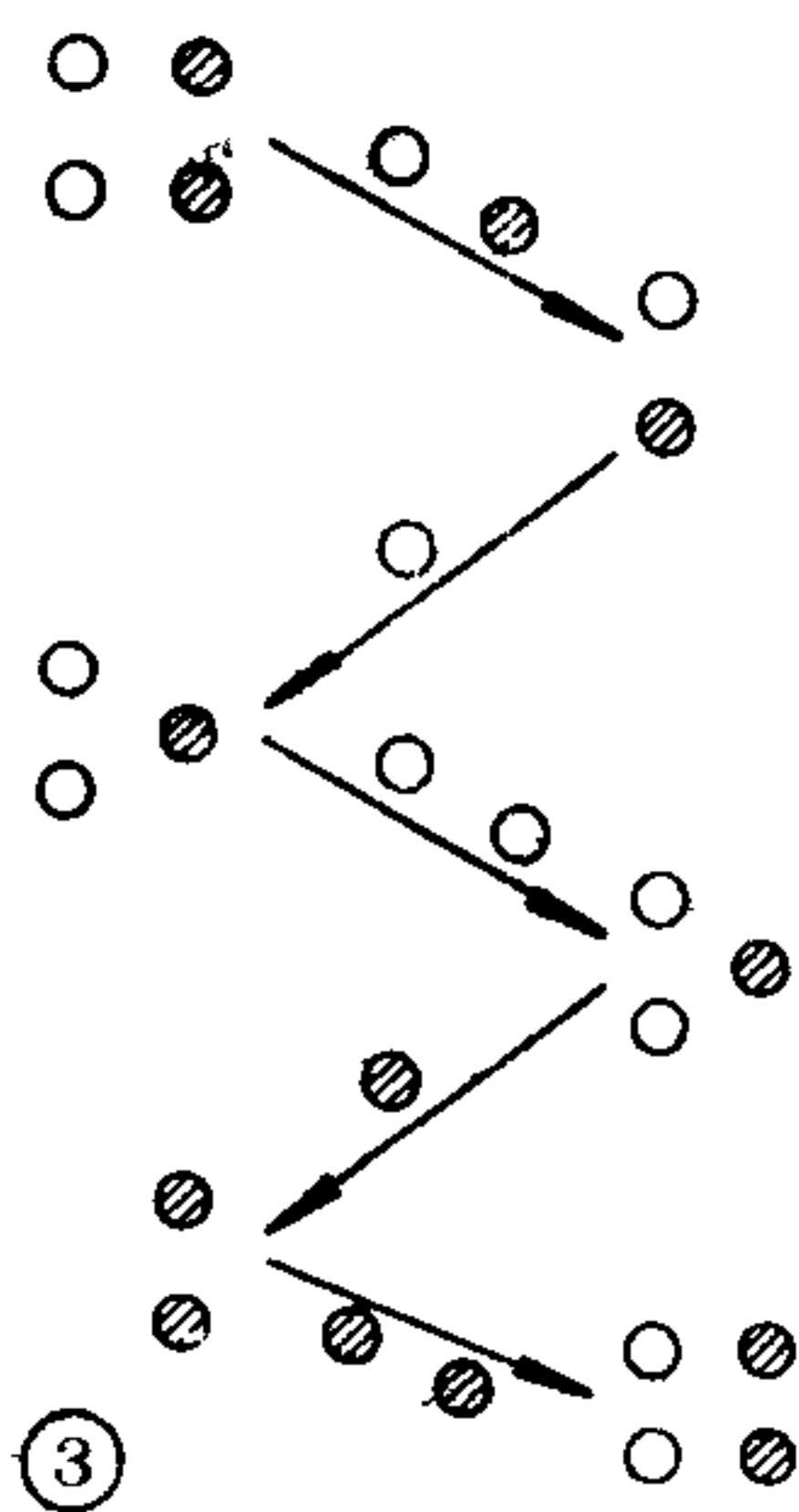
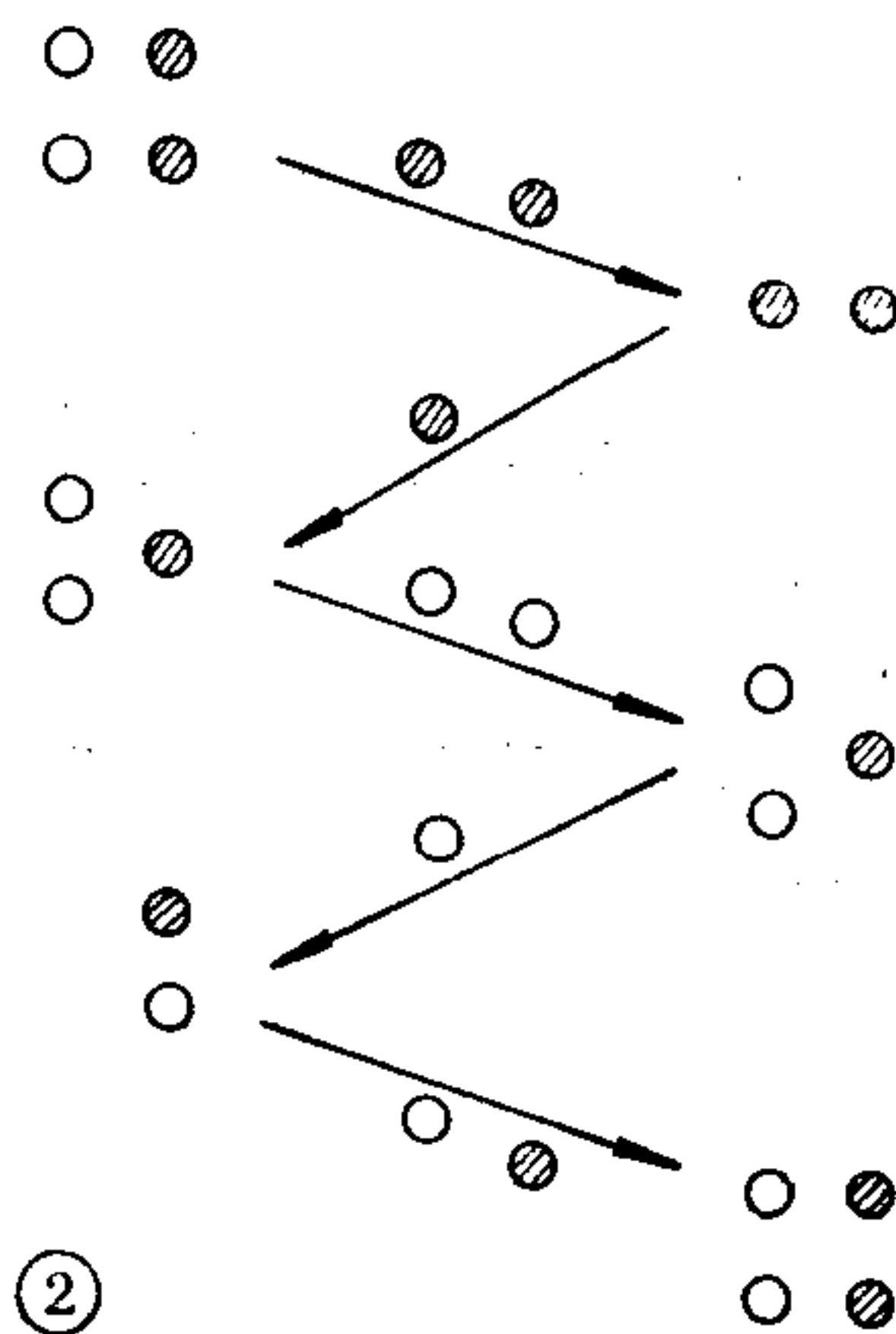
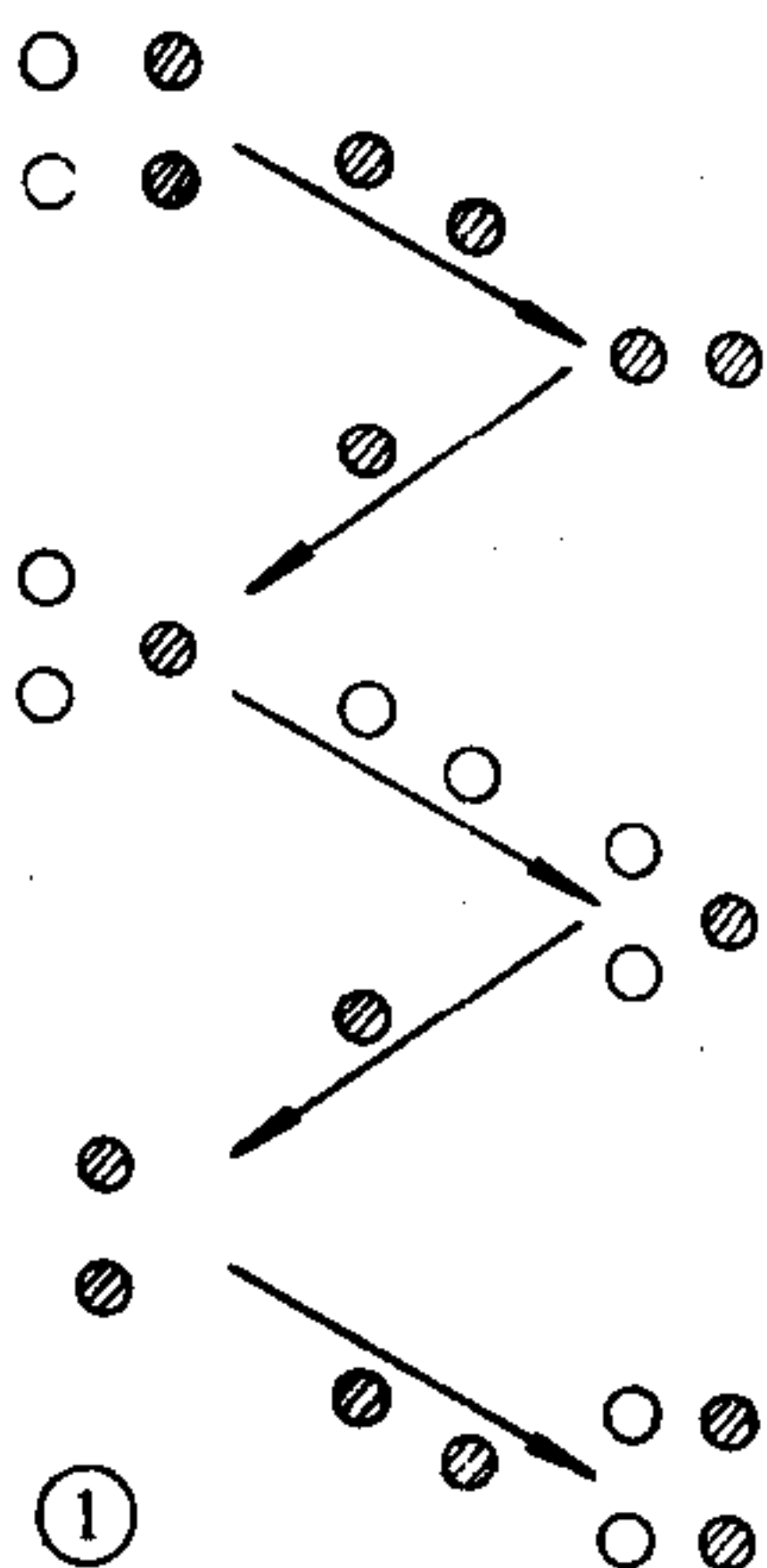


图 12.2

12.2 数字化

用上述方法解决问题之后,留心的读者可能会提出如下问题:

(1)为什么上述问题只有4种不同的解法?这个4是偶然的吗?

(2)为什么上述4种解法都是用5次船?这个5也是偶然的吗?

我们首先注意到,用船的次数必然是奇数次.因为一来一回,相加为2,无论多少个来回,其和总是偶数,而最后一次是只去不回的,所以用船的次数必然是奇数.

下面我们用“数字化”技巧来说明为什么会出现4和5.“数字化”也是理想化抽象的常用技巧之一.

我们将 m 个人和 n 只熊同在一边的状态记为数偶 (m, n) ,其中第一个数 m 表示人数,第二个数 n 表示熊数,那么上述例子中全部可能出现的状态共有 $C_3^1 \cdot C_3^1 = 3^2 = 9$ 种.即 $(2, 2), (2, 1), (2, 0), (1, 2), (1, 1), (1, 0), (0, 2), (0, 1), (0, 0)$.

一般地,我们把在同一时刻河的两岸所有的状态 (m, n) 和 (m', n') ,称为互补状态,其中 $m+m'=2, n+n'=2$.例如 $(2, 2)$ 和 $(0, 0), (2, 1)$ 和 $(0, 1), (2, 0)$ 和 $(0, 2), (1, 2)$ 和 $(1, 0), (1, 1)$ 和 $(1, 1)$ 等都是互补状态.

另外,根据题目条件,还应把不准出现的状态除去,例如 $(1, 2)$ 这个状态是人少于熊,是不准出现的;而 $(1, 0)$ 亦属此类,这是因为河的这一边虽然是人比熊多,但在对岸其互补状

态 $(1,2)$ 熊比人多,所以 $(1,0)$ 这种状态也应除去. 互补状态只取其中之一. 经过这种简化之后,就只剩下 4 种状态: $A=(2,2)$, $B=(0,2)$, $C=(2,1)$, $D=(1,1)$. 这 4 种状态的相互转化可用图 12.3 表示. 下面我们从该图右上角开始,沿逆时针方向转一周,依次叙述各种状态的转化情况. 从状态 $A=(2,2)$ 开始,船在这一边,那时对岸是 $(0,0)$,让两只熊坐船到对岸,则对岸成为状态 $B=(0,2)$;反之,若从状态 $B=(0,2)$ 开始,船在这一边,那时对岸是 $(2,0)$,让两只熊坐船到对岸,则对岸成为状态 $A=(2,2)$. 从 $B=(0,2)$ 开始,船在这一边,那时对岸是 $(2,0)$,让一只熊坐船到对岸,则对岸成为状态 $C=(2,1)$;反之,若从状态 $C=(2,1)$ 开始,船在这一边,那时对岸是 $(0,1)$,让一只熊坐船到对岸,则对岸成为状态 $B=(0,2)$. 从状态 $C=(2,1)$ 开始,船在这一边,那时对岸是 $(0,1)$,让两人坐船到对岸,则对岸又成为状态 $C=(2,1)$;从状态 $C=(2,1)$ 开始,船在这一边,那时对岸是 $(0,1)$,让一人坐船到对岸,则对岸成为状态 $D=(1,1)$;反之,若从状态 $D=(1,1)$ 开始,船在这一边,那时对岸是 $(1,1)$,让一个人坐船到对岸,则对岸成为状态 $C=(2,1)$. 从状态 $D=(1,1)$ 开始,船在这一边,那时对岸是 $(1,1)$,让一人一熊坐船到对岸,则对岸成为状态 $A=(2,2)$;反之,若从状态 $A=(2,2)$ 开始,船在这一边,那时对岸是 $(0,0)$,让一人一熊坐船到对岸,则对岸成为状态 $D=(1,1)$.

将图 12.3 简化即得图 12.4.

要寻找一个过河方法,就相当于在图 12.4 中寻找一条路

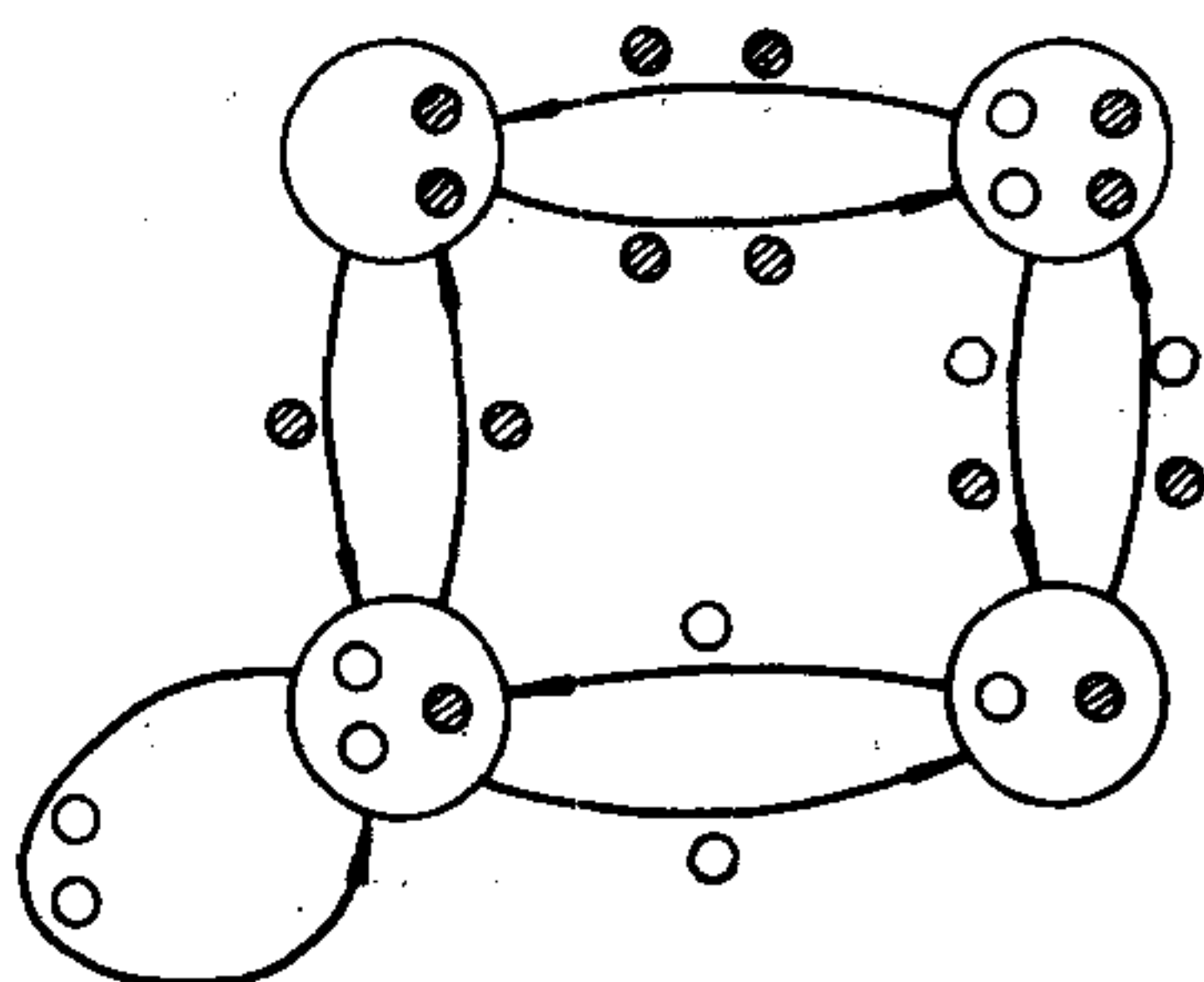


图 12.3

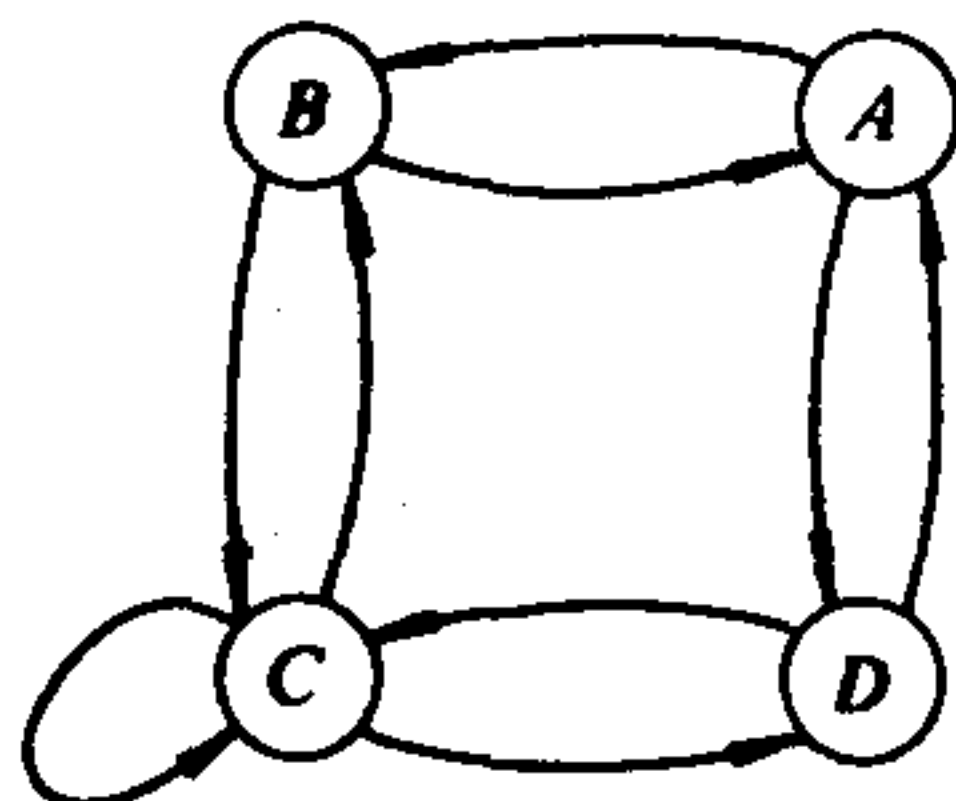


图 12.4

径,使得从状态 A 出发经过奇数条边(这里是 5 条),又能回到状态 A . 这种路径只有如下 4 条:

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A,$$

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A,$$

$$A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A,$$

$$A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A.$$

故只有图 12.2 中所给出的 4 种过河方法.

12.3 类似问题

让我们来考虑如下一个有趣的问题:

任何 6 个人聚会,其中总有 3 个人彼此相识或不相识.

这可用图形化技巧予以解决. 将 6 个人抽象为平面上的 6 个点,分别记为 $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$. 设这些点无三点共线,且每两个相识者以实线连结,不相识者以虚线连结. 经过这种理想化抽象之后,上述问题就归结为下述命题.

命题 12.1 对于平面上存在的无三点共线的 6 个点, 总存在一个实三角形或虚三角形.

证 对于已知的 6 个点 $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$, 先取一点, 比如 A_0 , 把点 A_0 与其余点用实线或虚线连结成 5 条线段 $A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, A_0A_4, A_0A_5$. 由抽屉原则可知, 这 5 条线段中至少有 $\left[\frac{5}{2}\right] + 1 = 3$ 条被实线连结或者被虚线连结, 不妨假设 A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 是用实线连结的, 如图 12.5 所示. 放弃 A_0A_4, A_0A_5 两条线段, 仅考虑由 A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 这 3 条线段的端点 A_1, A_2, A_3 所构成的三角形连结的情况. 对 $\triangle A_1A_2A_3$ 的三条边来讲, 只有下面两种情况:

(1) 三条边都用虚线连结, 如图 12.5 所示. 于是 $\triangle A_1A_2A_3$ 就是一个三边都是虚线的三角形, 因而命题得证.

(2) 三条边中至少有一条边是用实线相连的, 比如 A_1A_2 是实线, 如图 12.6 所示. 于是 $A_0A_1A_2$ 就是一个三边都是实线的三角形, 因而命题也成立.

综上所述, 命题得证.

现在我们来考虑另一个命题, 这是第 6 届国际数学奥林匹克的一道试题.

命题 12.2 17 位科学家中的每一位和其余的科学家通信. 如果他们在通信中仅仅讨论三个题目, 且任两位科学家之间仅仅讨论一个题目. 那么, 其中至少有三位科学家, 他们在互相通信中讨论的是同一个题目.

分析 将 17 位科学家理想化抽象为平面上的 17 个点,

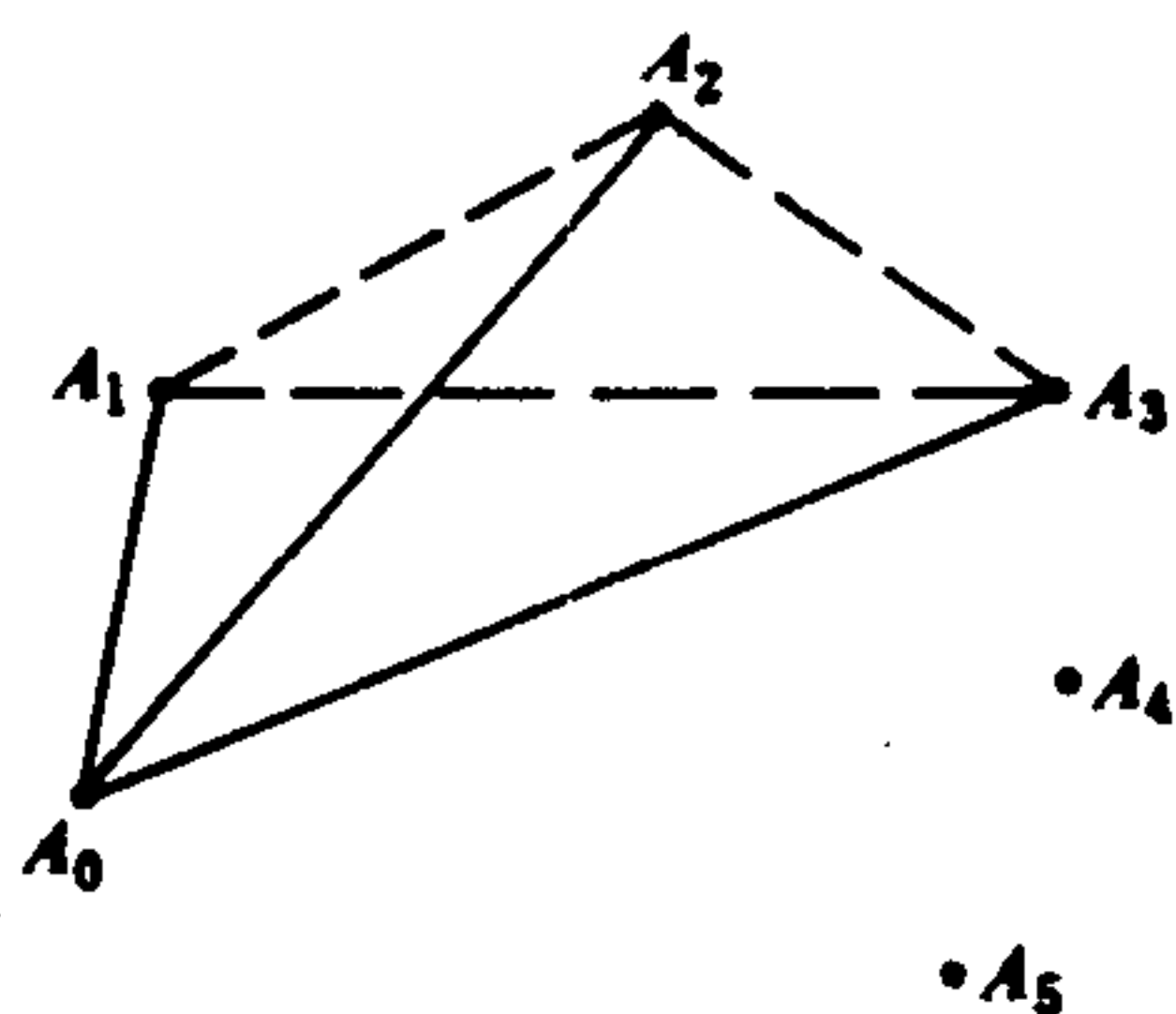


图 12.5

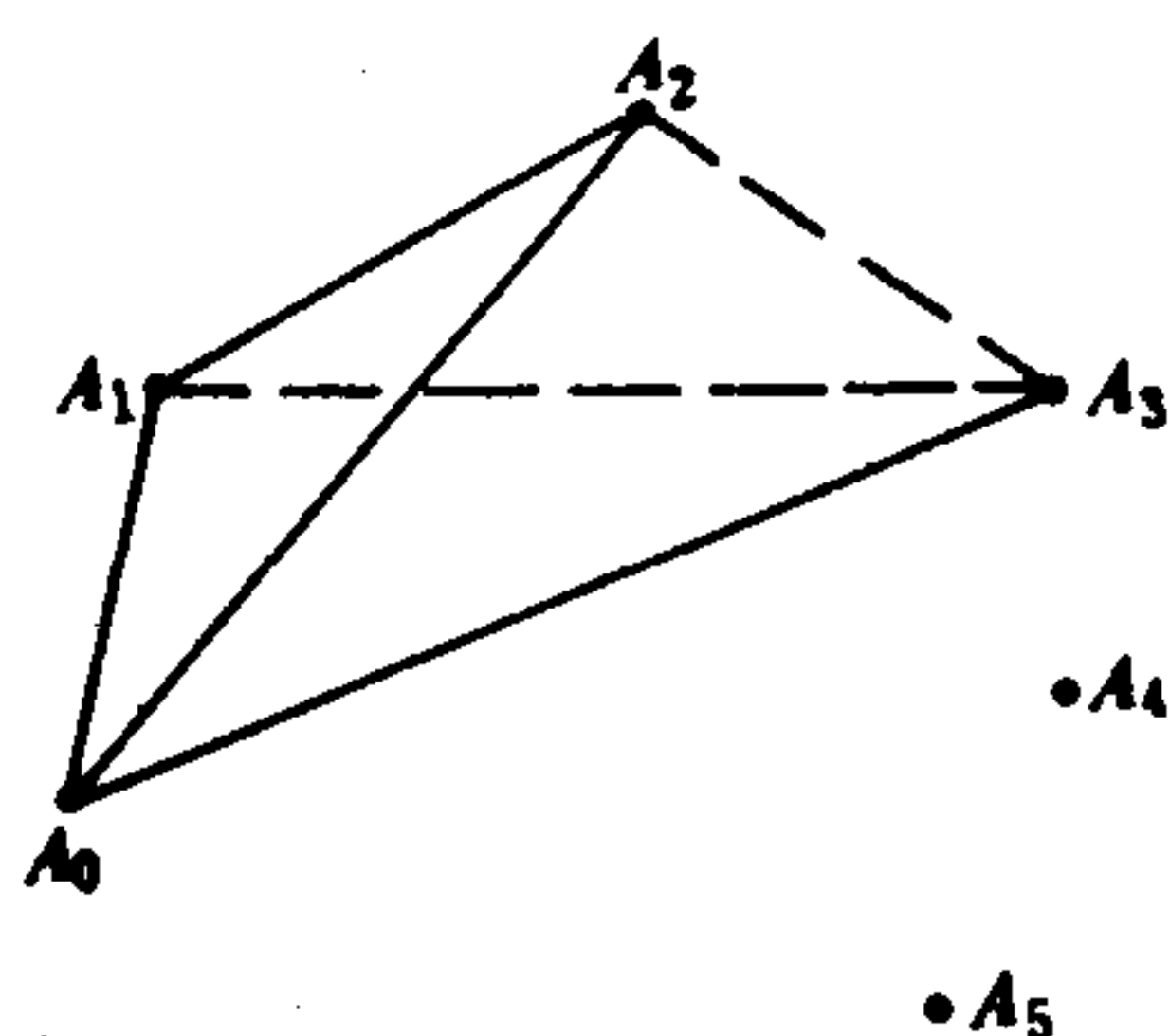


图 12.6

两位科学家仅讨论一个题目可抽象为两点间的连线,为了区别所讨论的问题,可用涂色来区分线段.由于他们之间仅讨论三个题目,故可用涂三色(比如红、蓝、黄三色)来区分.这样一来,至少有三位科学家讨论同一个题目,就归结为其中必有一个同色三角形.于是上述实际问题就归结为如下的数学模型:

设有 17 个点,每两点之间都用线段相连,且每条线段上都涂了红、蓝、黄三色中的任一色,那么其中必有一个同色三角形.

证 从已知的 17 点 $A_0, A_1, \dots, A_{16}$ 中,不妨取定一点 A_0 ,再把 A_0 与其他 16 个点连成 16 条线段 $A_0A_1, A_0A_2, \dots, A_0A_{16}$. 用红、蓝、黄三色给这些线段涂色,由抽屉原则可知,其中必有 $\left[\frac{16}{3}\right] + 1 = 6$ 条线段涂了同一种颜色,不妨设这 6 条线段就是 $A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, A_0A_4, A_0A_5, A_0A_6$,且都涂了红色. 放弃 $A_0A_7, A_0A_8, \dots, A_0A_{16}$ 这 10 条线段,仅考虑留下的 6 条红色线段的 6 个端点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 之间的涂色情况.

对于这 6 个点只有下面两种情况:

(1) 在这些线段中至少有一条涂红色的线段, 比如 A_1A_2 , 那么 $\triangle A_0A_1A_2$ 就是一个三边涂了红色的同色三角形, 此时命题得证.

(2) 在这些线段中没有一条涂红色的, 于是只能涂蓝、黄两色了, 因而命题 12.2 就归结为命题 12.1, 可见命题也成立.

综上所述, 命题得证.

12.4 拓广

我们在命题 12.1 与命题 12.2 的基础上进行拓广, 获得如下的命题.

命题 12.3 假设有 m 个点, 且在由这些点连成的各线段上任涂 n 色, 存在同色三角形, 那么, 对由 $(n+1)(m-1)+2$ 个点连成的各线段上任意涂 $n+1$ 色, 也必存在同色三角形.

证 设 $A_0, A_1, \dots, A_{(n+1)(m-1)+1}$ 是已知的 $(n+1)(m-1)+2$ 个点, 先取定一点 A_0 , 把点 A_0 与其他点连成 $(n+1)(m-1)+1$ 条线段, 并给这些线段任意涂 $n+1$ 色. 由抽屉原则知, 其中必有 $\left\lceil \frac{(n+1)(m-1)+1}{n+1} \right\rceil + 1 = m$ 条线段是同色的, 不妨设 $A_0A_1, A_0A_2, \dots, A_0A_m$ 都涂了第 $n+1$ 种颜色. 放弃其余线段, 仅考虑 $A_0A_1, A_0A_2, \dots, A_0A_m$ 的 m 个端点 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 之间线段的涂色情况, 只有下面两种情况:

(1) 在这些线段中至少有一条涂了第 $n+1$ 种颜色, 比如

A_1A_2 , 那么 $\triangle A_0A_1A_2$ 就是所求的同色三角形, 命题得证.

(2) 在这些线段中没有一条涂了第 $n+1$ 种颜色, 于是只能涂 n 种颜色. 因此这个问题就归结为 m 点涂 n 色的问题了. 由题设即得证.

习 题 12

1. 今有 3 个人和 3 只熊要过河, 现在只有一只空船, 它一次最多能载 3 个乘客(人或熊), 但人若比熊少时, 熊就会把人吃掉. 假若人与熊均会划船, 问应如何过河?

2. 有 66 位中学生, 他们之间都相互通信, 讨论 4 个问题, 但是每两位学生互相通信时仅讨论一个问题. 证明: 其中必有 3 位学生在通信中讨论的是同一个问题.

3. 对于平面上给出的 7 个点, 用一些线段连结它们, 使得

(1) 每 3 点中至少有两点相连;

(2) 线段的条数最少.

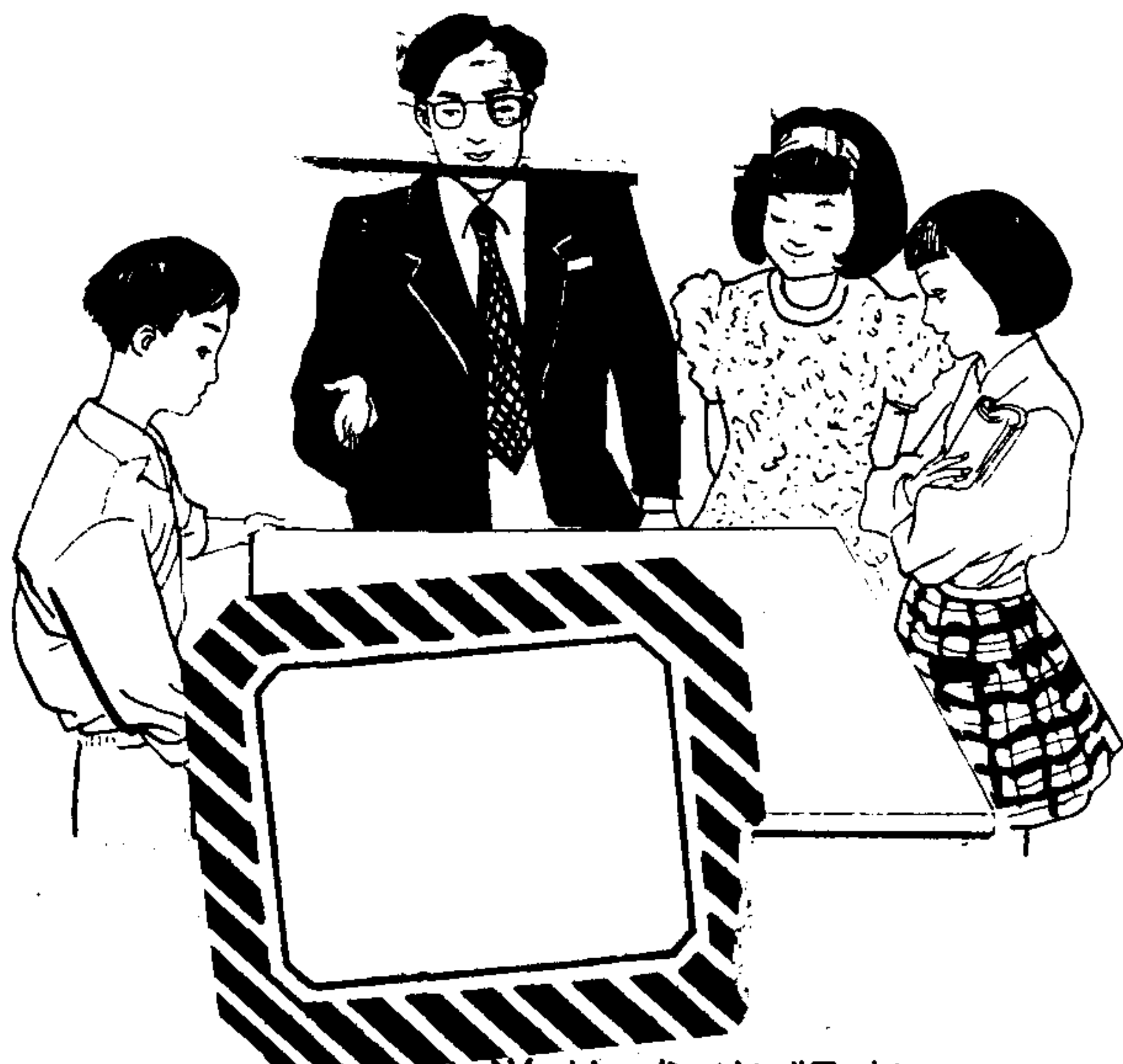
问有多少条线段? 给出一个这样的图.

4. 一次聚会上, 每两个人致意的方式为 4 种方式(点头、握手、接吻、拥抱)中的一种. 康迪和瑞迪接吻, 没和萨迪接吻. 对每 3 个人来说, 两两致意的方式或者完全相同或者全不相同. 问这次聚会至多有多少人?

让你开窍的数学

数学解题中的动态思维

徐本顺



河南科学技术出版社

数学解题中的

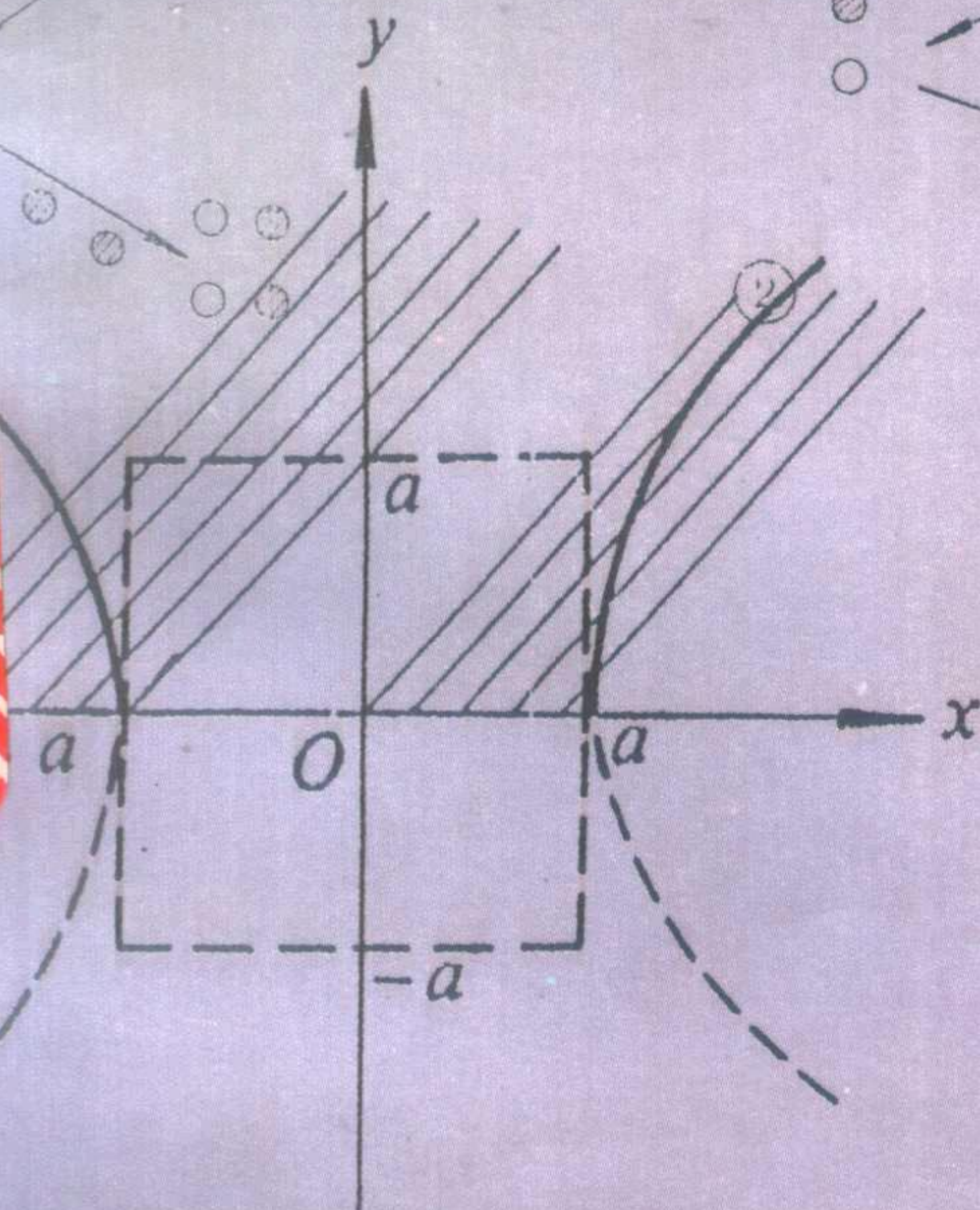
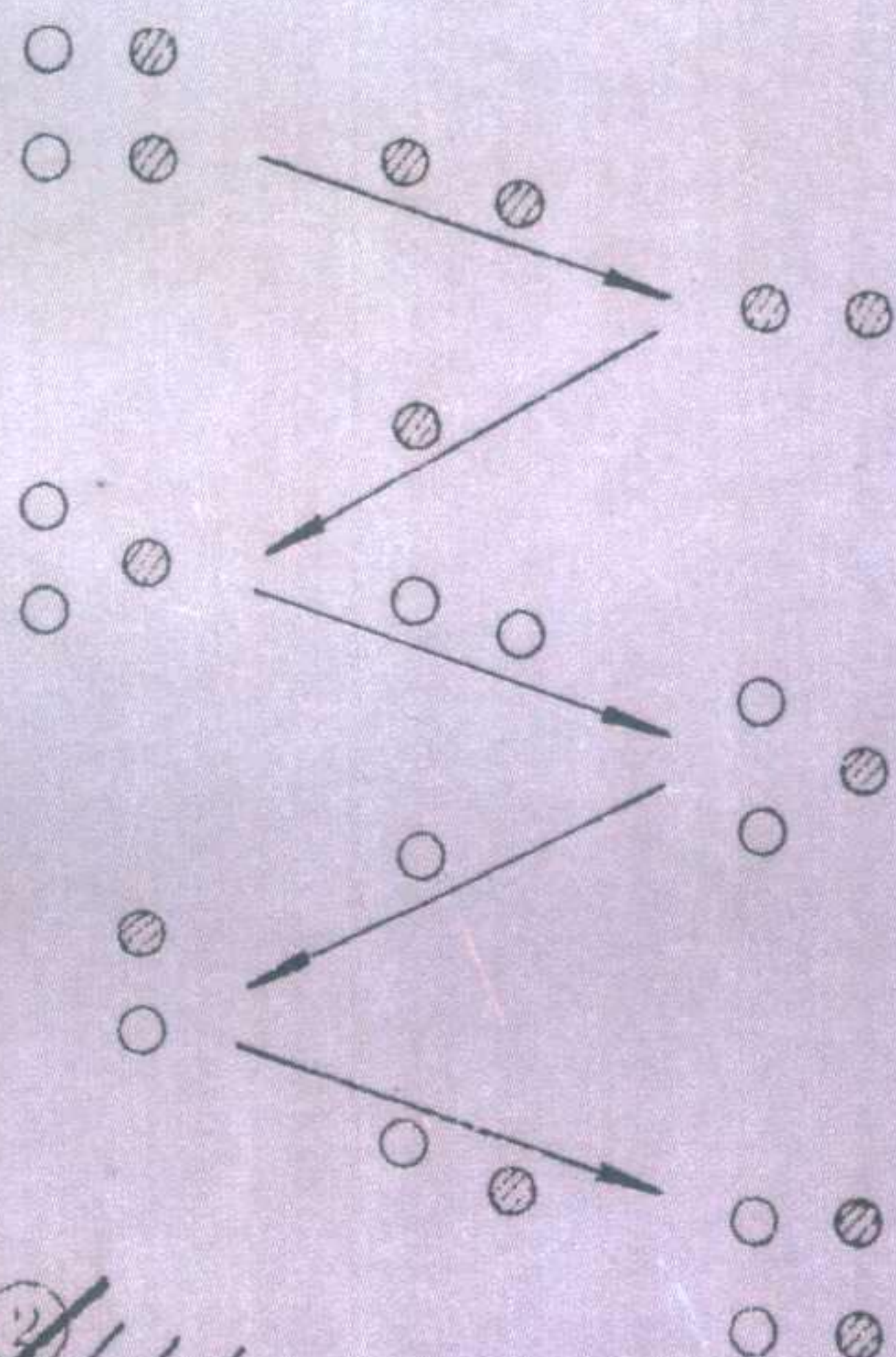
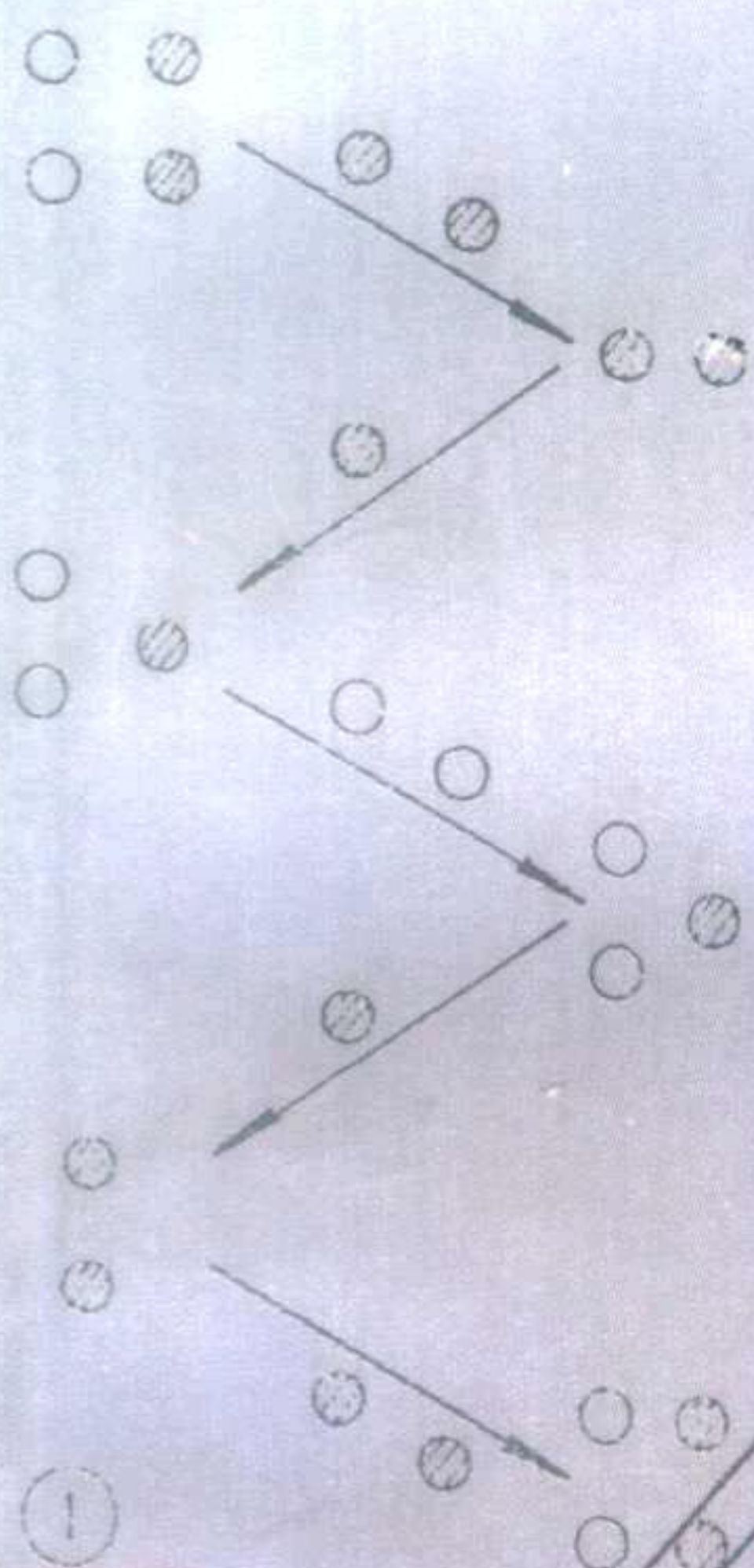
动态思维

徐本顺

河南科学技术出版社



让你开窍的数学



序

如果我们打开科学史,研究一些卓越人物成功的经验,就会发现一个重要的事实:他们所研究的正是他们从小就喜欢的.少年时代的达尔文数学成绩不佳,但热爱生物,结果他成为最伟大的生物学家.反之,如果强迫他研究数学,他未必能如此成功.由此可见,兴趣与工作一致,二者形成良性循环,是成功的重要因素.然而兴趣又是怎样形成的呢?这固然与天赋有关,但后天的启发和培养更为重要.数学教师的职责之一就在于培养学生对数学的兴趣,这等于给了他们长久钻研数学的动力.优秀的数学教师之所以在学生心中永志不忘,就是由于他点燃了学生心灵中热爱数学的熊熊火焰.

讲一些名人轶事有助于启发兴趣,但这远远不够.如果在传授知识的同时,分析重要的数学思想,阐明发展概况,指出各种应用,使学生

不仅知其然,而且知其所以然,不仅看到定理的结论,而且了解它的演变过程,不仅看到逻辑之美,而且欣赏到形象之美、直观之美,这才是难能可贵的.在许多情况下,直观走在逻辑思维的前面,起了领路作用.直觉思维大都是顿悟的,很难把握,却极富兴趣,正是精华所在.M.克莱因写了一部大书《古今数学思想》,对数学发展的主导思想有精彩的论述,可惜篇幅太大,内容过深,不易为中学生所接受.

真正要对数学入迷,必须深入数学本身:不仅是学者,而且是作者;不仅是观众,而且是演员.他必须克服一个又一个的困难,不断地有新的发现、新的创造.其入也愈深,所见也愈奇,观前人所未观,发前人所未发,这才算是进入了登堂入室、四顾无峰的高级境界.为此,他应具备很强的研究能力;而这种能力,必须从中学时代起便开始锻炼,经过长期积累,方可成为巨匠.

于是我们看到“兴趣”、“思维”和“能力”三者在数学教学中的重要作用.近年来我国出版了多种数学课外读物,包括与中学教材配套的同步辅导读物和题解.这套《让你开窍的数学》丛书与众不同,其宗旨是“引起兴趣、启发思维、训练能力”,风格近似于美国数学教育家 G. Polya(波利亚)的三部名著《怎样解题》、《数学与猜想》、《数学的发现》,但更切合我国的实际.本丛书共 8 本,可从书名看到它们涉及的范围甚为宽广.作者都有丰富的教学经验和相当高的学术水平,而且大都出版过多种数学著作.因此,他们必能得心应手,写得趣味盎然,富于启发性.这套丛书的主要对象是中学、中专的教师

和同学,我们希望它能收到宗旨中确定的效果,为中学数学教学做出较大贡献.

王梓坤

1996. 7.

前言

解题是数学学习过程中一个重要组成部分. 面对一个题目, 如何进行思考? 在解题过程中思维是怎样活动的? 获得一个解法之后, 又是怎样联想到其他解法的? 同一个问题的不同解法之间有什么联系? 能否上升到一般性的思想方法? 在此基础上, 还可以提出其他的问题吗? 本书就上述几个方面, 选择了较具典型意义的数学题目, 对其思维的动态过程作了比较深入的剖析, 以便使读者开拓思路, 培养能力, 特别是创造性思维能力.

书中所选的几个问题, 都是经过笔者, 或是笔者的学生与小孩实践过的. 这里特别要提到的是爱女雪山, 她对解题的思维过程的探索很有兴趣, 不仅自己实践, 还利用业余时间在小學生、中学生中进行试验, 并取得了一定成绩. 当她即将于北京师范大学毕业, 并以优异的成绩

被录取为中国科学院硕士研究生,准备全身心地投入到对精彩的数学世界的遨游时,不幸于1994年5月6日5时,在外出进行社会教育实践途中,遇车祸夭折。

我失去了心爱的女儿,国家失去了一位未来的建设人才。数月晨昏,爱女音容笑貌时现,几番梦回,难挽温婉敏淑的女儿!原来应诺的书稿任务不得不暂时中断,还是本丛书责任编辑袁元先生,给我以极大的安慰与鼓励,使我振作精神,才得以完成本书的撰写工作。读者阅读本书后如果有所启发,并以此为契机,把自己造就为国家建设的出色人才,将是笔者得到的最大慰藉。

我谨以此书,作为悼念女儿的花环。

在写作过程中,我参考和引述了国内外许多书刊,在此不能一一列出,谨向这些书刊的作者表示感谢,并表示歉意。

王建军、宋举英、乔秀梅等同志参加了本书的部分撰稿工作,在此一并致谢。

本书的错误和不足之处在所难免,恳望读者批评指正。

徐本顺

1995年1月

内 容 提 要

本书以中学数学中的典型问题和一些趣味数学题为例,具体而生动地展现了数学解题中的动态思维过程,使读者很自然地从一个问题的一种解法联想到另一种乃至一串新解法,使一个问题演变为另一个乃至一串新问题.这种写法非常新颖,极富启发性,有助于培养读者的数学兴趣和创造性思维能力.

本书适于中学生阅读(大部分内容初中生就能看懂),也可作为中学教师开展数学课外活动的材料,对关心中学数学课程改革的同志也有参考价值.

让你开窍的数学 数学解题中的动态思维

徐本顺

责任编辑 袁 元

河南科学技术出版社出版
(郑州市农业路 73 号)

河南第一新华印刷厂印刷

全国新华书店发行

787×1092 毫米 32 开本 7.625 印张 149 千字
1997 年 1 月第 1 版 1998 年 4 月第 2 次印刷

印数:4 001—7 000 册

ISBN 7-5349-1933-9/G · 504

定 价:8.50 元