

目 录

前言	(1)
主要符号目录	(3)
第一章 整数性质的研究方法	(4)
§ 1.1 数的整除性	(4)
§ 1.2 求方程及方程组的整数根	(8)
第二章 解方程和不等式的研究方法	(11)
§ 2.1 方法的实质	(11)
§ 2.2 解方程和不等式时所用到的函数的基本性质	(15)
§ 2.3 用研究方法解方程和不等式的例	(18)
第三章 等价变换法	(31)
§ 3.1 整式方程和不等式	(31)
§ 3.2 有理方程和有理不等式	(34)
§ 3.3 无理方程和无理不等式	(35)
§ 3.4 指数方程和指数不等式, 对数方程和对数不等式	(40)
第四章 不等价变换法	(46)
§ 4.1 方程的不等价变换	(46)
§ 4.2 中值定理的应用	(48)
§ 4.3 用数学归纳法证明不等式	(50)
§ 4.4 数值不等式的证明	(51)

§ 4.5	通过确定不等式在其定义域集合的单个子集上的性质来证明不等式	(52)
§ 4.6	用区间法解不等式	(53)
§ 4.7	解方程的近似法	(54)
§ 4.8	解应用题的代数法	(55)
§ 4.9	解方程和不等式的各种方法的综合利用 ...	(57)
§ 4.10	代数题解的检验	(60)
第五章	三角方程和不等式的解法	(64)
§ 5.1	三角函数的周期性	(64)
§ 5.2	基本三角方程和不等式	(69)
§ 5.3	三角函数的积化和(差)	(73)
§ 5.4	$a\sin x + b\cos x$ 型的变换	(77)
§ 5.5	三角方程变换为 $a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n = 0$ 的形式	(78)
§ 5.6	三角因式分解	(80)
§ 5.7	三角函数的幂降	(81)
§ 5.8	万能代换的应用	(83)
§ 5.9	三角方程组	(84)
§ 5.10	含 $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arcctg} x$ 的基本方程与不等式	(87)
§ 5.11	解三角方程和不等式的研究方法	(90)
§ 5.12	混合题	(92)
第六章	几何题解法	(96)
§ 6.1	寻找解计算题的途径	(96)
§ 6.2	寻找证明题解的途径	(106)
§ 6.3	寻找作图题解的途径	(118)
§ 6.4	代数法	(121)

§ 6.5	几何题的矢量解法	(123)
§ 6.6	坐标法	(137)
§ 6.7	图形相交法	(138)
§ 6.8	几何变换法	(140)
§ 6.9	投影图的基本作图	(155)
§ 6.10	正交直线和平面的作图	(161)
§ 6.11	用平面作多面体截面的作图法	(167)
§ 6.12	求多面体元素问题解的方法	(171)
§ 6.13	旋转图形的表面面积和体积	(176)
§ 6.14	内切球和外接球	(180)
§ 6.15	解几何题的形式	(182)
§ 6.16	解题讨论	(189)
§ 6.17	几何题解的检验	(190)
第七章	非标准问题的解法	(193)
§ 7.1	数的还原问题	(193)
§ 7.2	探索数的性质的途径	(203)
§ 7.3	《非标准》方程解的求法	(210)
§ 7.4	逻辑问题的解法	(213)
§ 7.5	组合问题	(219)
§ 7.6	平面图形的相互位置	(224)
§ 7.7	构造问题	(229)
§ 7.8	杂题	(235)
答案、提示与解答	(240)	

前 言

本书系供师范学院数学系师生 解题 教学实习的教学参考书。全书共有四大部分：代数，几何，三角，竞赛题与国际奥林匹克数学竞赛题。

因为与中学数学教学有直接关系的很多问题，在代数、数学分析和几何教程里业已讲授，所以在代数、几何和三角实习时只涉及这些教程当中未被讲透而又是中学数学教程重点的那些问题。书的取材注意到学生为钻研上述教材而必备的解题（实际应用）理论知识。

书中讲述了在中学数学教材里和国际奥林匹克数学竞赛与其它竞赛等情况下所碰到的一些数学问题的一般解法和特种解法。对于求解各种难题的方法的训练的教学法，尤为注意。

中学数学教学大纲，包括向学生介绍这样一些重要概念，如导数，积分、几何变换、矢量法和坐标法，等等。因而教材的研究方法有着非常重要的改变。它特别注重函数研究，集合论语言的引入。这样一来，就扩充了中学数学教材的范围，使读者能够了解到比较普遍的解算方法。书中，对于用函数法求解代数和几何上的问题，给予很大的注意。它指出，在什么样情况下用导数才能简化等式的证明、不等式的证明与解算、以及含参数方程根的研究。为了简化足够复杂的方程式和不等式（特别是含参数情况）的解，广泛利用函数的图象。

学生在解题过程中的数学活动是数学训练不可分割的一部

分，因而书中对下列问题给以极大的注意，即构造法、图解法和解析法的综合利用，假设的探求，各种集合性质的揭示，等等。学生通过解题过程熟悉解题的各种一般方法和特殊方法，获得用这些方法寻求解题途径的技能。

书中很多例题的陈述具有习题的特点。对研究非标准问题方面的教学法的描述占有重要地位。

每一节的末尾都有供独立解算的练习。书中讲明求各类代数题和几何题解的基本检验方法，因此大多数练习题不给答案。我们认为，在解题过程中也应该具备独立核验的技能。比较复杂的习题，附有提示。练习题上的参数和星号（它代替 $=$ ， $>$ ， $<$ ），是为了便于让学生分成几个不同的小组进行解算。

§ 7.8 中的不复杂然而独具特色的习题，适合于用来系统地进行代数、三角和几何的实习以及初级数学教程的作业。

本书采用了作者写的《解题方法》（明斯克，《高等学校》出版社，1974）一书中的部分资料。

此书也可供中学解题训练的讲习班使用，还可用作小组作业和选修作业。

作者衷心感谢埃·弗·格鲁丹诺夫和勃·斯·卡普兰，他们费神审稿并提出了许多宝贵建议。

作 者

主要符号目录

$[D-ABC]$ ——底为 ABC 的棱锥 $DABC$.

$[D-ABC]^{\Pi}$ 底为 ABC 的正棱锥 $DABC$.

$S(\Phi)$ ——图形 Φ 的面积.

$S(ABC)$, $S(ABCD)$ ——三角形 ABC 的面积, 四边形 $ABCD$ 的面积.

$[ABCD-A_1B_1C_1D_1]$ ——底为 $ABCD$ 及 $A_1B_1C_1D_1$ 的四棱柱.

$[ABC-A_1B_1C_1]^{\Pi}$ ——正棱柱.

$[ABCD-A_1B_1C_1D_1]^{\perp}$ ——直立棱柱.

Σ , Γ ——平面.

$|A, (DBC)|$ ——点 A 到平面 DBC 的距离.

$(\widehat{AB}, MCD)$ ——直线 AB 与平面 MCD 所构成的夹角值.

$(\widehat{ABC}, MDE)$ ——平面 ABC 与平面 MDE 所构成的二面角值

$(\widehat{AB}, CM)$ ——直线 AB 和直线 CM 之间的夹角值.

$|A, (BC)|$ ——点 A 和直线 BC 之间的距离.

第一章 整数性质的研究方法

§ 1.1 数的整除性*

因式分解。 将一含变量的表达式分解成因式。然后，证明给定式和除数有公因子。用这种方法解题时，常用到下面两个公式：

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}), \quad (1.1)$$

式中 n 是自然数；

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + (-1)^{n-1}b^{n-1}), \quad (1.2)$$

式中 $n = 2k + 1$, k 是任意自然数。

欲证公式 (1.1) 和 (1.2) 是否正确，只须将括号内的式子互乘即可。

例1 求证：对于任意自然数 n ， $17^n - 11^n$ 的值能被 6 整除。

根据公式 (1.1)，有

$$17^n - 11^n = (17 - 11)(17^{n-1} + 17^{n-2} \times 11 + \cdots + 11^{n-1}).$$

于是命题得证。

* 这里，我们只考虑利用整除性理论来解问题的方法，就其思路而言接近中学数学。

例2 求证：对于任意自然数 n ， $2 \times 7^n + 1$ 能被3整除。

因为 $2 \times 7^n + 1 = 2(7^n - 1) + 3$ ，又从公式(1.1)推知 $7^n - 1$ 可以被3整除。所以命题得证。

例3 求证：对于任意自然数 n ， $3^{2^n+1} + 2^{n+2}$ 能被7整除。

显而易见， $3^{2^n+1} + 2^{n+2} = 9^n \times 3 + 2^n \times 4 = 3(9^n - 2^n) + 3 \times 2^n + 4 \times 2^n = 3(9^n - 2^n) + 7 \times 2^n$ 。根据式(1.1)，数 $9^n - 2^n$ 能被7整除，数 7×2^n 也能被7整除。命题证毕。

数学归纳法。数学归纳法是以下列原理作基础的一种证明方法：(1) 某性质 X 对于 $k=1$ 成立；(2) 假设对于 $k>1$ 也成立，由此推出，对于下一个数 $k+1$ 具有这种性质，那么对于任意自然数都具有性质 X 。

例4 证明：对于任意整数 $n \geq 1$ ， $8^n + 6$ 是7的倍数。

当 $n=1$ 时，命题成立。设：当 $n=k$ ($k>1$) 时，命题成立，就是说，

$$8^k + 6 = 7m \quad (m \text{ 是自然数}) . \quad (1.3)$$

现在验证：在 $n=k+1$ 时，命题也成立，就是说，下式成立：

$$8^{k+1} + 6 = 7t \quad (t \text{ 是自然数}) . \quad (1.4)$$

由等式(1.3)得出 $8^k = 7m - 6$ 。故

$$\begin{aligned} 8^{k+1} + 6 &= 8 \times 8^k + 6 = 8(7m - 6) + 6 = 7 \times 8m - 42 \\ &= 7(8m - 6), \end{aligned}$$

也就是 $t = 8m - 6$ 。

因为 t 是自然数，所以据式(1.4)就证完命题。

例5 证明：对于任意自然数 n ，表达式 $3^{2^n+2} + 2^{6n+1}$ 的值能被11整除。

当 $n=1$ 时，命题成立。假设对于 $n=k$ ，命题也成立，即

$$3^{2^k+2} + 2^{6k+1} = 11m, \quad (1.5)$$

这里, m 是自然数.

兹证: $n = k + 1$ 时命题亦真, 即

$$3^{2(k+1)+2} + 2^{6(k+1)+1} = 11p, \quad (1.6)$$

这里, p 是自然数.

由等式 (1.5), 得

$$3^{2k+2} = 11m - 2^{6k+1}. \quad (1.7)$$

根据等式 (1.7), 和式

$$3^{2(k+1)+2} + 2^{6(k+1)+1}$$

可以变换成下式:

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)+2} + 2^{6(k+1)+1} &= 3^2 \times 3^{2(k+1)} + 2^{6(k+1)+1} \\ &= 3^2(11m - 2^{6k+1}) + 2^{6(k+1)+1} \\ &= 3^2 \times 11m - 3^2 \times 2 \times 2^{6k} + 2^7 \times 2^{6k} \\ &= 3^2 \times 11m + 2^{6k}(2^7 - 2 \times 3^2) \\ &= 3^2 \times 11m + 2^{6k} \times 110 = 11(9m + 10 \times 2^{6k}). \end{aligned}$$

于是, 等式 (1.6) 的正确性得证; 且 $p = 9m + 10 \times 2^{6k}$

余数法. 设 N_1 和 N_2 是自然数, 且 $N = N_1 + N_2$. 如果 $N_1 = qn_1 + p_1$, $N_2 = qn_2 + p_2$ (q, n_1, n_2, p_1, p_2 是自然数), 则 $N = (qn_1 + p_1) + (qn_2 + p_2) = q(n_1 + n_2) + (p_1 + p_2)$. 因此, 如果 N_1 和 N_2 被 q 除得的余数 p_1 和 p_2 之和也能被 q 整除, 即 $p_1 + p_2 = qk$ (k 是自然数), 那么, 数 $N = N_1 + N_2$ 可以被 q 整除.

例 6 证明: 对于任意自然数 n , 数 $2 \times 7^n + 1$ 是 3 的倍数.

显然, $2 \times 7^n + 1 = 2(6 + 1)^n + 1$. 应用牛顿二项式于 $(6 + 1)^n$ 后, 不难看到: 当 $(6 + 1)^n$ 除以 3, 便得余数 1. 因此, 当 2×7^n 被 3 除时, 得余数 2. 于是, $2 \times 7^n + 1 = (3m + 2) + 1 = 3(m + 1)$.

例 7 证明: 对于任意自然数 n , 表达式 $21^{2n+1} + 17^{2n+1} + 15$ 的值, 不能被 19 整除.

显然, $21^{2n+1} + 17^{2n+1} + 15 = (19 + 2)^{2n+1} + (19 - 2)^{2n+1}$

+15, 应用牛顿二项式于表达式 $(19+2)^{2n+1}$ 和 $(19-2)^{2n+1}$ 之后, 得出 $(19+2)^{2n+1}$ 被19除的余数是 2^{2n+1} , $(19-2)^{2n+1}$ 被19除的余数是 $(-2)^{2n+1}$. 但是, $2^{2n+1} + (-2)^{2n+1} = 0$. 因此, 表达式 $21^{2n+1} + 17^{2n+1} + 15$ 被19除得的余数为15. 命题证毕.

用反证法证. 假设命题不成立, 即给定的含变量的表达式不是已知自然数的倍数. 由此假设便得出矛盾, 这就证明命题成立.

例8 证明: 对于任意的自然数 n , 表达式 $n^2 + 3n + 5$ 不能被121整除.

假设命题不成立, 即存在这样一个整数 m , 使

$$n^2 + 3n + 5 = 121m. \quad (1.8)$$

解方程(1.8)中的 n , 得

$$n_{1,2} = 0.5(-3 \pm \sqrt{11(44m-1)}).$$

根据题设条件, n 为整数, 所以必须使 $11(44m-1) = (11k)^2$, 这就是使 $44m-1 = 11k^2$ (k 是整数), 后一等式的左边在 m 为任意数值时, 它都不是11的倍数. 因此, 方程(1.8)没有整数解. 因而得出矛盾, 这就证明命题成立.

练习

1. 证明 (k 是自然数):

- (1) $4 \times 6^k + 5^k - 4$ 是5的倍数.
- (2) $4^{2k+1} + 3^{k+2}$ 是13的倍数.
- (3) $5^{2k+1} + 4^{k+2}$ 是21的倍数.
- (4) $5^{6k+5} + 7^{6k} + 6$ 是9的倍数.
- (5) $5^{2k-1} \times 2^{k+1} + 3^{k+1} \times 2^{2k-1}$ 是19的倍数.

2. 确定数 k 取何自然数值时, 下式成立:

(1) $11^k + 7^k$ 被 9 整除。

(2) $13^k + k$ 被 12 整除。

§ 1.2 求方程及方程组的整数根

对变量之一解方程。 一含几个变量的方程 $F(x, y, z, \dots, u, v) = 0$, 对此方程中的诸变量之一进行求解, 例如解出 v 。然后考察函数 $v = f(x, y, z, \dots, u)$ 。

例1 求方程 $17(xyzt + xy + xt + zt + 1) - 54(yzt + y + t) = 0$ 的自然数根。

兹解出此方程的 x ,

$$17x = 54 - 17(zt + 1) : (yzt + y + t),$$

得

$$54 - 17x = \frac{17}{y + \frac{t}{zt + 1}}. \quad (1.9)$$

因为方程中的 y, z, t, x 是自然数, 方程 (1.9) 的右边为正整数, 因此 $x \leq 3$ 。当 $x = 1$ 时, 方程 (1.9) 左边等于 37; 当 $x = 2$ 时, 则等于 20; 当 $x = 3$ 时, 则等于 3。于是, 须解方程的自然数是:

$$37 = \frac{17}{y + \frac{t}{zt + 1}}, \quad (1.10)$$

$$20 = \frac{17}{y + \frac{t}{zt + 1}}, \quad (1.11)$$

$$3 = \frac{17}{y + \frac{t}{zt + 1}}. \quad (1.12)$$

由方程(1.10), 得

$$37t:(zt+1)=17-37y. \quad (1.13)$$

因为当 $y \geq 1$ 时, 方程(1.13)的右边为负, 所以这个方程没有自然数解. 用类似的方法可以证明方程(1.11)也没有自然数解.

由方程(1.12)求出: $17-3y=3:(z+1/t)$. 显然, $0 < 3:(z+t^{-1}) < 3$, 式中 z 与 t 是自然数. 因此, $0 < 17-3y < 3$. 由此得出: $y=5$. 于是, $3:(z+t^{-1})=2$, 即 $z+1/t=1+1/2$. 因而 $z=1$, $t=2$.

答: $x=3$, $z=1$, $t=2$, $y=5$.

方程中所含表达式的因式分解. 这种方法的实质是, 将方程两边分解为因式, 然后用几个方程作成的方程组代替原方程.

例2 证明: 方程式 $x^3-5x^2=13$ 没有自然数解.

将方程变换成形为

$$x \times x(x-5)=1 \times 1 \times 13. \quad (1.14)$$

方程(1.14)等价于方程组 $x=1$ 与 $x-5=13$. 此方程组无自然数解(它是矛盾方程组).

例3 求整数 x 和 y 使 $x > y > 0$ 且

$$x^3+7y=y^3+7x. \quad (1.15)$$

将已知方程变换成

$$x^3-y^3=7x-7y \text{ 或 } (x-y)(x^2+xy+y^2)=7(x-y).$$

但因 $x > y$, 故方程(1.15)与下式等价:

$$x^2+y^2+xy=7 \text{ 或 } (x-y)^2=7-3xy.$$

显然, $7-3xy > 0$. 即 $xy < 7/3$. 但这仅在(1) $x=1, y=2$, (2) $x=2, y=1$ 的条件下才有可能. 因题设 $x > y$, 故得 $x=2, y=1$.

练习

1 证明下列方程没有整数解:

(1) $x^2 + y^2 = 1971$; (2) $x^3 = 2 + 3y^2$.

2 求方程 $x^4 + 2x^7y - x^{14} - y^2 = 7$ 的自然数解.

3 求下列方程的整数解:

(1) $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$; (2) $x^2 - 6xy + 5y^2 = 121$.

4 证明方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 28$ 没有自然数解.

5 试问: 当 a 为何负值时, 方程 $x^3 + 5x^2 - 13 = a$ 有自然数解.

6 证明: 表达式 $2x + 3y$ 和 $9x + 5y$ 在 x 和 y 取同一整数时, 能被 17 整除.

第二章 解方程和不等式的研究方法

§2.1 方法的实质

问题类型是：解方程 $f(x)=0$ ，解不等式 $f(x)\geq 0$ ；证明恒等式 $f(x)=a$ （ a 为参数）；在 $x\geq b$ 时证明不等式 $f(x)\geq a$ （ a, b 为参数）。这些都是考察函数性质和作出它们的图象的一个更为一般的问题的一部分。由于这些问题充分地利用了我们所知道的相应的函数性质，所以把解方程和不等式，证明恒等式和不等式综合一起来研究是适宜的。

考察函数性质的一般步骤是：（1）研究函数的奇偶性和周期性；（2）讨论函数的单调性和极值（用导数或不用导数）；（3）求函数的零点。

为了说明研究方法的实质，兹举例如下。

例1 解方程

$$4x^2 + (a-2)x + (a-5) = 0, \quad (2.1)$$

并讨论当参数 a 取何值时，方程(2.1)有正根、负根、一个正根和一个负根、重根、没有实根。

此题可用下述方法得解：（1）解出方程(2.1)中的 a ，并讨论函数 $a=\varphi(x)$ 。在这种情况下，不解出方程(2.1)根可以进行讨论。（2）讨论函数 $y_1=4x^2+(a-2)x$ ， $y_2=5-a$ 。（3）先解出方程(2.1)中的 x 而后考察函数 $x=f(a)$ 。（4）研究函数 $y=y(x)=4x^2+(a-2)x+(a-5)$ 。

从我们所研究的方法来看, 上述诸法中, 对头种方法最感兴趣。解出方程(2.1)中的 a , 得

$$a = (-4x^2 + 2x + 5) : (x + 1), \quad x \neq -1 \quad (2.2)$$

现在来考察定义在 $] -\infty, -1[\cup] -1, +\infty[$ 上的函数(2.2)。

为求出这个函数的驻点, 我们把方程(2.2)变换成 $a = a(x) = -4x + 6 - (x + 1)^{-1}$ 的形式, 得

$$a'(x) = -4 + (x + 1)^{-2}; \quad a'(-0.5) = a'(-1.5) = 0;$$

$$a(-0.5) = 6; \quad a(-1.5) = 14; \quad a(0) = 5;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \pm 1 (x > \pm 1)} a(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1 (x < -1)} a(x) = +\infty$$

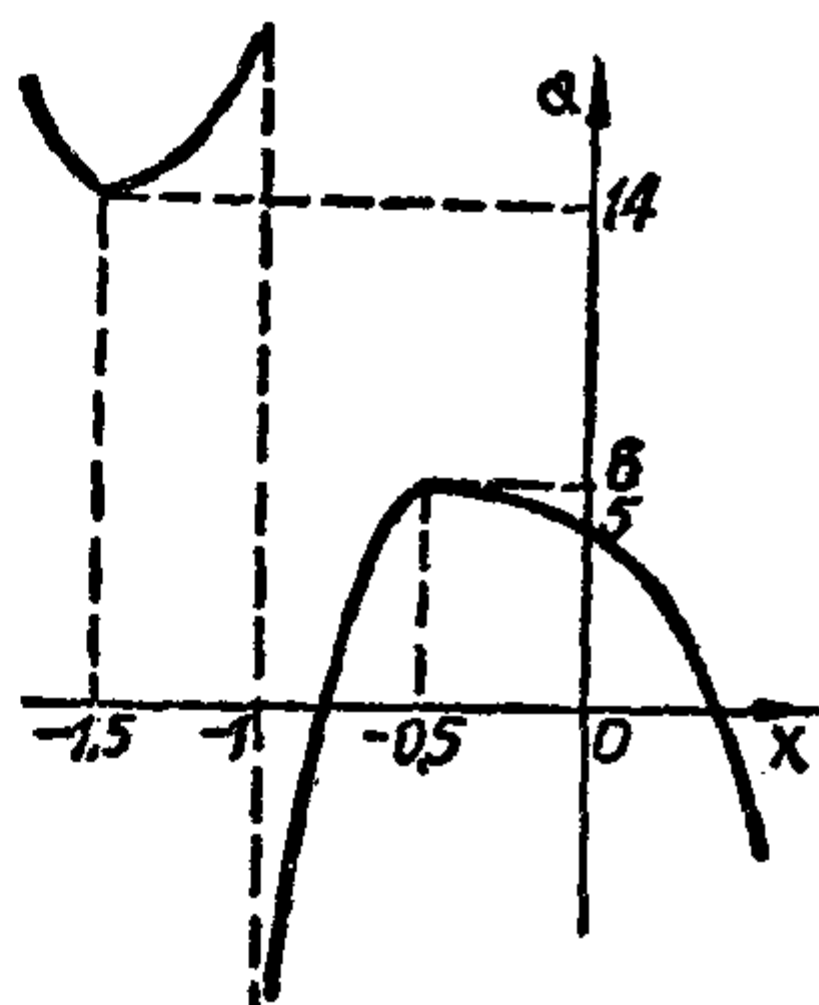


图2.1

我们作函数的图象(图2.1)。由图2.1可知: 1) $a = 14$, $x_1 = x_2 = -1.5$; 2) $a > 14$, $x_1, x_2 < 0$; 3) $6 < a < 14$, 方程(2.1)无根; 4) $a = 6$, $x_1 = x_2 = -0.5$; 5) $5 < a < 6$, $x_1, x_2 < 0$; 6) $a = 5$, $x_2 = 0$, $x_1 < 0$; 7) $a < 5$, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ 。由图象可见, 无论 a 取何值, 方程(2.1)的根不等于 -1 。根据图象可彻底研究方程(2.1)的根如何随 a 的变化而变化。

例2 证明:

$$\frac{a+b+c+d+e}{5} \geq \sqrt[5]{abcde} \quad (a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq 0).$$

兹讨论定义在 $]0; +\infty[$ 上的函数

$$f(a) = \frac{a+b+c+d+e}{5} - \sqrt[5]{abcde},$$

若视 b, c, d, e 作参数, 则

$$f'(a) = \frac{1}{5} \left(1 - \sqrt[5]{\frac{bcde}{a^4}} \right).$$

因为 $a \geq b \geq c \geq d \geq e$, 所以 $bcde/a^4 \leq 1$, 因而在 $]0; +\infty[$ 上有 $f'(a) \geq 0$.

显然, 如果 $a=b=c=d=e$, 则 $f'(a)=0$. 在参数 b, c, d, e 为其他一切值时, 在 $]0; +\infty[$ 上 $f'(a) > 0$, 即连续函数 $f(a)$ 在 $]0; +\infty[$ 上是单调增加的; 又 $f(0)=0$. 因而在 $]0; +\infty[$ 上 $f(a) > 0$.

例3 证明恒等式 $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0$.

兹考察定义于 $] -\infty; +\infty[$ 的函数 $y(x) = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1$, 取

$$\begin{aligned} y'(x) &= 12 \sin^5 x \cos x - 12 \cos^5 x \sin x - 12 \sin^3 x \cos x + \\ &+ 12 \cos^3 x \sin x = 12 \sin x \cos x (\sin^4 x - \cos^4 x - \sin^2 x + \cos^2 x) = \\ &= 12 \sin x \cos x ((\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) - (\sin^2 x - \cos^2 x)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

于是, 在它定义域的整个集合上 $y'(x) = 0$, 且 $y(0) = 0$. 因此, 在 $] -\infty; +\infty[$ 上 $y(x) = 0$.

例4 假设 $\cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) = 1.5$. (2.3)

试求出锐角 α 和 β .

兹研究在 $[0; 0.5\pi]$ 上的函数 $f(\alpha) = \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha + \beta) - 1.5$ (β 为参数). 求 $f'(\alpha) = -\sin\alpha + \sin(\alpha + \beta)$. 在 $[0, 0.5\pi]$ 上方程 $\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha = 0$ 有根 $\alpha = \pi/2 - \beta/2$. 其次,
 $f(\pi/2 - \beta/2) = \cos\beta - 1.5$; $f(0) = -0.5$; $f(0.5\pi) = \cos\beta + \sin\beta/2 - 1.5$.

因为 $0 < \beta < 0.5\pi$, 所以 $0 < \cos\beta < 1$, $f(\pi/2 - \beta/2) < f(0)$,
 $f(\pi/2 - \beta/2) < f(\pi/2)$. 于是 $f(\alpha)$ 在点 $\pi/2 - \beta/2$ 上达最小值.
 但如果 $0 < \beta < \pi/2$, 则 $\cos\beta - 1.5 > -1.5$. 因此不存在满足方程(2.3)的锐角 α 和 β .

例5 试对 x 解方程:

$$(x^2 - a)^{0.5} + 2(x^2 - 1)^{0.5} = x. \quad (2.4)$$

把方程变换成如下形式:

$$\sqrt{x^2 - a} = x - 2\sqrt{x^2 - 1}. \quad (2.5)$$

如果 $x^2 \geq a$, 函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - a} \geq 0$, 且有定义. 函数
 $\varphi(x) = x - 2\sqrt{x^2 - 1} \geq 0$. 显然, $\varphi(x)$ 在方程组

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - 2\sqrt{x^2 - 1} \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2/\sqrt{3}.$$

的解值 x 的集合上有定义.

我们来讨论 $\varphi(x)$ 的单调性: $\varphi'(x) = 1 - 2x/\sqrt{x^2 - 1}$. 方程
 $1 - 2x/\sqrt{x^2 - 1} = 0$ 无实根. 因此, $\varphi(x)$ 单调, 得出 $\varphi(1) = 1$,
 $\varphi(2/\sqrt{3}) = 0$. 于是 $\varphi(x)$ 在 $[1, 2/\sqrt{3}]$ 上为递减函数(图2.2).

兹对参数 a 的各种不同值, 作递增函数 $f(x)$ 的图象(图2.2).
 显然, 如果 $0 \leq a \leq 4/3$, 方程(2.4)有解 x_0 , 且为唯一解.

将方程 (2.5) 两边两次平方, 进行变换后, 得 $x^2 = (4-a)^2 : 8(2-a)$.

因为 $0 \leq a \leq 4/3$ 和 $x > 0$. 所以 $x_0 = (4-a) : 2\sqrt{2(2-a)}$.

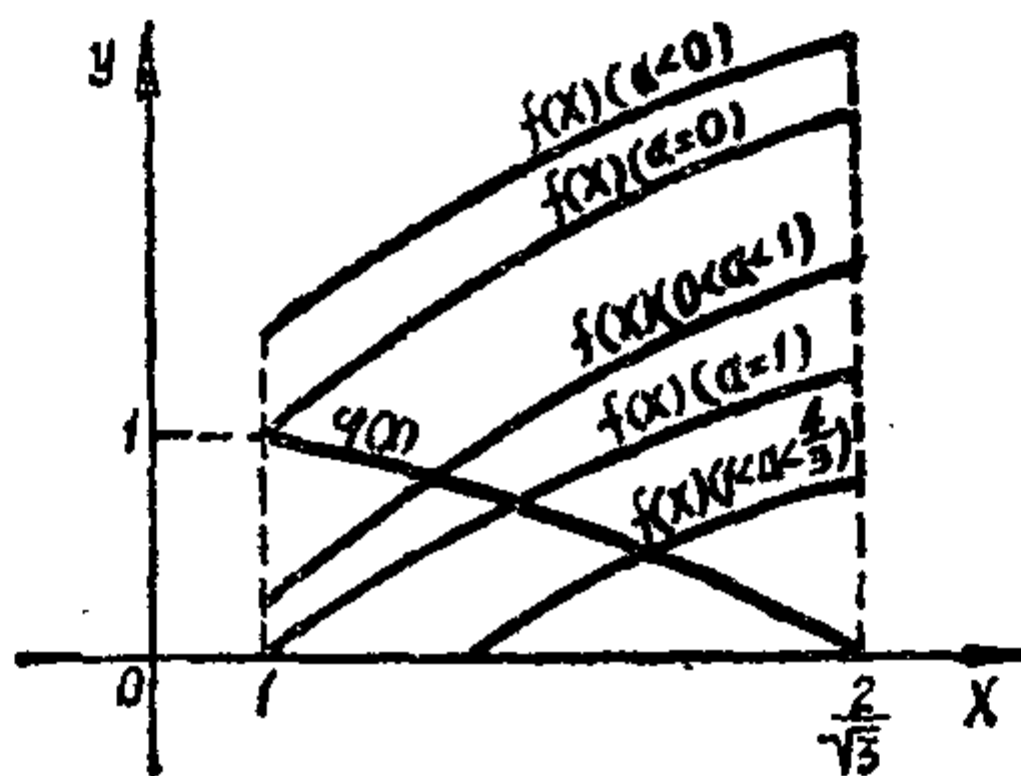


图2.2

§ 2.2 解方程和不等式时所用到的函数的基本性质

连续函数的一般性质

- 1 两递增 (递减) 函数之和为递增 (递减) 函数.
- 2 两正递增 (递减) 函数之积为递增 (递减) 函数.
- 3 如果函数 f 在 $[a; b]$ 上有定义、连续, 且在此区间上的两端点值有不同的符号, 那么, 存在这样的点 $x_0 \in]a; b[$ 使 $f(x_0) = 0$.
- 4 如果函数 f 在 $[a; b]$ 上有定义、连续和递增 (递减), 且在此区间两端点上有不同符号的值, 那么存在唯一的点 $x_0 \in]a; b[$ 使 $f(x_0) = 0$.
- 5 设函数 f 在某一区间有定义且连续。如果在这个区间的点 $x=a$ 和 $x=b (a < b)$ 上, $f(a) \neq f(b)$, 那么, 对任何数 $c' \in]f(a); f(b)[$; 都存在这样的点 $c \in]a; b[$, 使 $f(c) = c'$.
- 6 如果函数 f 在 $[a; b]$ 上有定义、连续, 且递增 (递减).

那么对于任何数 $c' \in [f(a); f(b)]$ 恒存在唯一的点 $c \in [a; b]$, 使 $f(c) = c'$.

7 如果函数 f 在 $[a; b]$ 上有定义、连续且递增 (递减), 那么在 $[f(a); f(b)]$ 上, 它的反函数存在, 并且也连续、递增 (递减).

8 如果函数 f 在某区间上有定义, 在它的内点 x_0 取最大 (最小) 值, 并且在点 x_0 存在导数 f' , 则 $f'(x_0) = 0$.

9 如果 f 在 $[a; b]$ 上有定义且连续, 在 $]a; b[$ 上存在 f' , 且 $f(a) = f(b)$, 则有 $x_0 \in]a; b[$, 使 $f'(x_0) = 0$.

10 函数 f 在 $[a; b]$ 上有定义、连续、且在 $]a; b[$ 上有导数. 如果 $x \in]a; b[$, 为了使 f 在 $[a; b]$ 上是常数, 其充要条件是使 $f'(x) = 0$.

11 函数 f 在 $[a; b]$ 上有定义, 连续, 且在 $]a; b[$ 上有 f' . 为使 f 在 $[a; b]$ 上按广义说为递增 (递减) 函数. 其充要条件是使在 $]a; b[$ 上 $f'(x) \geq 0$ (≤ 0).

12 函数 f 在 $[a; b]$ 上有定义、连续、且在 $]a; b[$ 上有 f' . 为使 f 为递增函数 (递减函数), 其充要条件是对于 $x \in]a; b[$ 要使 $f'(x) \geq 0$ (≤ 0), 且 $f'(x)$ 在 $[a; b]$ 的任何区间都不恒等于零.

13 如果在点 x_0 不为零的各阶导数中, 第一个不为零的是奇次阶导数, 那么 $f(x)$ 在 x_0 点既没有最大值, 也没有最小值; 如果这种导数是偶次阶导数, 且为负 (正), 那么 $f(x)$ 在 x_0 点有最大值 (最小值).

幂函数, 无理函数, 指数函数和对数函数的性质.

14 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 在整个数轴上有定义, 只取正值. 且它的值的集合是正半数轴.

15 如果 $a > 0$, 则 $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$.

16 指数函数, 在它定义域的每一点上有定义、可导, 且

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

17 函数 $y = a^x (a > 1)$ 为递增函数, $y = a^x (0 < a < 1)$ 为递减函数.

18 函数 $y = x^a (a \text{ 为实数})$ 在它定义域的每个点上连续、可导, 且 $(x^a)' = ax^{a-1}$.

19 函数 $y = \sqrt[n]{x} (x > 0, n \text{ 为自然数}, n \geq 2)$ 在其定义域的每个点上连续、递增、可导, 且 $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

20 对数函数在正半直线上有定义, 且它的值的集合与整个数轴相同.

$$21 \log_a 1 = 0; \log_a a = 1; \log_a x = x.$$

$$22 \text{ 如果 } a > 0, a \neq 1, x > 0, \text{ 则 } \log_a x = \ln x : \ln a.$$

23 对数函数在其定义域内有定义、可导, 且 $(\log_a x)' = 1 : x \ln a$.

$$24 \text{ 如果 } x, y > 0, \text{ 则 } \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

$$25 \text{ 如果 } x, y > 0, \text{ 则 } \log x / y = \log_a x - \log_a y.$$

$$26 \text{ 对于任何实数 } a \text{ 和 } b > 0, \text{ 表达式 } \log_a b^a = a \log_a b \text{ 成立.}$$

27 函数 $y = \log_a x (a > 1)$ 为递增函数; $y = \log_a x (0 < a < 1)$ 为递减函数.

$$28 \text{ 如果 } a, b > 0, a \neq 1, b \neq 1, \text{ 则 } \log_b x = \log_a x : \log_a b.$$

$$29 \text{ 对于任何 } x \in R, \text{ 有 } a^x = 10^{x \lg a}.$$

三角函数和反三角函数的性质

30 在第I和II象限内 $\sin x > 0$; 在第I和IV象限内 $\cos x > 0$.
在第II和IV象限内 $\sin x < 0$; 在第II和III象限内 $\cos x < 0$.

31 余弦函数是偶函数; 正弦、正切、余切函数是奇函数.

32 函数 $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ 为周期函数, $\sin x$ 和 $\cos x$ 的最小正周期等于 2π , $\operatorname{tg} x$ 和 $\operatorname{ctg} x$ 的最小正周期等于 π .

33 函数 $x \rightarrow \sin x$ 在 I 和 IV 象限内递增, 在 II 和 III 象限内递减, 连续, 且 $(\sin x)' = \cos x$.

34 函数 $x \rightarrow \cos x$ 在 III 和 IV 象限内递增, 在 I 和 II 象限内递减, 连续, 且 $(\cos x)' = -\sin x$.

35 $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$.

36 $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = (\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta) : (1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta)$.

37 $\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$.

38 $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

39 $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$.

40 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$; $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

41 $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$; $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$.

42 $(\sin x = \alpha) \iff (x = (-1)^k \arcsin \alpha + k\pi; k \in \mathbb{Z}; |a| \leq 1)$.

43 $(\cos x = a) \iff (x = \pm \arccos a + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}; |a| \leq 1)$.

44 $(\operatorname{tg} x = a) \iff (x = \operatorname{arctg} a + k\pi; k \in \mathbb{Z})$.

45 $(\operatorname{ctg} x = a) \iff (x = \operatorname{arctg} a + k\pi; k \in \mathbb{Z})$.

§ 2.3 用研究方法解方程和不等式的例

例1 求方程 $(x-1)^{1/4} + (x+14)^{1/4} = 3$ 的解.

函数 $y_1 = (x-1)^{1/4}$ 在 $[1; +\infty[$ 上有定义, $y_2 = (x+14)^{1/4}$ 在 $[-14; +\infty[$ 上有定义, 函数 $y = y_1 + y_2$ 在 $[1; +\infty[$ 上有定义且连续. 函数 y_1 和 y_2 是递增函数 (性质19), $y = y_1 + y_2$ 也是递

增函数 (性质1). 因此 $y_{min} = y(1) = \sqrt{15} < 3$. 由性质6得知, 在 $[1, +\infty[$ 上存在该方程的唯一根. 显然, $y(2) = 3$.

例2 求方程 $x^3 - 10x^2 + 1 = 0$ 的正根.

函数 $y = x^3 - 10x^2 + 1$ 在 $]-\infty, +\infty[$ 上有定义且连续. 我们得到: $y' = 3x^2 - 20x$; $y'(0) = 0$; $y'(20/3) = 0$; $y(0) = 1 > 0$; $y(20/3) < 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$.

于是, 函数 $y = x^3 - 10x^2 + 1$ 在 $[0; 20/3]$ 上递减且在 $[20/3; +\infty[$ 上递增. 由性质4得, 该方程的一个正根在 $]0; 20/3[$ 上, 另一个正根在 $]20/3; +\infty[$ 上.

例3 解 $(1-x)^{0.5} \geq x$.

因为 $(1-x)^{0.5}$ 在 $x \leq 1$ 时有定义, 所以原不等式的解在 $]-\infty, 1]$ 上. 作定义在 $]-\infty, 1]$ 上的 $f(x) = x$ 和 $\varphi(x) = \sqrt{1-x}$ 的图象 (图2.3). 因为 $f(x)$ 递增, $\varphi(x)$ 递减, 且 $\varphi(0) > f(0)$, 而 $\varphi(1) < f(1)$, 所以根据性质4, 方程 $\sqrt{1-x} = x$ 有唯一根 x_0 , 且原不等式的解是 $]-\infty, x_0]$, 其中 $x_0 \in]0; 1[$. 解出方程 $\sqrt{1-x} = x$, 得 $x_1 = 0.5(-1 - \sqrt{5})$; $x_2 = 0.5(-1 + \sqrt{5})$. 因为 $x_0 \in]0; 1[$, 故 $x_0 = x_2$.

例4 解 $3 \times 16^x + 36^x = 2 \times 81^x$.

将方程两边用 81^x 除后, 得

$$3 \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} + \left(\frac{6}{9}\right)^{2x} = 2. \quad (2.6)$$

函数 $f(x) = (4/9)^{2x}$ 和 $\varphi(x) = (6/9)^{2x}$ 递减, 因此函数 $\psi(x) = 3f(x) + \varphi(x)$ 也递减. 由性质6知, 方程(2.6)的根不多于一个. 显然. $\psi(0.5) = 2$.

例5 解 $\log_2(2(x^4 + 1)^{-1}) \geq x^2 + 1$.

函数 $f(x) = 2:(x^4 + 1)$ 在 $]-\infty; +\infty[$ 上有定义, 且当 $x = 0$

时达到最大值. 因此, 对一切 $x \in]-\infty, +\infty[$, $\log_2(2:(x^4+1)) \leq 1$. 函数 $\varphi(x) = x^2 + 1$ 在 $]-\infty, +\infty[$ 上有定义, 且在点 $x=0$ 上达到最小值 1. 因此点 $x=0$ 是不等式的解.

例 6 证明, 如果 $a, b, c > 0$, 则 $a:b + b:c + c:a \geq 3$.

为确定起见, 我们规定 $a \geq b \geq c$. 函数 $f(a) = a:b + b:c + c:a - 3$ 在 $]0; +\infty[$ 上有定义且连续 (b, c 是参数). 现求 $f'(a) = 1:b - c:a^2$. 由方程 $1:b - c:a^2 = 0$ 得 $a = \sqrt{bc}$. 但因 $a \geq b \geq c$, 所以仅当 $a=b=c$ 时才有等式 $a = \sqrt{bc}$. 于是, 若 $f'(a) = 0$, 则 $f(a) = 0$. 得: $\lim_{a \rightarrow 0} f(a) = +\infty$, $\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a) = +\infty$. 本题得解.

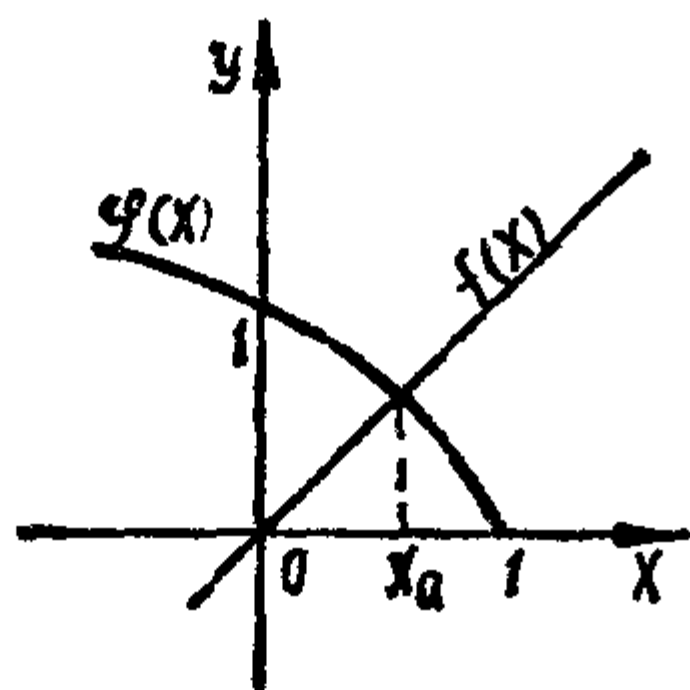


图 2.3

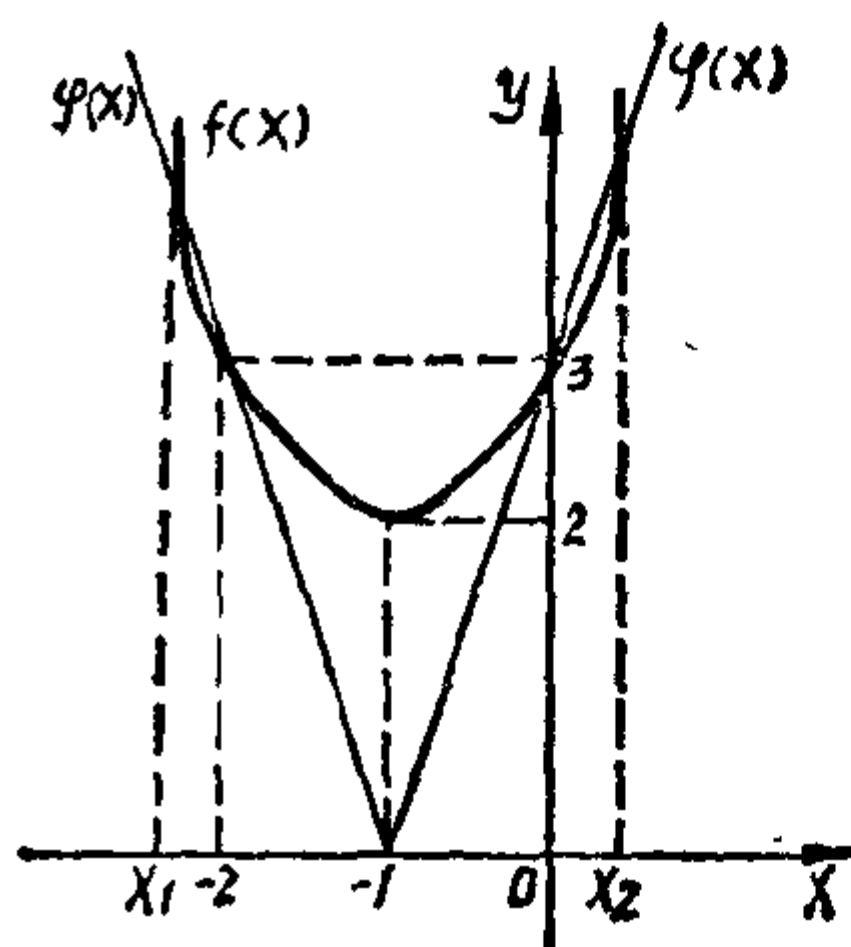


图 2.4

例 7 求解 $x^2 + 2x - 3|x+1| + 3 > 0$.

将不等式变换为下式:

$$x^2 + 2x + 3 > 3|x+1|. \quad (2.7)$$

作 $f(x) = x^2 + 2x + 3$ 和 $\varphi(x) = 3|x+1|$ 在 $]-\infty, +\infty[$ 上的图象(图 2.4). 显然, 不等式 (2.7) 在 $]-\infty, x_1[,]-2; 0[,]x_2; +\infty[$ 上成立. 因为 $x_1 < -2$, 即 $x_1 + 1 < 0$, 所以为了确定 x_1 , 应解方程 $x^2 + 2x + 3 = -3(x+1)$. 得 $x_1 = -3$. 因为 $x_2 > 0$, 即 $x_2 - 1 > 0$, 所以为求出 x_2 , 须解方程 $x^2 + 2x + 3 = 3(x+1)$, 得

$$x_2 = 1.$$

答 $]-\infty; -3[\cup]-2; 0[\cup]1; +\infty[.$

例 8 关于 x 解 $x-1 \geq \sqrt{a-x^2}$.

对参数 a 取的各种值, 作出 $f(x) = x-1$ 和 $\varphi(x) = \sqrt{a-x^2}$ ($a \geq 0$) 的图象. $\varphi(x)$ 的图象是一圆心在点 $x=0$, 半径为 $\sqrt{a}$ 的位于上半平面上的半圆 (图2.5). 显然, 若 $a \geq 1$, $x-1 = \sqrt{a-x^2}$ 有唯一解 x_0 , 该不等式的解为 $[x_0; \sqrt{a}]$. 解 $x-1 = -\sqrt{a-x^2}$ 后, 得到两个根. 但在进行讨论之后, 不难找出它们中间的增根.

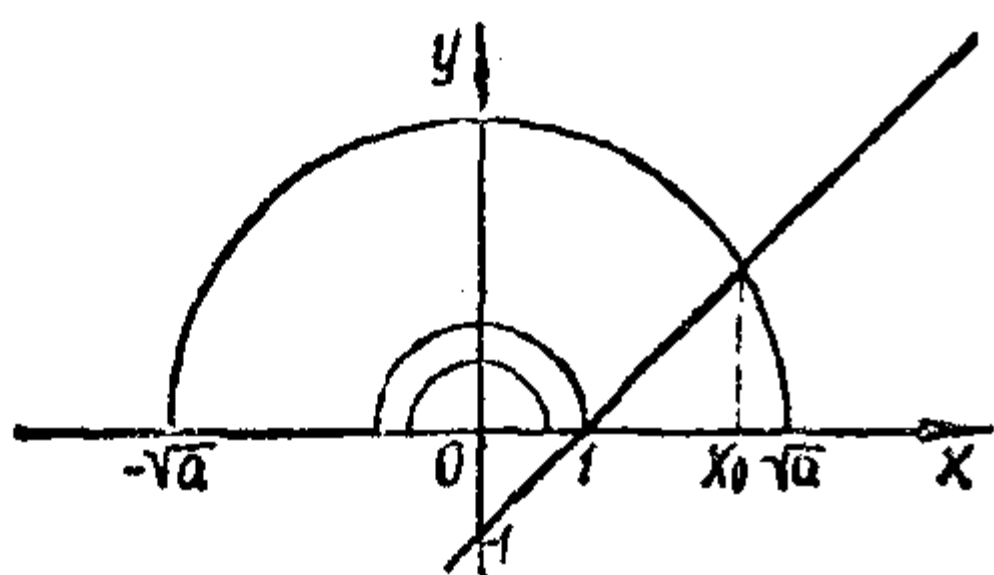


图2.5

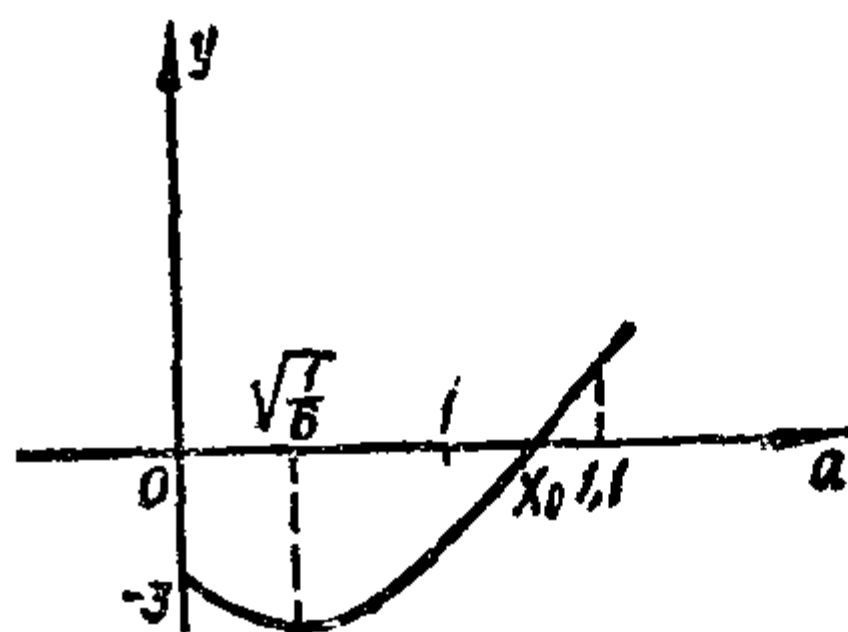


图2.6

例 9 证明: 如果 $b \geq a \geq c \geq 0$, 则 $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$

函数 $f(c) = \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)}$ 在 $[0; a]$ 上有定义, 连续, 且为非负的函数; $f(0) = 0 \leq \sqrt{ab}$; $f(a) = \sqrt{a(b-a)} \leq \sqrt{ab}$. 其次, $f'(c) = (2c)^{-0.5} ((a-2c):\sqrt{a-c} + (b-2c):\sqrt{b-c})$ ($c > 0$).

因为 $b \geq a$, 所以

$$(a-2c):\sqrt{a-c} + (b-2c):\sqrt{b-c} = 0 \quad (2.8)$$

当 $a-2c \leq 0$ 和 $b-2c \geq 0$, 也就是, 当

$$0.5a \leq c \leq 0.5b \quad (2.9)$$

才有解.

解方程(2.8)之后,得 $c=ab:(a+b)$,此 c 值满足条件(2.9). 我们求得 $f(ab:(a+b))=\sqrt{ab}$. 因而,在线段 $[0;a]$ 的端点和驻点 $c=ab:(a+b)$ 上,该不等式成立. 命题证毕.

例10 证明: $a^3 + 3a^2 + 15 > 13a$ ($a \geq 0$).

函数 $f(a) = a^3 + 3a^2 - 13a + 15$ 在 $]-\infty; +\infty[$ 上有定义且连续. 我们有 $f'(a) = 3a^2 + 6a - 13$; 如果 $a = (-3 - 4\sqrt{3}):3$ 或 $a = (-3 + 4\sqrt{3}):3$, 则 $f'(a) = 0$. 其次, $f(0) = 15 > 0$.

$$f\left(\frac{-3 + 4\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{-3 + 4\sqrt{3}}{3} \left(\left(\frac{-3 + 4\sqrt{3}}{3} \right)^2 + 3 \times \frac{-3 + 4\sqrt{3}}{3} - 13 \right) + 15 > 6 > 0.$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a) = +\infty.$$

于是, 如果 $a \geq 0$, 则 $f(a) > 0$. 本题得证.

例11 求 $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$ 在 $]0; 0.5\pi[$ 上的根.

等式 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 为一恒等式. 如果 $x \in]0; 0.5\pi[$, 则 $|\sin x| < 1$ 和 $|\cos x| < 1$. 显然, 如果 $x \in]0; 0.5\pi[$, 则 $\sin^4 x < \sin^2 x$ 和 $\cos^4 x < \cos^2 x$. 因此, 在 $]0; 0.5\pi[$ 上 $\sin^4 x + \cos^4 x < 1$. 因而, 给定方程在 $]0; 0.5\pi[$ 上无解.

例12 求解 $8(x^4 + a^4) \geq (x + a)^4$ (a 为参数, $a \neq 0$).

函数 $f(x) = 8(x^4 + a^4) - (x + a)^4$ 在 $]-\infty; +\infty[$ 上有定义且连续. 我们有

$$f'(x) = 4(8x^3 - (x + a)^3) = 4(x - a)(7x^2 + 4xa + a^2).$$

此二次三项式无实数解. 因此, 仅在点 $x = a$ 时 $f'(x) = 0$.

又得: $f(a) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

于是, 在 $]-\infty; +\infty[$ 上 $f(x) \geq 0$. 给定不等式的解是

$] -\infty, +\infty[$.

例13 证明: $a^4 - a^2 - 3a + 5 > 0$, 如果 $a \geq 0$.

函数 $f(a) = a^4 - a^2 - 3a + 5$ 在 $[0; +\infty[$ 上有定义且连续. 求得 $f'(a) = 4a^3 - 2a - 3$. 我们考察 $\varphi(a) = 4a^3 - 2a - 3$; $\varphi'(a) = 12a^2 - 2$ ($a \geq 0$); $\varphi'(\sqrt{1/6}) = 0$; $\varphi(\sqrt{1/6}) < 0$; $\varphi(0) = -3 < 0$; $\lim_{a \rightarrow +\infty} \varphi(a) = +\infty$.

图象 $\varphi(a)$ 示于图2.6. $\varphi(1) = -1 < 0$; $\varphi(1.1) > 0$.

显然, 在 $[1.1; +\infty[$ 上 $f'(a) > 0$, 又由于 $f(1.1) > 0$, 因此根据性质11和12. 在 $[1.1; +\infty[$ 上有 $f(a) > 0$. 其次须证: 在 $[0; 1[$ 上也有 $f(a) > 0$. 如果 $1 \leq a < 1.1$, 则 $a^4 - a^2 - 3a + 5 > 1 - 1.1^2 - 3 \times 1.1 + 5 > 0$. 如果 $0 \leq a < 1$, 则 $a^4 - a^2 - 3a + 5 > 5 - a^2 - 3a > 5 - 1 - 3 \times 1 > 0$. 本题得证.

例14 求解 $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} > a$ ($a > 0$).

不等式在 $[1; +\infty[$ 上有定义. 将它的两边用取正值的表达式 $\sqrt{x} + \sqrt{x-1}$ 乘之, 得

$$1 > a(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}).$$

由此得

$$a < 1 : (\sqrt{x} + \sqrt{x-1}). \quad (2.10)$$

函数 $a_1(x) = \sqrt{x}$ 和 $a_2(x) = \sqrt{x-1}$ 为正的、单调递增的, 因此 $a_3 = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}$ 也是正的、单调递增函数; $a_3(1) = 1$. 因此 $a_3(x)$ 在 $[1; +\infty[$ 从 1 变化到 $+\infty$. 函数 $a = 1 : (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})$ 为单调函数. 它在 $[1; +\infty[$ 上有定义, 它的定义域为 $[1; +\infty[$. 作出它的图象 (图2.7). 显然, 如果 $0 < a \leq 1$, 不等式(2.10)的解为 $[1; x_0[$, 其中 x_0 为 $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = a$ 的根.

兹解出这个方程:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} - a &= \sqrt{x-1}, (\sqrt{x} - a)^2 = (\sqrt{x-1})^2, a^2 + 1 \\ &= 2a\sqrt{x}, (a^2 + 1)^2 = 4a^2x, x_0 = (1 + a^2)^2 : 4a^2.\end{aligned}$$

得

$$1 \leq x < \left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^2, 0 < a \leq 1.$$

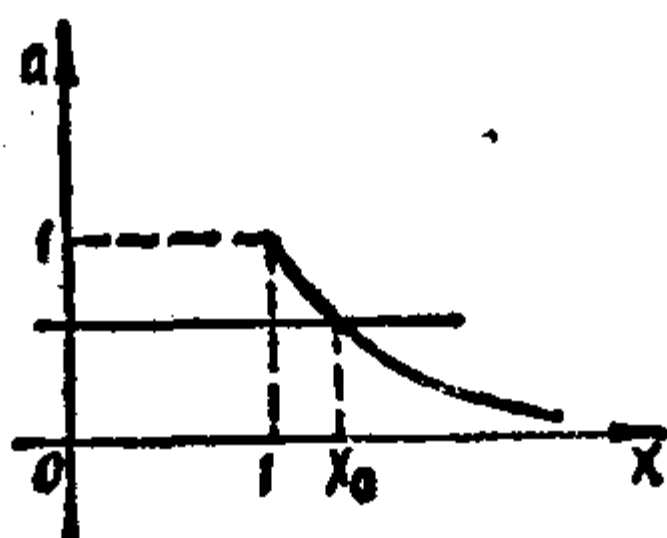


图2.7

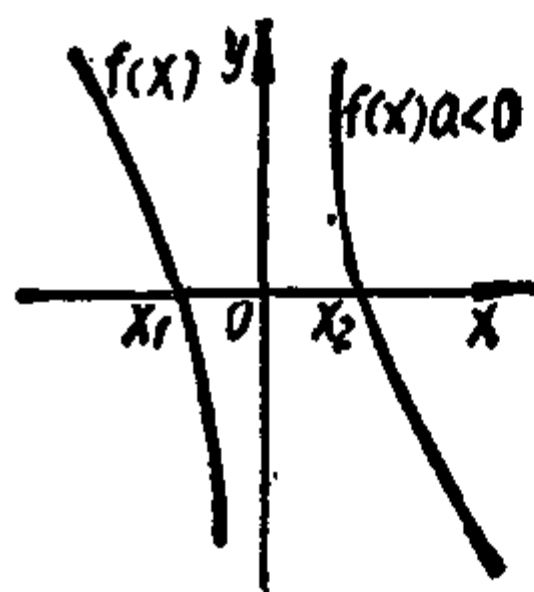


图2.8

例15 关于 x 解 $x^{-1} + ax > 1$.

如果 $a = 0$, 则 $1:x > 1$. 由此得 $0 < x < 1$.

函数 $f(x) = 1:x + ax - 1$ 在 $] -\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ 上有定义且连续. 我们有

$$f'(x) = -1:x^2 + a.$$

由此显而易见, 如果 $a < 0$, 则 $f'(x) < 0$, 且 $f(x)$ 在 $] -\infty, 0[$ 和 $]0, +\infty[$ 上递减. 但 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow 0(x < 0)} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0(x > 0)} f(x) = +\infty$ (图2.8). 因此, 如果

$a < 0$, 则不等式的解为

$$]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[,$$

这里 x_1, x_2 是方程 $1:x + ax = 1$ 的根.

如果 $a > 0$, 又 $x = \sqrt{1:a}$ 或 $x = -\sqrt{1:a}$, 则 $f'(x) = 0$;

我们有

$$f(\sqrt{1:a}) = 2\sqrt{a} - 1, f(-\sqrt{1:a}) = -2\sqrt{a} - 1.$$

对于 a 的各种值, $f(a)$ 的图象示于图2.9.

答: 1) $a > 0.25; x \in]0; +\infty[$; 2) $a = 0.25; x \in]0; 2[\cup]2; +\infty[$; 3) $0 < a < 0.25; x \in]0; x'_1[\cup]x'_2; +\infty[$ (x'_1, x'_2 为方程 $1: x + ax = 1$ 的根).

例16 关于 x 解 $\log_{0.5}(x^2 - 2x + a) > -3$.

根据不等式, 得 $0 < x^2 - 2x + a < 8$. 因此 $-x^2 + 2x < a < -x^2 + 2x + 8$. 作出函数 $a = -x^2 + 2x$, $a = -x^2 + 2x + 8$ 的图象 (图2.10).

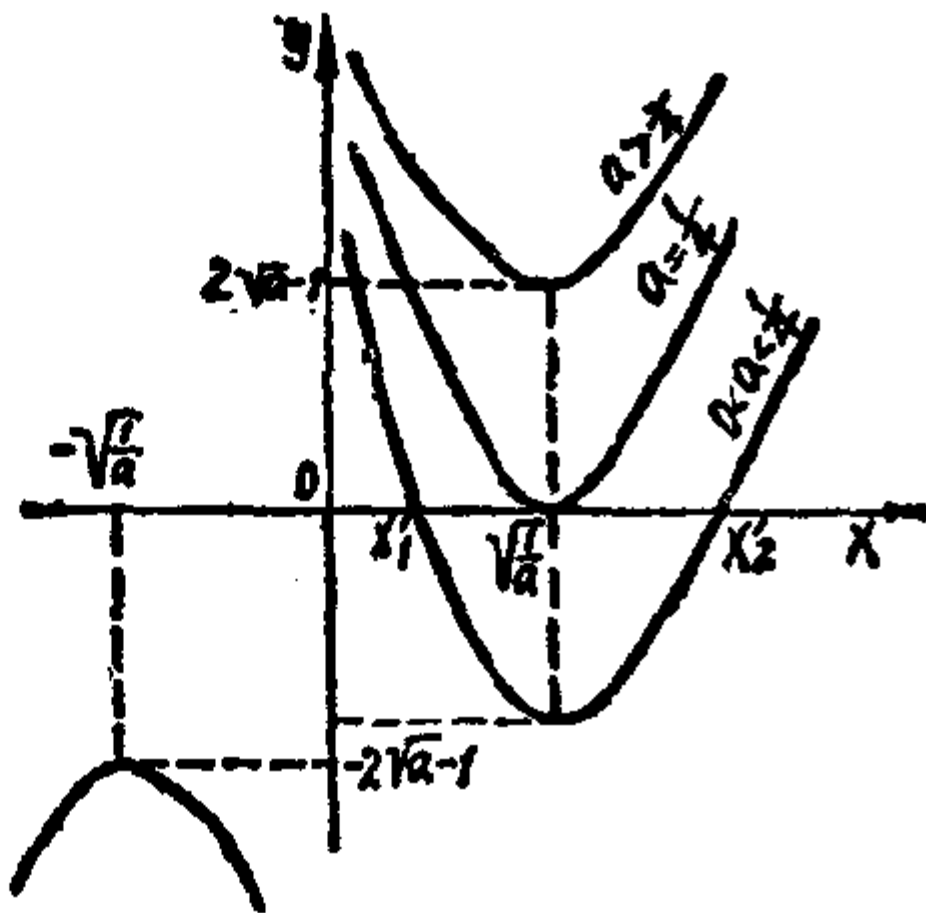


图2.9

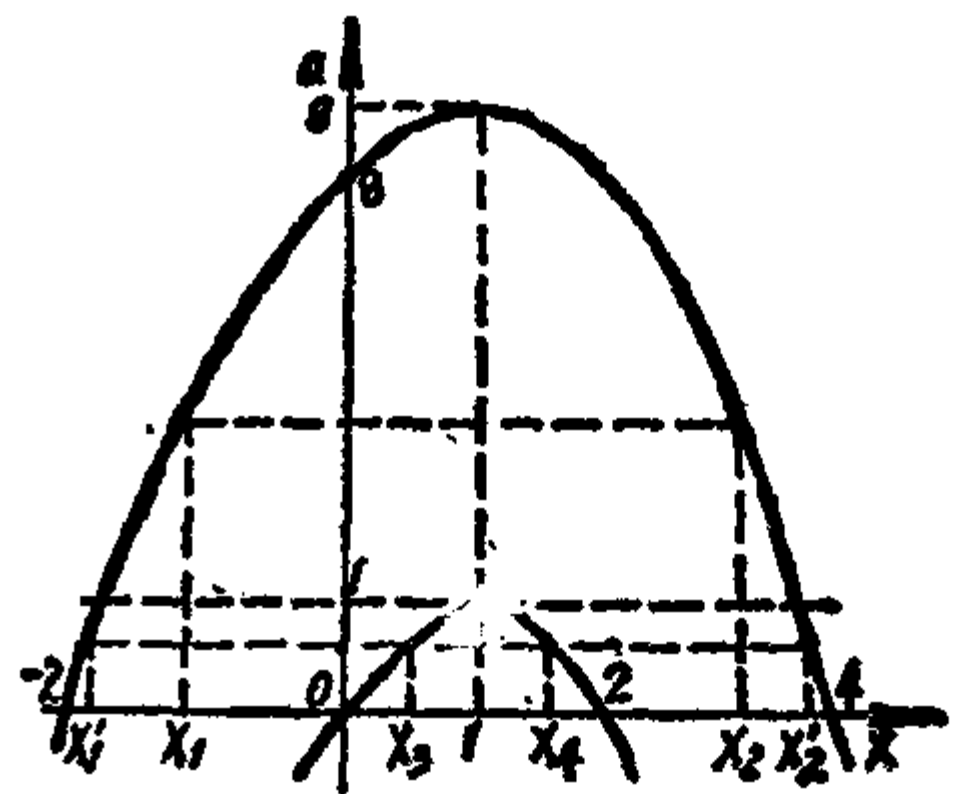


图2.10

由图象可知, 如果 $a \geq 9$, 本题无解; 如果 $1 < a < 9$, 则

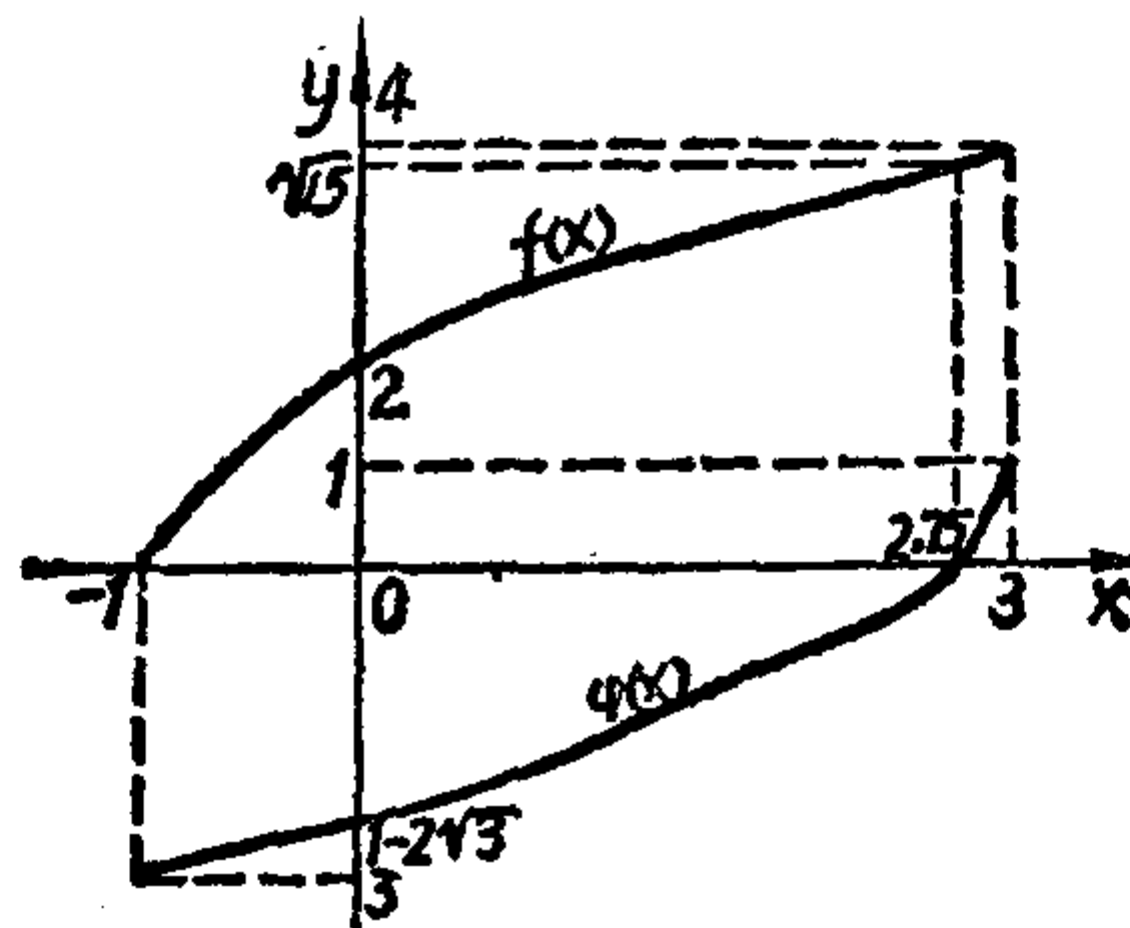


图2.11

$x_1 < x < x_2$ (x_1, x_2 是方程 $a = -x^2 + 2x + 8$ 的根); 如果 $a \leq 1$; 则 $x'_1 < x < x'_3$, 或 $x_4 < x < x'_2$ (x'_1, x'_2 是方程 $a = -x^2 + 2x + 8$ 的根, x_3, x_4 是方程 $a = -x^2 + 2x$ 的根).

例17 求解下式:

$$2\sqrt{x+1} : (1 - 2\sqrt{3-x}) < 1. \quad (2.12)$$

式 $2\sqrt{x+1}$ 在 $[-1; +\infty[$ 上有定义, 式 $1 - 2\sqrt{3-x}$ 在 $-\infty; 2.75[\cup]2.75; 3]$ 上有定义, 且不为零. 因此不等式 (2.12) 在 $[-1; 2.75[\cup]2.75; 3]$ 有定义.

作出函数 $f(x) = 2\sqrt{x+1}$ 和 $\varphi(x) = 1 - 2\sqrt{3-x}$ 在 $[-1; 2.75[\cup]2.75; 3]$ 上的图象 (图2.11). 因为在 $[-1; 2.75[$ 上 $f(x) \geq 0$ 和 $\varphi(x) < 0$, 所以在此区间上, $f(x) : \varphi(x) < 0$, 因而 $[-1; 2.75[$ 是不等式 (2.12) 的解. 其次, $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $]2.75; 3]$ 为正, 递增. $\sqrt{15} < f(x) \leq 4, 0 < \varphi(x) \leq 1$. 因此, 在 $]2.75; 3]$ $f(x) : \varphi(x) > \sqrt{15} : 1 > 1$.

答: $[-1; 2.75[$.

练习

1 关于 x 解 $|x-a| + |x-b| = c$ ($c > 0, b > a$).

2 (1) 试作出 $y = -|x|, y = 2|x+6|, y = 2|x+6| - |x| + |x-6|$ 的图象; (2) 如果 $a = 6$ 或 $a = 18$, 求方程 $2|x+6| - |x| + |x-6| = a$ 解的集合; (3) 如果 $a < 6; 6 < a < 18; a > 18$, 求方程 $2|x+6| - |x| + |x-6| = a$ 的解值; (4) 求解 $6 < 2|x+6| - |x| + |x-6| < 18$; (5) 解方程组 $y - |x-6| = 0, |x+6| = 0.5y$; (6) 解不等式组 $y - |x-6| > 0, |x+6| > 0.5y$.

3 试作出 $y = 2 - x^{-1}, y = 2x^{-2} - x^2$ 的图象. 方程 $2 - 1 : x = 2 : x^2 - x^2$ 有几个正解?

4 (1) 试作出 $f(x) = x + 1 : x$ 和 $\varphi(x) = ax + 1$ (参数 a 取某些定值时) 在 $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ 上的图象; (2) 问: 当 a 取何值时,

$$x + 1 : x = ax + 1 \quad (2.13)$$

有一个正解? 两个正解? 一个正解和一个负解? 无根? (3) 关于 a 解方程 (2.13), 并作出 $f_1(x) = (x + x^{-1} - 1) : x$ 在 $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ 上的图象; (4) 利用 $\overline{|f(x)|}$ 验证 (2) 的解; (5) 利用 $\overline{|f(x)|}$ 解出 $x + x^{-1} > ax + 1$.

5 问: a 取何值时, 方程 $x^3 - ax + (2a + 32) = 0$ 的三个根全都是实根?

6 图 2.12 上画出函数的图象: 在 $] -\infty; +\infty[$ 上的 $f(x) = ax + b$; 在 $] -\infty; +\infty[$ 上的 $\varphi(x) = cx + k$; 在 $] 3; +\infty[$ 上的 $\psi(x) = (mx + n) : (px + r)$; 在 $] -\infty; 0[$ 上的 $f_1(x) = (dx - t) : (ux + v)$. 试问:

(1) 方程 $f(x) = \varphi(x)$ 和 $\psi(x) = \varphi(x)$ 有几个实根? 为什么? 求出这些根; (2) 方程 $f_1(x) = f(x)$ 和 $f(x) = \psi(x)$ 有几个解? (3) 求出下列不等式解: $\varphi(x) \geq \psi(x)$; $f(x) < f_1(x)$; $\psi(x) : \varphi(x) < 0$; $f(x) : f_1(x) > 1$; $f(x) - \varphi(x) \geq 5$; $f_1(x) - \psi(x) > 2$; $f(x) : \varphi(x) < 1$; (4) 说出参数 $a, b, c, k, m, n, p, r, d, t, u, v$ 值; (5) 说出图形 $\overline{|f_1(x)|} \cup \overline{|\psi(x)|}$ 对称中心的坐标; (6) 利用平面轴对称的何组合 $\overline{|f_1(x)|} \rightarrow \overline{|\psi(x)|}$? (7) 说出 $\overline{|f_1(x)|}$ 和 $\overline{|\psi(x)|}$ 对称中心的坐标; (8) $\vec{a}(\overline{|f(x)|}) = \overline{|f_2(x)|}$ 和方程 $f_2(x) = f_1(x)$ 有唯一解. 列出矢量 $\vec{a}$ 坐标并列出函数 $f_2(x)$ 的方程.

*用符号 $\overline{|f(x)|}$ 表示函数 $f(x)$ 的图象。

7 试作出 $y = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}$ 和 $y = 1 - x$ 的图象, 并写出不等式 $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 - x$ 的解的集合.

8 试作出 $y = \sqrt{9 - x} - \sqrt{4 - x}$ 的图象. 当 a 取何值时, 不等式 $\sqrt{9 - x} - \sqrt{4 - x} < a$ 对于 $x \in]-\infty; 4[$ 成立?

9 $\sqrt{2x+6} + \sqrt{x+4} = 5$ 为什么有不多于一个的根? 当 a 取何值时, 方程 $\sqrt{2x-6} + \sqrt{x+4} = 5a$ 没有实解?

10 试作出 $y = x^2 + x + 1$ 的图象. 在 $]-\infty; -1[$, $]-1; 0.5]$, $[-0.5; 0[$, $]0; +\infty[$ 中的什么集合上 $(x^2 + x + 1)^x < 1$ 成立?

11 在图2.13上画出了方程 $x - |y + 1| = 1$, $x^2 + y = a$ (对于参数 a 的某些值) 的图象. 试指出这些 a 值. 求方程组 $x - (y + 1) = 1$ 和 $x^2 + y = a$ 中 a 值的集合, 使得此方程组有一个解, 两个解或无解.

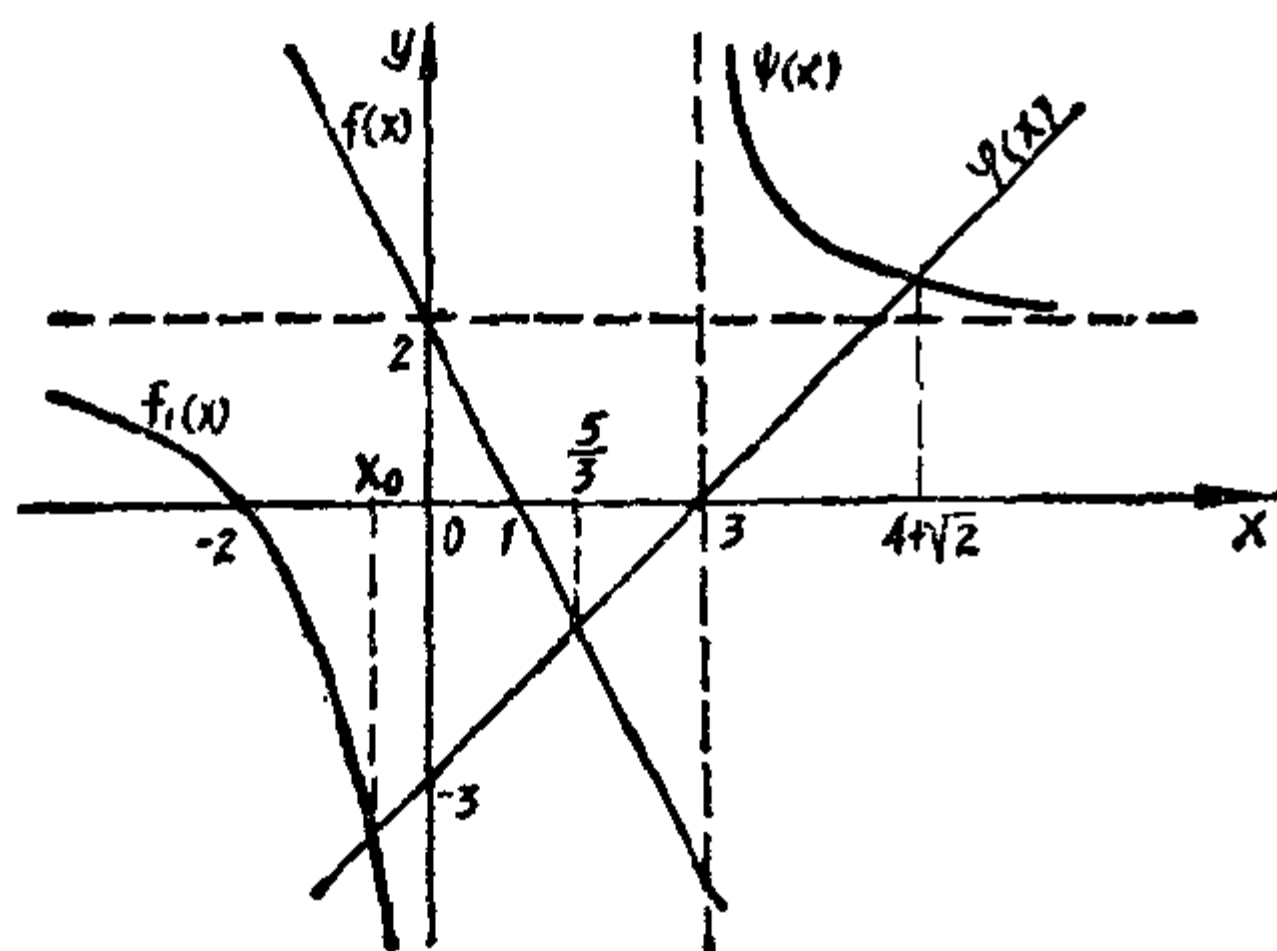


图2.12

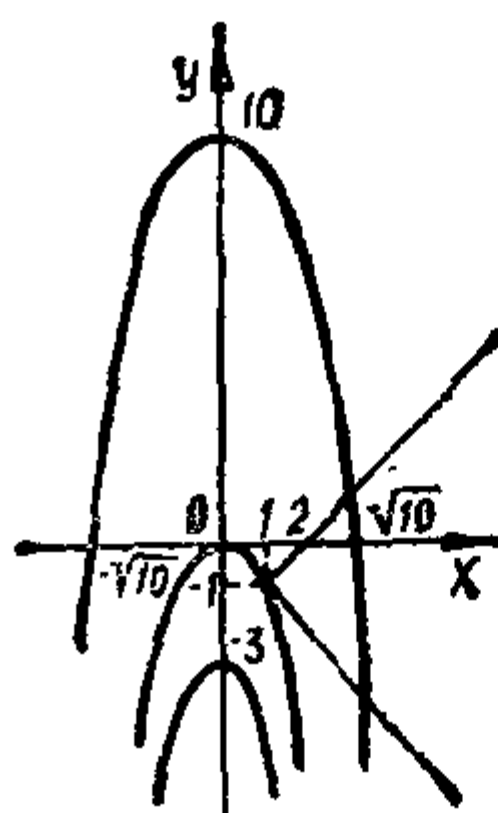


图2.13

12 证明不等式(利用导数),

(1) $2(a^4 - b^4) + 19 > 12ab$ ($a, b \geq 0$);

(2) $a^4 + a^3b - 4a^2b + ab + b^2 \geq 0$ ($a, b \geq 0$);

(3) $6a + 4b + 5c \geq 5\sqrt{ab} + 7\sqrt{ac} + 3\sqrt{bc}$ ($a, b, c \geq 0$);

- (4) $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$ (x, y 是任意数);
- (5) $bc:a+ac:b+ab:c \geq a+b+c$ ($a, b, c > 0$);
- (6) $3abc \leq a^3 + b^3 + c^3$ ($a, b, c \geq 0$);
- (7) $2^{n-1}(x^n + y^n) \geq (x+y)^n$; ($x, y \geq 0$; n 是自然数);
- (8) $a:(b+c-a) + b:(c+a-b) + c:(a+b-c) \geq 3$, 如果 a, b, c 分别为三角形的边长.

13 试作出 $2x - 3|y| = 1$, $|x| + 2y = 4$ 的图象, 求解方程组 $2x - 3|y| = 1$ 和 $|x| + 2y = 4$.

14 (1) 试作出 $f(x) = x^2 + x$ 和 $\varphi(x) = |3x + 2|$ 在 $]-\infty, +\infty[$ 上的图象; (2) 求解 $f(x) = \varphi(x)$; (3) 求解 $f(x) \geq \varphi(x)$; (4) 当 a 取何值时, 方程 $x^2 + x + a = |3x + 2|$ 有三个解, 如果它的一个解等于 $-2/3$? 一个解小于 $-2/3$? (5) 当 a 取何值时, 方程 $x^2 + x + a = |3x + 2|$ 有 4 个解? 大于 $-2/3$ 的两个根? 一个解? 无解? (6) 试作出 $f_1(x) = x^2 + x - |3x + 2|$ 在 $]-\infty, +\infty[$ 上的图象; (7) 利用 $f_1(x)$ 检验 (2) — (5) 小题中问题的答案; (8) 当 a 取何值时, 不等式 $x^2 + x - a < |3x + 2|$ 仅有正解? 仅有负解? 有属于不相交的区间的解?

15 试作出 $|2x + 3y| = 5$ 和 $|2x - 3y| = 1$ 的图象. 解这方程组

16 试作出 $|x| + |y| = 5$, $xy = -6$ 的图象. 解这方程组. 在 a 取何值时, 方程组 $|x| + |y| = a$, $xy = -6$ 有一个解, 两个解或无解?

17 (1) 试作出函数 $f(x) = |x^2 - x - 2|$ 和 $\varphi(x) = |x^2 - x - 2| + a$ 的图象 (对于参数 a 的某些值); (2) 当 a 取何值时, 方程 $f(x) = b$ 有一个解, 两个解, 三个解, 四个解或无解? (3) 求解 $|x^2 - x - 2| = 1$. (4) 求解 $|x^2 - x - 2| = a$; (5) 试列出图象是 $\overline{f(x)} \cup \overline{f_1(x)}$ 的任何一个方程, 其中 $\overline{f_1(x)} = S_{(0,x)}(\overline{f(x)})$.

18 试作出 $y = \sqrt{x^2 + x}$, $y = a - x$ 的图象(当 a 取某些值时). 求解 $\sqrt{x^2 + x} + a - x$.

19 试作出 $y = |x^2 - |x||$ 的图象、并求参数 a 使 $|x^2 - |x|| = a$ 有不同解(四个解、三个解、两个解、六个解或者无解)的集合. 求解 $|x^2 - |x|| + 0.25$.

20 (1) 试作出 $y = |2 - x| + |3 - x| + |7 - x|$ 的图象, 并按图象求出它的最小值. 为什么被加数 $|2 - x|$, $|3 - x|$, $|7 - x|$ 中的一个变为零的那些点中的一个使这个函数具有最小值?
(2) 求出函数 $y = |a - x| + |b - x| + |c - x|$ 的最小值, 如果 $a < b < c$.

21 试作出正函数 $f(x) = x$, $\varphi(x) = (2x - 1):(x - 1)$ 的图象. 求出等式 $y = \log_x \frac{2x - 1}{x - 1}$ 的定义域, 解 $\log_x \frac{2x - 1}{x - 1} = 1$.

22 (1) 试作出 $y = 2 + x$, $y = x^2$ 的图象; (2) 求出等式 $y = \log_{x+2}(2 + x)$ 的定义域; (3) 解 $x^2 = 2 + x$; (4) 在诸集合 $] - 2; - 1[$, $] - 1; 0[$, $] 0; 1[$, $] 1; 2[$, $] 2; +\infty[$ 中的什么集合上, 不等式 $\log_{x+2}(2 + x) < 1$ 成立?

23 (1) 试作出 a 取某些值时, $y = 0.5\sqrt{a - 4x^2}$ 的图象;
(2) 当 a 取何值时, 方程 $x - 1 = 0.5\sqrt{a - 4x^2}$ 有一个根? 求解 $x - 1 = 0.5\sqrt{a - 4x^2}$.

24 试作出 $y = x^2$ 和 $y = x - a$ 的图象(参数 a 取某些值时), 求解 $\log_2(x - a) = 2$.

第三章 等价变换法

§ 3.1 整式方程和不等式

例1 求方程 $(a^2 - 5a + 6)x = a^2 - 4$ 的根 x_0 。

将给定方程的两边分解因式

$$(a-3)(a-2)x = (a-2)(a+2).$$

显然, 如果 $a=2$, 则任何数都是方程的解; 如果 $a=3$, 则方程无解。因为在 x 取任何值时, 方程式的左边都等于0, 而右边却不为0; 如果 $a=-2$, 则方程的解为零; 如果 $a \neq 2, a \neq 3$, 则 $x_0 = (a+2):(a-3)$ 。

例2 解不等式 $x^2 + 2x - 3|x+1| + 3 > 0$ 。

解形为 $a|f(x)| + b|\varphi(x) - \psi(x)| \geq 0$ (在绝对值符号下含有变量 x) 的不等式, 将化为解下列不等式组:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) \geq 0, \\ af(x) + b\varphi(x) - \psi(x) \geq 0, \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} f(x) \leq 0, \\ \varphi(x) \geq 0, \\ af(x) - b\varphi(x) + \psi(x) \leq 0, \end{array} \right\}$$
$$\left. \begin{array}{l} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) \leq 0, \\ af(x) - b\varphi(x) - \psi(x) \geq 0, \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} f(x) \leq 0, \\ \varphi(x) \leq 0, \\ af(x) + b\varphi(x) + \psi(x) \leq 0, \end{array} \right\}$$

解

$$x^2 + 2x - 3|x+1| + 3 > 0 \iff$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} x+1 \geq 0, \\ x^2 + 2x - 3(x+1) + 3 > 0, \\ x+1 < 0, \\ x^2 + 2x - 3(-x-1) + 3 > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \left\{ \begin{array}{l} x+1 \geq 0, \\ x^2 - x > 0, \\ x+1 < 0, \\ x^2 + 5x + 6 > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \geq -1, \\ x < 0 \text{ 或 } x > 1, \\ x < -1, \\ x < -1 \text{ 或 } x > -2 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

答: $] -\infty, -3[\cup] -2, 0[\cup] 1, +\infty[$.

例3 解三元方程组:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + xy + 4xz - 4z^2 = 0, \\ y^2 + xy + 4yz - 8z^2 = 0, \\ xyz = 8. \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

把方程(不等式)组化为与之等价的方程(不等式)组来代替原方程(不等式)组. 方程(不等式)组变换的主要方法有: (1) 代换法; (2) 逐项加(减)法; (3) 逐项相乘(除)法.

由方程组的第三个方程可知, $x, y, z \neq 0$, 因此将第一个方程逐项乘 y , 第二个方程逐项乘 x , 便得原方程的等价方程组:

$$\left. \begin{array}{l} x^2y + xy^2 + 4xyz - 4z^2y = 0, \\ xy^2 + x^2y + 4xyz - 8z^2x = 0, \\ xyz = 8. \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

将上面的第一个方程逐项减去第二个方程, 可得与方程组(3.2)等价的方程组:

$$\left. \begin{array}{l} xy^2 + x^2y + 4xyz - 4z^2y = 0, \\ 4z^2(2x - y) = 0, \\ xyz = 8. \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

由第二个方程得 $y = 2x$. 于是方程组(3.3)可用它的等价方

程组代替:

$$\left. \begin{array}{l} 4x^3 + 2x^3 + 4 \times 8 - 4z^2 \times 2x = 0, \\ y = 2x, \\ 2x^2z = 8 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 3x^3 - 4xz^2 = -16, \\ y = 2x, \\ x^2z = 4 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 3x^3 - 4x \times 16/x^4 = -16, \\ y = 2x, \\ z = 4:x^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 3x^3 - 64:x^3 = -16, \\ y = 2x, \\ z = 4:x^2 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x^3 = -8 \\ y = 2x, \\ z = 4:x^2, \\ x^3 = 8:3 \\ y = 2x, \\ z = 4:x^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -4, \\ z = 1, \\ x = 2:\sqrt[3]{3}, \\ y = 4:\sqrt[3]{3} \\ z = \sqrt[3]{9}. \end{array} \right\}$$

答: $\{(-2; -4; 1), (2/\sqrt[3]{3}; 4/\sqrt[3]{3}; \sqrt[3]{9})\}$.

例4 解二元方程组:

$$|x| + |y| = 5, \quad xy = -6.$$

解

$$\left. \begin{array}{l} |x| + |y| = 5, \\ xy = -6 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x > 0, \\ y < 0, \\ x - y = 5, \\ xy = -6, \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x > 0, \\ y < 0, \\ y = x - 5 \\ x(x - 5) = -6, \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x < 0, \\ y > 0, \\ -x + y = 5 \\ xy = -6 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x < 0, \\ y > 0, \\ y = 5 + x \\ x(5 + x) = -6, \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x > 0, \\ y < 0, \\ y = x - 5 \\ x = 2 \text{ 或 } x = 3, \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x > 0, \\ y < 0, \\ y = -3 \text{ 或 } y = -2, \\ x = 2 \text{ 或 } x = 3, \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x < 0, \\ y > 0, \\ y = 5 + x \\ x = -3 \text{ 或 } x = -2 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x < 0, \\ y > 0, \\ y = 2 \text{ 或 } y = 3, \\ x = -3 \text{ 或 } x = -2 \end{array} \right\}$$

答: $\{(2; -3), (3; -2), (-3; 2), (-2; 3)\}$.

§ 3.2 有理方程和有理不等式

例1 关于 x 解不等式:

$$1: x + ax > 1. \quad (3.4)$$

解

$$1: x + ax > 1 \iff 1: x + ax - 1 > 0 \iff \frac{ax^2 - x + 1}{x} > 0$$

$$\iff \frac{a(x - x_1)(x - x_2)}{x} > 0, \quad (3.5)$$

式中 $x_1 = (1 + \sqrt{1 - 4a}) : 2a$,

$x_2 = (1 - \sqrt{1 - 4a}) : 2a$, $a \neq 0$.

显然, 如果 $0 < a < 0.25$ 或 $a < 0$, 则 x_1 和 x_2 为实数; 如果 $a = 0.25$, 则 $x_1 = x_2 = 2$, 即不等式(3.4)为下式:

$$1: x + 0.25x > 1. \quad (3.6)$$

如果 $a > 0.25$, 则方程 $ax^2 - x + 1 = 0$ 无实根. 在这种情况下, 当 x 为一切实数值时 $ax^2 - x + 1 > 0$. 因此, 如果 $x > 0$, 不等式(3.4)成立.

如果 $a=0$, 则不等式(3.4)形式为 $1:x>1$. 因此 $0<x<1$.

兹解不等式(3.6):

$$\left. \begin{array}{l} a=0.25 \\ 1:x+0.25x>1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} a=0.25 \\ x>0, \\ 4+x^2>4x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} a=0.25, \\ x>0, \\ (x-2)^2>0 \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} a=0.25 \\ x>2 \text{ 或 } 0<x<2. \end{array} \right\}$$

解不等式 (3.5):

$$\frac{a(x-x_1)(x-x_2)}{x} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 0 < a < 0.25 \\ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{x} > 0, \\ x_1 > 0, x_2 > 0, x > 0, \\ a < 0, \\ x_1 < 0, x_2 > 0. \\ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{x} < 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < a < 0.25 \\ 0 < x < x_2 \text{ 或 } x > x_1, \\ a < 0 \\ x < x_1 \text{ 或 } 0 < x < x_2 \end{array} \right]$$

答: 1) $a < 0, x < x_1$ 或 $0 < x < x_2$; 2) $a = 0, 0 < x < 1$; 3) $0 < a < 0.25; x > x_1$ 或 $0 < x < x_2$; 4) $a = 0.25, 0 < x < 2$ 或 $x > 2$; 5) $a > 0.25, x > 0$.

§ 3.3 无理方程和无理不等式

例 1 解不等式 $2\sqrt{x+1}:(1-2\sqrt{3-x})<1$.

解

$$2\sqrt{x+1}:(1-2\sqrt{3-x})<1 \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x+1 \geq 0, \\ 3-x \geq 0, \\ \frac{2\sqrt{x+1}}{1-2\sqrt{3-x}} < 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 3, \\ \frac{2\sqrt{x+1}}{1-2\sqrt{3-x}} < 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 3, \\ 4-2\sqrt{3-x} < 0, \\ -1 \leq x \leq 3, \\ 1-2\sqrt{3-x} > 0 \\ 2\sqrt{x+1} < 1-2\sqrt{3-x} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 3, \\ x < 0.75 \\ -1 \leq x \leq 3, \\ x > 0.75, \\ (2\sqrt{x+1})^2 < (1-2\sqrt{3-x})^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x < 2.75, \\ 2.75 < x \leq 3, \\ 4\sqrt{3-x} < 9-8x. \end{array} \right\}$$

答: $[-1; 2.75[$.

例2 解方程组:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x-\sqrt{y}} - \sqrt{x+\sqrt{y}} = 1, \\ \sqrt{x^2+y} + \sqrt{x^2-y} = 1 \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

解

$$\sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} y &\geq 0, \\ x &\geq 0, \\ x - \sqrt{y} &\geq 0, \\ (\sqrt{x + \sqrt{y}} - \sqrt{x - \sqrt{y}})^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} y &\geq 0, \\ x &\geq \sqrt{y}, \\ (x + \sqrt{y}) - 2\sqrt{x^2 - y} + (x - \sqrt{y}) &= 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} y &\geq 0, \\ x &\geq \sqrt{y}, \\ 2x - 1 &= 2\sqrt{x^2 - y} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} y &\geq 0, \\ x &\geq \sqrt{y}, \\ 2x - 1 &\geq 0, \\ (2x - 1)^2 &= 4(x^2 - y) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} y &\geq 0, \\ x^2 &\geq y, \\ x &\geq 0.5 \\ 4(x - y) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$$\sqrt{x^2 - y} + \sqrt{x^2 + y} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 - y &\geq 0, \\ x^2 + y &\geq 0, \\ (\sqrt{x^2 - y} + \sqrt{x^2 + y})^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} -x^2 &\leq y \leq x^2 \\ 2\sqrt{x^4 - y^2} &= 1 - 2x^2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} -x^2 &\leq y \leq x^2, \\ 1 - 2x^2 &\geq 0, \\ 4(x^4 - y^2) &= (1 - 2x^2)^2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} -x^2 &\leq y \leq x^2 \\ -\sqrt{0.5} &\leq x \leq \sqrt{0.5}, \\ 4(x^2 - y^2) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

方程组(3.7) 等价于方程组和不等式(3.8和3.9):

$$\left. \begin{array}{l} y \geq 0, \\ y \leq x^2, \\ x \geq 0.5, \\ -x \leq y \leq x^2, \\ -\sqrt{0.5} \leq x \leq \sqrt{0.5}, \\ x - y = 0.25 \\ 4(x - y)(x + y) = 1. \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} 0 \leq y \leq x^2 \\ x \geq 0.5, \\ -\sqrt{0.5} \leq x \leq \sqrt{0.5}, \\ x - y = 0.25 \\ x + y = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq y \leq x^2 \\ -0.5 \leq x \leq \sqrt{0.5}, \\ x = 5/8 \\ y = 3/8 \end{array} \right\}$$

答: $\{(5/8, 3/8)\}$.

例 3 关于 x 解方程:

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x.$$

解

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - p \geq 0, \\ x^2 - 1 \geq 0, \\ x \geq 0, \\ (\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1})^2 = x^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq p, \\ x^2 \geq 1, \\ x \geq 0, \\ 4\sqrt{x^2 - p}\sqrt{x^2 - 1} = 4 - 4x^2 + p \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 &\geq p, \\ x &\geq 1, \\ 4 - 4x^2 + p &\geq 0, \\ 16(x^2 - p)(x^2 - 1) &= (4 - 4x^2 + p)^2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 &\geq p, \\ x &\geq 1, \\ x^2 &\leq (p+4):4, \\ x^2 &= (4-p)^2:8(2-p), \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= (4-p)^2:8(2-p), \\ p &\leq (4-p)^2:8(2-p) \leq (p+4):4, \\ x &\geq 1, \\ p &< 2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}, \\ 0 &\leq p \leq 4:3, \\ x &\geq 1, \\ p &< 2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x &= (4-p):2\sqrt{2(2-p)}, \\ 0 &\leq p \leq 4:3, \\ (4-p):2\sqrt{2(2-p)} &\geq 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} x &= (4-p):2\sqrt{2(2-p)}, \\ 0 &\leq p \leq 4:3. \end{aligned} \right\}$$

答: $\{(4-p):2\sqrt{2(2-p)}\}; 0 \leq p \leq 4:3.$

§ 3.4 指数方程和指数不等式, 对数方程和对数不等式

指数函数和对数函数的基本性质. 解简单指数方程 $a^x = b$ 是以幂的下列性质为基础的: 如果两数的幂在同底 a ($a > 0$, $a \neq 1$) 时相等, 则数本身也相等.

解简单对数方程 $\log_a x = b$ 是以对数的如下性质为基础的: 如果底同为 a ($a > 0$, $a \neq 1$), 两正数的对数相等, 则两数本身也相等.

解简单指数不等式 $a^x < b$ 和对数不等式 $\log_a x \leq b$ 是以指数函数和对数函数的如下性质为基础的: $(a^x < b, 0 < a < 1) \Leftrightarrow x > \log_a b$; $(a^x < b, a > 1) \Leftrightarrow x < \log_a b$; $(\log_a x < b, 0 < a < 1) \Leftrightarrow x > a^b$; $(\log_a x < b, a > 1) \Leftrightarrow x < a^b$.

例1 解 $\log_2(x-1) + \log_2(x-2) \leq \log_2(x+2)$.

解 $\log_2(x-1) + \log_2(x-2) \leq \log_2(x+2) \Leftrightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} x-1 > 0, \\ x-2 > 0, \\ x+2 > 0, \\ \log_2((x-1)(x-2)) \leq \log_2(x+2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x > 2, \\ (x-1)(x-2) \leq (x+2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x > 2, \\ x^2 - 4x \leq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x > 2, \\ 0 \leq x \leq 4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 2 < x \leq 4.$$

答: $]2; 4]$.

化对数方程为整式方程或有理方程. 型如

$$\log_a^n x + m_1 \log_a^{n-1} x + m_2 \log_a^{n-2} x + \cdots + m_{n-1} \log_a x + m_n = 0$$

(n 是自然数, $0 < a < 1$ 或 $a > 1$) 的对数方程, 通过用 $\log_a x = t$ 代替的方法, 将它化为关于 t 的整式方程.

例2 解方程:

$$\lg^3 x - \lg^2 x - 6 \lg x = 0. \quad (3.10)$$

设 $\lg x = y$, 得 $y^3 - y^2 - 6y = 0$. 此方程的根为 $y_1 = 0$, $y_2 = -2$, $y_3 = 3$. 因而, 方程 (3.10) 化为解最简单的方程: $\lg x = 0$, $\lg x = -2$, $\lg x = 3$. 解这些方程, 得出方程 (3.10) 的根为: 1; 0.01; 1000.

指数一对数方程也可化为有理方程. 为此, 可对这种方程的两边预先求对数.

例3 解方程:

$$3^8 = x^{2 + \log_3 x}. \quad (3.11)$$

此方程的右边在 $]0; +\infty[$ 内有定义. 将方程两边以 3 为底取对数: $8 = (2 + \log_3 x) \times \log_3 x$. 我们记 $\log_3 x = y$. 得 $8 = (2 + y)y$. 这个方程的根为: $y_1 = -4$, $y_2 = 2$. 方程 (3.11) 已化为解两个方程: $\log_3 x = -4$, $\log_3 x = 2$. 解此二方程, 便得方程 (3.11) 的解.

答: $\{1/81; 9\}$.

例4 解方程:

$$\log_{0.5}(x^2 - 2x + a) > -3.$$

解

$$\log_{0.5}(x^2 - 2x + a) > -3 \iff \left. \begin{array}{l} x^2 - 2x + a > 0, \\ x^2 - 2x + a < 8. \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

$$(3.13)$$

我们记 $x_1 = 1 - \sqrt{1-a}$, $x_2 = 1 + \sqrt{1-a}$ 为方程 $x^2 - 2x + a = 0$ 的根; $x_3 = 1 - \sqrt{9-a}$, $x_4 = 1 + \sqrt{9-a}$ 为方程 $x^2 - 2x + (a-8) = 0$ 的根.

$-8)=0$ 的根. 则方程组(3.12)和(3.13)等价:

$$\left. \begin{array}{l} (x-x_1)(x-x_2) > 0, \\ (x-x_3)(x-x_4) < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \leq 1, \\ x < x_1 \text{ 或 } x > x_2, \\ x_3 < x < x_4, \\ 1 < a < 9, \\ -\infty < x < +\infty, \\ x_3 < x < x_4, \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \leq 1, \\ x_3 < x < x_1 \text{ 或 } x_2 < x < x_4, \\ 1 < a < 9 \\ x_3 < x < x_4. \end{array} \right\}$$

答: 1) $a \leq 1,]x_3; x_1[\cup]x_2; x_4[$; 2) $1 < a < 9;]x_3; x_4[$.

练习

解(关于 x, y, z):

1 $x^5 - x^3 - x^2 + 1 = 0$.

2 $|x-1||x+2| = 4$.

3 当 a 取何值时, 方程组 $ax - 4y = a + 1$ 和 $2x + 2ay = -1$ 能使 $x > 0$ 或 $y < 0$?

解(关于 x, y, z, t):

4 $\begin{cases} |2x + 3y| = 5, \\ |2x - 3y| = 1. \end{cases}$

5 $\begin{cases} 2x - 3|y| = 1, \\ |x| + 2y = 4. \end{cases}$

6 $x^2 - |3x + 2| + x = 0$.

7 $6 * 2|x + 6| - |x| + |x - 6| = 18$.

$$\left. \begin{array}{l} 8 \quad x + y + xy = 7, \\ \quad x^2 + y^2 + xy = 13. \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 9 \quad x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 = 0, \\ \quad x^2 + y^2 = 8. \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 10 \quad xy + xz + yz = 27, \\ \quad yz + ty + tz = 0, \\ \quad zx + tz + tx = 0, \\ \quad xy + tx + ty = 0. \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 11 \quad x + y + z = 4, \\ \quad x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ \quad xy + xz - yz = 5. \end{array} \right\}$$

12 如果下列方程的根 x_1 和 x_2 满足不等式 $-5 < x_1 < -4$ 和 $2 < x_2 < 3$. 求方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的系数 b 和 c 是两个什么样彼此靠得最近的整数之间的数.

13 当 a 取何值时, 不等式 $x^2 - (8a - 2)x + 15a^2 - 2a - 7 > 0$ 能在以下情况之下成立: x 为一切实数值; x 为除1以外的一切实数值.

$$\left. \begin{array}{l} 14 \quad (x + y)^2 - z^2 = 4, \\ \quad (y + z)^2 - x^2 = 2, \\ \quad (z + x)^2 - y^2 = 3. \end{array} \right\}$$

$$15 \quad \frac{x^2 - |x| - 12}{x - 3} * 2x.$$

$$16 \quad x^{-1} + (x + 2)^{-1} * 0; \quad x^{-1} + (x + a)^{-1} * 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} 17 \quad (x + y) : xyz = 7 : 12, \\ \quad (x + z) : xyz = 5 : 12, \\ \quad (x + z) : xyz = 1 : 3. \end{array} \right\}$$

$$18 \quad (2ax + 3) : (5x - 4a) * 4.$$

$$19 \quad a^2 - (a^2 - 1) : (2x - x^2) * (x + 2) : (x - 2).$$

20 当P取何值时, $-9 < (3x^2 + px - 6) : (x^2 + x + 1) < 6$, 对于x的一切实数值成立?

解(对于x, y, z):

$$21 \quad x^3 + x^2 + x^{-1} + x^{-3} + x^{-2} + x = 6.$$

$$22 \quad \left. \begin{aligned} \frac{ax - a(1-a)}{a^2 - ax - 1} > 0, \\ -1 \leq x \leq 1. \end{aligned} \right\}$$

$$23 \quad \left. \begin{aligned} x + y + z &= 6, \\ xyz &= 8, \\ x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} &= 1.5. \end{aligned} \right\}$$

$$24 \quad \left. \begin{aligned} xy^{-1} + yz^{-1} + zx^{-1} &= 3, \\ yx^{-1} + zy^{-1} + xz^{-1} &= 3, \\ x + y + z &= 3; x, y, z > 0. \end{aligned} \right\}$$

$$25 \quad (x-7) : \sqrt{4x^2 - 19x + 12} * 0.$$

$$26 \quad (x^4 - 2x^2 + 1)^{0.5} * 1 - x.$$

$$27 \quad (x+6)^{0.5} - (x-7)^{0.5} * 5.$$

$$28 \quad (5x+7)^{0.5} - (3x+1)^{0.5} * (x+3)^{0.5}.$$

$$29 \quad (x^3 + x^2 - 1)^{0.5} + (x^3 + x^2 + 2)^{0.5} * 3.$$

$$30 \quad (8+x)^{0.25} - (x-8)^{0.25} * 2.$$

$$31 \quad (x^2 - 3x)^{0.5} * a - x.$$

$$32 \quad (9-x)^{0.5} - (4-x)^{0.5} * a.$$

$$33 \quad 2(x+a)^{0.5} * x + 1.$$

$$34 \quad 2x : (2x+9)^{0.5} * (1+2x)^{-0.5} - 1.$$

$$35 \quad 25(2x+15)^{-0.5} + (2x+15)^{0.5} * 2x.$$

$$36 \quad x - 1 * 0.5(a - 4x^2)^{0.5}.$$

$$37 \quad (x+a)^{0.5} * a - x^{0.5}.$$

$$38 \sqrt{x(2a-x)} * 1 - x.$$

$$39 1 - (1 - 8x^2)^{0.5} * 2ax.$$

$$40 \left. \begin{aligned} (x^2 + 5)^{0.5} + (y^2 - 5)^{0.5} &= 15, \\ x^2 + y^2 &= 13. \end{aligned} \right\}$$

$$41 \left. \begin{aligned} \sqrt[3]{x-y} &= \sqrt{x-y} \\ \sqrt[3]{x+y} &= \sqrt{x+y-4} \end{aligned} \right\}$$

$$42 x^{\sqrt{x}} * \sqrt{x^x}.$$

$$43 2^{-x} - 2^{1+x} * 1.$$

$$44 (x^2 + x + 1)^x * 1.$$

$$45 \log_2(\sqrt{x+3} - x - 1) * 0.$$

$$46 \log_x \frac{2x-1}{x-1} * 1.$$

$$47 1 : \log_a x * 1.$$

$$48 3^{\log_{0.5}(x^2 - 5x + 7)} * 1.$$

$$49 \log_x(2+x) * 1.$$

$$50 x^{(\lg x)^2 - 8 \lg x + 1} * 1000.$$

$$51 \log_2 2 \times \log_{2.2} 2 * \log_{1.2} 2.$$

$$52 \log_2(4^x + 4) - \log_2(2^{x+1} - 3) * x.$$

$$53 \left. \begin{aligned} x^2 y^{-1} &= 5, \\ x^{y+2} &= 3. \end{aligned} \right\} \quad 54 \left. \begin{aligned} |x|^{\lg y} &= 4, \\ xy &= 40. \end{aligned} \right\}$$

$$55 \left. \begin{aligned} \sqrt[3]{x+7y} &= 3, \\ (2x+14y) \times 2^x &= 72. \end{aligned} \right\}$$

$$56 \left. \begin{aligned} x^z &= y^{8/3} \\ y^z &= x^{2/3} \\ 2\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{y} &= 9z, \end{aligned} \right\}$$

$$57 \left. \begin{aligned} y^{x^2 - 3x - 4} &= 1, \\ \log_2 x &= y. \end{aligned} \right\} \quad 58 \left. \begin{aligned} \log_2 x + \log_4 1/\bar{y} &= 3, \\ x^2 + 16y^2 &= 17. \end{aligned} \right\}$$

$$59 \left. \begin{aligned} \log_2(y-x) &= \log_8(3y-7x), \\ x^2 + y^2 &= 5. \end{aligned} \right\}$$

第四章 不等价变换法

§ 4.1 方程的不等价变换

用有理方程代替无理方程(用方程两边自乘偶次方的方法)可得到与原方程不等价的方程。如果由于某种变换的结果,使之所得方程的定义域比原方程的定义域为宽,在解对数方程和其他类型的方程时,就有可能出现增根。这用直接验证根的方法就可发现增根。不作这种验证就不能认为解完了方程。

例1 解方程:

$$\log_2(x-1) + \log_2(x-2) = \log_2(x+2). \quad (4.1)$$

兹变换方程(4.1)为下式:

$$\log_2(x-1)(x-2) = \log_2(x+2),$$

$$(x-1)(x-2) = x+2, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 4. \quad (4.2)$$

把0和4直接代入方程(4.1),可证0不是方程的解。因方程(4.1)和(4.2)不等价而出现增根。即从 $\log_2(x-1)(x-2)$ 的存在得不出 $\log_2(x-1)$ 和 $\log_2(x-2)$ 也存在,因为,当 $x-1 < 0$ 和 $x-2 < 0$ 时,也有 $(x-1)(x-2) > 0$ 。

例2 关于 x 解:

$$2\sqrt{x^2-1} = x - \sqrt{x^2-a}. \quad (4.3)$$

兹变换方程(4.3)为下式:

$$(2\sqrt{x^2-1})^2 = (x - \sqrt{x^2-a})^2;$$

$$4x^2 - 4 = x^2 - 2x\sqrt{x^2 - a} + x^2 - a,$$

$$2x\sqrt{x^2 - a} = -2x + (4 - a);$$

$$(2x\sqrt{x^2 - a})^2 = (-2x + (4 - a))^2;$$

$$x^2 = (4 - a)^2 : (16 - 8a). \quad (4.4)$$

由此不难得出, $a < 2$. 由方程(4.3)得 $x \geq 0$, 因为它的左边是非负的. 因此, 由等式(4.4)得

$$x = (4 - a) : 2\sqrt{2(2 - a)}. \quad (4.5)$$

切勿认为已得解答, 因为还没有确定 a 取何值时, 方程(4.5)才与方程(4.3)等价.

我们将所得的 x 值代入方程(4.3):

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - a} &= \sqrt{(4 - a)^2 : (16 - 8a) - a} \\ &= |3a - 4| : 2\sqrt{2(2 - a)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^2 - 1} &= 2\sqrt{(4 - a)^2 : (16 - 8a) - 1} \\ &= 2|a| : 2\sqrt{2(2 - a)}. \end{aligned}$$

显然, 当且仅当下式成立时:

$$|3a - 4| + 2|a| = 4 - a. \quad (4.6)$$

兹求方程(4.6)的根.

如果 $a < 0$, 则 $2|a| = -2a$, $|3a - 4| = 4 - 3a$, 因而方程(4.6)无解. 如果 $0 < a < 4/3$, 则 $|3a - 4| = 4 - 3a$, $2|a| = 2a$, 因而方程(4.6)的解为 $[0, 4/3]$. 如果 $4/3 < a < 2$, 则 $|3a - 4| = 3a - 4$, $2|a| = 2a$, 因而方程(4.6)无解.

答: $x = (4 - a) : 2\sqrt{2(2 - a)}$, $0 \leq a \leq 4/3$.

练习 关于 x 解:

$$1 \quad \sqrt{2x-6} + \sqrt{x+4} = 5.$$

$$2 \quad \sqrt{5x+7} - \sqrt{3x+1} = \sqrt{x+3}.$$

$$3 \quad \sqrt{x^2-3x} = a-x, \quad 4 \quad \sqrt{x^2+x} = a-x.$$

$$5 \quad \sqrt{x+a} = x+1, \quad 6 \quad \log_{0.5} (x^2-2x+a) = -3.$$

$$7 \quad \log_x (x-a) = 2.$$

§ 4.2 中值定理的应用

在证明许多不等式时, 应用下式

$$0.5(a+b) \geq \sqrt{ab} \quad (a, b \geq 0) \quad (4.7)$$

是合适的.

例1 证明: $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$ ($a, b, c \geq 0$).

显然, $a^4 + b^4 + c^4 = 0.5(a^4 + b^4) + 0.5(b^4 + c^4) + 0.5(a^4 + c^4)$.

根据不等式(4.7), 得

$$0.5(a^4 + b^4) \geq a^2 b^2, \quad 0.5(b^4 + c^4) \geq b^2 c^2,$$

$$0.5(c^4 + a^4) \geq c^2 a^2.$$

将此不等式逐项相加后, 得

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2. \quad (4.8)$$

但是, $a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 = 0.5(a^2 b^2 + b^2 c^2) + 0.5(b^2 c^2 + c^2 a^2) + 0.5(c^2 a^2 + a^2 b^2)$. 根据不等式(4.7), 得

$$0.5(a^2 b^2 + b^2 c^2) \geq ab^2 c, \quad 0.5(b^2 c^2 + c^2 a^2) \geq bc^2 a,$$

$$0.5(c^2 a^2 + a^2 b^2) \geq ca^2 b.$$

把这三个不等式逐项相加后, 得

$$a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 \geq abc(b+c+a). \quad (4.9)$$

由不等式(4.8)和(4.9), 命题得证.

例2 若 $a+b+c=1$, 求证: $(4a+1)^{0.5} + (4b+1)^{0.5} + (4c+1)^{0.5} \leq 5$.

显然,

$$\sqrt{4a+1} = \sqrt{(4a+1) \times 1}.$$

由公式(4.7), 得

$$\sqrt{4a+1} = \sqrt{(4a+1) \times 1} \leq 0.5((4a+1)+1) = 2a+1. \quad (4.10)$$

类似地, 有

$$\sqrt{4b+1} \leq 2b+1, \quad \sqrt{4c+1} \leq 2c+1. \quad (4.11)$$

把不等式(4.10)和(4.11)逐项相加, 并考虑到 $a+b+c=1$, 即得

$$\begin{aligned} \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} &\leq 2a+2b+2c+3 \\ &= 2(a+b+c)+3 \\ &= 2 \times 1 + 3 = 5. \end{aligned}$$

例3 若 $a \geq 0$, 求证: $a^4 - a^2 - 3a + 5 > 0$.

我们把该不等式变换成形为 $a^4 + 5 \geq a^2 + 3a$. 利用公式(4.7), 得 $a^4 + 5 \geq 2\sqrt{5a^4} = 2a^2\sqrt{5}$. 其次,

$$2a^2\sqrt{5} > a^2 + 3a \iff a(2\sqrt{5} - 1) > 3 \quad (a \neq 0).$$

因为 $2\sqrt{5} - 1 > 3$, 所以, 当 $a \geq 1$ 时, $a(2\sqrt{5} - 1) > 3$ 成立.

还须证明: 当 $0 \leq a \leq 1$ 时, 原不等式成立.

如果 $0 \leq a \leq 1$, 则 $a^4 + 5 \geq 5$, $a^2 + 3a \leq 4$.

例4 若 $a, b > 0$, 求证: $4ab(3-a) - 4a(1+b^2) \leq b$.

将这个不等式变换为 $(4a^2b+b) + (4a+4ab^2) \geq 12ab$. 根据

公式(4.7), 得

$$4a^2b + b \geq 2\sqrt{4a^2b \times b} = 4ab,$$

$$4a + 4ab^2 \geq 2\sqrt{4a \times 4ab^2} = 8ab.$$

把这些不等式逐项相加后, 命题得证.

练习

证明($a, b, c > 0$):

1 $a^3 + 3a^2 + 15 > 13a.$

2 $bc:a + ac:b + ab:c \geq a + b + c.$

3 $3abc \leq a^3 + b^3 + c^3.$

4 $1:\sqrt{bc} + 1:\sqrt{ca} + 1:\sqrt{ab} \leq 1/a + 1/b + 1/c.$

§ 4.3 用数学归纳法证明不等式

假定需要证明不等式 $f(n) > 0$ 对于 $n \geq k$ 成立 (n, k 是自然数). 于是, 验证这个不等式对于 $n = k$ 成立. 设对于 $n = k_1$ ($k_1 > k, k_1$ 是自然数) 也成立. 然后, 证明不等式 $f(n) > 0$ 对 $n = k + 1$ 成立, 而且, 在证明过程中, 利用了不等式 $f(k_1) > 0$.

例1 证明: 当自然数 $n \geq 3$ 时, 下式成立:

$$2^n > 2n + 1. \quad (4.12)$$

当 $n = 3$ 时, 不等式(4.12)成立. 设不等式(4.12)在 $n = k$ ($k > 3$) 时成立, 也就是

$$2^k > 2k + 1. \quad (4.13)$$

兹证明: 不等式(4.12)在 $n = k + 1$ 时也成立. 即证明:

$$2^{k+1} > 2(k+1) + 1 = 2k + 3. \quad (4.14)$$

我们用不等式(4.13)证明(4.14):

$$2^{k+1} = 2^k \times 2 > (2k+1) \times 2 = 4k+2 = (2k+3) + (2k-1). \quad (4.15)$$

因为 $k > 3$, 所以 $2k-1 > 0$. 因此, 由不等式 (4.15) 得 $2^{k+1} > 2k+3$, 即证得不等式 (4.14). 因此, 对于任意自然数 $n \geq 3$, 不等式 $2^n > 2n+1$ 成立.

练习

若自然数 $n \geq 1$, 求证下列不等式成立:

- 1 $2^{n+2} > n+5$. 2 $3n^2 + 7 > 9n$.
3 $8(n^4 + 1) \geq (n+1)^4$. 4 $n^4 - n^2 - 3n + 5 > 0$.

§ 4.4 数值不等式的证明

例1 证明: $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$.

对于这种形式的不等式, 通常用两边多次自乘的办法, 使之转化成有理不等式. 但在这种情况下, 此法繁杂. 这里, 用下面的方法就简便得多. 因为我们要证不等式的左边小于右边, 因此, 利用表格求出不等式两边的近似值(左边为过剩近似值, 右边为不足近似值), 首先计算精确到1, 之后计算精确到0.1, 直到判定原不等式成立为止.

计算精确度	$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$	$2\sqrt[3]{3}$
精确到1	$2+2=4$	2
精确到0.1	$1.6+1.2=2.8$	2.8

于是,

$$\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2.8; \quad 2\sqrt[3]{3} > 2.8.$$

命题得证.

练习

证明:

$$1 \quad \log_{81} 576 < \log_{36} 192. \quad 2 \quad 3^{34} > 2^{51}.$$

$$3 \quad 202^{303} < 303^{202}.$$

§ 4.5 通过确定不等式在其定义域集合的单个子集上的性质来证明不等式

假定须证明不等式 $F(x) \geq 0$ 在 $]a, b[$ 上成立. 我们把该区间 $]a, b[$ 分成几个区间, 证它对于每一个区间都成立. 这时, 不等式左边每一次都变换成新的形式.

例1 若 $a \geq 0$, 求证:

$$a^5 - a^2 - 3a + 5 > 0. \quad (4.16)$$

函数 $f(a) = a^5 - a^2 - 3a + 5$ 在 $[0; +\infty]$ 上有定义. 利用导数研究这个函数的性质是无效的; 因为 $f'(a) = 5a^4 - 2a - 3$ 是四次多项式, 不易求出它的根. 因此用下述方法处理.

首先, 将不等式(4.16)变换为下式

$$a^2(a^3 - 1) + (5 - 3a) > 0.$$

此式在 $[1; 5/3]$ 上, 显然成立.

其次, 若 $0 \leq a \leq 1$, 则不等式(4.16)也成立, 因为 a 取这些值时, 式中的 a^5 , a^2 , $3a$ 每一个值都不会超过1, 因而有

$$|a^5 - a^2 - 3a| \leq 3.$$

最后, 我们把不等式(4.16)变换为下式

$$a(a(a^3 - 1) - 3) + 5 > 0.$$

因为 $(5/3)^3 > 3$, 如果 $a > 5/3$, 则 $a^3 - 1 > 2$. 因此, $a(a^3 - 1) > 10/3$. 如果 $a > 5/3$, 也就有 $a(a^3 - 1) - 3 > 0$. 当然不等式

(4.16)在 $]5/3; +\infty[$ 也成立. 因此, 命题证毕.

练习

证明 $(a, b > 0)$:

$$1 \quad a^3 + 3a^2 + 15 > 13a.$$

$$2 \quad 2(a^4 + b^4) + 19 > 12ab.$$

$$3 \quad \sqrt{a}(a+1) + a(a-4) + 1 \geq 0.$$

§ 4.6 用区间法解不等式

已给不等式 $F(x) > 0$, 且要求确定它在 $[a; b]$ 上的全部解. 设函数 $y = F(x)$ 在 $[a; x_1[,]x_1; x_2[, \dots,]x_n; b]$ 内有定义. 我们求函数 $y = F(x)$ 的零值. 为了明确起见, 我们假定 $F(c) = F(d) = 0$ 和 $c \in]x_1; x_2[, d \in]x_n; b]$. 于是在 $[a; x_1[,]x_1; c[,]c; x_2[, \dots,]x_n; d[,]d; b]$ 上 $F(x) \neq 0$. 从这些区间, 我们取任意的数: $m_1 \in [a; x_1[, m_2 \in]x_1; c[, m_3 \in]c; x_2[$ 等等. 计算 $F(m_1), F(m_2), F(m_3)$ 等等. 例如, 假定 $F(m_2) > 0, F(m_3) > 0$. 那么, 由于函数 $y = F(x)$ 在 $]x_1; c[$ 和 $]c; x_2[$ 上连续, $]x_1; c[,]c; x_2[$ 区间的一切点都将是 inequality $F(x) > 0$ 的解.

例1 若 $x \geq 2$, 解不等式

$$\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1. \quad (4.17)$$

这个不等式在 $[2; +\infty[$ 上有定义. 若 $x \geq 2$, 我们通过以下途径

$$(\sqrt[3]{x-2})^3 = (\sqrt{x-1} - 1)^3; \quad \sqrt{x-1}(x+2-4\sqrt{x-1}) = 0.$$

来解等式

$$\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} = 1. \quad (4.18)$$

因此得 $\sqrt{x-1}=0$ 或 $x+2-4\sqrt{x-1}=0$. 求此方程的根为: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=10$. 显然, 只有2和10是方程(4.18)的根.

考察在 $]2; 10[$, $]10; +\infty[$ 区间上的不等式 (4.17). 取 $f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt[3]{x-2}$ ($x\geq 2$), 数 $3\in]2; 10[$ 及 $f(3)<1$; $29\in]10; +\infty[$ 及 $f(29)>1$.

答: $]10; +\infty[$.

练习

关于 x 解:

$$1 \quad \sqrt{(x-3)(2-x)} * 3 + 2x.$$

$$2 \quad (1-x)^{-0.5} + (1-5)^{0.5} * 2.$$

$$3 \quad \log_x \frac{2x-1}{x-1} * 1.$$

$$4 \quad \log_2 (\sqrt{x+3} - x - 1) * 0.$$

$$5 \quad \log_{x^2} (2+x) * 1.$$

§ 4.7 解方程的近似法

求方程的近似解有几种方法(如迭代法,弦线法,切线法). 但是,最为明白易懂的是试验法,它的应用是以连续函数的一些最简单性质为基础的. 兹举例说明试验法如何借用函数表及其函数的图象既能相当快的求得复杂方程根的近似值,又能在许多情况下获得方程的精确值.

例1 求方程

$$f(x)=x^4+4x-1=0 \quad \text{的实根}$$

把方程变换成 $4^x=1-4x$. 我们作出 $y_1=1-4x$, $y_2=x^4$ 的图象. 该方程有两个实根 x_1 和 x_2 , 而且 $-2 < x_1 < -1$ 和 $0 < x_2$

<0.25. 我们用试验法更详细地说明这些根值:

x	-2	-1	-1.4	-1.5	-1.8	-1.7	-1.6	-1.65	-1.68
$f(x)$	>0	<0	<0	<0	>0	>0	<0	<0	>0

x	-1.66	-1.67	-1.665	-1.663	-1.664	-1.6635			
$f(x)$	<0	>0	>0	<0	>0	$x_1 \approx -1.6635$			

x	0	0.25	0.24	0.2495	0.2493	0.2491	0.2490
$f(x)$	<0	>0	<0	>0	>0	>0	<0

于是, $x_1 \approx -1.6636$; $x_2 \approx 0.24905$.

从而算得 $x_1 + x_2 \approx -1.4145$; $x_1 \cdot x_2 \approx -0.41429$. 由此不难看出, 1.4145 是 $\sqrt{2}$ 的近似值, 而 $-0.41429 \approx 1 - \sqrt{2}$. 于是, 我们得到假设:

$$x_1 + x_2 = -\sqrt{2}; \quad x_1 \cdot x_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

解此方程组, 得

$$x_1 = 0.5(-\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2});$$

$$x_2 = 0.5(-\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}).$$

通过检验, 使我们深信: 用这种方法所求得的数值事实上就是所求方程的根.

§ 4.8 解应用题的代数法

这里, 我们不拟讲述学生所采用的列方程方法来分析应用题的那些解法. 因为这种方法在解不复杂的习题时, 已被很好地证明有效. 但在解复杂习题时, 一开始难于确定哪一个未知量用 x 表示, 并且, 所有其他未知量更难以用一个(或者甚至两个)

变量来表示. 这种办法也就不易列出方程. 因此, 解复杂应用题时, 最主要的是逐步将它的每一个命题译成方程语言. 同时, 不限定在这些方程中引进的变量数目.

例1 一列快车于早晨8点从A地开往B地. 在同一时刻, 有列慢车和特快列车从B地开往A地. 特快列车速度为慢车速度的两倍. 快车抵达B地为当日的13点50分, 与特快列车相遇是不早于上午10点30分. 若已知快车与特快列车相遇快车与慢车相遇之间的时间不少于1小时, 问: 慢车何时抵达A地?

取: s 为AB间的距离; v_n 为慢车速度; v_c 为快车速度; $v_h = 2v_n$ 是特快列车的速度. 显然,

$$s:v_c = 35:6. \quad (4.19)$$

(13小时50分—8小时=5小时50分=35/6小时).

其次, $s:(v_c + 2v_n) \geq 2.5$, 因为快车与特快列车相遇不早于2.5小时. 最后,

$$s:(v_c + v_n) - s:(v_c + 2v_n) \geq 1,$$

因为快车与特快列车, 快车与慢车相遇的时间间隔不少于1小时, 用第一个方程的 V_c 表示 s , 并代入它的两个不等式的后一个不等式, 得

$$\frac{35}{6}v_c:(v_c + 2v_n) \geq 2.5; \quad v_n:v_c \leq 2:3, \quad (4.20)$$

$$\frac{35}{6}v_c:(v_c + v_n) - \frac{35}{6}v_c:(v_c + 2v_n) \geq 1;$$

$$\frac{2}{3} \leq \frac{v_n}{v_c} \leq \frac{3}{4}. \quad (4.21)$$

由不等式(4.20)和(4.21)得

$$v_n:v_c = 2:3. \quad (4.22)$$

由方程(4.19)和(4.22)得 $s:v_n = 8.75$ (小时). 因此, 慢车

在铁路上行车8.75小时，于16点45分抵达A地。

练习

1 将两批箭按30发箭为一批组成。在靶子上看到40个箭眼。如果已知头一批箭中未射中的箭数比第二批箭中射中的箭数多5倍。问：每批箭命中几次？

2 以30个大学生为一组得到的考试成绩按《2》，《3》，《4》，《5》分评定。共得分数的总和为93。而且，《3分》比《5分》多。比《4分》少。此外，《4分》数可被10整除，而《5分》数为偶数。问：这组大学生得到的这些分数各是多少？

3 有小艇和快艇于早晨7点从A地开往B地沿河顺流而下。小艇于当天17点抵达B地。快艇在到达B后，立即返回航行，沿原路从B至A。在不迟于15点遇到小艇，而不早于当天23点抵达A地。若已知快艇速度比小艇速度快一倍，试求快艇抵达B地的时间。

4 一学生欲将其所有邮票粘贴到新集邮册上。若每页贴20枚邮票，则其集邮册页码不够，而若每页贴23枚邮票，则有一页空白。若赠给此学生这样一个集邮册，使得每一页都贴上21枚邮票，那么整本集邮册可收贴500枚邮票。试问，该集邮册应有多少页？

§ 4.9 解方程和不等式的各种方法的综合利用

在这一章和上一章里，我们研究了各种解方程和不等式的方法。在大多数情况下适于采用综合法，它可按以下步骤来运用：

(1) 确定原方程(不等式)有定义的集合。全面考察相应的

函数，此外，用函数图象可避免由于粗心而出现的错误并简化计算。

(2) 通过不等价变换法求方程的根。通过直接检验发现增根。

(3) 用区间法求相应连续函数的同号区间。

例1 解不等式：

$$\log_{x/6}(\log_x \sqrt{6-x}) > 0, \quad (4.23)$$

求出不等式(4.23)有定义的集合。

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ \log_x \sqrt{6-x} > 0, \\ 6-x > 0, \\ \log_x \sqrt{6-x} > 0, \\ x > 1; x \neq 6 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ \sqrt{6-x} < 1, \\ 1 < x < 6, \\ \sqrt{6-x} > 1 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 < x < 6, \\ x < 5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 1 < x < 5. \end{aligned}$$

于是，不等式(4.23)在 $]1; 5[$ 上有定义。

用不等价变换法求以下方程的根：

$$\log_{x/6}(\log_x \sqrt{6-x}) = 0. \quad (4.24)$$

$$\log_x \sqrt{6-x} = 1; \sqrt{6-x} = x; 6-x = x^2; x_1 = 2;$$

$$x_2 = -3.$$

用直接代入法确知：2是方程(4.24)的根。

用区间法定出函数 $f(x) = \log_{x/6}(\log_x \sqrt{6-x})$ 在 $]1; 2[$ 和 $]2; 5[$ 上的符号：

$$(1) \text{ 数 } 1.5 \in]1; 2[\text{ 且 } f(1.5) = \log_{1/4}(\log_{1.5} \sqrt{4.5}).$$

因为 $\log_{1.5} \sqrt{4.5} > 1$ ，所以 $f(1.5) < 0$ ；

$$(2) \text{ 数 } 3 \in]2; 5[\text{ 且 } f(3) = \log_{0.5}(\log_3 \sqrt{3})$$

$$= \log_{0.5}(1/2) = 1 > 0.$$

答]2; 5[.

例2 关于 x 解不等式:

$$\sqrt{x^2 - a^2} > x - \sqrt{2ax - a^2}. \quad (4.25)$$

为求出不等式(4.25)在其上有定义的集合, 我们解

$$\left. \begin{array}{l} 2ax - a^2 \geq 0, \\ x^2 - a^2 \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ -\infty < x < +\infty \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} a > 0, \\ x \geq 0.5a, \\ x \geq a \text{ 或 } x \leq -a, \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} a < 0, \\ x \leq 0.5a, \\ x \leq +a \text{ 或 } x \geq -a \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 0, \\ -\infty < x < +\infty \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} a > 0, \\ x \geq a, \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} a < 0, \\ x \leq a, \end{array} \right\}$$

用不等价变换法求下面方程的根:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = x - \sqrt{2ax - a^2}. \quad (4.26)$$

$$x^2 - a^2 = x^2 - 2x\sqrt{2ax - a^2} + (2ax - a^2);$$

$$2x\sqrt{2ax - a^2} = 2ax. \quad (4.27)$$

如果 $a \neq 0$, 则0不是方程(4.26)的根. 因此, 用 x 除方程(4.27)的两边. 不会使方程(4.26)丢根. 故

$$\sqrt{2ax - a^2} = a; \quad 2ax - a^2 = a^2; \quad ax = a^2.$$

如果 $a \neq 0$, 则 $x = a$. 当 $x = a$ 时, 方程(4.26)具有如下形式:

$$0 = a - |a|.$$

由此可见: 如果 $a > 0$, 则方程(4.26)有根, 其值等于 a ; 如果 $a < 0$, 则方程(4.26)没有解; 如果 $a = 0$, 则方程(4.26) 的解为一切非负数.

用区间法得出:

(1) 如果 $a = 0$. 则不等式(4.25)的解是 $] - \infty; 0[$.

(2) 如果 $a > 0$, 则当 $x = 2a$ ($2a \in [a; +\infty[$) 时, 不等式(4.25)成立. 因此, 如果 $a > 0$, 则不等式的解为 $[a, +\infty[$.

(3) 如果 $a < 0$, 则当 $x = a$ ($a \in] - \infty; a]$) 时, 不等式(4.25)成立. 因此, 如果 $a < 0$, 则不等式(4.25)的解是 $] - \infty; a]$.

§ 4.10 代数题解的检验

1 代数式和三角式的恒等变换的快速检验, 可用下述方法进行: 如果式 $f(a)$ 恒等于式 $\varphi(a)$, 则这些式的一切对应值相等. 为要大概的检验变换的正确性, 只要对 a 取两、三个对应值, 计算 $f(a)$ 和 $\varphi(a)$ 即可.

例 因变换而得到下式:

$$\frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}^4 \alpha.$$

我们计算当 α 取一些«特殊»值. 如 $\alpha = 0^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 时, 等式左右两边的数值. 若 α 取任意值时等式两边仍相等, 则更有把握断言该式恒等.

2 在变换下式

$$\frac{a-2}{a^2+2a} : \left(\frac{a}{a^2-2a} - \frac{a^2+4}{a^3-4a} - \frac{1}{a^2+2a} \right),$$

将该式的各个部分进行简化是适宜的. 这种方法不必重写算式, 不用第1小节中所叙述的方法对每一步都进行核验, 而是:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{a}{a(a-2)} - \frac{a^2+4}{a(a-2)(a+2)} - \frac{1}{a(a+2)} \\ &= \frac{a^2+2a-a^2+4-a+2}{a(a-2)(a+2)} \\ &= \frac{a-2}{a(a-2)(a+2)} = \frac{1}{a(a+2)}, \end{aligned}$$

$$2) \quad \frac{a-2}{a(a+2)} : \frac{1}{a(a+2)} = a-2.$$

这种解算书写简便并可对每个中间运算进行检验. 例如, 计算当 $a=1$ 和 $a=-1$ 时括号内的式子和分式 $\frac{1}{a(a+2)}$ 的值后, 便能深信正确无疑.

3 当简化数值算式时, 遵循一定的步骤是有效的, 其实质可举例说明如下.

完成演算:

$$(204.12 : 40.5 - 3.2 \times 1.2) \times 6 \frac{1}{2} + 7 : 2 \frac{1}{3}.$$

指定运算次序后, 将计算表述为下式:

$$\begin{array}{ll} 1) \quad 20412 : 4050 = 5.04; & 1') \quad 5.04 \times 40.5 = 204.12; \\ 2) \quad 3.84; & 2') \quad 3.84 : 1.2 = 3.2; \\ 3) \quad 1.2; & 3') \quad 1.2 + 3.84 = 5.04; \\ 4) \quad 1.2 \times 6.5 = 7.8; & 4') \quad 7.8 : 6.5 = 1.2; \\ 5) \quad 7 : \frac{7}{3} = 3; & 5') \quad 3 \times 2 \frac{1}{3} = 7; \end{array}$$

$$6) 7.8 + 3 = 10.8; \quad 6') 10.8 - 3 = 7.8.$$

1'—6'的运算是1—6的逆运算。它们可用以检查任务完成的情况。这《多余的》工作不应使我们惶惑不安，这是因为在训练中，解算术题本身并不是目的。

4 在方程的变换过程中，如何才能使方程不丢根呢？在方程两边相乘或相除时，须注意使方程两边乘（或除）的那个式子在变量取原方程的根时其值不变为零。

例 方程：

$$\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1,$$

经某些变换后，变为：

$$\sqrt{x-1}(2+x) = 4(x-1).$$

将等式两边用 $\sqrt{x-1}$ 除时，得

$$2+x = 4\sqrt{x-1}.$$

如果不及时看出数1是原方程的根。那么由于这种运算，我们就会失去等于1的一个根。

5 在方程的不等价变换时，如何找到不含参数方程的增根？首先，在解方程之前，找出原方程在其上有定义的集合是适宜的，其次，增根可以通过直接验根发现它。

6 在不等式不等价变换时，如何检验不含参数的不等式的解的正确？我们可检验它的对应方程的根。设已知不等式 $f(x) > 0$ ，例如在 $[a, b[$ 上有定义，它的对应方程的根为 x_1, x_2, x_3 。我们用区间法进行检验， $[a, x_1[,]x_2, x_2[,]x_2, x_3[,]x_3, b[$ 中的每一个区间都应是不等式 $f(x) > 0$ 的解。

7 如何检验含有参数的方程的根呢？使参数取单个的数值（在方程中和答案中），并且，当参数取这些值时，进行直接检根。当然，这样的检验带有或然性。

例 解方程:

$$2\sqrt{x^2-1} = x - \sqrt{x^2-a}.$$

得

$$x = \frac{4-a}{2\sqrt{2(2-a)}}, \quad 0 \leq a \leq 4/3.$$

第一, 显然, 原方程在 $[0; +\infty[$ 上有定义. **第二**, 当 a 取负值时, 方程无解, 因为如果 $a < 0$, 那么 $x^2 - a > x^2$, $x - \sqrt{x^2 - a} < 0$ (x 取任何值时, 方程的左边都不可能有负值). **第三**, 检验 $a = 0, 4/3, 1$ ($1 \in [0; 4/3]$) 时的答案. **第四**, 通过直接代入, 使我们深信: 当 $a = 1.5$ ($1.5 \in [0; 4/3]$) 时, 方程无解.

8 检验含有参数的不等式的解, 可用区间法进行(使参数取某些值).

9 检验方程和不等式的解的最通用的方法是研究方程(不等式)中的式子, 并且, 作出对应函数的图象. 正如第二章所指出的那样, 这种办法有可能在解方程之前就指出它的解, 等等.

10 在许多情况下, 检验方程(不等式)的解最可靠方法是通过其他方法得到答案. 充分考虑相应函数的性质将使任何检验手段都更加合理.

第五章 三角方程和不等式的解法

§ 5.1 三角函数的周期性

若存在 $l \neq 0$ (周期 f) 这样的数, 它在任何 $x \in D(f)$ 条件下, 使数 $(x-l) \in D(f)$, $(x+l) \in D(f)$ 且 $f(x-l) = f(x) = f(x+l)$, 则函数 f 叫做周期函数.

周期函数 f 的最小正周期 T , 称作这个函数的主周期. $f(x)$ 的周期叫做方程 $f(x) = 0$ 或不等式 $f(x) \geq 0$ 或 $f(x) \leq 0$ 的周期.

求三角函数的和(积)的主周期的一般理论是相当复杂的. 因此, 我们仅限于研究一些实例.

例1 求函数 $x \rightarrow \cos^2 x$ 的主周期 T .

因为 $\cos^2 x = 0.5(1 + \cos 2x)$, 又 $y = \cos 2x$ 的主周期等于 π , 所以, 函数 $x \rightarrow \cos^2 x$ 的主周期等于 π .

例2 求函数

$$x \rightarrow \cos 3x \cos x \quad (5.1)$$

的主周期.

函数 $x \rightarrow \cos 3x$ 有主周期 $2\pi:3$, 函数 $x \rightarrow \cos x$ 有主周期 2π . 被 2π 和 $(2/3)\pi$ 除得尽的最小正数是 2π . 因此, 2π 是函数(5.1)的周期. 如何确定 2π 是主周期呢? 为此, 解

$$\cos 3x \cdot \cos x = 0, \quad (5.2)$$

$$\cos 3x \cos x = 0 \iff \begin{cases} \cos 3x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = 0.5\pi + k\pi \\ x = 0.5\pi + m\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi/6 + k\pi/3 \\ x = 0.5\pi + m\pi \end{cases}.$$

我们从方程(5.2) 在 $[0; 2\pi[$ 上(图5.1)得到下列解:

$$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi.$$

由此可见,根据公式 $x = \pi/6 + k\pi/3$ 和 $x = \pi/2 + m\pi$ 所确定的方程(5.2) 的解,可写成一个公式: $x = \pi/6 + k\pi/3$. 现在很清楚, 函数 $f(x) = \cos 3x \cos x$ 的主周期 T 等于 $k\pi/3$ ($k = 1, 2, 3$ 或 6).

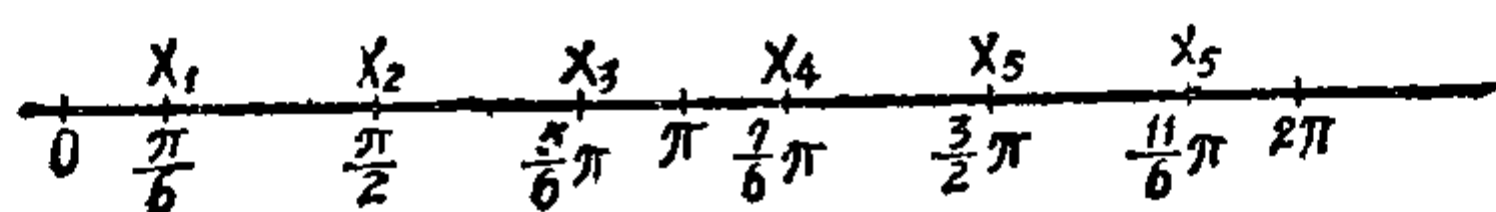


图5.1

假定 $k = 1$. 那么 $T = \pi/3$. 我们来验证 $\cos 3x \cos x = \cos[3(x + \pi/3)] \cos(\pi/3 + x)$ 是不是恒等式. 当 $x = 0$ 时, 这个等式的左边不等于右边, 由此可见 $\pi/3$ 不是函数(5.1)的主周期. 按同样的方式可证, $2\pi/3$ 也不是函数(5.1)的主周期 T .

当 $k = 3$ 时, $k\pi/3 = \pi$. 显然, $\cos 3x \cos x = \cos[3(x + \pi)] \times \cos(x + \pi)$ 为恒等式, 由此可见, $T = \pi$.

例3 求函数

$$x \rightarrow \cos x + \sqrt{3} \sin x - 2 \cos 2x \quad (5.3)$$

的主周期 T

函数 $y = \cos x$, $y = \sqrt{3} \sin x$, $y = -2 \cos 2x$ 的主周期分别为 2π , 2π , π . 因此, 函数(5.3) 的周期等于 2π . $T = 2\pi$ 能否成立? 我们解下式:

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x - 2 \cos 2x = 0 \quad (5.4)$$

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = \cos x + \operatorname{tg} \pi/3 \sin x$$

$$= \frac{\cos \pi/3 \cos x + \sin \pi/3 \sin x}{\cos \pi/3} = 2 \cos(x - \pi/3).$$

现在，我们用等价的方程 $\cos(x - \pi/3) - \cos 2x = 0$ 代替 (5.4)。由此得

$$\cos(x - \pi/3) = \cos 2x \iff x - \pi/3 = \pm 2x + 2k\pi$$

$$\iff \begin{cases} x - \pi/3 = 2x + 2k\pi, \\ x - \pi/3 = -2x + 2k\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -\pi/3 - 2k\pi = -\pi/3 + 2\pi n, \\ x = \pi/9 + 2/3kn. \end{cases}$$

我们求方程 (5.4) 位于 $[0, 2\pi[$ 的根 (图 5.2)：

$$x_1 = 2\pi/3, \quad x_2 = 7\pi/9, \quad x_3 = 13\pi/9.$$

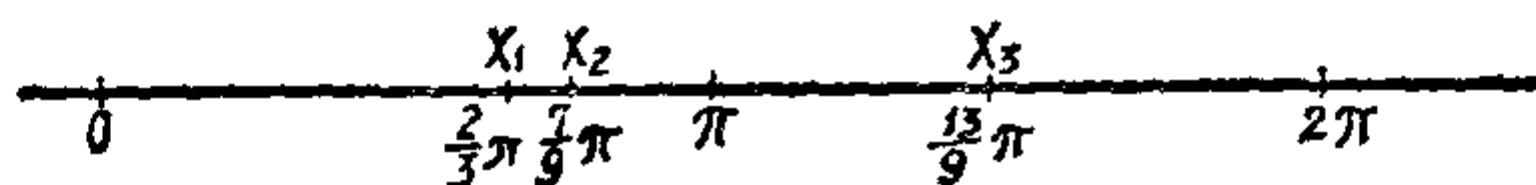


图 5.2

因为方程 (5.4) 的不同的根值属于等分的区间 $[0, \pi]$ 和 $[\pi, 2\pi]$ 。所以， $T \neq \pi, 2\pi/3$ 。于是， $T = 2\pi$ 。

例 4 解方程：

$$\sin 2x \sin 7x = 1 \quad (5.5)$$

函数 $y = \sin 2x$ 和 $y = \sin 7x$ 的主周期分别等于 π 和 $2\pi/7$ 。因此，方程 (5.5) 的周期等于 2π 。显然，

$$\sin 2x \sin 7x = 1 \iff$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 1, \\ \sin 7x = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0.5\pi + 2\pi n, \\ 7x = 0.5\pi + 2k\pi, \end{cases} \iff \begin{cases} \sin 2x = -1, \\ \sin 7x = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = -0.5\pi + 2\pi m, \\ 7x = -0.5\pi + 2p\pi \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \pi/4 + \pi n, \\ x = \pi/14 + 2\pi k/7, \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\pi/4 + \pi m, \\ x = -\pi/14 + 2\pi p/7 \end{array} \right\} \quad (5.7)$$

$(n, k, m, p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

我们全部写出方程组(5.6)所确定的且属于 $[0; 2\pi[$ 的各数:

$$\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\} \text{和} \left\{ \frac{\pi}{14}, \frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14}, \frac{13\pi}{14}, \frac{17\pi}{14}, \frac{21\pi}{14}, \frac{25\pi}{14} \right\}$$

这些集的交集是空集。因此, 方程组(5.6) 无解。

全部写出方程组(5.7) 所确定的且属于 $[0; 2\pi[$ 的各数:

$$\left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\} \text{和} \left\{ \frac{3\pi}{14}, \frac{7\pi}{14}, \frac{11\pi}{14}, \frac{15\pi}{14}, \frac{19\pi}{14}, \frac{23\pi}{14}, \frac{27\pi}{14} \right\}$$

这些集的交集是空集。因此, 方程组(5.7) 无解。于是方程(5.5) 无解。

例5 解

$$\cos x/2 - \cos x/3 < 2. \quad (5.8)$$

函数 $y = \cos 0.5x$ 和 $y = \cos x/3$ 的主周期分别等于 4π 和 6π 。因此, 不等式的周期等于 12π 。

我们解对应于不等式(5.8) 的方程:

$$\cos x/2 - \cos x/3 = 2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos x/2 = 1, \\ \cos x/3 = -1 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x/2 = 2k\pi, \\ x/3 = \pi + 2\pi n \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4k\pi, \\ x = 3\pi + 6\pi n. \end{array} \right\} \quad (5.9)$$

$$(5.10)$$

全部写出方程(5.9)和方程(5.10)属于 $[0, 12\pi[$ 的根:

$\{0, 4\pi, 8\pi\}$ 和 $\{3\pi, 9\pi\}$.

这些集的交集是空集. 因此方程 $\cos x/2 - \cos x/3 = 2$ 无解. 又因为 $\cos x/2 \neq 1$ 和 $\cos x/3 \neq -1$, 所以一切实数都是不等式(5.8)的解.

例6 解方程:

$$\sin x + \cos x = 1. \quad (5.11)$$

将方程两边平方 (由此得到的方程或等价于或不等价于原方程):

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1; 2\sin x \cos x = 0; \sin 2x = 0;$$

$$2x = k\pi; x = 0.5k\pi.$$

函数 $y = \sin x + \cos x$ 有周期 2π . 全部写下等式 $x = 0.5k\pi$ 所确定的且属于 $[0, 2\pi[$ 的各数:

$$0; 0.5\pi; \pi; 1.5\pi.$$

由直接代入方程(5.11)使我们确知: 只有0和 0.5π 才是方程属于 $[0, 2\pi[$ 的根.

答 $x_1 = 0 + 2\pi n = 2\pi n$ $x_2 = 0.5\pi + 2\pi m$.

例7 解方程:

$$\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 3x = 0 \quad (5.12)$$

函数 $y = \operatorname{tg} x$ 在点 $0.5\pi + k\pi$ 上无定义. 因此, $y = \operatorname{tg} 5x$ 在点 $\pi/10 + \pi n/5$ 上无定义. 而 $y = \operatorname{tg} 3x$ 在点 $\pi/3 + k\pi/3$ 上无定义. 方程(5.12)有主周期 π . 全部写下 $y = \operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 3x$ 所确定的属于 $[0, \pi[$ 的各数:

$$\left\{ \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\}. \quad (5.13)$$

变换方程(5.12)为 $\operatorname{tg} 5x = -\operatorname{tg} 3x$, $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg}(-3x)$. 由此得 $5x = -3x + \pi m$,

$$x = \pi m : 8. \quad (5.14)$$

全部写出等式(5.14)所确定的. 且属于 $[0, \pi[$ 的各数

$$0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}$$

0.5π 不是方程(5.12)的根, 因它属于集合(5.13).

答 $m\pi : 8 + k\pi (m=0, 1, 2, 3, 5, 6, 7; k=0, \pm 1 \pm 2, \dots)$.

练习

1 证明函数: (1) $y = x^2 + 2x$; (2) $y = \lg(x+2)$; (3) $y = \sin x + x$; (4) $y = \sin x + \sin \sqrt{3}x$ 为非周期函数.

2 求下列函数中的偶函数:

(1) $y = \sin x \operatorname{tg} x$; (2) $y = \cos x + x^2$; (3) $y = x^3 - 2x^2 + 5$;
(4) $y = \cos 3x \cos x$; (5) $y = \sin x + \sin 2x$; (6) $y = \sin^2 x - \cos 3x$.

回答理由.

3 求函数的主周期:

(1) $y = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$;
(2) $y = \sin(x + 30^\circ) + \cos(x + 60^\circ) - \cos 2x - 1$;
(3) $y = \cos 2x - \cos 8x + \cos 6x - 1$;
(4) $y = \sin(x - 60^\circ) - \cos(x + 30^\circ)$;
(5) $y = \sin x + \cos x - 1 - \sin 2x$;
(6) $y = \sin x \sin 7x - \sin 3x \sin 5x$.

§ 5.2 基本三角方程和不等式

最简单的三角方程是:

$$\sin x = a (|a| \leq 1); \quad \cos x = a (|a| \leq 1); \quad \operatorname{tg} x = a; \quad \operatorname{ctg} x = a.$$

解任何三角方程都归结为求型如 $\sin kx = m$, $\cos kx = m$,

$\operatorname{tg} kx = m$, $\operatorname{ctg} kx = m$ 的方程的根。

最简单的不等式有：

$$\sin x \geq a, \cos x \geq a, \operatorname{tg} x \geq a, \operatorname{ctg} x \geq a.$$

用以解三角方程和三角不等式的主要方法是三角函数及其图象的性质。

例1 解：

$$\sin x \geq 0.5. \quad (5.15)$$

函数 $y = \sin x$ 有主周期 2π 。我们作 $y = \sin x$ 和 $y = 0.5$ 在 $[0, 2\pi[$ 上的图象(图5.3)。因为 $y = \sin x$ 连续。且在 $[0, 0.5\pi]$ 上递增，而在 $[0.5\pi, \pi]$ 内递减，所以方程 $\sin x = 0.5$ 在 $[0, 0.5\pi]$ 内有一个根，在 $[0.5\pi, \pi]$ 内有一个根： $x_1 = \pi/6$ ， $x_2 = \pi - \pi/6$ 。

函数 $y = \sin x$ 有 $T = 2\pi$ 。因此 $\sin x = 0.5$ 的所有根为下式所决定： $x = \pi/6 + 2n\pi$ ， $x = -\pi/6 + \pi + 2k\pi$ 。这些公式合并为一个公式： $x = (-1)^m \times \pi/6 + \pi m$ 。

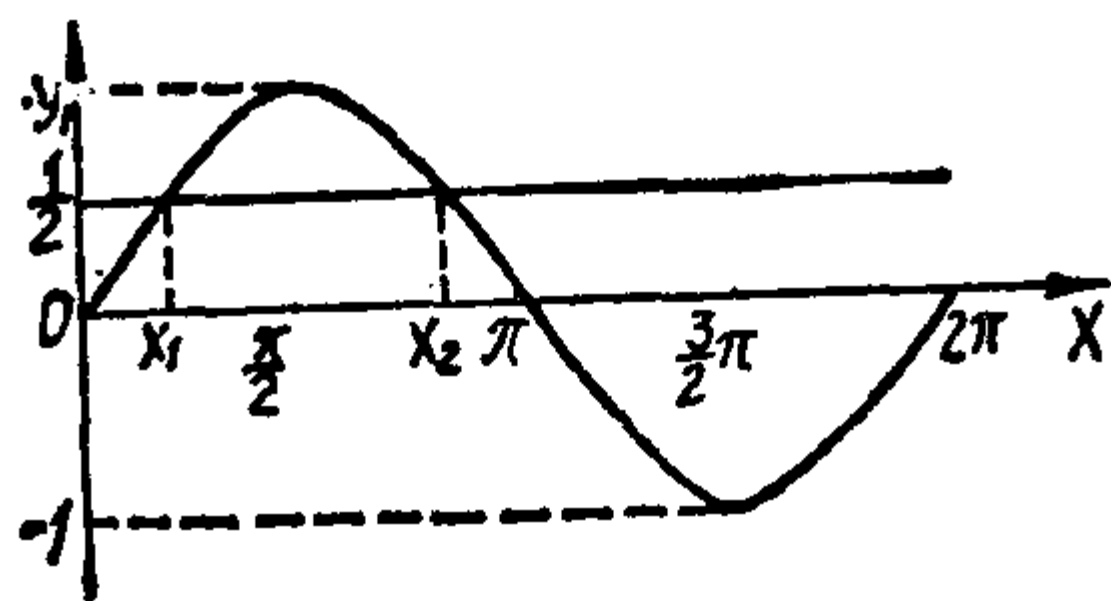


图5.3

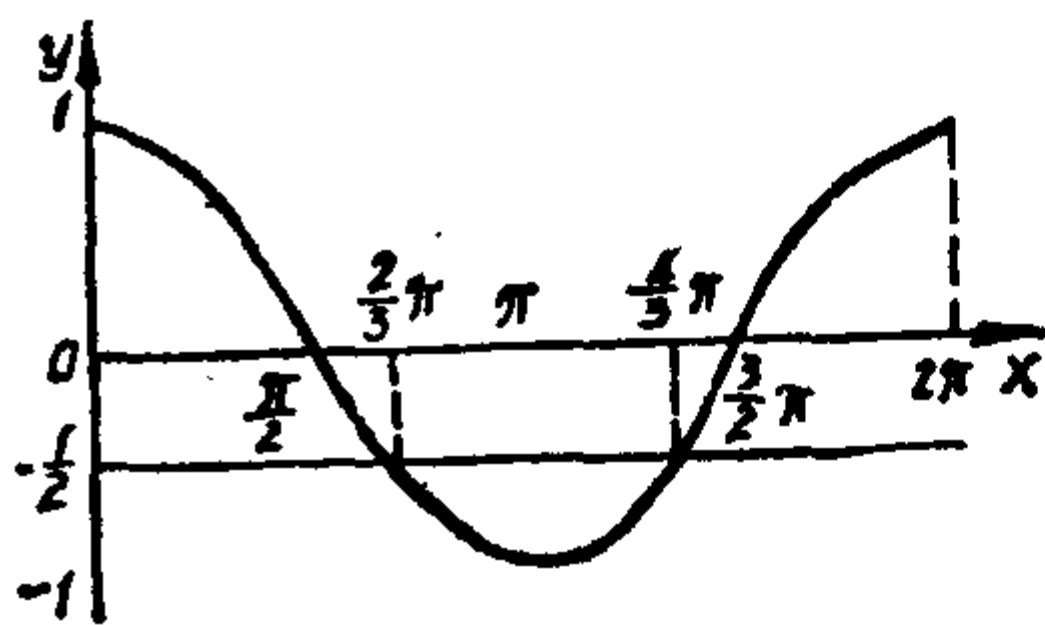


图5.4

由图5.3可知，不等式 $\sin x > 0.5$ 在 $[0, 2\pi[$ 上的解为 $]x_1, x_2[$ ，即 $] \pi/6, 5/6\pi[$ 。

因为 $y = \sin x$ 有 $T = 2\pi$ 。所以 $\sin x > 0.5$ 的解为 $] \pi/6 + 2\pi n, 5/6\pi + 2\pi n[$ ，其中 n 是任意整数。

于是， $\sin x \geq 0.5 \iff \pi/6 + 2\pi n \leq x \leq 5/6\pi + 2\pi n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 。

例2 解

$$\cos x \geq -0.5.$$

函数 $y = \cos x$ 有 $T = 2\pi$. 我们作出它的图象及 $y = -0.5$ 在 $[0; 2\pi[$ 上的图象(图5.4). 显然, $\cos 2\pi/3 = \cos 4\pi/3 = -0.5$. 于是, 在 $[0; 2\pi[$ 上, 方程 $\cos x = -0.5$ 有解: $x_1 = 2\pi/3$, $x_2 = 4\pi/3$.

函数 $y = \cos x$ 有 $T = 2\pi$, 因此 $\cos x = -0.5$ 的全部解由下式所决定: $x = 2\pi/3 + 2\pi n$ 和 $x = 4\pi/3 + 2\pi m$. 因为 $4\pi/3 + 2\pi m = -2\pi/3 + 2\pi + 2\pi m = -2\pi/3 + 2\pi(m+1)$, 所以可将 $\cos x = -0.5$ 的解简写成 $x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$.

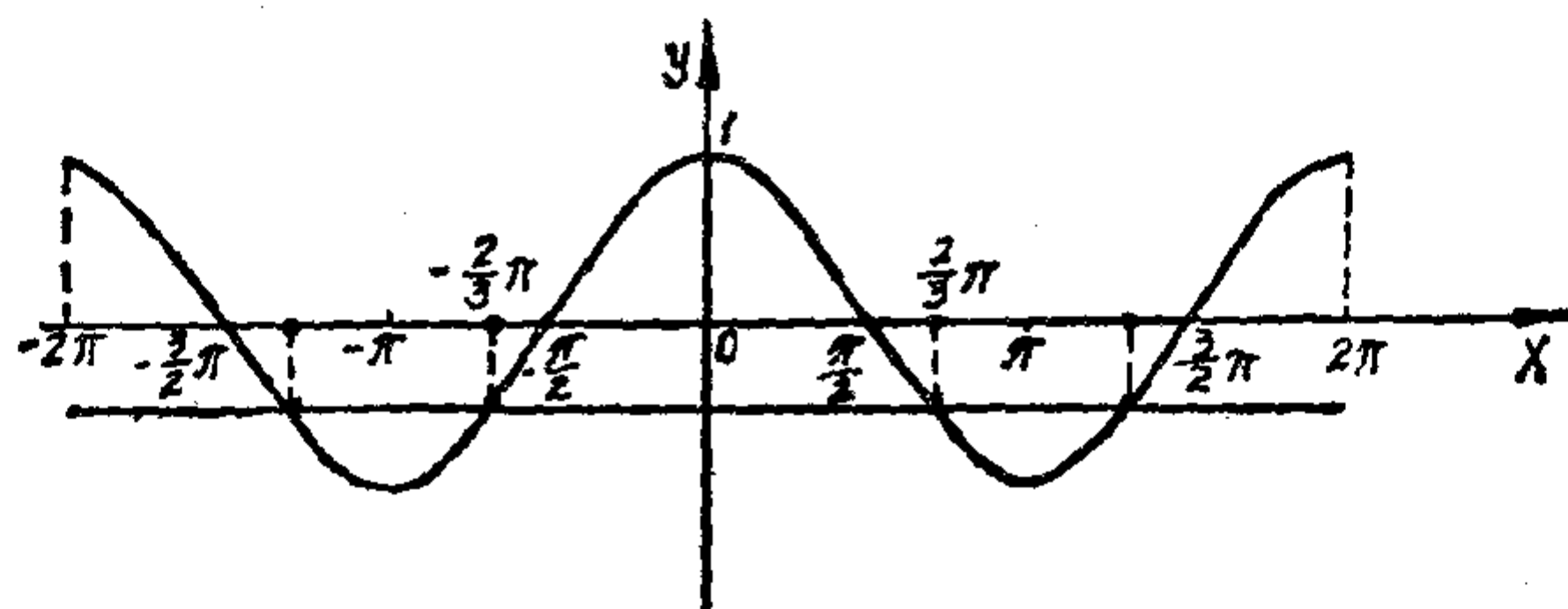


图5.4

由图5.4可见, 属于 $[0; 2\pi[$ 的 $\cos x \geq -0.5$ 的解是 $[0; 2\pi/3]$ 和 $[4\pi/3; 2\pi]$. 因此, 这个不等式的解是 $[2k\pi; 2\pi/3 + 2k\pi] \cup [4\pi/3 + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi[$, 其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 由图5.5可见, 不等式 $\cos x \geq -0.5$ 的全部解可简写成: $[-2\pi/3 + 2k\pi; 2\pi/3 + 2k\pi]$.

例3 解不等式:

$$\operatorname{tg} 2x < -\sqrt{3}. \quad (5.16)$$

函数 $y = \operatorname{tg} 2x$ 有 $T = 0.5\pi$. 我们在 $] -0.25\pi; 0.25\pi[$ 上作出 $y = \operatorname{tg} 2x$ 和 $y = -\sqrt{3}$ 的图象(图5.6). 解 $\operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3}; 2x =$

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n = -\pi/3 + \pi n, \quad x = -\pi/6 + 0.5\pi n.$$

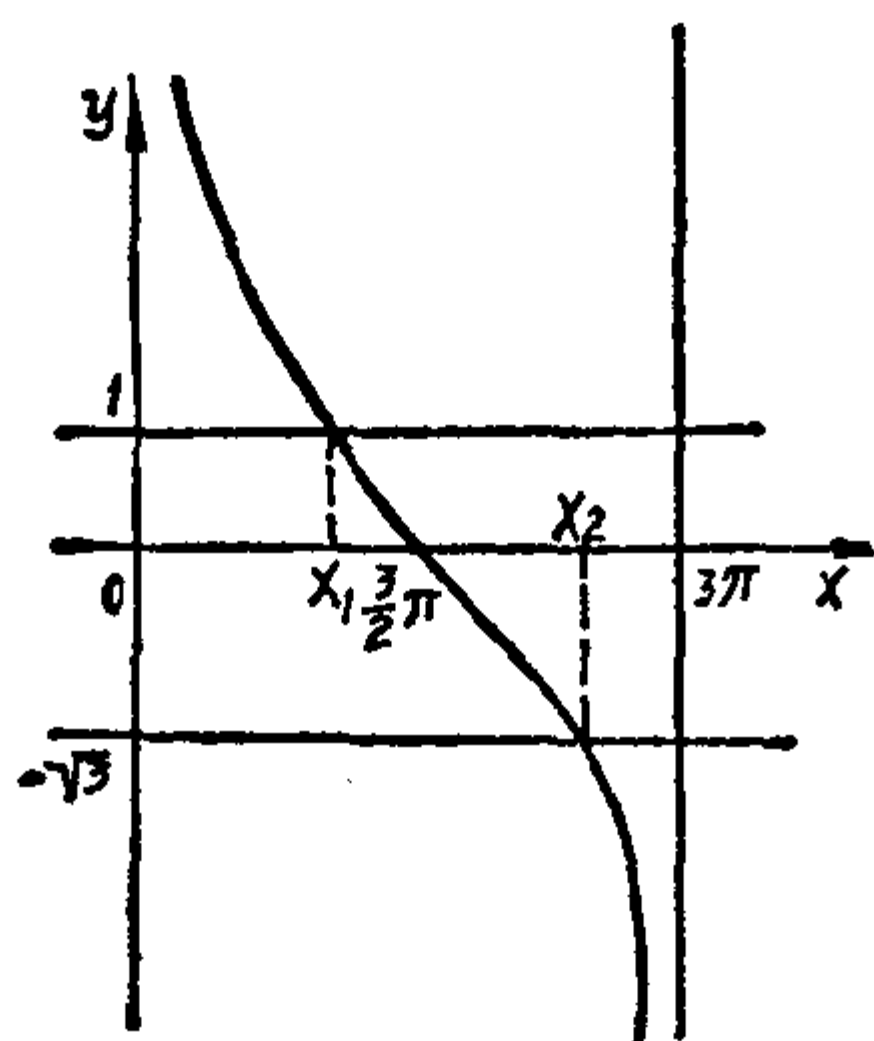


图5.6

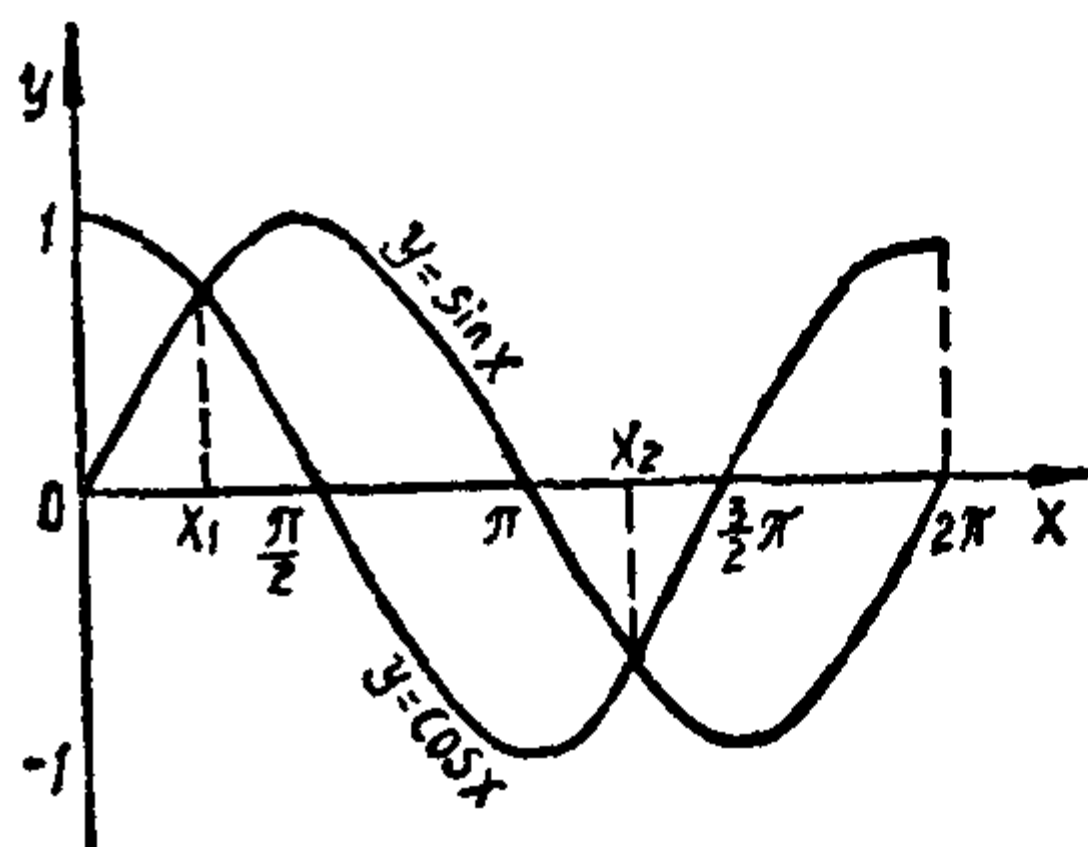


图5.7

在 $] -0.25\pi; 0.25\pi[$ 上, 方程 $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$ 只有一个根 $-\frac{\pi}{6}$.

属于 $] -0.25\pi; 0.25\pi[$ 上的不等式 (5.16) 的解为 $] -\pi/4; -\pi/6[$. 全部解是 $] -\pi/4 + \pi/2n; -\pi/6 + \pi/2n[$.

例4 解不等式:

$$\sin x < \cos x. \quad (5.17)$$

我们作出 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 在 $[0; 2\pi[$ 上的图象(图5.7). 在 $[0; 2\pi[$ 上, 方程 $\sin x = \cos x$ 有根: $x_1 = 0.25\pi$; $x_2 = 1.25\pi$. 显然不等式(5.17)在 $[0; 2\pi[$ 上的解是 $[0; 0.25\pi[\cup]1.25\pi; 2\pi[$.

答 $]2k\pi; 0.25\pi + 2k\pi[\cup]1.25\pi + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi[$.

例5 解不等式

$$-\sqrt{3} < \operatorname{ctg} \frac{x}{3} < 1. \quad (5.18)$$

函数 $y = \operatorname{ctg} x/3$ 有 $T = 3\pi$. 我们作出 $y = \operatorname{ctg} x/3$, $y = -\sqrt{3}$, $y = 1$ 在 $]0; 3\pi[$ 上的图象(图5.8). 不等式(5.18)在 $]0; 3\pi[$ 上的

解是 $]x_1; x_2[$, 其中 x_2 和 x_1 是属于 $]0; 3\pi[$ 上 $\text{ctg}x/3 = -\sqrt{3}$ 和

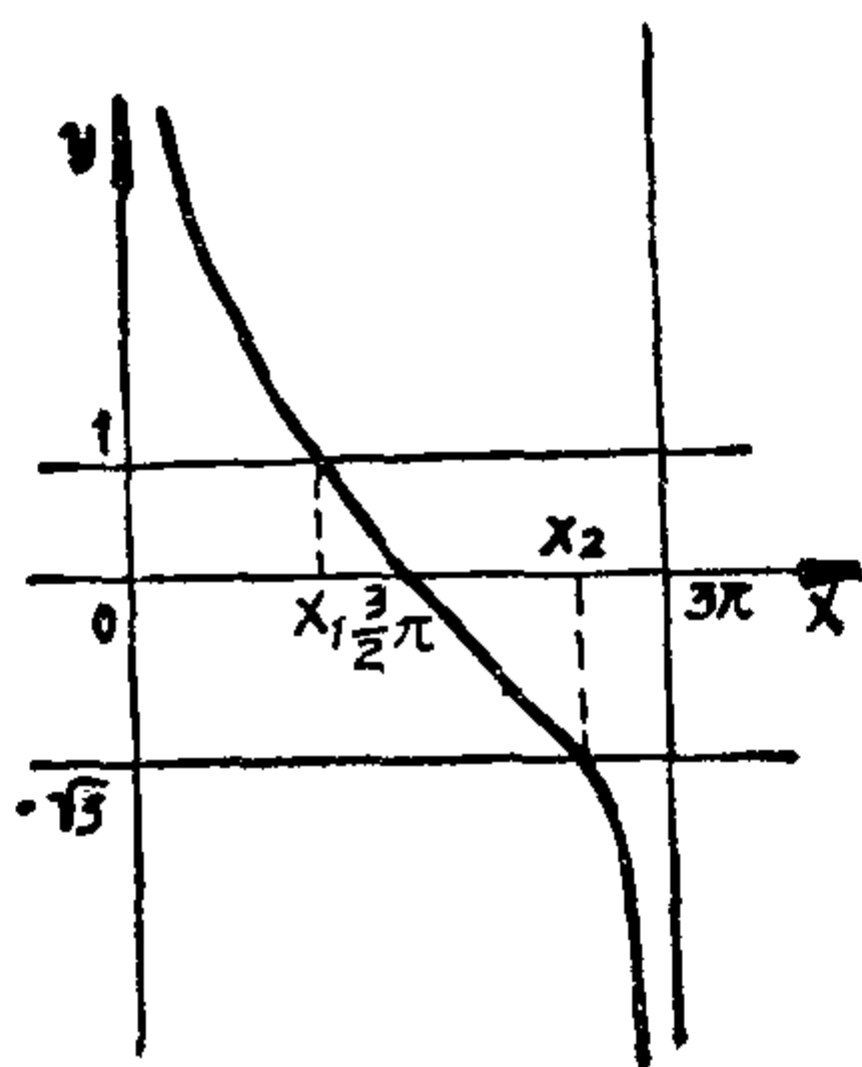


图5.8

$\text{ctg}x/3 = 1$ 的根。解方程 $\text{ctg}x/3 = -\sqrt{3}$;

$$\frac{x}{3} = \text{arccctg}(-\sqrt{3}) = 2\pi/3; \quad x_2 = 2\pi.$$

显然, $x_1 = 0.75\pi$.

答 $]0.75\pi + 3k\pi; 2\pi + 3k\pi[$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

练习

解不等式:

1 $\text{tg}3x \geq -1$. 2 $-1 \leq \text{tg}x \leq 1$. 3 $\sin x/3 \geq 2$.

4 $\cos 2.5x < -0.5$. 5 $2\cos 3x > -\sqrt{3}$.

6 $\sin x + \cos x < 0$. 7 $2\sin x + \cos x < 0$. 8 $\sin x \sin x/2 < 1$.

9 $0.5 < \sin x \leq \text{tg}x$. 10 $\cos(2x-1) < 0.5$.

§ 5.3 三角函数的积化和(差)

在三角函数的积恒等变换为和(或者反过来)时, 应用恒等

式:

$$\sin\alpha\sin\beta = 0.5(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)); \quad (A)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = 0.5(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)); \quad (B)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = 0.5(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)); \quad (C)$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}; \quad (D)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (E)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (F)$$

例1 解

$$\sin x \sin 7x \geq \sin 3x \sin 5x. \quad (5.19)$$

利用公式(A), 将不等式(5.19)用它的等价式

$$0.5(\cos 6x - \cos 8x) \geq 0.5(\cos 2x - \cos 8x)$$

或

$$\cos 6x \geq \cos 2x \quad (5.20)$$

代替.

函数 $y = \cos 2x$ 有 $T = \pi$; $y = \cos 6x$ 有 $T = \pi/3$. 因此, 不等式(5.20)有周期 π . 作 $y = \cos 2x$ 和 $y = \cos 6x$ 在 $[0, \pi[$ 上的图象 (图 5.9). 在 $[0, \pi[$ 上方程 $\cos 6x = \cos 2x$ 有根 $0; 0.25\pi; 0.5\pi; 0.75\pi; \pi$, 不等式(5.20)有 $[0.25\pi, 0.75\pi]$. 不等式(5.20)的全部解形成集合 $[0.25\pi + k\pi, 0.75\pi + k\pi] (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

方程 $\cos 6x = \cos 2x$ 的根通过下面的运算求得: $\cos 6x = \cos 2x$
 $\Leftrightarrow 6x = \pm 2x + 2k\pi$ 由此 $x_1 = k\pi/4, x_2 = k\pi/2$.

例2 解

$$\sin 3x \geq 4\sin x \cos 2x. \quad (5.21)$$

用公式(C), 得

$$4\sin x \cos 2x = 2\sin(x - 2x) + 2\sin 3x = 2\sin 3x - 2\sin x.$$

因此

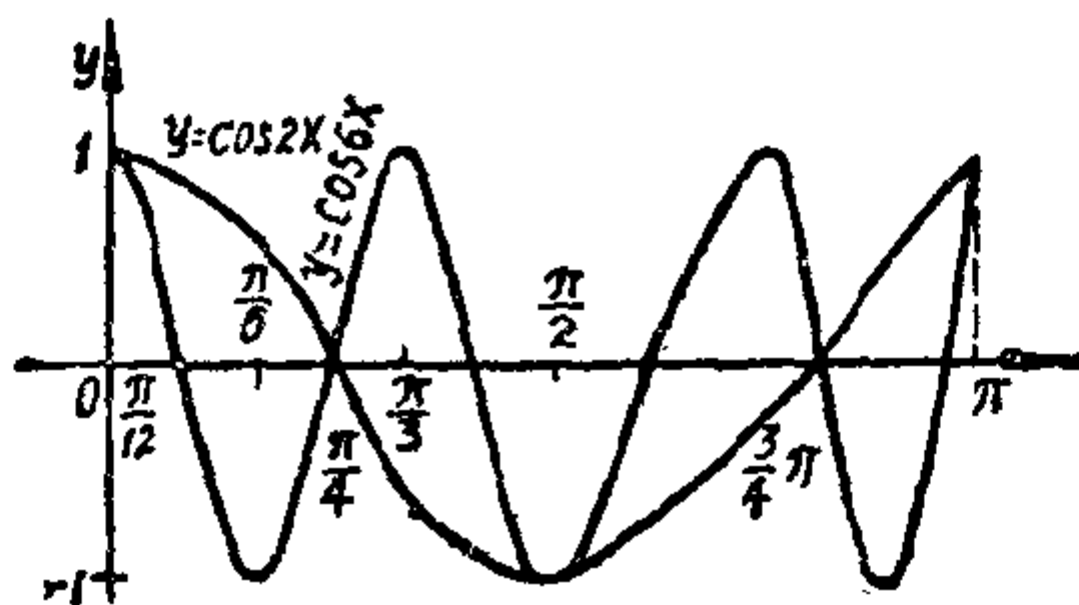


图5.9

$$\begin{aligned} \sin 3x \geq 4\sin x \cos 2x &\Leftrightarrow \sin 3x \geq 2\sin 3x - 2\sin x \Leftrightarrow \sin 3x \\ &- 2\sin x \leq 0 \Leftrightarrow (\sin 3x - \sin x) - \sin x \leq 0. \end{aligned}$$

用公式(D), 得 $\sin 3x - \sin x = 2\cos 2x \sin x$. 因此, 不等式(5.21)等价于 $2\cos 2x \sin x - \sin x \leq 0$. 由此,

$$\sin x(2\cos 2x - 1) \leq 0; \quad (5.22)$$

$$\sin x \Leftrightarrow x = \pi n;$$

$$2\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0.5 \Leftrightarrow$$

$$2x = \pm \pi/3 + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm \pi/6 + k\pi.$$

由于不等式(5.22)有周期 2π . 因此, 在 $[0; 2\pi[$ 上方程 $\sin x = 0$ 有根 0 和 π , 而方程 $2\cos 2x - 1 = 0$ 有根 $\pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$. 于是, 方程 $\sin x(2\cos 2x - 1) = 0$ 在 $[0; 2\pi[$ 上有根 $0, \pi/6, 5\pi/6, \pi, 7\pi/6, 11\pi/6$ (图5.10). 函数 $y = \sin x(2\cos 2x - 1)$ 连续. 因此, 用区间法求得不等式(5.21)在 $[0; 2\pi[$ 上的解: $[\pi/6; 5\pi/6] \cup [\pi; 7\pi/6] \cup [11\pi/6; 2\pi]$.

答 $[\pi/6 + 2k\pi; 5\pi/6 + 2k\pi] \cup [\pi + 2k\pi; 7\pi/6 + 2k\pi] \cup [11\pi/6 + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi]$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

例3: 解

$$\sin x + \sin 2x + 2\sin x \sin 2x - 2\cos x - \cos 2x \geq 0.$$

$$(5.23)$$

将原不等式的左边记作 $f(x)$ ，并对它作如下变换：

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin x + \sin 2x) - (\cos x + \cos 3x) - \cos 2x \\ &= (\sin x + 2\sin x \cos x) - 2\cos 2x \cos x - \cos 2x \\ &= \sin x(1 + 2\cos x) - \cos 2x(2\cos x + 1) \\ &= (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos 2x) \\ &= (1 + 2\cos x)(\cos(\pi/2 - x) - \cos 2x). \end{aligned}$$

解方程

$$1 + 2\cos x = 0, \quad (5.24)$$

$$\cos(0.5\pi - x) - \cos 2x = 0, \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} 1 + 2\cos x = 0 &\Leftrightarrow \cos x = -0.5 \Leftrightarrow x \\ &= \pm 2/3\pi + 2n\pi (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(0.5\pi - x) - \cos 2x = 0 &\Leftrightarrow \\ \cos(0.5\pi - x) &= \cos 2x \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$0.5\pi - x = \pm 2x + 2k\pi \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -0.5\pi + 2k\pi, \\ x = \pi/6 - 2/3k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{cases}$$

不等式(5.23)周期 2π 。写出在 $[0, 2\pi[$ 上方程(5.24)和(5.25)的根： $2/3\pi, 4/3\pi, 3/2\pi, \pi/6, 5\pi/6$ (图5.11)。

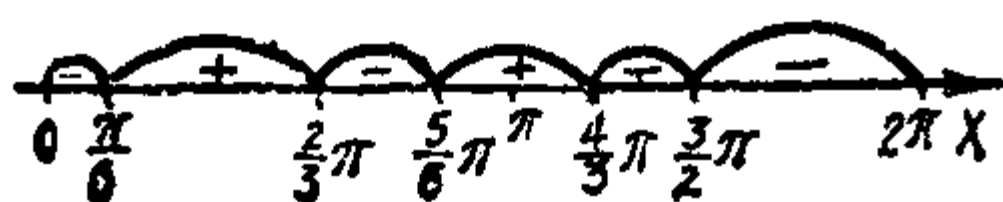


图5.10

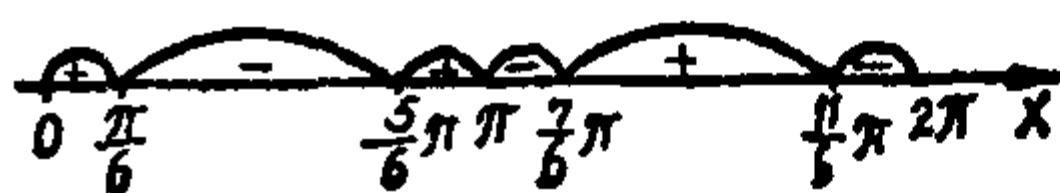


图5.11

用区间法于连续函数 $f(x) = (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos 2x)$ 后。定出它在 $[0, 2\pi[$ 区间各部分的符号：1) $f(0) < 0$ 且在 $[0, \pi/6[$ 上 $f(x) < 0$ ；2) $f(\pi/2) > 0$ 且在 $] \pi/6, 2\pi/3[$ 上 $f(x) > 0$ ；3) $f(3/4\pi) < 0$ 且在 $] 2/3\pi, 5/6\pi[$ 上 $f(x) < 0$ ；4) $f(\pi) > 0$ 且在 $] 5/6\pi, 4/3\pi[$ 上 $f(x) > 0$ 等等。

答 $[\pi/6 + 2k\pi, 2\pi/3 + 2k\pi] \cup [5\pi/6 + 2k\pi, 4\pi/3 + 2k\pi]$
 $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

练习

解下列各式:

- 1 $\cos x \sin 7x \geq \cos 3x \sin 5x$.
- 2 $\sin 3x + \sin 5x \geq \sin 4x$.
- 3 $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x \geq 0$.
- 4 $\cos x - \cos 2x \leq \sin 3x$.
- 5 $\cos 6x - \cos 8x \geq 1 - \cos 2x$.
- 6 $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x \geq \operatorname{tg} 3x$.

§ 5.4 $a \sin x + b \cos x$ 型的变换

我们证明: 当参数 a 和 b 取任何值时, 式 $a \sin x + b \cos x$ 可变换为 $c \sin(x + \varphi)$ 的形式:

$$a \sin x + b \cos x = a(\sin x + b/a \cos x) \quad (a \neq 0).$$

若记

$$b/a = \operatorname{tg} \varphi,$$

则

$$a \sin x + b \cos x = a(\sin x + \operatorname{tg} \varphi \cos x)$$

$$= \frac{a}{\cos \varphi} (\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi) = \frac{a}{\cos \varphi} \sin(x + \varphi).$$

例1 解方程:

$$3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 1.$$

解

$$3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 3(\sin x + \sqrt{3}/3 \cos x)$$

$$= 3(\sin x + \operatorname{tg} \pi/6 \cos x) = \frac{3}{\cos \pi/6} (\sin x \cos \pi/6 + \cos x \sin \pi/6) \\ = 2\sqrt{3} \sin(x + \pi/6).$$

因此, 原方程与 $2\sqrt{3} \sin(x + \pi/6) = 1$ 等价, 由此得到

$$\sin(x + \pi/6) = \sqrt{3}/6 \text{ 和 } x + \pi/6 \\ = (-1)^n \arcsin \sqrt{3}/6 + n\pi,$$

$$x = -\pi/6 + (-1)^n \arcsin \sqrt{3}/6 + n\pi.$$

练习

解

- 1 $\sin x + \cos x \leq 1.$
- 2 $\sin 2x - 4 \cos 2x \geq 4.$
- 3 $\sin x + \cos x \leq 1 : \sin x.$
- 4 $|\sin x| + |\cos x| \leq 1.4.$

§ 5.5 三角方程变换为 $a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n = 0$ 的形式

这种方法的实质将在解下面例题的过程中给以阐明.

例1 解方程:

$$\sin 2x = \cos 2x - \sin^2 x + 1 \quad (5.26)$$

兹将方程 (5.26) 变换为

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0 \quad (5.27)$$

用 $\cos^2 x$ 除方程 (5.27) 两边. 方程 $\cos^2 x = 0$ 的根不是方程 (5.27) 的根, 因为方程 $\cos^2 x = 0$ 和 $\sin^2 x = 0$ 不等价. 从而得到与方程 (5.27) 等价的方程:

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 2 = 0$$

我们记: $\operatorname{tg} x = t$, 得 $t^2 + 2t - 2 = 0$. 此方程的解为:

$t_1 = -1 - \sqrt{3}$; $t_2 = -1 + \sqrt{3}$. 于是, $\operatorname{tg} x = -1 - \sqrt{3}$ 或 $\operatorname{tg} x = -1 + \sqrt{3}$.

答 $x_1 = \operatorname{arctg}(-1 - \sqrt{3}) + k\pi$,
 $x_2 = \operatorname{arctg}(-1 + \sqrt{3}) + n\pi$.

例2 解方程:

$$4\sin 2x = 5 - 3\cos 2x. \quad (5.28)$$

将方程两边平方后, 得

$$16\sin^2 2x = 25 - 30\cos 2x + 9\cos^2 2x$$

$$16(1 - \cos^2 2x) = 25 - 30\cos 2x + 9\cos^2 2x$$

我们记: $\cos 2x = y$, 得 $16(1 - y^2) = 25 - 30y + 9y^2$. 解这个方程后, 得 $y = \cos 2x = 0.6$. 由此得 $x = \pm 0.5 \arccos 0.6 + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 但这个解需要检验, 因为在平方时可能出现增根. 事实上, 方程(5.28)右边在 x 取一切值时为正 (因为 $\cos x \leq 1$). 方程左边可能为正, 也可能为负. 因为 $\arccos 0.6$ 是锐角, 所以 $\sin(\arccos 0.6)$ 是正数, 而 $\sin(-\arccos 0.6) < 0$. 因此, 只有 $x = 0.5 \arccos 0.6 + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 是方程(5.25)的解。

练习

解下列各式,

$$1 \quad 5\cos 2x \geq 4\sin x. \quad 2 \quad 3 - 7\cos^2 x \sin x - 3\sin^3 x \geq 0.$$

$$3 \quad (\cos x - \sin x)(2\operatorname{tg} x + \sec x) \geq 0.$$

$$4 \quad (1 + \operatorname{tg} x) : (1 - \operatorname{tg} x) \geq 1 + \sin 2x.$$

$$5 \quad 2\sin^3 x - \sin^2 x \cos x + 2\sin x \cos^2 x - \cos^3 x \geq 0.$$

$$6 \quad \sqrt{0.5 - \cos 2x} + \sqrt{0.5 + \cos 2x} \geq 1.$$

$$7 \quad \sqrt{4\cos^2 x + 1} + \sqrt{4\sin^2 x + 3} \geq 4.$$

§ 5.6 三角因式分解

利用恒等变换, 将三角方程 $f(kx)=0$ 化为下式: $f_1(k_1x)$
 $f_2(k_2x)=0$ 。如果函数 $f_1(k_1x)$ 和 $f_2(k_2x)$ 在集合 M 上有定义,
那么, 在这集合上, 原方程等价于方程 $f_1(k_1x)=0, f_2(k_2x)$
 $=0$ 的析取。

例1 解方程:

$$4\sin x + 2\cos x = 2 + 3\tg x. \quad (5.29)$$

方程(5.29)有周期 2π 。我们作出 $f(x)=4\sin x + 2\cos x$,
 $\varphi(x)=2 + 3\tg x$ 在 $[0; 2\pi[$ 上的图象(图5.12)。在 $[0; 2\pi[$ 上,
方程(5.29)有4个根, 其中 $x_1=0$, $x_2=\pi/6$, $x_3=5\pi/6$ 。(只
要这些数直接代入方程, 便可确知) 但怎样才能从 $[0; 2\pi[$ 中
求出第四个根的准确值呢?

我们用与方程(5.29)等价的方程代替它, 即

$$4\cos x \sin x + 2\cos^2 x - 2\cos x - 3\sin x = 0. \quad (5.30)$$

由于0和 $\pi/6$ 是方程(5.30)的根, 因此, 它的左边应包含
因子 $\sin x$ 和 $(\sin x - 0.5)$ 。事实上, 方程(5.30)变换为如下形式:

$$\pm 4\sin x \sqrt{1 - \sin^2 x} + 2(1 - \sin^2 x)$$

$$\mp 2\sqrt{1 - \sin^2 x} - 3\sin x = 0,$$

$$\pm \sqrt{1 - \sin^2 x} (4\sin x - 2) = 3\sin x + 2\sin^2 x - 2$$

将上式两边平方, 得

$$\sin x (20\sin^3 x - 4\sin^2 x - 11\sin x + 4) = 0.$$

进而有

$$\begin{aligned} & (20\sin^3 x - 4\sin^2 x - 11\sin x + 4) : (\sin x - 0.5) \\ &= 20\sin^2 x + 6\sin x - 8. \end{aligned}$$

于是, 解方程 $20\sin^2 x + 6\sin x - 8 = 0$, 求得方程 (5.29) 在

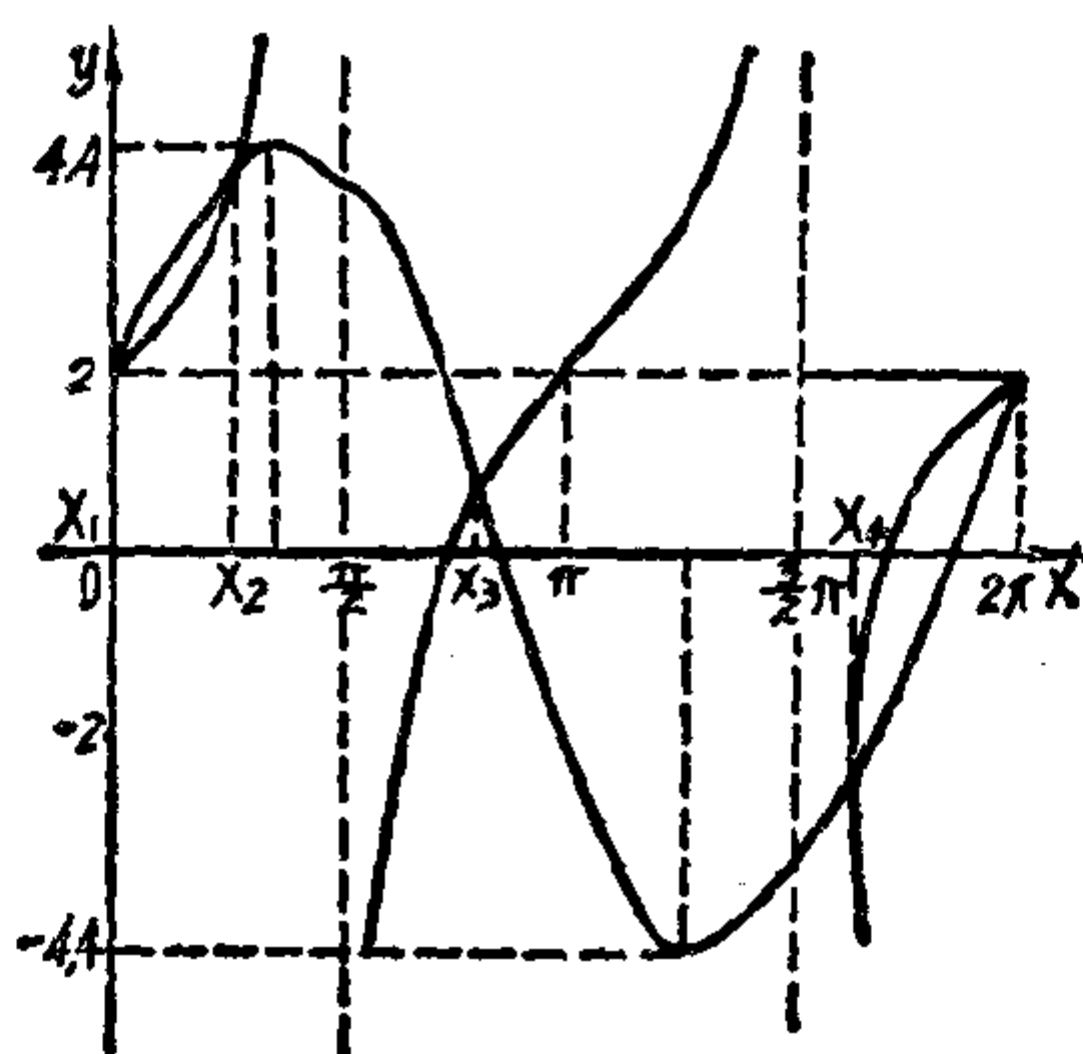


图5.12

$[0; 2\pi[$ 上的 x_4 , 得 $\sin x = 0.5$ 或 $\sin x = -0.8$. 显然, $\sin x_4 = -0.8$, $x_4 = -\arcsin 0.8 + 2\pi$.

答 $2k\pi; \pi/6 + 2m\pi; 5\pi/6 + 2p\pi; -\arcsin 0.8 + 2\pi + 2\pi n$.

练习

解:

- 1 $\sin x + \sin 2x + \sin 3x \leq \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.
- 2 $\sin^2 x + \sin^2 2x \leq \sin^2 3x$.
- 3 $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x \geq 1$.
- 4 $\sin x + \cos x \geq 1 + \sin 2x$.
- 5 $\sin^3 x(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x(1 + \operatorname{tg} x) \geq \cos 2x$.

§ 5.7 三角函数的幂降

用下面的公式作三角函数的幂降:

$$2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha; \quad 2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha; \quad 2\sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha;$$

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha - \sin^2\alpha &= \cos 2\alpha, \quad 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \sin 3\alpha, \\ 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha &= \cos 3\alpha, \quad 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1 = \cos 4\alpha, \\ 8\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin\alpha &= \sin 4\alpha.\end{aligned}$$

例1 解方程:

$$\cos^6 x + \sin^6 x = 4\sin^2 2x \quad (5.31)$$

得,

$$\cos^6 x = (\cos^2 x)^3 = (0.5(1 + \cos 2x))^3,$$

$$\sin^6 x = (\sin^2 x)^3 = (0.5(1 - \cos 2x))^3,$$

从而

$$\begin{aligned}\cos^6 x + \sin^6 x &= 0.25(1 + 3\cos^2 2x) \\ &= 0.25(1 + 1.5(1 + \cos 4x)) \\ &= 0.125(5 + 3\cos 4x).\end{aligned}$$

最后得

$$4\sin^2 2x = 2(1 - \cos 4x).$$

因此, 由于三角函数的幂降, 方程 (5.31) 变形为

$$0.125(5 + 3\cos 4x) = 2(1 - \cos 4x).$$

由此得

$$\cos 4x = 11:19;$$

$$x = \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{11}{19} + 0.5k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2\cdots).$$

练习

解:

$$1 \quad \sin^4 x + \cos^4 x \geq \cos 4x. \quad 2 \quad \cos 4x \leq -2\cos^2 x.$$

$$3 \quad \cos^6 x + \sin^6 x - \cos^2 2x \geq 1:16.$$

$$4 \quad 4\sin^3 x \cos 3x + 4\cos^3 x \sin 3x = 3\sin 2x.$$

$$5 \quad \sin^3 2x + \cos^3 2x + 0.5\sin 4x = 1.$$

$$6 \quad \operatorname{tg}^4 x = 36 \cos^2 2x.$$

$$7 \quad \operatorname{ctg}^4 x = \cos^3 2x + 1.$$

§ 5.8 万能代换的应用

用这种方法解三角方程的公式基础是:

$$\operatorname{tga} = 2 \operatorname{tga}/2 : (1 - \operatorname{tg}^2 a/2),$$

$$\cos a = (1 - \operatorname{tg}^2 a/2) : (1 + \operatorname{tg}^2 a/2),$$

$$\sin a = 2 \operatorname{tga}/2 : (1 + \operatorname{tg}^2 a/2).$$

这些公式的万能性就在于: $\sin a$, $\cos a$, tga 可用 $\operatorname{tga}/2$ 表示出来.

例1 解方程:

$$\sin x - \cos x = 1.$$

用万能代换, 得

$$\frac{2 \operatorname{tg} x/2}{1 + \operatorname{tg}^2 x/2} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x/2}{1 + \operatorname{tg}^2 x/2} = 1 \quad (x/2 \neq \pi/2 + n\pi).$$

由此 $\operatorname{tg} x/2 = 1$ 和 $x = 0.5\pi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

因此, 显然, $x = \pi + 2\pi n$ 也是这个方程的解.

答 $0.5\pi + 2k\pi; \pi(1 + 2n); k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

例2 解方程:

$$\sin x + \cos x - \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}.$$

用万能代换且记 $\operatorname{tg} x/2 = t$ 后, 得

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1-t^2} - \frac{1-t^2}{2t} = \frac{1+t^2}{1-t^2} + \frac{1+t^2}{2t^2}.$$

由此, $3t^4 + 4t^3 + 1 = 0$. 显然, -1 是这个方程的根. 因此, 方程可成 $(t+1)(3t^3 + t^2 - t + 1) = 0$. -1 是方程 $3t^3 + t^2 - t + 1 = 0$ 的根. 于是, 该方程化为如下形式:

$$(t+1)^2(3t^2 - 2t + 1) = 0.$$

其中的二次三项式，无实根。因此 $t = -1$ 。即 $x = -0.5\pi + 2\pi n$ 。所得的 x 值不是原方程的解。

答 原方程无解。

练习

解方程：

1 $(\cos x - \sin x)(2\operatorname{tg} x + \sec x) + 2 = 0$ 。

2 $(1 + \operatorname{tg} x) : (1 - \operatorname{tg} x) = 1 + \sin 2x$ 。

§ 5.9 三角方程组

所谓三角方程组是指方程组中或仅仅包含三角方程，或包含三角方程和代数方程。

如果一个未知数能表示为另一个未知数的显式，那么可将三角方程组化为含单变量的一个方程。有些三角方程组，可根据三角式的恒等变换而化为代数方程组。

例1 解

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y, \\ x - y = \pi/6. \end{array} \right\}$$

显然， $y = x - \pi/6$ ，

且 $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}(x - \pi/6)$ 。 (5.32)

因为

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \operatorname{tg}(\pi/4 - x)$$

($\operatorname{tg} x \neq -1$ ，即 $x \neq -\pi/4 + k\pi$)，

所以, 从方程 (5.32) 得 $\operatorname{tg}(\pi/4 - x) = \operatorname{tg}(x - \pi/6)$ 。由此,
 $\pi/4 - x = (x - \pi/6) + k\pi$ 和 $x = 5\pi/24 - k\pi/2$ 。

答 $(5\pi/24 - k\pi/2, \pi/24 - k\pi/2) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$,

例2 解

$$\left. \begin{array}{l} \sin x \cos y = a, \\ x + y = b. \end{array} \right\}$$

我们看到, 不等式 $|a| \leq 1$ 解的存在是这方程组解存在的必要条件. 其次, $y = b - x$. 因此 $\sin x \cos(b - x) = a \iff 0.5(\sin(2x - b) + \sin b) = a \iff \sin(2x - b) = 2a - \sin b$. 如果 $|2a - \sin b| \leq 1$, 则后一方程有解. 于是,

$$\left. \begin{array}{l} \sin x \cos y = a, \\ y = b - x, \\ |a| \leq 1 \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} \sin(2x - b) = 2a - \sin b, \\ y = b - x \\ |a| \leq 1 \\ |2a - \sin b| \leq 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x - b = (-1)^k \arcsin(2a - \sin b) + k\pi, \\ y = b - x, \\ |a| \leq 1, \\ |2a - \sin b| \leq 1 \end{array} \right\} \iff$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0.5(b + (-1)^k \arcsin(2a - \sin b) + k\pi), \\ y = 0.5b - 0.5(-1)^k \arcsin(2a - \sin b) - 0.5k\pi, \\ |a| \leq 1, \\ |2a - \sin b| \leq 1 \end{array} \right\}$$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$.

例3 解

$$\left. \begin{array}{l} \sin x \sin y = a, \\ \cos x \cos y = 0.5 \\ |a| \leq 1. \end{array} \right\}$$

$$\text{解 } \left. \begin{array}{l} \sin x \sin y = a, \\ \cos x \cos y = 0.5, \\ |a| \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \sin x \sin y + \cos x \cos y = a + 0.5, \\ -\sin x \sin y + \cos x \cos y = 0.5 - a, \\ |a| \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos(x-y) = a + 0.5, \\ \cos(x+y) = 0.5 - a, \\ |a + 0.5| \leq 1, \\ |a| \leq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \cos(x-y) = a + 0.5, \\ \cos(x+y) = 0.5 - a, \\ |a| \leq 0.5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = \pm \arccos(0.5 + a) + 2k\pi, \\ x + y = \pm \arccos(0.5 - a) + 2n\pi, \\ |a| \leq 0.5 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} |a| \leq 0.5, \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = \arccos(0.5 + a) + 2k\pi, \\ x + y = \arccos(0.5 - a) + 2n\pi, \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = \arccos(0.5 + a) + 2k\pi, \\ x + y = -\arccos(0.5 - a) + 2n\pi, \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = -\arccos(0.5 + a) + 2k\pi, \\ x + y = \arccos(0.5 - a) + 2n\pi, \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y = -\arccos(0.5 + a) + 2k\pi, \\ x + y = -\arccos(0.5 - a) + 2n\pi \end{array} \right\}$$

$$|a| \leq 0.5,$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0.5(\arccos(0.5 + a) + \arccos(0.5 - a)) + \pi(k + n), \\ y = 0.5(\arccos(0.5 - a) - \arccos(0.5 + a)) + \pi(n - k), \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0.5(\arccos(0.5 + a) - \arccos(0.5 - a)) + \pi(k + n), \\ y = -0.5(\arccos(0.5 - a) + \arccos(0.5 + a)) + \pi(n - k), \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0.5((\arccos)(0.5 - a) - \arccos(0.5 + a)) + \pi(k + n), \\ y = 0.5(\arccos(0.5 - a) + \arccos(0.5 + a)) + \pi(n - k), \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -0.5(\arccos(0.5 + a) + \arccos(0.5 - a)) + \pi(k + n), \\ y = 0.5(\arccos(0.5 + a) - \arccos(0.5 - a)) + \pi(n - k). \end{array} \right\}$$

练习

解方程组:

$$\left. \begin{array}{l} 1 \quad \sin x = \sin y = \sqrt{3}, \\ \quad x + y = 0.5\pi. \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 2 \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 10, \\ \quad x + y = 0.25\pi. \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 \quad \sin x + \sin y = 0.2 \\ \quad \cos x + \cos y = -0.2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 \quad \cos x + \cos y = 1. \\ \quad \cos 0.5x + \cos 0.5y = \sqrt{2}/2 - 1. \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 5 \quad \sin(x - y) = 3\sin x \cos y - 1, \\ \quad \sin(x + y) = -2\cos x \sin y. \end{array} \right\}$$

§ 5.10 含 $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ 的基本方程与不等式

函数 $y = \arcsin x$ 在 $[-1, 1]$ 上有定义, $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq$

$\pi/2$ 且 $\sin(\arcsin x) = x$. 函数 $y = \arccos x$ 在 $[-1, 1]$ 上有定义, $0 \leq \arccos x \leq \pi$ 且 $\cos(\arccos x) = x$. 函数 $y = \operatorname{arctg} x$ 在 $]-\infty, +\infty[$ 上有定义, $-0.5\pi < \operatorname{arctg} x < 0.5\pi$ 且 $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$. 函数 $y = \operatorname{arcctg} x$ 在 $]-\infty, +\infty[$ 上有定义, $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$.

例1 试求 $\sin(\arccos 0.75)$.

因为 $0 \leq \arccos 0.75 \leq 0.5\pi$, 所以 $0 \leq \sin(\arccos 0.75) \leq 1$.
因此, $\sin(\arccos 0.75) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos 0.75)} = \sqrt{1 - 0.75^2}$
 $= 0.25\sqrt{7}$

例2 试求 $\operatorname{tg}(\arccos 2/3)$ 。

因为 $0 < \arccos 2/3 < 0.5\pi$ ，所以 $\operatorname{tg}(\arccos 2/3) > 0$ ，因此。

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\arccos 2/3) &= \frac{\sin(\arccos 2/3)}{\cos(\arccos 2/3)} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos 2/3)}}{2/3} = \frac{\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

例3 求 $\sin(\operatorname{arctg}(-2))$ 的值。

因为 $-0.5\pi < \operatorname{arctg}(-2) < 0$ ，所以 $-1 < \sin(\operatorname{arctg}(-2)) < 0$ 。应用公式

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}},$$

得

$$\sin(\operatorname{arctg}(-2)) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-2))}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(-2))}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

例4 解方程： $3\arcsin\sqrt{x} - \pi = 0$ 。

因为 $-1 \leq x \leq 1$ ，所以 $0 \leq x \leq 1$ 。其次， $\arcsin\sqrt{x} = \pi/3$ ， $\sin(\arcsin\sqrt{x}) = \sin \pi/3$ ； $\sqrt{x} = \sqrt{3}/2$ ， $x = 3/4$ 。

例5 解方程： $\arcsin x = \operatorname{arctg} x$ 。

方程在 $[-1, 1]$ 上有定义，显然， $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$ 。由此得

$$\sin(\arcsin x) : \cos(\arcsin x) = x, \quad x : \cos(\arcsin x) = x,$$

$$x \left(\frac{1}{\cos(\arcsin x)} - 1 \right) = 0.$$

后一方程等价于方程 $x = 0$ 和 $1 : \cos(\arcsin x) = 1$ 的合取。

解第二个方程，得

$$\cos(\arcsin x) = 1, \quad \arcsin x = 0, \quad \sin(\arcsin x) = 0,$$

$x = 0$ 。

答 0.

例6 解方程: $\sin(0.2\arccos x) = 1$.

因为 $0 \leq \arccos x \leq \pi$, 所以 $0 \leq 0.2\arccos x \leq 0.2\pi$. 由此显而易见, 该方程无解.

例7 解不等式:

$$\arctg 2x + \arctg 3x < 0.75\pi. \quad (5.33)$$

首先解对应于不等式 (5.33) 的方程:

$$\arctg 2x + \arctg 3x = 0.75\pi \quad (5.34)$$

利用公式

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) : (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta).$$

得

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\arctg 2x + \arctg 3x) &= \\ &= \frac{\operatorname{tg}(\arctg 2x) + \operatorname{tg}(\arctg 3x)}{1 - \operatorname{tg}(\arctg 2x)\operatorname{tg}(\arctg 3x)} = \frac{5x}{1 - 6x^2}. \end{aligned}$$

方程

$$5x : (1 - 6x^2) = \operatorname{tg} \frac{3}{4}\pi \quad (5.35)$$

不等价于方程 (5.34). 事实上, 方程 (5.35) 有根 1 和 $-1/6$. 但 $\arctg(-2 \times 1/6) + \arctg(-3 \times 1/6) < 0$, 因为两个被加数都为负. 方程 (5.34) 右边为正. 于是, $-1/6$ 不是方程 (5.34) 的根.

如果 $x = 1$, 那么方程 (5.34) 形为:

$$\arctg 2 + \arctg 3 = 0.75\pi. \quad (5.36)$$

显然, $0.25\pi < \arctg 2 < 0.5\pi$ 和 $0.25\pi < \arctg 3 < 0.5\pi$. 因此, $0.5\pi < \arctg 2 + \arctg 3 < \pi$ 和 $0.5 < 0.75\pi < \pi$.

于是, 等式 (5.36) 左右两边都属于 $]0.5\pi; \pi[$. 因为正切函数在 $]0.5\pi; \pi[$ 上单调, 且 $\operatorname{tg}(\arctg 2 + \arctg 3) = \operatorname{tg} 0.75\pi$, 所

以1是方程 (5.34) 的根。函数 $y = \operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x$ 为递增函数。因此，不等式 (5.33) 的解是 $]-\infty, 1[$ 。

练习

解下列各式：

1 $\arcsin x - \arcsin 0.5 \leq \pi/3$

2 $\arcsin x \geq \arccos \sqrt{1-x^2}$.

3 $\arccos |x| \geq \arcsin 2x$, 4 $\operatorname{arctg} x \leq \operatorname{arccotg} x$.

5 $\arcsin x \geq \arcsin(1-x)$, 6 $\arcsin x \geq 2\arccos 0.5x$.

7 $\arccos x \leq 2\arcsin 0.5$, 8 $\operatorname{arctg} x \leq 2\operatorname{arccotg} 1$.

9 $\operatorname{arccotg} x \geq \operatorname{arctg} \sqrt{3}$.

§ 5.11 解三角方程和不等式的研究方法

这种方法的实质，已在 § 2.1 中指出过。因此，在这里，我们只讲一讲这一方法的某些特点(用于周期函数)。

例1 关于 x 解方程 $\sin^2 0.5x \cos x = a$ 。

我们把原方程变换为如下形式：

$$a = 0.5(\cos x - \cos^2 x)$$

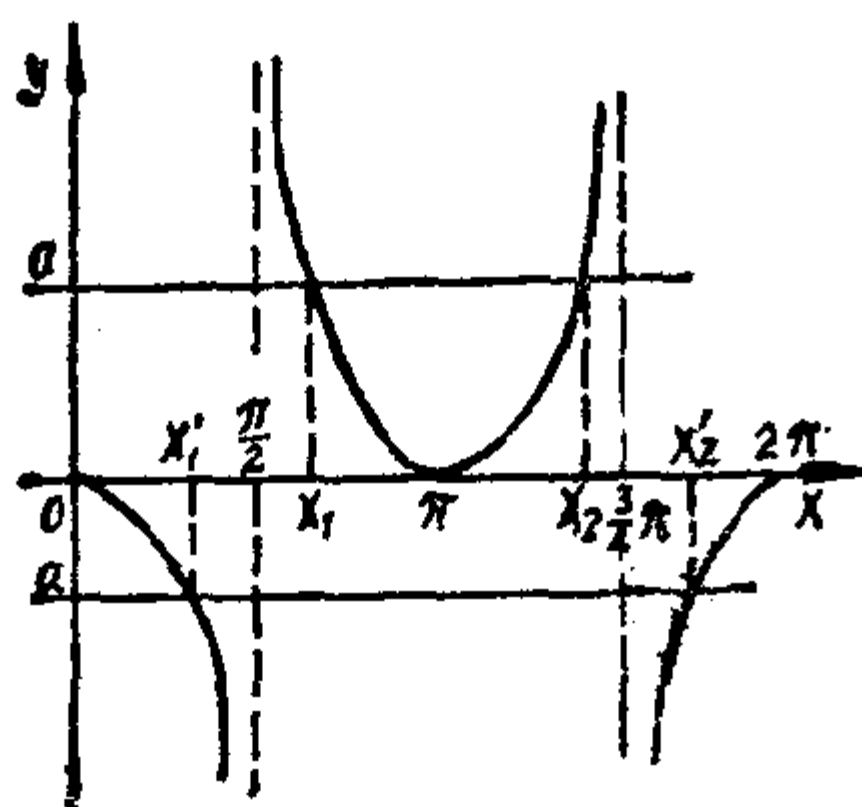


图5.13

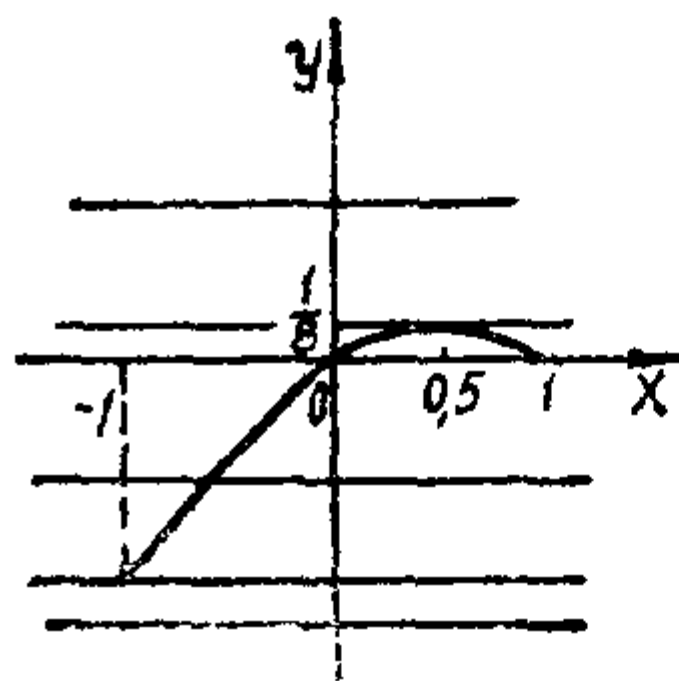


图5.14

并记 $\cos x = z$, $-1 \leq z \leq 1$ 。我们作出 $y = -0.5z^2 + 0.5z$; $y = a$ (a 取某些值时) 的图象 (图 5.13), 得

- 1) 当 $a = 1:8$ 时, 原方程有一个解 ($\cos x_1 = 0.5$);
- 2) 如果 $0 < a < 1:8$, 则方程有两个解 ($\cos x_1 = m$, $0 < m < 0.5$; $\cos x_2 = n$, $0.5 < n < 1$);
- 3) 如果 $a = 0$, 则也有两个解 ($\cos x_1 = 0$, $\cos x_2 = 1$);
- 4) 如果 $-1 < a < 0$, 则有一个解 ($\cos x_1 = k$, $-1 < k < 0$);
- 5) 当 $a = -1$ 时, 方程有一个解 ($\cos x_1 = -1$).

例2 试求不等式 $\sqrt{3\cos 2x} > \sqrt{2}\cos x$ 满足条件 $|x| < \pi$ 的一切解。

函数 $y_1 = \sqrt{3\cos 2x}$ 在 $[-0.25\pi; 0.25\pi]$ 上有定义。函数 $y_2 = \sqrt{2}\cos x$ 在 $]-\pi; \pi[$ 上有定义。因此该不等式在 $]-0.25\pi; 0.25\pi]$ 上有定义。函数 $y = \sqrt{3\cos 2x} - \sqrt{2}\cos x$ 在 $[-0.25\pi; 0]$ 上单调。因此, 在这区间上有不多于一个使 $y_1 = y_2$ 的点存在。不难看出, $y_1(-\pi/6) = y_2(-\pi/6)$ 。由于函数 y_1 和 y_2 的偶性, 得 $y_1(\pi/6) = y_2(\pi/6)$ 。显然, 该不等式的解是 $]-\pi/6; \pi/6[$ 。

例3 关于 x 解不等式: $\cos x - 1:\cos x \leq a$, 如果 $0 \leq x \leq 2\pi$ 。

作函数 $y = \cos x - 1:\cos x$ 在 $[0; \pi/2[\cup]\pi/2; 3\pi/2[\cup]3\pi/4; 2\pi]$ 上的图象。设 x'_1, x'_2 为 $a < 0$ 时方程 $\cos x - 1:\cos x = a$ 的根, x_1, x_2 为 $a > 0$ 时此方程的根。

由图象 (图 5.14) 明显看出, 如果:

- 1) $a = 0$, 则 $0 \leq x < 0.5\pi$ 或 $1.5\pi < x \leq 2\pi$;
- 2) $a < 0$, 则 $x'_1 \leq x < 0.5\pi$ 或 $1.5\pi < x \leq x'_2$;
- 3) $a > 0$, 则 $x_1 \leq x \leq x_2$, 或 $0 \leq x < 0.5\pi$, 或 $1.5\pi < x \leq 2\pi$ 。

例4 证明

$$\cos(\cos x) > 0. \quad (5.37)$$

解 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 。函数 $\cos x$ 为偶函数, 且 $1 < 0.5\pi$ 。因此

函数 $y = \cos(\cos x)$ 为正。

例5 证明：当 a 取任何值时，下式成立。

$$4\sin 3a \geq 4\cos 2a + 5\sin a - 5. \quad (5.38)$$

用 $\sin a$ 表示 $\sin 3a$ 和 $\cos 2a$ ：

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a; \quad \sin 3a = -4\sin^3 a + 3\sin a.$$

之后，将，不等式 (5.38) 表示成：

$$16\sin^3 a - 8\sin^2 a - 7\sin a - 1 \leq 0.$$

记 $\sin a = t$ ，得 $16t^3 - 8t^2 - 7t - 1 \leq 0$ 。研究 $[-1, 1]$ 上的函数 $f(t) = 16t^3 - 8t^2 - 7t - 1$ 。求 $f'(t) = 48t^2 - 16t - 7$ 。方程 $f'(t) = 0$ 的根为： $t_1 = 7/12, t_2 = -1/4$ 。得 $f(t_1) < 0, f(t_2) = 0, f(-1) < 0, f(1) = 0$ 。因为函数 $f(t)$ 连续。所以命题得证。

练习

解

1 $2\sin x = 5x^2 + 2x + 3.$

2 $\sin x = x^2 + x + 1.$

3 $2\cos^2 \frac{x^2 + x}{6} = 2^x + 2^{-x}$

4 $\cos^7 x + \sin^4 x = 1.$

5 $\sin^4 x - \cos^7 x = 1.$

6 $\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x &= 2\sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z &= 1. \end{aligned} \right\}$

7 $\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x(\sin y + \cos y) + 2 = 0.$

8 $\sin^2 x + 0.25\sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x.$

§ 5.12 混合题

解

1 $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} 3x \geq 0.$

2 $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x \leq 10/3.$

3 $11\sin x + \cos 2x - 6 \leq 0.$

$$4 \quad 8\cos x - 4\cos^3 x - 5\sin 2x \geq 0.$$

$$5 \quad \cos 6x - 2.5 \leq 2\sqrt{3}\sin 3x.$$

$$6 \quad \cos 2x - \sin 2x + \cos x + \sin x \leq 1.$$

$$7 \quad \left. \begin{aligned} 3\operatorname{tg} 4x + \operatorname{ctg} y &= 2\operatorname{tg} 60^\circ, \\ \operatorname{tg} 4x - 3\operatorname{ctg} y &= -8\operatorname{ctg} 60^\circ. \end{aligned} \right\}$$

$$8 \quad \left. \begin{aligned} \cos 2x + \sin y &= 2\cos^2 30^\circ, \\ 2\cos 2x - \sin y &= \sin 540^\circ. \end{aligned} \right\}$$

$$9 \quad \sin(\pi \cos x) \leq \cos(\pi \sin x).$$

$$10 \quad \log_4(1 - \sin 2x) \geq 0.5 + \log_2 \sin x.$$

$$11 \quad \log_{\cos \sqrt{x}}(3 : x - x) \leq \log_{\cos \sqrt{x}}(x - 1).$$

$$12 \quad 1 + \cos^2 x + \cos^2 2x \leq \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x.$$

$$13 \quad -\log_{0.5}(1 + \cos 3x) \leq 2 + \log_2(0.25 - \cos x).$$

$$14 \quad \sqrt{1 - \cos 2x} \leq \sqrt{2}(\cos x - 1.5)\sin x.$$

$$15 \quad 2\sin x + \sin 3x \leq 2\cos x - \cos 3x.$$

$$16 \quad 1 - \frac{2x}{\pi} - \cos x + \operatorname{tg} x + \frac{\cos 2x - 1}{\sin 2x} \geq 0.$$

$$17 \quad 1 - \sqrt{0.5 + \log_3 \sin x - \log_3 \cos x} \geq 0.$$

$$18 \quad \sin 2x + \sin x - \sqrt{2}\cos x \leq 0.5\sqrt{2}.$$

$$19 \quad \cos x + 3\sin x \leq 1 + 2\cos 1.5x \cos 0.5x.$$

$$20 \quad 3\operatorname{tg} x(7 + \cos 2x) \leq 2(\cos 2x - 1).$$

$$21 \quad \sin^2 3x - (a + 0.5)\sin 3x + 0.5a = 0 \quad (a \text{ 为参数}).$$

$$22 \quad \sin^4 x + (a - 4)\sin^2 x - 3(a - 1) = 0 \quad (a \text{ 为参数}).$$

23 在图5.15中画出了各种不同函数的图象.请口头回答下列问题:

1) 指出参数 a 的值;

2) 指出参数 b 的值;

- 3) 方程 $|\varphi_1(x)| = f_1(x)$ 有多少解?
- 4) 方程 $|\varphi_1(x)| = f(x)$ 有多少负解?
- 5) 方程 $\varphi_1(x) + c = f_1(x)$ (c 为参数) 的解中, 最大的是什么样的数?
- 6) 指出不等式 $\psi_1(x) \geq \varphi_2(x)$ 在 $] -0.5\pi; 0.5\pi[$ 上的解集合;
- 7) 指出不等式 $\psi(x) > f(x)$ 的解集合;
- 8) 方程 $\varphi_1(x) = \varphi(x)$ 有多少解?
- 9) 指出不等式 $\varphi(x) < \varphi_1(x)$ 的解集合;
- 10) 指出不等式 $\log_2(x-1) < 2$ 的解集合;
- 11) 试写出其图象是 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 组合图象的方程;
- 12) 若将不等式 $2^x - x^2 > 0$ 中的 $>$ 号分别用 $=$, $<$ 或 $>$ 代之,

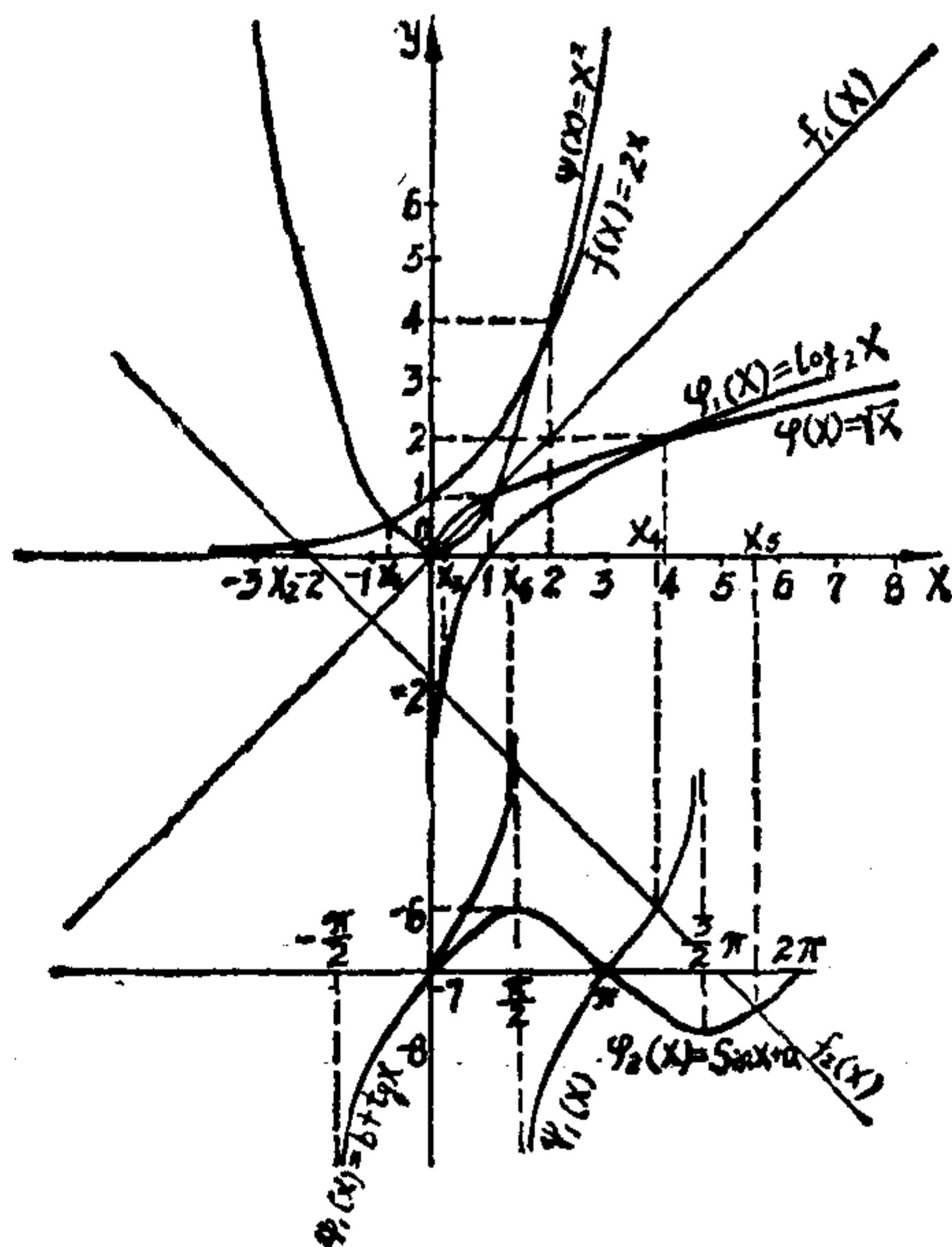


图5.15

试求

- 13) 是否存在使得方程 $\varphi_1(x) + m = \varphi(x)$ 只有一个解的值 m ?
- 14) 是否存在使得方程 $\psi(x) + n = f(x)$ 只有一个正解的值 n ?
- 15) 方程 $\psi_1(x) = \varphi_1(x)$ 有多少解?
- 16) 方程 $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ 有多少解?
- 17) 试写出图象是函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 组合图象的方程式;
- 18) 试列出由不等式 $\psi(x) > 0$ 和 $f(x) > 0$ 组合而成图象的不等式;
- 19) 指出不等式 $f_2(x)\psi_1(x) < 0$ 的解集合;
- 20) $|\overline{\varphi(x)}| \rightarrow |\overline{\psi(x)}|$ 是什么样的几何变换?
- 21) 是否存在使得方程 $\varphi(x) + k = f(x)$ 有三个解的 k 值?
- 22) 试列出其图象是由函数 $f_2(x)$, $\varphi_1(x)$, $f_1(x)$, $\psi(x)$ 组合而成图象的方程式;
- 23) X_6 是否是不等式 $f_2(x)\varphi(x) \times \psi(x) > 0$ 的解?
- 24) 是否存在使得方程 $\varphi(x+k) = f(x)$ 无解的 k 值?

第六章 几何题解法

§ 6.1 寻找解计算题的途径

寻找解平面几何计算题的途径，应该从工具作图（最大限度符合题设全部条件）开始，这种图形可由量测图的各元素作出来，并可表示出图形某些性质的十分逼真的假设。在许多情况下，由近似答案推测出它的精确值就有可能避免计算错误和逻辑错误。在一系列情况下，有答案可以大大地减轻解题方法的寻找。用作图法预解计算题就可以确定解的数目。

几何题，它可能只包含已知数值、已知数值和参数或只含参数。一个题或难或易就取决于此。工具作图、量测和运算的综合运用，有助于获得揭示图形的逼真性质、分析图形推广和应用用于解题的技能。

兹举例说明上述各点。

例1 已知三角形 ABC 中的 $h_a=6$ ， $r=2$ ， $R=5$ ，求其各边之长。

初看起来，此题似乎属《解三角形》一类问题中的一道简单题目，即根据三个已知元素，求三角形各边之长。但是，如用正弦定理和余弦定理这样的常用方法是求不出它的解。若采用辅助作图或其它带有技巧的办法，也会引出解十分复杂的方程组。应如本节开头所指出的那样，我们不妨设法用作图法来解这道题。即将此题表述成这样。

例1' 试作一 $\triangle ABC$, 其中 $h_a=6$, $r=2$, $R=5$.

若是试图用圆规、直尺通过几何变换法解出这种结构的习题是不可能的. 因此, 我们用如下方法处理. 以任一点 O 为圆心, 2为半径作圆(图6.1), 过圆上的任一点 k 作切线 KN . 作 $[KA_0] \perp (KN)$ ($|KA_0|=6$) 和 $(A_0D) \parallel (KN)$. 显然, 现在的问题归结为要在 (A_0D) 上找一点 A , 使得过此点作这样的直线, 使它与圆 $(O; 2)$ 相切、与 (KN) 相交于 B 和 C 、且由点 A 、 B 、和 C 所确定的圆半径等于5.

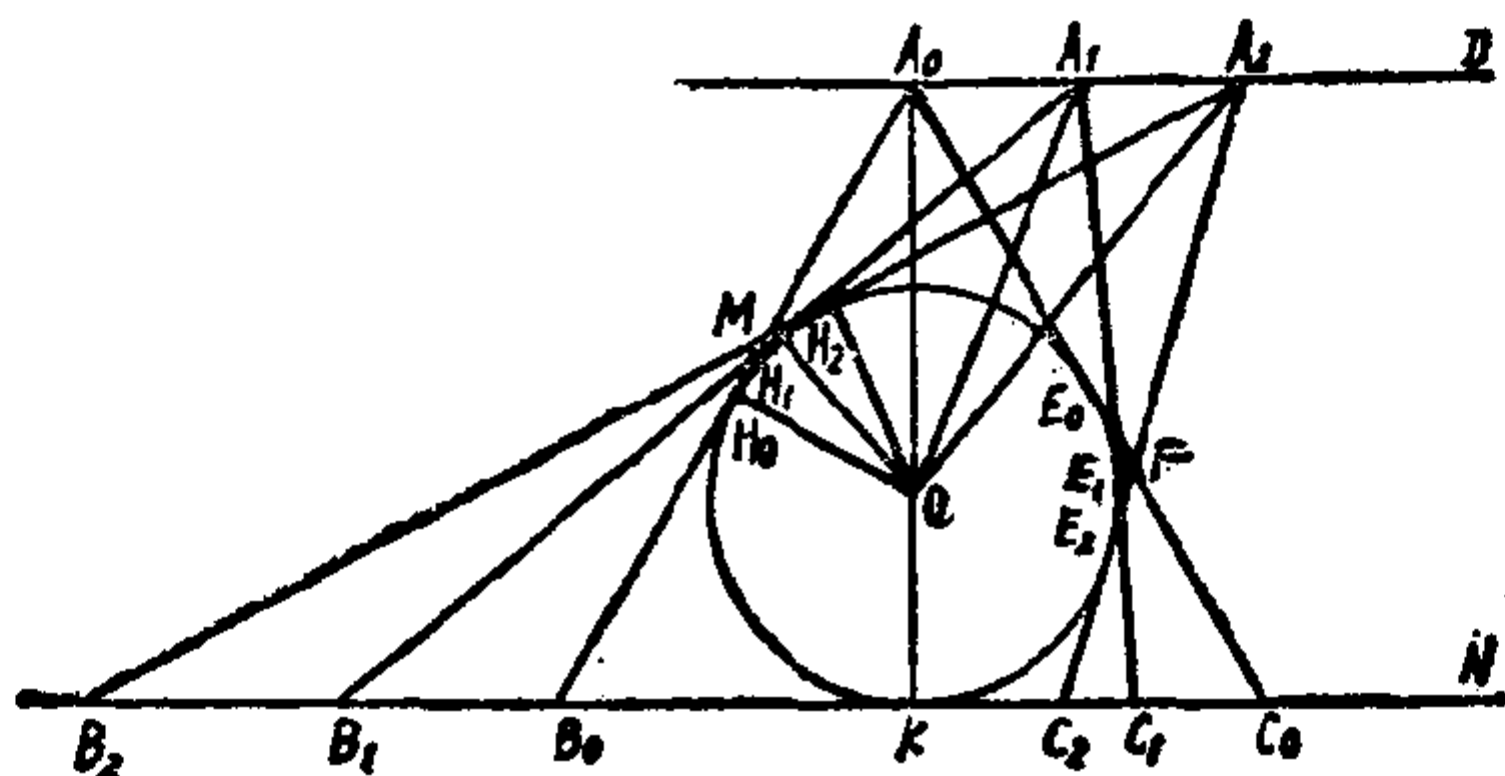


图6.1

设 $A=A_0$. 作圆 $(O; 2)$ 的切线 A_0H_0 和 A_0E_0 . 得正 $\triangle A_0B_0C_0$. 显然, $R_{\triangle A_0B_0C_0} = |A_0O| = 4$. 因而, $\triangle A_0B_0C_0$ 不是例1'的解.

我们在 $[A_0D)$ 上任取两点 A_1 和 A_2 (图6.1). 作圆 $(O; 2)$ 的切线 A_1H_1 和 A_1E_1 , A_2H_2 和 A_2E_2 . 分别得到 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$. 根据量测, 得到假设:

$$\begin{aligned} B_2\hat{A}_2C_2 < B_1\hat{A}_1C_1 < B_0\hat{A}_0C_0 \text{ 和} \\ |B_2C_2| > |B_1C_1| > |B_0C_0| \end{aligned} \quad (6.1)$$

据此, 下述假设自然成立, 即点 A 沿着 $[A_0D)$ 移动, $\triangle ABC$ 中角 A 的大小和角 A 所对的 BC 边的长度按下述方式变化: (1) A 从 60° 至 0° 单调递减(达不到此值); (2) $|BC|$ 从 $|B_0C_0|$ 至 $+\infty$ 单调递增. 如果这些假设为真, 则 R 从4至 $+\infty$ 单调递增(根据公

$$|A_1F| > |FC_1|.$$

因此

$$|B_1B_2| > |A_2A_1| > |C_2C_1| \text{ 和}$$

$$|B_2C_2| > |B_1C_1| > |B_0C_0|.$$

于是证得例1有唯一解.

例2 圆内接五边形 $ABCDE$. A 至 (BC) , (CD) , (DE) 的距离分别等于 a , b , c . 试求 $h = |A, (BE)|$.

作任意圆的任一内接五边形 $ABCDE$ (图6.2). 作 $[AH] \perp (BC)$, $[AK] \perp (BE)$, $[AM] \perp (CD)$, $[AP] \perp (DE)$. 用比例尺量度 $|AH|$, $|AK|$, $|AM|$, $|AP|$ 后, 得到如下假设: $h:a = c:b$, 再任意作一内接于圆的五边形, 并作相应量测, 又得 $h:a \approx c:b$. 于是得到工作假设: 未知数 h 和已知数 a , b , c 满足下列等式:

$$h:a = c:b \quad (6.2)$$

$$\text{等式(6.2)提示 } \triangle HAK \sim \triangle MAP. \quad (6.3)$$

对应角的改变«证实»了这个假设.

在四边形 $AHBK$ 和 $AMDP$ 中, 因为有两个直角和 $\widehat{CBE} + \widehat{CDE} = 180^\circ$. 因此, $\widehat{HBK} = \widehat{MDK}$, $\widehat{HAK} = \widehat{MAP}$, $\widehat{HBA} = \widehat{MDA}$. 由此得到 $\triangle AHB \sim \triangle AMD$ 和 $\triangle ABK \sim \triangle ADP$. 于是, $\square AHBK \sim \square AMPD$. 因此, $\triangle HAK \sim \triangle MAP$. 假设(6.3)得证. 从而证明 $h = ac:b$.

例3 在 $\triangle ACB$ 中, $\widehat{ACB} = 20^\circ$, $|AC| = |CB|$, $|CM| = |AB|$ $M \in [AC]$. 求 $\widehat{MBM}$.

作 $\triangle ACB$, 经量测后, 得到这样的假设:

$\widehat{ABM} = 70^\circ$, $\widehat{AMB} = 30^\circ$, $\widehat{MBC} = 10^\circ$, 等等. 在图(见图6.3)上绘出 10° , 30° , 70° , 80° 等角度(根据假设), 注意 $10^\circ + 80^\circ = 90^\circ$, $70^\circ + 20^\circ = 90^\circ$, $20^\circ + 20^\circ + 20^\circ = 60^\circ$. 据此就得出证明命题的方法, 即证明 $\widehat{ABM} = 70^\circ$. 将原 $\triangle ABC$ 补成只有一些«特殊»角

度的(60° , 90° , 150° 等等)多边形. 经不同组合的结果就得五边形 $CKABF$. 尔后, 本题的论断就明显了.

例4 给定一平行四边形 $ABCD$ (图6.4). $[BH] \perp [DC]$, $[BK] \perp (AD)$, $[HM] \perp (BK)$, $[BP] \perp (KH)$, $O = (MH) \cap (BP)$. 若已知 $|BD| = b$, $|KH| = a$, 求 $|BO|$.

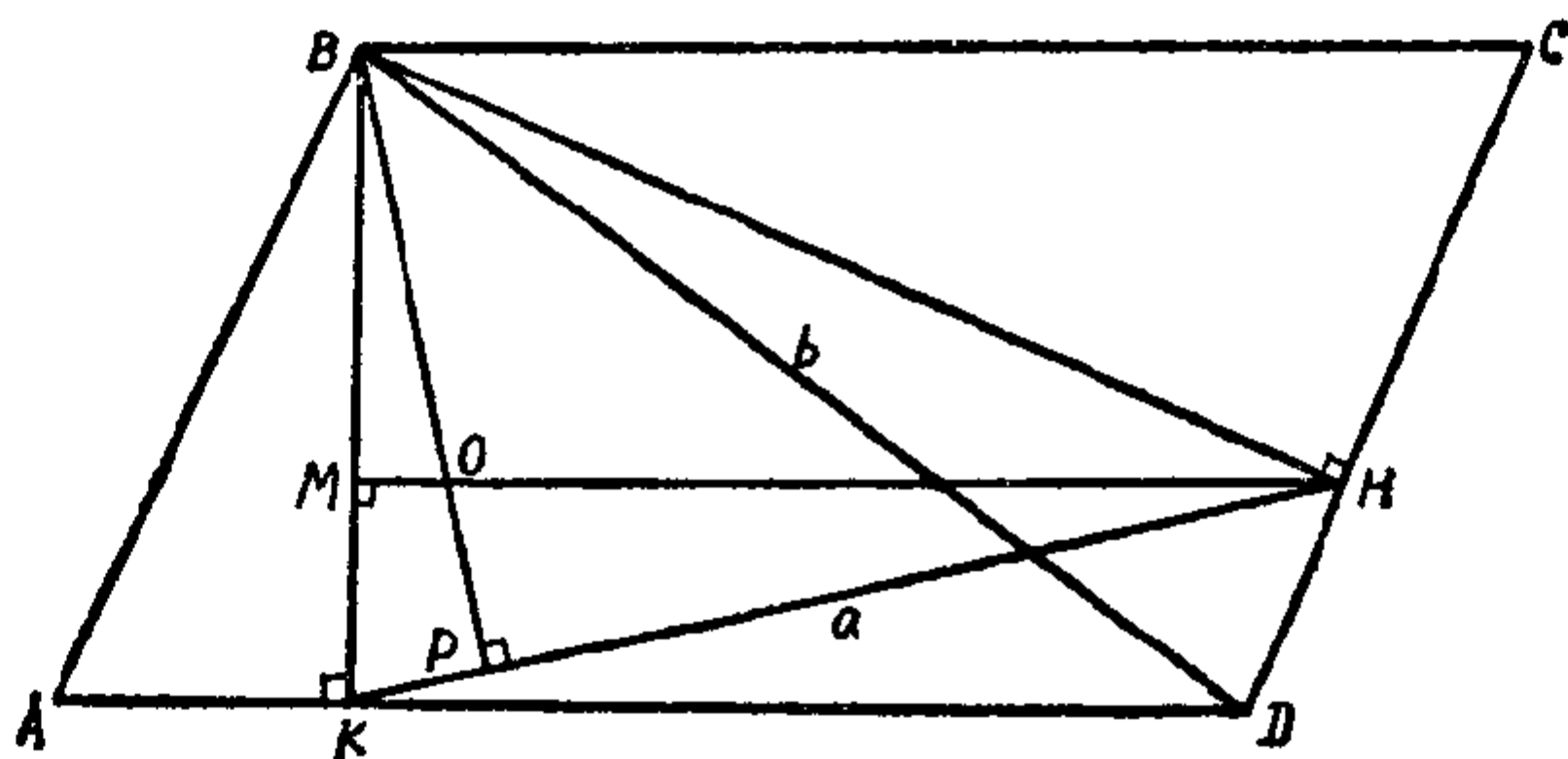


图6.4

我们来解本题的特例. 例如, 若 $H = D$, 则 $K = P = O = M$ (图6.5). 显然, 对于这种情况, $|BO|^2 = |BK|^2 = b^2 - a^2$. 在图6.4上, 量度 $|BD|$, $|KH|$, $|BO|$, 并完成相应的近似计算后, 便得出一个假设, 在这种情况下, $|BO|^2 = b^2 - a^2$. 于是, 计算题就可用证明 $|BO|^2 = b^2 - a^2$ 的证明题来代替. 为此, 我们作一个直角 $\triangle BO_1D$ ($\widehat{BO_1D} = 90^\circ$, $|O_1D| = a$)(图6.6). 在准确作出的图上, 通过量测不难发现所得图形有如下性质:
 $O_1 = s_{(BK)}(O)$, $|O_1D| = |HK| = a$, $\widehat{KBP} = \widehat{HO_1P} = \widehat{O_1HK}$.
 $(OK) \parallel (HD)$, $|KO| = |HD|$, $\widehat{BO_1M} = \widehat{MOB} = \widehat{BKP}$.

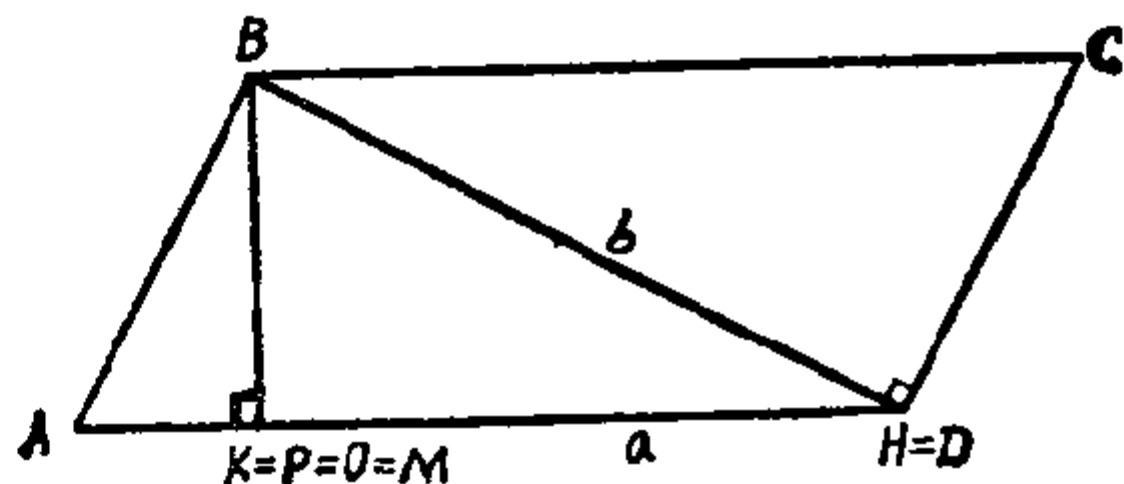


图6.5

虽然，所有上述性质还需要证明，但现在对证明 $|BO|^2 = b^2 - a^2$ 的途径已经很清楚。

于是，应当证明：如果 $O_1 = s_{(BK)}(O)$ ，则 $\triangle BO_1D$ 中角 BO_1D 为直角。且 $|O_1D| = a$ 。

角 KBP 和 O_1HK 全等，这是因为它们的边互相垂直。其次， $(KO) \parallel (DH)$ ，这是因为 $(KO) \perp (BH)$ (O 是 $\triangle BHK$ 的垂心)，且 $(DH) \perp (BH)$ 。于是， $KOHD$ 是平行四边形。因此， DKO_1H 为等边梯形，因而 $|O_1D| = |KH|$ 。

剩下要证明 $\angle DO_1B = 90^\circ$ 。显然， $\angle MOB = \angle BKP$ 而此两角的边分别对应垂直。等式 $\angle HO_1D = \angle KHO_1 = \angle HKD$ 的正确可由等边梯形 KO_1HD 的性质推得。因为 $\angle BKP + \angle HKD = 90^\circ$ ，所以 $\angle BO_1M + \angle HO_1D = 90^\circ$ 。于是证得 $\triangle BO_1D$ 为直角三角形且 $O_1D = b$ ，因此， $|BO_1|^2 = b^2 - a^2$ ，和 $|BO|^2 = b^2 - a^2$ 。

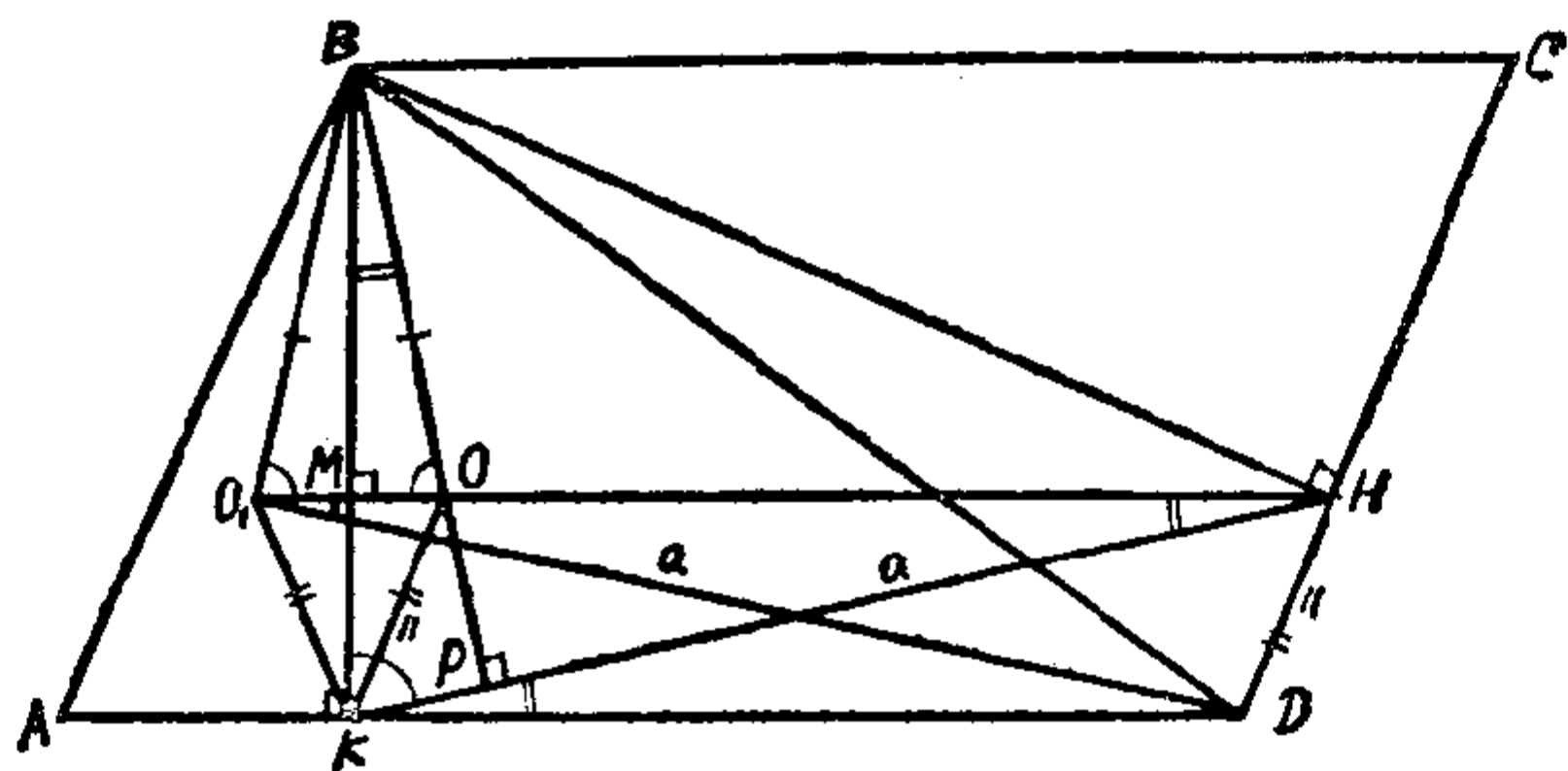


图6.6

例5 $\triangle ABC$ 中(B 为锐角)，作高 AD 和 CE 。若已知 $|AB| = 15$ ， $|AC| = 18$ ， $|BD| = 10$ ，求 $|DE|$ 。

根据对图6.7上所画线段和角度进行测量的结果，可得假设： $\triangle BED \sim \triangle BCA$ ，如果是这样的话，那么， $|DE|:18 = 10:15$ 。于是 $|DE| = 12$ 。角 EDA 和角 ECA 相等是因为四边形 $ADCE$ 内接于圆(这个四边形的两对角为直角)。

因为角 OAB 和 OAC 随圆半径的增加而增长($|AM|$ 不变)。
因此, 解显然有唯一性。

假设(6.4)的证明步骤为(图6.9);

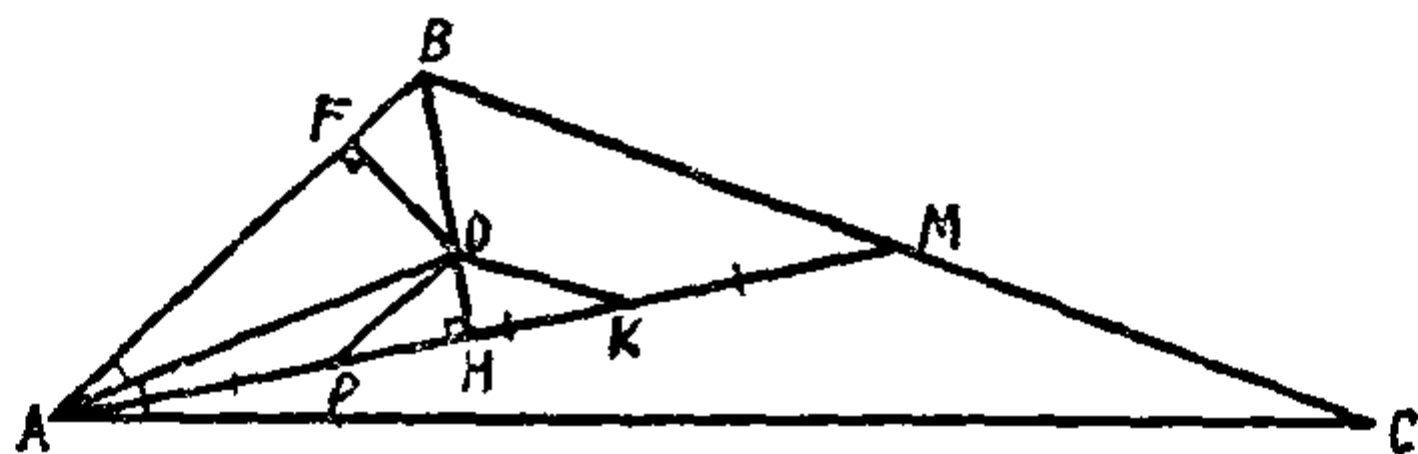


图6.9

$$\begin{aligned} S(ABC) &= 6\sqrt{14} \text{ (根据海伦公式); } r = s:p = 3\sqrt{14}:7; \\ \cos \hat{ABC} &= -0.44 \text{ (根据余弦定理); } \cos \hat{ABH} = 0.2\sqrt{7}; \\ \sin \hat{ABH} &= 0.6\sqrt{2}; \quad |BO| = r:\sin \hat{ABH} = 5:\sqrt{7}; \\ |BH| &= 5\cos \hat{ABH} = \sqrt{7}; \\ |OH| &= |BH| - |BO| = 2:\sqrt{7}; \quad |AH| = 5\sin \hat{ABH} \\ &= 3\sqrt{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |PH| &= |AH|:3 = \sqrt{2}; \quad |PO| = \sqrt{|OH|^2 + |PH|^2} \\ &= 3\sqrt{14}:7. \end{aligned}$$

例7 一棱锥 $[D-ABC]$ 的所有各面为全等等腰三角形, 而棱锥的高与一个侧面的高重合。若最大相对的棱之间的距离等于1。求棱锥的棱长。

在求这个例题的解答时, 关键在于把棱锥的高 DH 画对。这可能有两种情况: 1) 棱锥的高与等腰 $\triangle ABD$ 的高在侧边 AB 上重合(图6.10); 2) 点 H 为三角形 ABD 底边 AB 的中点(图6.11)。

第一种情况是不可能的, 因为在以 B 为顶点的直三面角 $BADC$ 中, 在棱边 BA 上二面角是直二面角, 因而,

$$\cos \hat{DBC} = \cos \hat{ABC} \cos \hat{ABC}. \quad (6.5)$$

但是, 如果 $\hat{A}BC = \hat{C}BD \neq 90^\circ$, 则由等式 (6.5) 得 $\cos \hat{A}BD = 1$, 即 $\hat{A}BD = 0^\circ$. 假若 $\hat{A}BC = \hat{C}BD = 90^\circ$, 则也得 $\hat{A}BD = 90^\circ$, 这是不可能的.

于是, 只可能有第二种情况. 显然, $\cos \hat{D}BC = \cos \hat{A}BD \cos \hat{A}BC$ (图6.11), $\hat{A}BD = \hat{A}BC$ 和 $\hat{A}BD + \hat{A}BC + \hat{D}BC = 180^\circ$. 因此, $\hat{D}BC < 90^\circ$ 和 $\hat{D}BC > \hat{A}BD$. 于是, 棱锥的最大相对的棱是 DC 和 AB . 显然, $[MH]$ 是 $[AB]$ 和 $[DC]$ 的公垂线 ($\vec{CM} = \vec{MD}$, $\vec{AH} = \vec{HB}$).

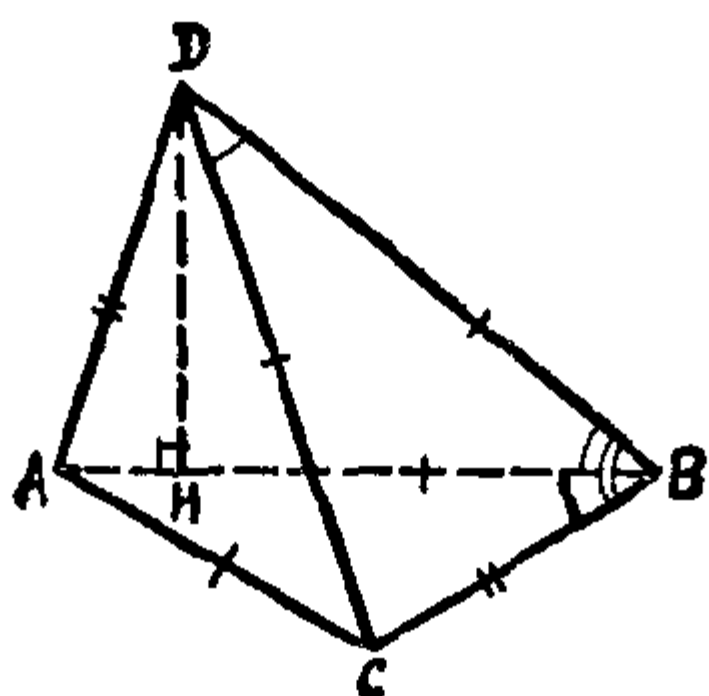


图6.10

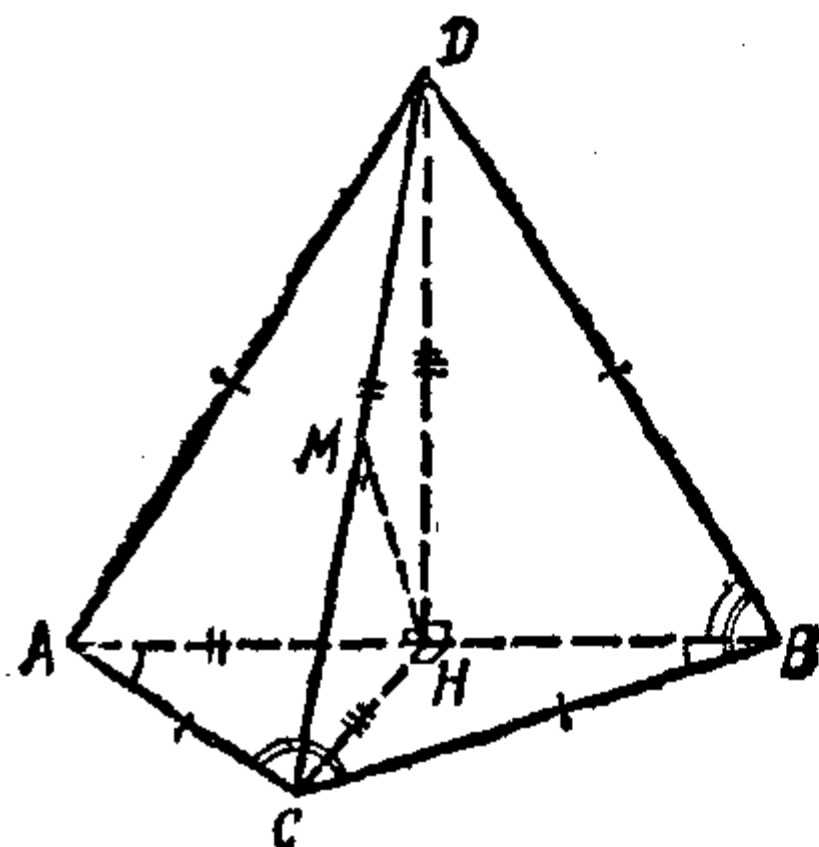


图6.11

由于三角形 CHD 为直角三角形, 因此, 如果 $|MH| = 1$, 则 $|CD| = |AB| = 2$, 由等腰直角三角形 CHD , 得

$$|DC|^2 = |CH|^2 + |HD|^2, \quad 2^2 = 2|HD|^2, \\ |HD| = \sqrt{2}.$$

由直角三角形 DHB , 得

$$|DB|^2 = |DH|^2 + |HB|^2, \quad |DB|^2 = 3, \quad |DB| = \sqrt{3}.$$

例8 在 $[D-ABC]$ 中, $H \in (ABC)$ 和 $[DH] \perp (ABC)$.

$|AB| = 15$, $|BC| = 14$, $|AC| = 13$, $|AD| = 18$, $|DB| = |DC|$, $\hat{CAH} = \hat{HAB}$. 求 $|DH|$.

根据三垂线定理可以证明: 如果 $[HK] \perp (BC)$, 则 $[DK] \perp (BC)$ (图6.12). 因为 $|DB| = |DC|$, 所以 $\vec{BK} = \vec{KC}$.

我们用作图法解这道题。作 $\triangle ABC$ (根据三个边), AL 是角平分线和 KE 是 BC 的中垂线(图6.13)。得 $H = (AL) \cap (KE)$

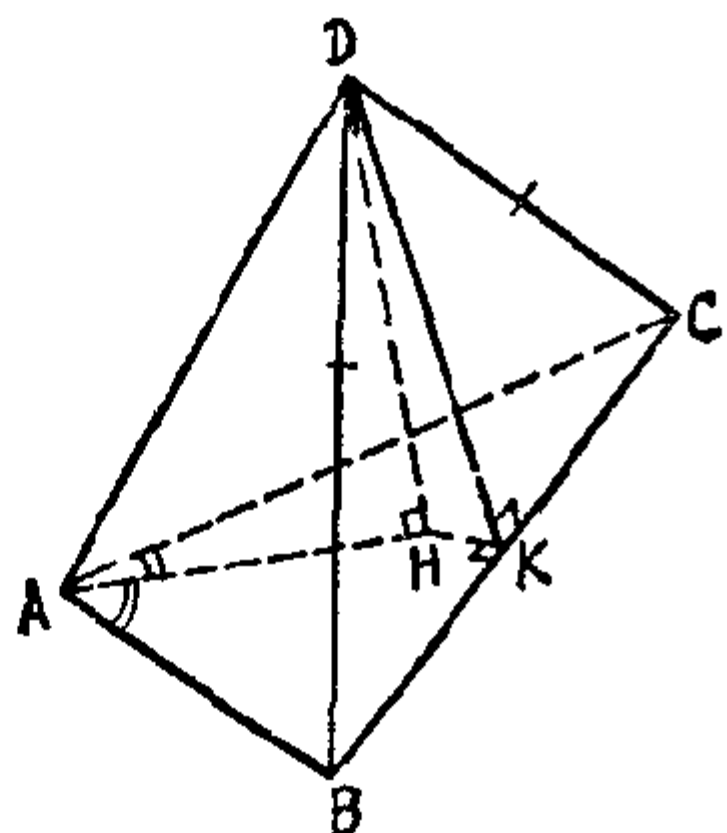


图6.12

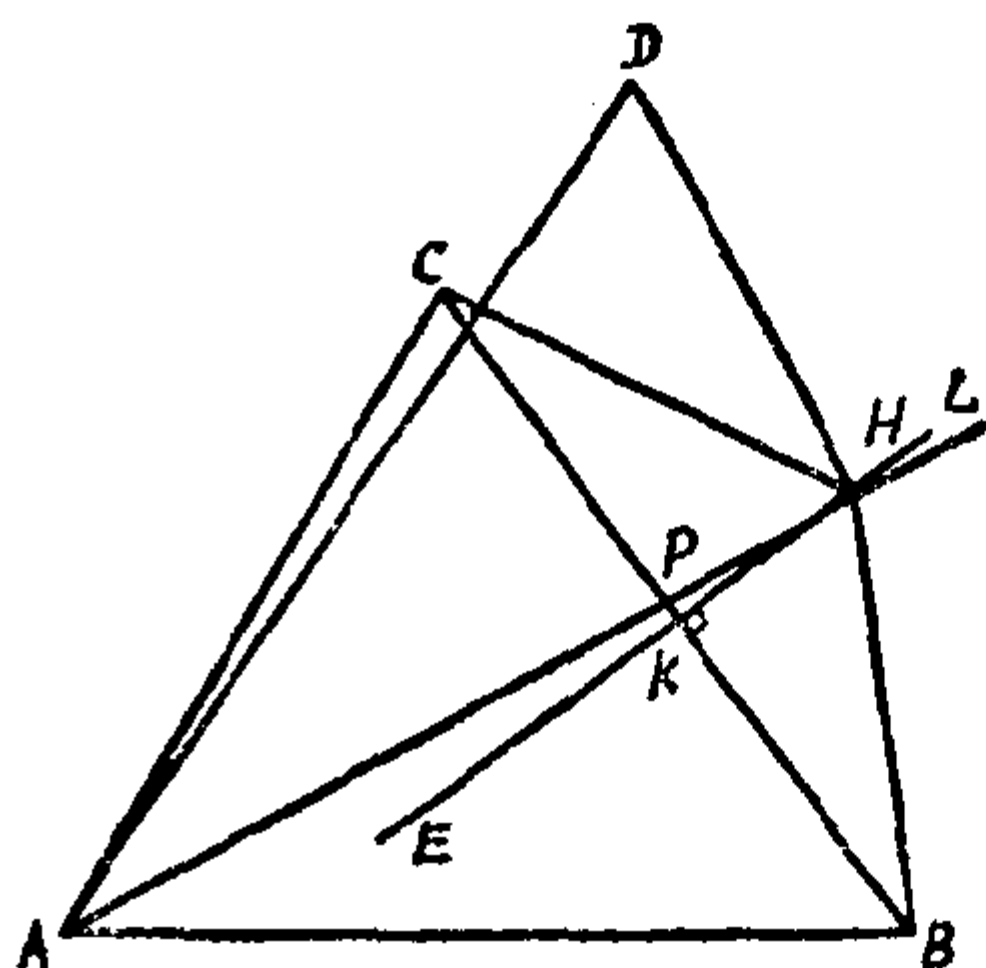


图6.13

作直角 $\triangle AHD$ (根据直角边 AH 和斜边 AD)。

从图6.13中、首先明显地看到, 点 H 在 $\triangle ABC$ 之外, 其次, 通过测量求出 $|AH| \approx 16$, $|DH| \approx 8$, $|PH| \approx \frac{1}{3}|AP|$. 再次, 根据测量, 得如下假设:

$$\hat{HAB} = \hat{HCB}, \hat{ACB} = \hat{AHB}, \hat{AHC} = \hat{ABC}.$$

如果是这样的话, 那么 H 就在 $\triangle ABC$ 的外接圆内。但怎样利用点 H 的这一性质来计算 $|AH|$ 呢?

由 $\triangle CPH \sim \triangle APB$ 得:

$$|PH| : |PB| = |DC| : |AP|. \quad (6.6)$$

已知 $|PC| : |PB| = |AC| : |AB|$ (三角形角平分线的性质). 因此, $|CP| = 6.5$; $|PB| = 7.5$. $|AP|$ 的值根据余弦定理可从 $\triangle APB$ 求得。为此, 我们须先求出 $\cos \hat{ABC}$:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB||BC|\cos \hat{ABC}.$$

由此 $\cos \hat{ABC} = 0.6$. 由 $\triangle APB$ 得

$$|AP|^2 = |AB|^2 + |BP|^2 - 2|AB||BP|\cos \hat{ABP}$$

$$= 146.25,$$

$$|AP| = \frac{3\sqrt{65}}{2}.$$

由等式(6.6)得 $|PH| = \sqrt{65}:2$. 于是,

$$|AH| = 2\sqrt{65} \text{ 和 } |HD| = \sqrt{18^2 - (2\sqrt{65})^2} = 8.$$

练习

- 1 若 $S(ABC) = 16$, $\vec{CM} = \vec{MB}$, $\vec{AK} = \vec{KC}$, $|AM| = 6$, $|BK| = 4$. 求 $\widehat{AM, BK}$.
- 2 在梯形 $ABCD$ 中 ($[AD] \parallel [BC]$), $|AD| = 3$, $|BC| = 2$, $|AC| = 3$, $|BD| = 4$. 求 $S(ABCD)$.
- 3 $ABCD$ 为正方形. $\vec{AK} = \vec{KB}$, $\vec{AM} = 3\vec{MC}$. 求 $\widehat{KM, D}$.
- 4 在平面上给定不重合的四点 A, B, C, D , 使得 $(AB) \perp (CD)$ 和 $(AC) \perp (BD)$. 求 $\widehat{AD, BC}$.
- 5 在梯形 $ABCD$ 中 $[AD] \parallel [BC]$, $O = (AC) \cap (BD)$, $S(AOD) = m$, $S(BOC) = n$. 求 $S(ABCD)$.

§ 6.2 寻找证明题解的途径

寻找证明题解的方法可以分为:

- (1) 作出尽可能符合题设一切条件的图形(按图形的形状, 准确性);
- (2) 以工具寻找图形性质, 证明所得假设的正确性或虚假性;
- (3) 点集合的工具作图, 属于这个构图的点的性质被用来作为解题的论据, 而证明这个集合性质.

(4) 应用找到而又被论证过的全部或部分的图形性质来证明题中陈述的图形性质.

例 1 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $|AB| = 15$, $|AC| = 10$, 证明: BAC 的角平分线 AL 之长不大于12.

以 $[AB]$ 为公共边和第三顶点 $C_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 作几个三角形 ABC_n , 使 $|AB| = 15$, $|AC| = 10$ (图6.14), 点 C_n 在 $(A, |AC|)$ 的半圆上, 作三角形 ABC_n 的角平分线 AL_n , 点 L_n 在直径为12的半圆 KL_nA 上(假设). 现在, 只需证明或驳倒所得到的假设. 通过量度, 我们发现, $\widehat{KLA} = 90^\circ$, $\widehat{KLF} = \widehat{BLK}$ ($F = (A, |AB|) \cap [AB]$), $\widehat{FLA} = \widehat{ALC}$. 这同样是个有用的假设. 现来证明所发现的这个性质. 第一, $|BL| : |LC| = 15 : 10 = 3x : 2x$. 显然, 也有 $|LF| = |LC| = 2x$; 第二, 如果 $|KA| = 12$, 则 $|KF| = 2$ 和 $|BK| = 3$. 由此, 显而易见, $\widehat{BLK} = \widehat{KLF}$, 因为 $|BL| : |LF| = 3x : 2x = 3 : 2$ 和 $|BK| : |KF| = 3 : 2$. 显然, 有 $\widehat{KLA} = 90^\circ$, 于是本题得解.

例 2 若已知 $|AB| = 40$ 和 $|AX| : |BX| = 5 : 3$, 试确定平面上的点 X 的性质.

作 $[AB]$ (图6.15)和几个点 $X_0, X_1, X'_1, X_2, X'_2, X_3, X'_3, \dots$, 使 $|AX| : |PX| = 5 : 3$. 之后, 不难看出, 所有这些点在一个圆上. 其圆心属于 (AB) . 利用比例尺, 我们可得到如下假设: 圆的直径等于75. 现在要证明或推翻这个假设. 设 M 为此圆上的任一点. 记作 $\widehat{MOA} = \alpha$, 如果 $|OM| = 75 : 2 = 37.5$, 则 $|OB| = 22.5$ 和 $|OA| = 62.5$. 由 $\triangle BOM$ 和 $\triangle AOM$, 得

$$|BM|^2 = 22.5^2 + 37.5^2 \pm 2 \times 22.5 \times 37.5 \cos \alpha$$

$$= 9(212.5 \pm 187.5 \cos \alpha);$$

$$|AM|^2 = 62.5^2 + 37.5^2 \pm 2 \times 62.5 \times 37.5 \cos \alpha$$

$$= 25(212.5 \pm 187.5 \cos \alpha)$$

(«+»或«-»号随角 α 是锐角或钝角而改变)。

显然, $|BM|^2:|AM|^2=9:25$, 即 $|BM|:|AM|=3:5$. 因此, 证得由于实际作图和量度«发现»关于集合 X 成立的假设, 即集合 X 是半径为37.5的圆. 其圆心 O 属于 $[AB)$, $|BO|=22.5$.

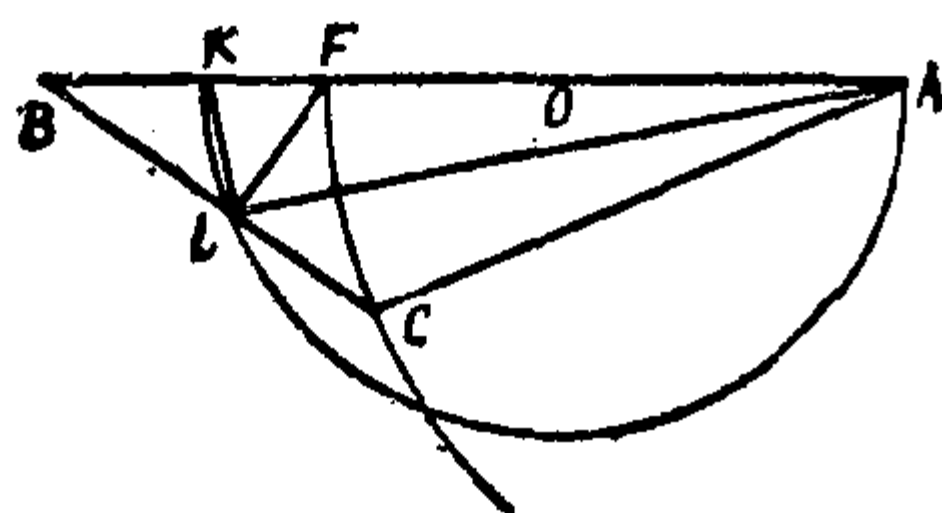


图6.14

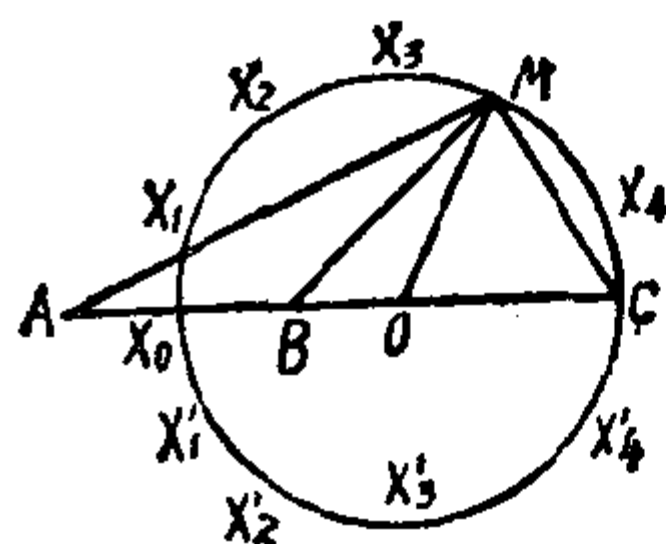


图6.15

例 3 已知一点 P 在正方形 $ABCD$ 内, $[AK] \perp (BP)$, $[BM] \perp (CP)$, $[CH] \perp (DP)$, $[DT] \perp (AP)$. 证明: 存在点 $X = (AK) \cap (BM) \cap (CH) \cap (DT)$.

图形«证实»题设条件 (图6.16). 过 P 和 X 作平行于正方形各边的直线, 得: $[PL]$, $[PO]$, $[PR]$, $[PN]$, $[FX]$, $[XQ]$, $[XY]$, $[XE]$. 在量度这些线段后, 我们得到一个假设: $|FX| = |LP|$ 和 $|BL| = |AF|$, $|BE| = |LP|$ 和 $|LC| = |EX|$, $|EX| = |PN|$ 和 $|DN| = |EC|$, $|YD| = |AR|$ 和 $|PR| = |YX|$. 如果是这样, 则 $\triangle BLP \cong \triangle AFX$, $\triangle BEX \cong \triangle PLC$, $\triangle XEC \cong \triangle PND$, $\triangle ARP \cong \triangle DYX$. 于是, 由于准确地完成作图和量度, 便得到 X 具有下列性质的假设: $|XY| = |PR|$, $|XQ| = |PO|$. 因此, 可将本题看成应该证明: 如果 $|XY| = |PR|$ 和 $|XQ| = |PO|$, 则 $(AX) \perp (BP)$, $(BX) \perp (CP)$, $(CX) \perp (PD)$, $(DX) \perp (AP)$.

点 X 的这一性质显而易见. 如 $(AX) \perp (BP)$. 因为从 $\triangle BLP \cong \triangle AFX$ 推得 $\angle LBP \cong \angle FAX$. 但 $[BL] \perp [AF]$, 因此 $[BP] \perp [AX]$.

例4 证明：从任一凸等边五边形可以剪去一个边与五边

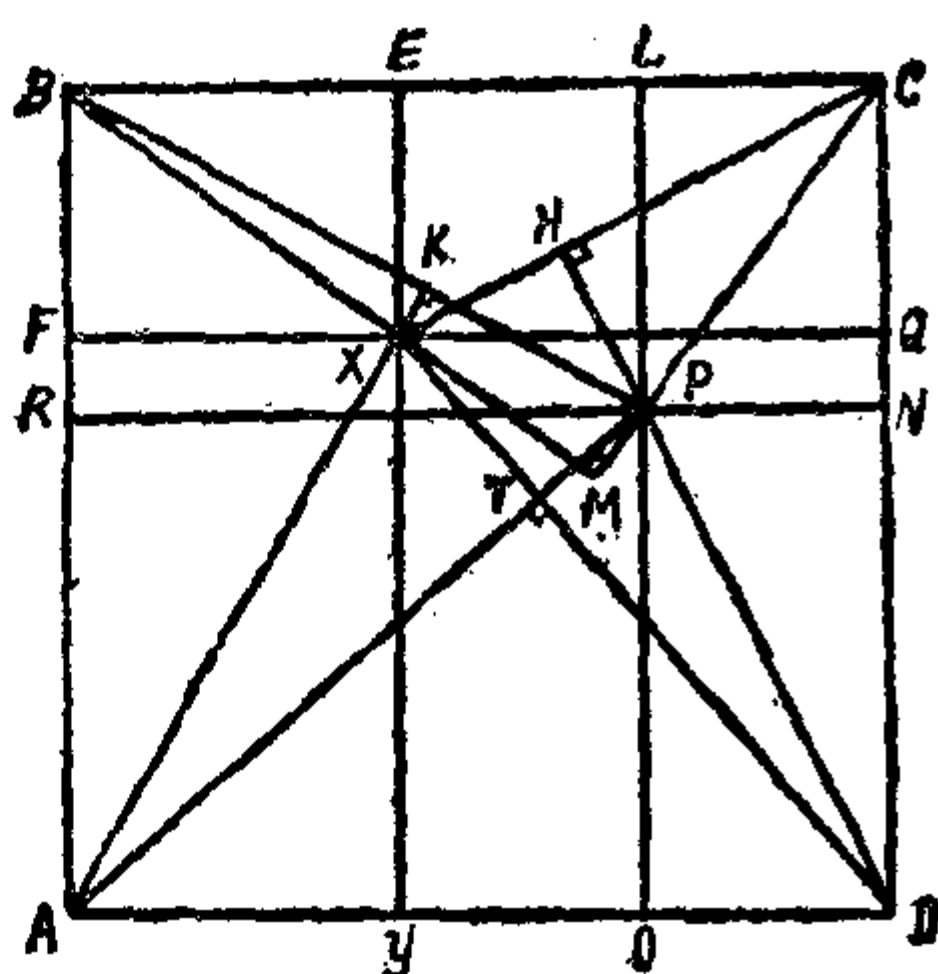


图6.16

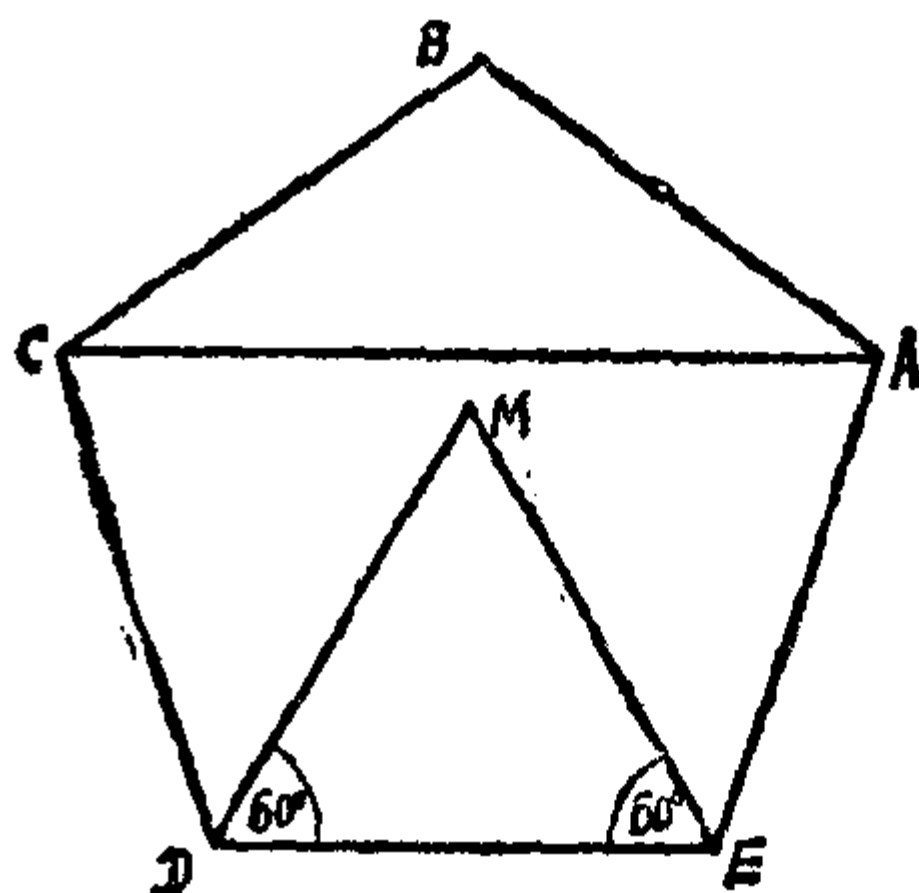


图6.17

形的一边相重合的正三角形 ω 。

首先作一个正五边形 $ABCDE$ (图6.17)。显然，从中可用五种方法剪去 ω 。不难看到， ω 在四边形 $ACDE$ 中，再作若干个凸等边五边形 $ABCDE$ (图6.18—6.20) 和三角形 ω 。并对这些五边形的对角线和角用工具量测后，可得出如下假设：

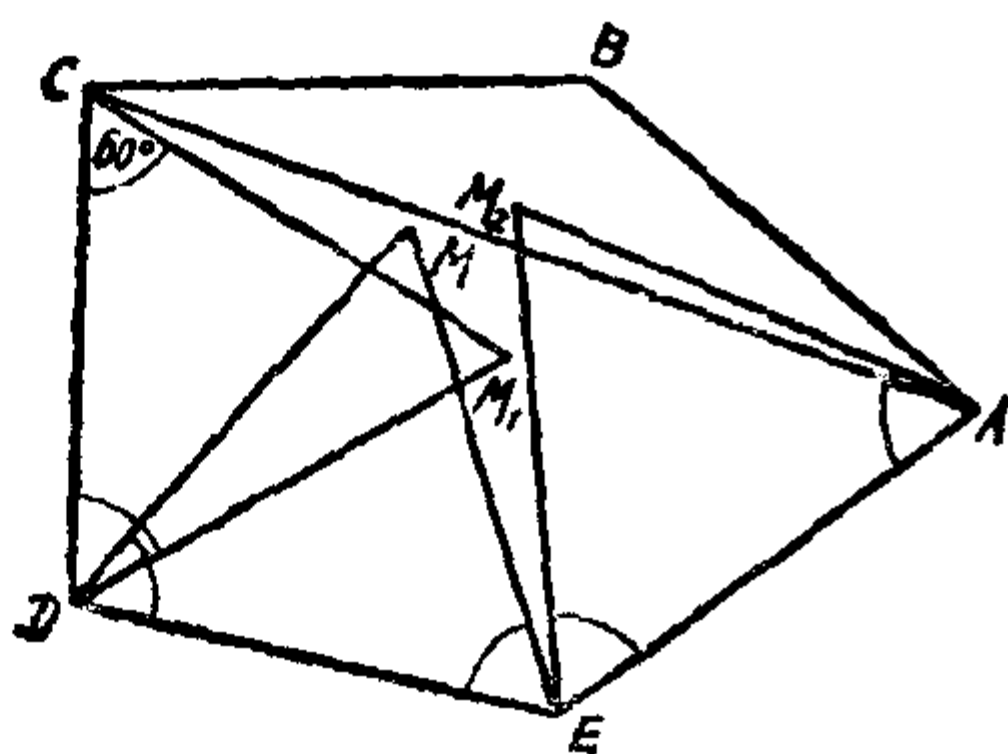


图6.18

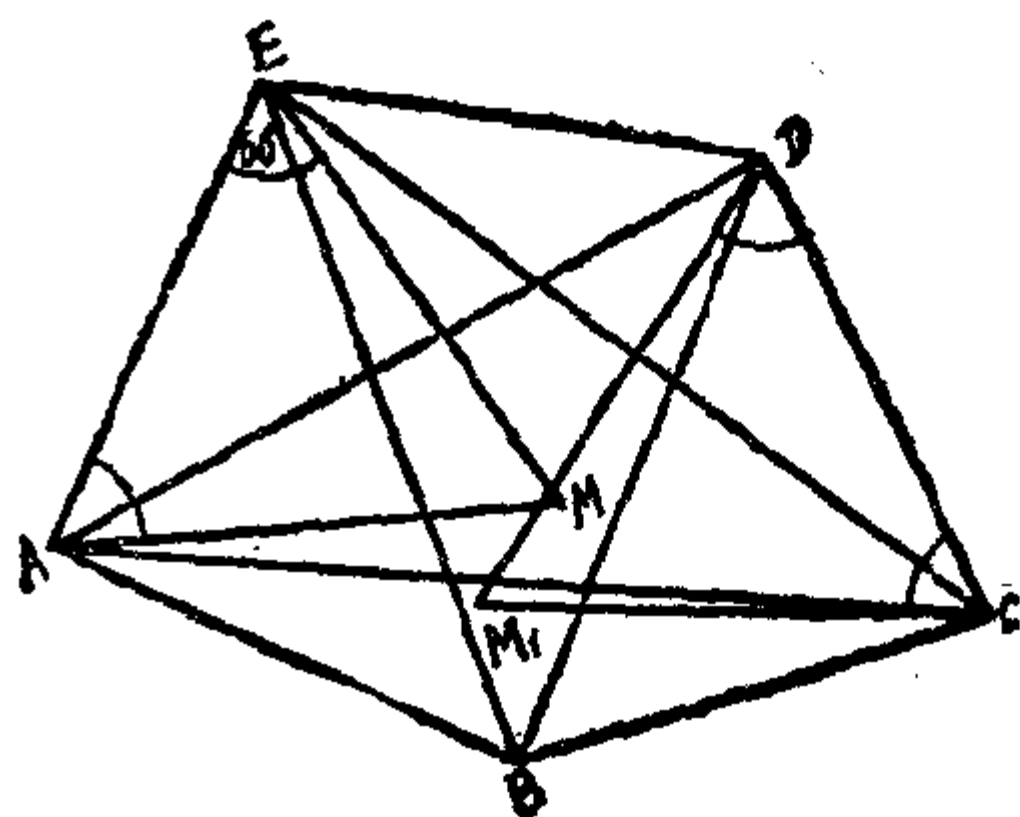


图6.19

- 1) 如果 AC 是 $ABCDE$ 的最长对角线，则从 $ACDE$ 或许总可以剪去一个三角形 ω (图6.20上的 $\triangle MAE$)。
- 2) $\angle AEC > 60^\circ$ 和 $\angle ADC > 60^\circ$ 。
- 3) $\angle EAC > 60^\circ$ 或 $\angle ACD > 60^\circ$ 。

如何证明或推翻这些假设呢？第一，显然有 $|AB| < |AC| < 2|AB|$ 。第二，如果 AC 是对角线中最长的对角线，那么， $|AC| > |CE| > |AE|$ 和 $|AC| > |AD| > |DC|$ 。在同一个三角形中，大边对大角，因此， $\hat{AEC} > 60^\circ$ 和 $\hat{ADC} > 60^\circ$ 。剩下要证明假设3)。设 $\hat{EAC} < 60^\circ$ 和 $\hat{ACD} < 60^\circ$ ，把 $ACDE$ 补成 $\triangle ACP$ (图6.21)，我们看作 $|AC| = 1$ 。记作 $|AE| = |ED| = |DC| = x$ 。显然， $0.5 < x < 1$ 。作等边 $\triangle AKC$ (图6.22)，它的中点连线 HT 等

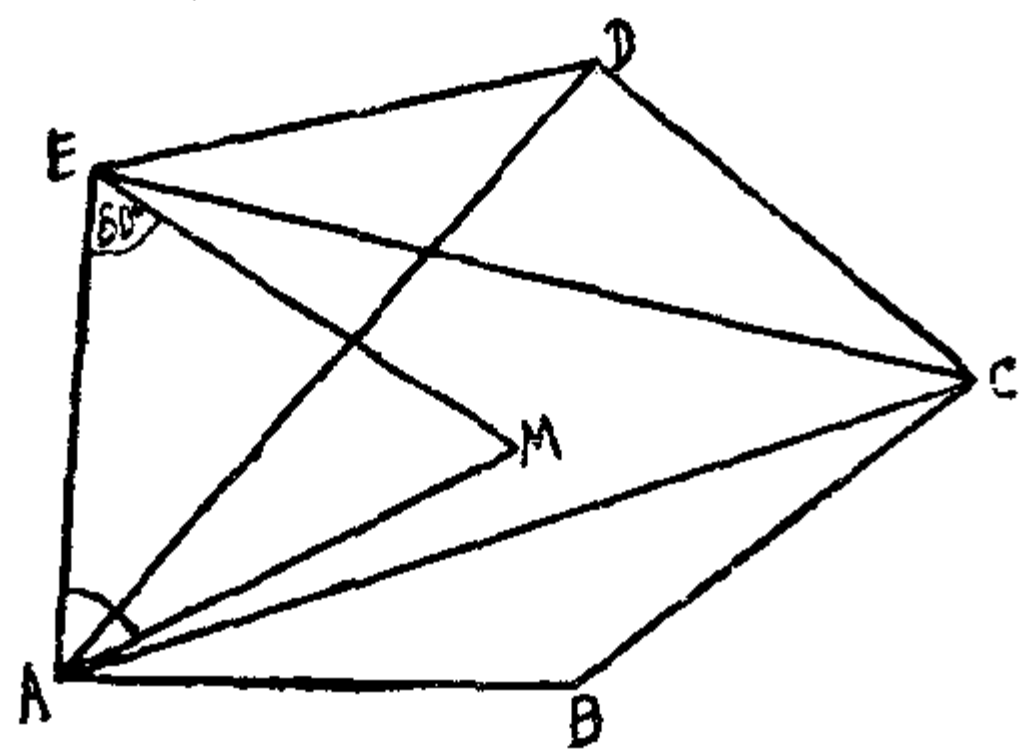


图6.20

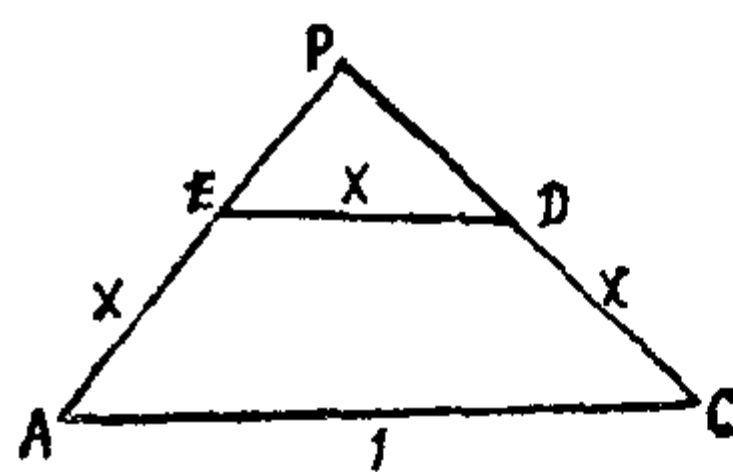


图6.21

于 $[AH]$ 和 $[TC]$ 。因为 $\hat{EAC} < 60^\circ$ 和 $\hat{ACD} < 60^\circ$ ，所以 P 落在 $\triangle AKC$ 的里面。并且，显然， $|AP| < |AK|$ 和 $|PC| < |KC|$ 。

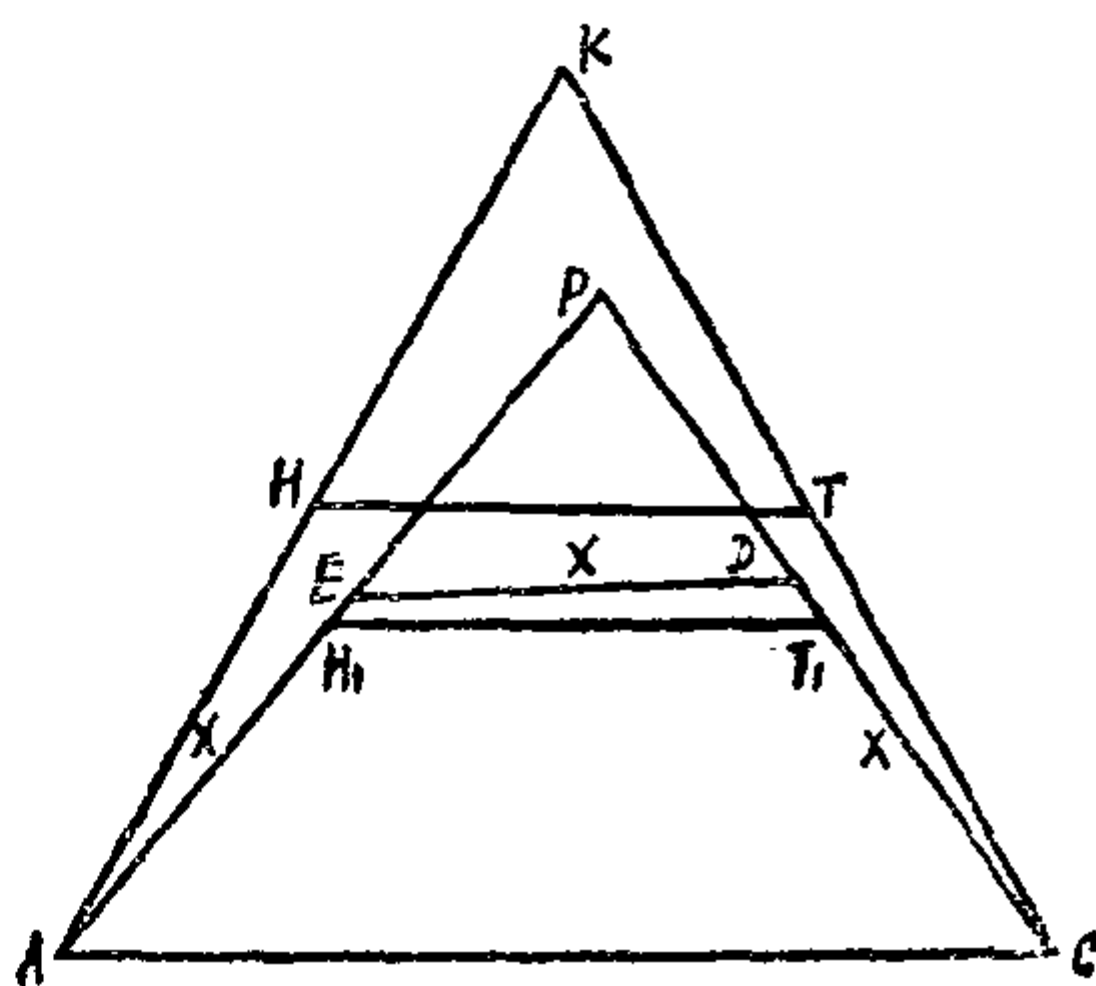


图6.22

令 $\vec{AH_1} = \vec{H_1P}$ 和 $\vec{CT_1} = \vec{T_1P}$, 那么 $|H_1T| = 0.5|AC|$, $|AH_1| < 0.5|AC|$ 和 $|T_1C| < 0.5|AC|$. 点 $E \in [H_1P]$ 和 $D \in [T_1P]$. 因此, $|DE| < |H_1T|$, 即 $x < 0.5|AC| = 0.5$. 所得矛盾结果就证明了命题3). 问题得解.

练习

1 已给定 $[AB]$, 点 X 沿 $[AB]$ 从 A 向 B 移动着. 问: $|AX|$ 和 $|BX|$ 如何变化? 在 $|AB|$ 上是否存在一 X , 使 $|AX| = |XB|$? 为什么?

2 $|AB| = 5$, $X \in [AB]$, $X \neq B$. 在 $[AB]$ 上是否存在 X 使 $|AX| = 1$, $|AX| = 4$, $|AX| = 4.99$? 为什么? 是否存在距 A 最远的 X ? 如果 $X \neq A$, 能否证明 $|AX|$ 的最小值.

3 点 X 沿 $[AM)$ 运动着, 试问 $|AX| + |XB|$ 随着 $|AX|$ 增大作何变化 (图6.23)?

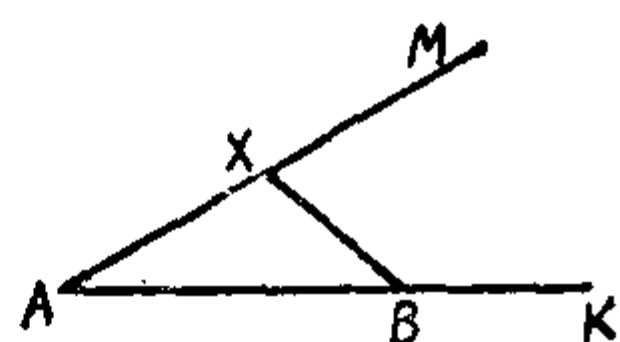


图6.23

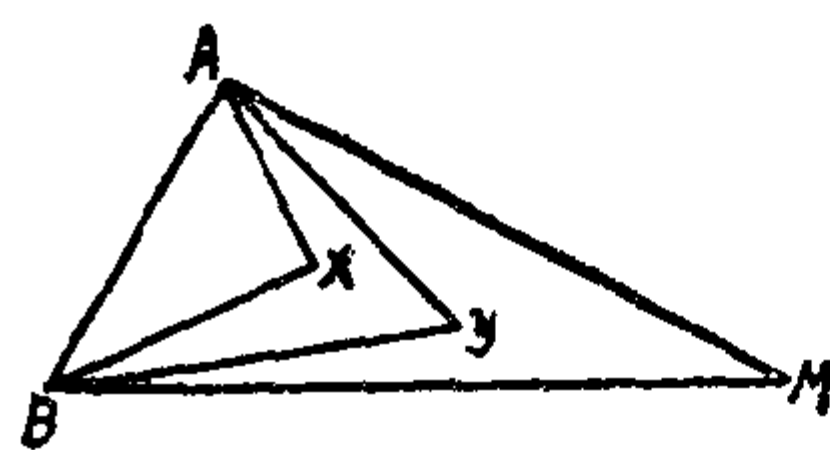


图6.24

4 比较 $|AX| + |XB|$, $|AY| + |YB|$ 和 $|AM| + |MB|$ (图6.24).

5 $[CA) \perp [CM)$. 点 X 沿 $[CM)$ 运动着, $|AX|$ 随 $|CX|$ 增加作何变化? 当 $|CX|$ 取何值时, 距离 $|AX|$ 为最小? 在 $[CM)$ 上是否存在一 X 的位置使得 $|CX| = |AC|$, $|CX| = |AX|$, $|CX| > |AX|$? 在 $[CM)$ 上是否存在一 X , 使得 $|AX| = 5|AC|$, $|AX| = 5000|AC|$? 为什么? $\hat{CAX}$ 随 $|CX|$ 增加作何变化?

6 角 ACB 为钝角, 点 X 沿 $[CB)$ 移动. $|AX|$ 随 $|CX|$ 增加作何变化? 当 X 在 $[CB)$ 上为何位置时, $|AX|$ 有最小值? 在 $[CB)$ 上是否存在距 A 的最远点?

7 角 ABC 为锐角, 点 $M \in [BC)$. 点 X 沿 $[BA)$ 移动. $|XM|$ 在 $|BX|$ 增加时作何变化? X 在 $[BA)$ 上使得 $|XM| = |BM|$ 的这种情况有几种? X 在 $[BA)$ 上处于什么位置, $|XM|$ 有最小值?

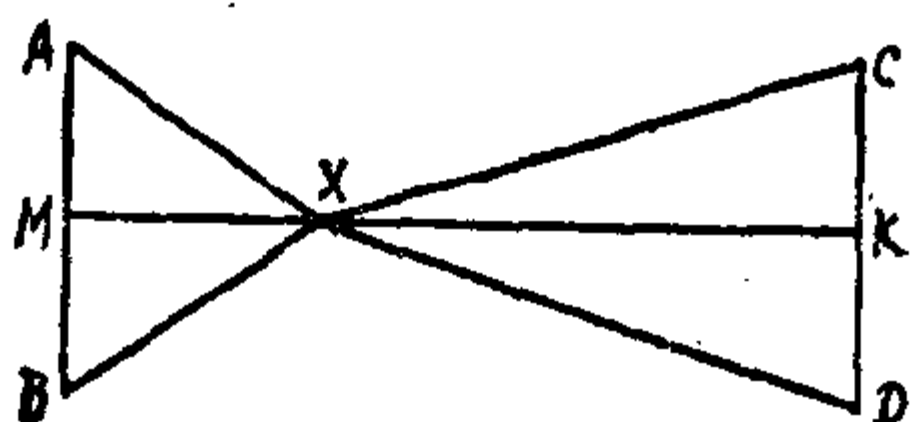


图6.25

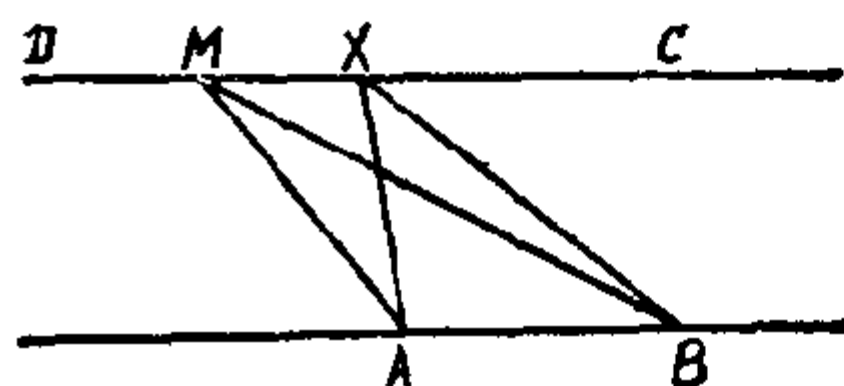


图6.26

8 点 $B = S_{(MK)}(A)$ 和 $D = S_{(MK)}(C)$ (图 6.25); $|AB| = |CD|$. 点 X 沿 $[MK]$ 移动, $|MX|$ 从零增加到 $|MK|$ 时, $\triangle ABX$ 和 $\triangle CDX$ 的周长如何变化? 在 $[MK]$ 上是否存在一 X , 使得这些三角形的周长相等?

9 角 MAB 为钝角, 过 M 作 (CD) 平行于 (AB) (图 6.26). 点 X 沿 (CD) 运动, 在 $[MD)$ 上是否存在 X , 使得 $|AX| = |XB|$? X 在 $[MD)$ 上的任何位置时, $|XB| > |XA|$ 是否成立? 为什么? 如果 $|MX|$ 增加, $|X|$ 沿 $[MC)$ 运动, $|AX|$ 和 $|XB|$ 作何变化? 在 $[MC)$ 上是否存在 X , 使得 $|AX| = |XB|$? 在 (DC) 上作出点 X 使得 $|AX| = |XB|$.

10 给定一个钝角 MOK , 点 $A \in [OK)$ 和 $B \in [OK)$. 点 X 沿 $[OM)$ 运动, 当 $|OX|$ 增加时 $|AX|$ 和 $|BX|$ 如何变化? 在 $[OM)$ 上是否存在一 X , 使 $|AX| = |XB|$? 如果 X 逐渐离开 O 时, 则 $|BX| - |AX|$ 作何变化?

11 点 O 是平行直线 a 和 b 的对称中心. 点 X 沿 a 运动, 点 $Y = S_O(x)$. 点 $A \in a$, $B = S_O(A)$. $|BY|$ 随着 $|AX|$ 增加作何

变化?

12 $[MA] \perp [AB]$, $[BK] \perp [AB]$, $[AB] = 2|AM|$ (图6.27). 点X沿 $[AB]$ 运动. 随着 $|AX|$ 从零增加到 $|AB|$, $\widehat{AMX}$, $\widehat{XKB}$, $\widehat{AXM}$, $\widehat{KXB}$, $\widehat{AXM}$, $\widehat{AXM}:\widehat{KXB}$ 作何变化? 在 $[AB]$ 上是否存在一X使得 $\widehat{AXM} = \widehat{KXB}$, $\widehat{AXM}:\widehat{KXB} = 1:2$?

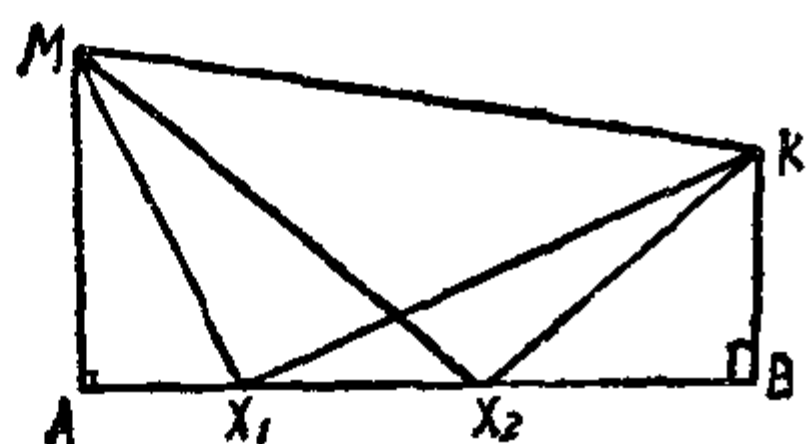


图6.27

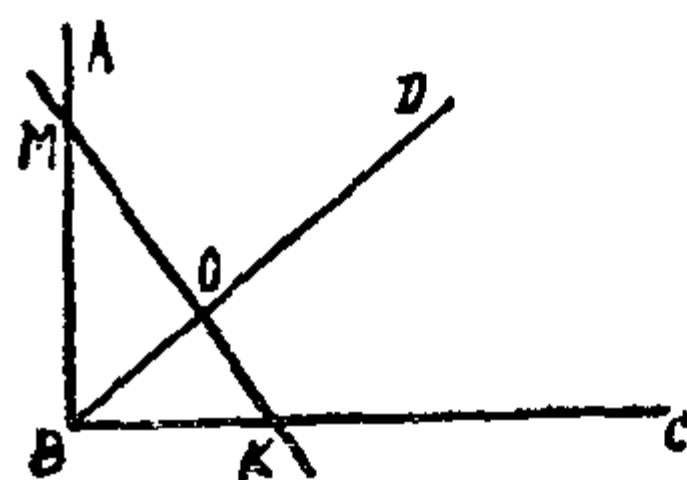


图6.28

13 给定 (AB) 及在 (AB) 同一侧的M和K两点, X沿 (AB) 运动时, $|MX| + |XK|$ 怎样变化?

14 在图6.28上画定直角 ABC ; $[BD)$ 是它的角平分线. 点 $O \in [BD)$; (MK) 绕O旋转, 如果 $|MO| = |OK|$, $\widehat{BOM}$ 等于多少? $\widehat{MOB}$ 从 90° 增加到 135° , $|OK|$, $|MO|$, $|OK|:|OM|$, $|MO|:|OK|$ 如何变化? 是否存在 (MK) , 使得 $|MO|:|OK| = 2$ $|MO|:|OK| = 500000$?

15 在 $\triangle ABC$ 中, $\widehat{ABC} > 90^\circ$. $[BM]$ 为中线, $\widehat{ABM} > 90^\circ$. 点X沿 $[AB]$ 运动, 点 $P = [BM] \cap [XC]$. 随着 $|BX|$ 的增加, 线段 CP , PX 的长度和 $|XP|:|PC|$ 怎样变化?

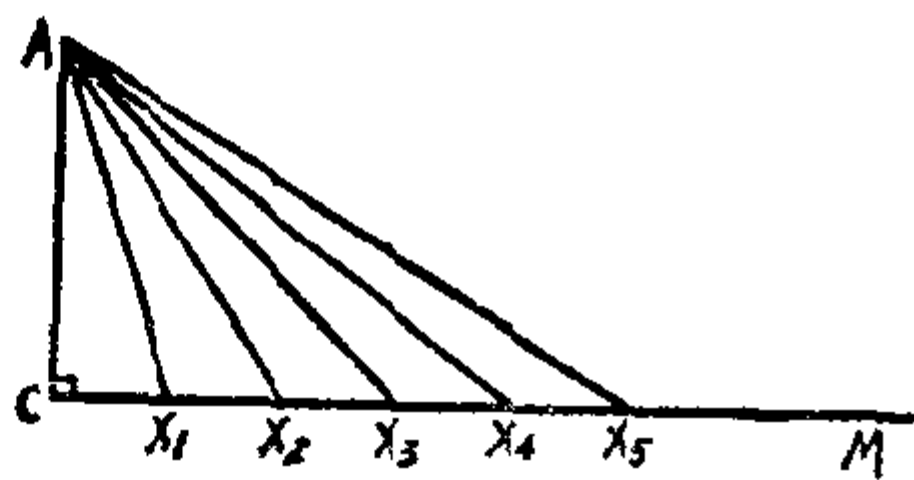


图6.29

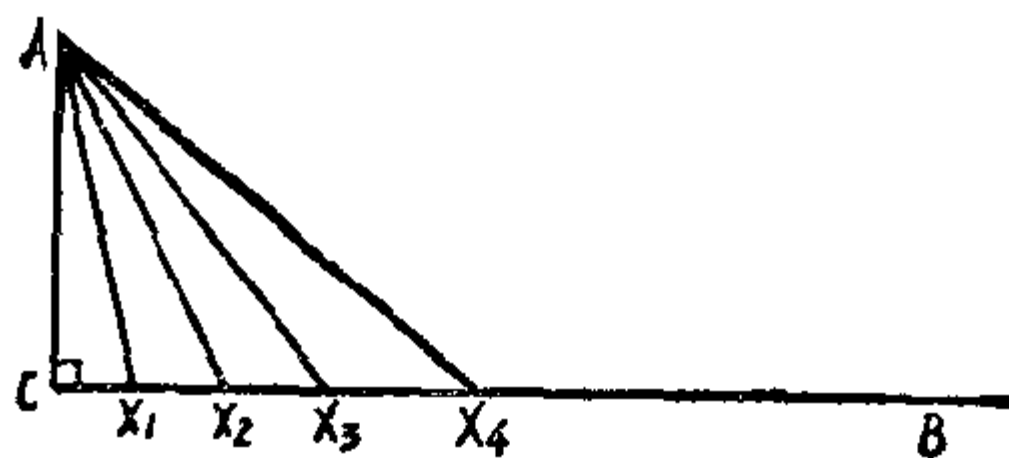


图6.30

16 在 $\triangle ABC$ 中. $|AB| = |AC|$ 及 $\widehat{A} = 30^\circ$, 点X沿 $[AC)$ 运动 ($X \in [AC)$), 随着 $|AX|$ 的增加, $\widehat{ABX}$, $\widehat{BXA}$, $|BX|$ 怎样

变化?在 $[AC)$ 上是否存在一 X , 使得 $\widehat{BXA} = \widehat{BAC}$, $\widehat{ABX} = 150^\circ$

17 图 6.29 上画出直角 ACM ; $|CX_1| = |X_1X_2| = |X_2X_3| = |X_3X_4| = \dots$, 证明: $\widehat{CAX} > \widehat{X_1AX_2} > \widehat{X_2AX_3} > \dots$

18 在图 6.30 上, 给定直角 ACB ; $\widehat{CAX_1} = \widehat{X_1AX_2} = \widehat{X_2AX_3} = \dots$, 证明: $|CX_1| < |X_1X_2| < |X_2X_3| < \dots$.

19 $[CA] \perp [CB)$. 点 X 沿 $[CB)$ 运动, 随着 $|CX|$ 的增加, $|AX| - |CX|$ 怎样变化?

20 在 $\triangle ABC$ 中, $|AB| = |BC|$; $[BF) \uparrow \uparrow [AC)$. 点 X 沿 $[BF)$ 运动, 随着 $|BX|$ 增加, $|AX| - |CX|$ 怎样变化? 这时, $|AX| : |CX|$ 又怎样变化?

21 在平面 α 上, 给定直线 a 及与 a 距离不等且在同一半平面上的 A 和 B 两点, 问在 a 上是否存在一点 M , 使得 $|AM| - |MB|$ 为最大?

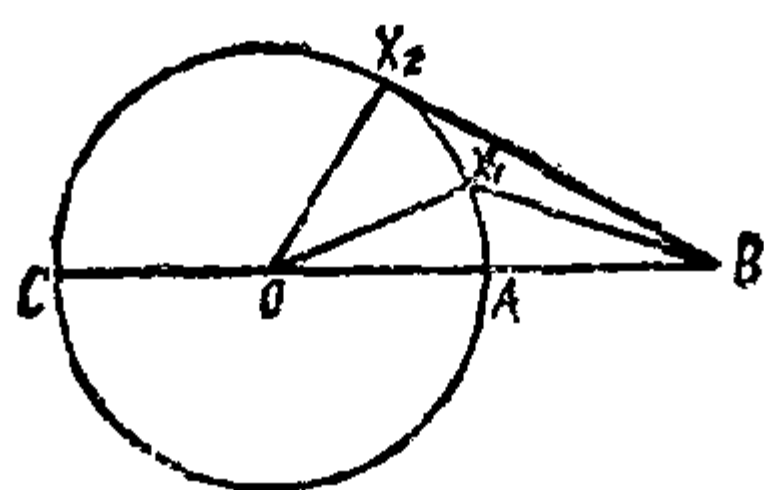


图 6.31

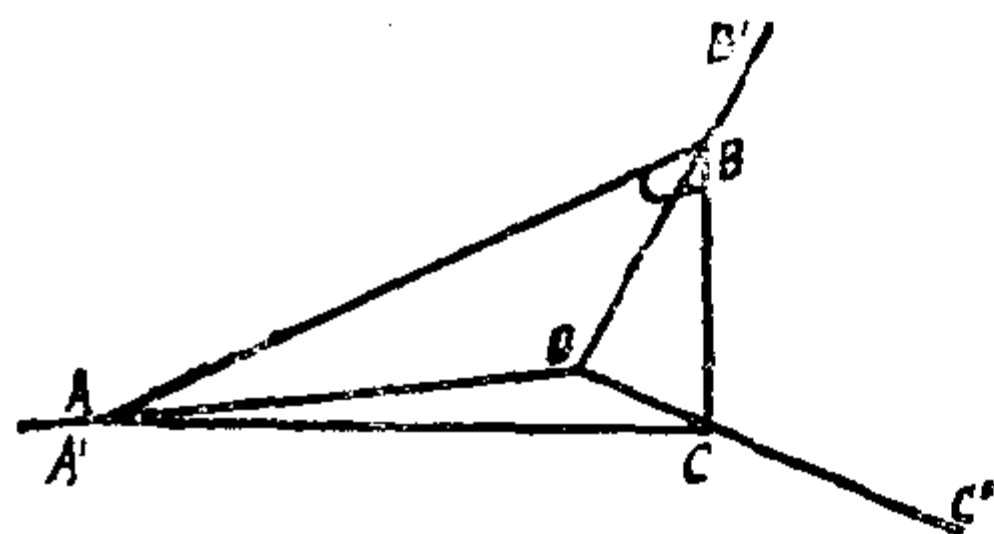


图 6.32

22 不等边的凸四边形 $ABCD$ 在下列情况下能有几种:

(1) $|AB| = |CD| = 30$, $|BC| = |AD| = 15$, $\widehat{ABC} = 10\widehat{BAC}$.

(2) $|AB| = 50$, $|BC| = 45$, $|CD| = 42$, $|AD| = 60$, $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$.

23 $\widehat{BAC} = 95^\circ$, $|BC| = 15$, $|AC| - |AB| = 2$ 的不等边 $\triangle ABC$ 有几种?

24 $|BC| = 25$, $|AC| = 25$ 和 $\widehat{B} - \widehat{A} = 150^\circ$ 的不等边 $\triangle ABC$

有几种?

25 在图6.31上画出一直径为 CA , 圆心为 O 的圆, 点 $B \in [CA)$; $|OA| = 30$, $|OB| = 60$, 点 X 自 A 在圆上作逆时针运动. 求:

(1) 如果 $X = A$, $\widehat{OXB}$ 和 $\widehat{OBX}$ 等于多少?

(2) $\widehat{OXB}$ 和 $\widehat{OBX}$ 随着 $\widehat{XOA}$ 从 0° 增加到 60° 怎样变化? 为什么? 当 $\widehat{XOA}$ 作同样增加时, 比 $\widehat{OBX} : \widehat{OXB}$ 怎样变化?

(3) 在圆上是否存在 X , 使得 $\widehat{OXB} = 2\widehat{XBO}$?

26 $\widehat{A} = 35^\circ$, $\widehat{B} = 48^\circ$, $|AB| + |BC| + |CA| = 120^\circ$ 的三角形 ABC 有几种?

27 高 CH , 中线 AM 和 BK 分别为40, 30和25的不等边三角形有几种?

28 图6.32上示出 $[OA')$, $[OB')$, $[OC')$; $\widehat{A'OB'} = 100^\circ$, $\widehat{B'OC'} = 110^\circ$, $\widehat{C'OA'} = 150^\circ$. 点 $A \in [OA')$, $B \in [OB')$, $C \in [OC')$; $\widehat{ABO} = \widehat{OBC}$. 点 B 沿 $[OB')$ 离点 O 运动, 这时, 点 C 同时沿 $[OC')$ 运动使得 $[BO)$ 仍然是角 ABC 的平分线, 试求:

(1) $\widehat{OAB}$, $\widehat{ABO}$, $\widehat{OBC}$, $\widehat{OCB}$, $\widehat{OCA}$ 和 $\widehat{OAC}$ 随着 $|OB|$ 增加作何变化?

(2) 如果 $0 < |OB| < +\infty$, $\widehat{OAB}$, $\widehat{ABO}$, $\widehat{OBC}$, $\widehat{OCB}$, $\widehat{OCA}$ 和 $\widehat{OAC}$ 的变化界限?

(3) 在 $[OB')$ 上是否存在一点 B , 使得 $[OA')$, $[OB')$ 和 $[OC')$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线?

29 在 $\triangle ABC$ 中, $|AB| = |BC|$. 点 $X \in [AC]$, $[AD] \perp [BC]$, $[XH] \perp [AB]$, $[XK] \perp [BC]$.

(1) X 沿 $[AB]$ 从 A 向 B 运动, $|HK|$ 和 $|XK|$ 怎样变化?

(2) $|HX| + |XK|$ 怎样变化?

(3) 比较 $|HX| + |XK|$ 和 $|AD|$.

30 给定一凸四边形，是否存在着与各顶点距离之和为最小的点？

31 O 为等边三角形内的任意一点，证明此点与该三角形各边的距离之和与 O 点的位置无关。这个和等于多少？

32 $[AB) \uparrow \uparrow [CM)$ ， $C \in (AB)$ ， $|AC| = |CB|$ 。点 X 沿 $[CM)$ 运动。如果 $|CX|$ 从零增加到无穷大， $\widehat{AXB}$ 怎样变化？

33 线段 AB 绕 A 旋转。三角形 ABC 的角平分线 AL 的长度随着 $\widehat{BAC}$ 从 0 增加到 180° 是怎样变化的？

34 一点 M 在锐角 BAC 的内部，证明在 $[AB)$ 和 $[AC)$ 上存在着点 X 和 Y ，使得 $\triangle XYM$ 有最小周长（与点 X 和 Y 在 $[AB)$ 和 $[AC)$ 上一切其他位置比较）。

35 $|AB| = 30$ ， $\widehat{ABC} = 40^\circ$ 。点 X 沿 $[BC)$ 运动。如果 $|BX|$ 增大， $|BX| + |XA|$ 怎样变化？在 $[BC)$ 上存在几个点，使得 $|BX| + |XA| = 80$ ？

36 $|BA| = 40$ ， $\widehat{CBA} = 60^\circ$ ，点 X 沿 $[BC)$ 运动，点 $K \in [BC)$ 且 $|KX| = |XA|$ 。如果 $|BX|$ 从 $|BX| = |XA|$ 增加到 $+\infty$ ， $\widehat{KXA}$ 和 $|KB| = |BX| - |XA|$ 怎样变化？ $|KB|$ 能否达到最大值？

37 点 $M(0; 30)$ 和 $P(70; -30)$ 是半径为 25 的圆心。在横轴上是否存在一点 X ，使过此点的两圆的切线能与横轴形成等角？

38 在 $\triangle ABC$ 中， $|AB| = 30$ ， $|BC| = 50$ ，如果三角形的角 B 从 0 增加到 180° ，其中线 BM 的长度如何变化？

39 在 $\triangle ABC$ 中， $|AB| = 50$ ， $|AC| = 25$ 。如果角 A 从 0° 增加到 180° ，它的角 B 和角 C 的值如何变化？

40 用勾股定理，证明下面命题：

(1) 在圆中，等长的弦与圆心等距，反之，与圆心等距的弦也等长。

(2) 在圆的两根不等长的弦中, 较长的弦离圆心较近.

(3) 在圆的两根不等长的弦中, 最长的弦离圆心最近.

41 给定正方形 $ABCD$ 顶点 A, B 和 D 的坐标, 分别为 $A(0; 0); B(8; 0); D(0; 8)$; 点 M 和 K 在同一时间内, 按逆时针方向以等速从 C 和 A 开始沿正方形的边运动. 且 M 的速度比 K 的速度大一倍; $\vec{ME} = \vec{EK}$.

(1) 作出 E 的运动路线;

(2) 列出整个 $[MK]$ 上中点集合 Σ 的方程;

(3) 证明集合 Σ 有对称轴.

42 点 M 位于角 BAC 内. 点 $K \in [AC)$; $D = [KM) \cap [AB)$. 点 K 沿 $[AC)$ 移动 (自点 A), 问:

(1) K 沿 $[AC)$ 移动时, $S(AKD)$ 怎样变化?

(2) 指出 K 在 $[AC)$ 上的位置, 使得 $S(AKD)$ 为最小值.

43 直线 a 和 b 分别过 $A(0; -3)$ 和 $B(0; 5)$ 且平行于横轴. 角 POE 被横坐标分为两相等角. 每个角等于 $\alpha (0^\circ < \alpha \leq 45^\circ)$. 点 $M = [OP) \cap b$, $K = [OE) \cap a$.

(1) 求 $|OM|$ 和 $|OK|$, 并比较 $|OM|$ 和 $|OK|$.

(2) 角 POE 绕 O 作反时钟旋转时 (转角不超过 α), $|OM|$ 和 $|OK|$ 将怎样变化? 角 POE 转成什么角度时, 点 M 才不存在? $|OK|$ 在这种转角下等于什么? 是否存在这样的旋转角 $|POE|$, 使 $|MO| = |KO|$?

(3) 角 POE 绕 O 顺时针方向转动时 (转角不超过 α), $|OM|$ 和 $|OK|$ 怎样变化? 角 POE 转成多大角度时点 K 才不存在? 是否存在这样的旋转角 POE , 使 $|MO| = |KO|$?

(4) 角 $\alpha = 30^\circ$, 在 b 上是否存在点 M , 使 $\triangle MKO$ 为正三角形? 为什么?

(5) 角 $\alpha = 45^\circ$. 在 b 上是否存在点 M , 使 $\hat{MKO} = 30^\circ$? 为什么?

么?

(6) 在 a 和 b 上是否存在点 K 和 M , 使 $\triangle KMO$ 相似于任何已知三角形?

44 在四边形中有三个钝角, 证明它的两根对角线中较长的那根过锐角的顶点。

45 证明: 凸四边形各边为直径所作的圆, 能覆盖整个四边形。

46 三角形的内切圆和外接圆的圆心重合, 证明此三角形是等边三角形。

47 证明: 有对称轴的凸四边形或者是内切四边形或者是外接四边形。

48 在凸四边形 $ABCD$ 中, 所有各边被分为三等分, 证明: 对应的分点连线构成《中间的》四边形的面积为原四边形面积的 $\frac{1}{9}$ 。

§ 6.3 寻找作图题解的途径

用圆规和直尺解作图题可分成四个步骤:

(1) 用任何作图工具作出符合全部题设条件的几何图形。

(2) 用量测发现这些图形的逼真性质, 证明这些性质为真或为假。

(3) 作出这样的点集合, 这些集合的变量问题的解, 并确定这些点集合的性质。

(4) 借助上面(2)和(3)中所说的图形的那些性质, 寻找解题途径。

精确地进行作图与量度, 对于寻找解题途径具有特殊的意

义，其结果可以表示出图形某些性质的似真假设。

例 1 给定 $\angle AOB$ 和其中的一点 M (图 6.33)。试作直线 L ，它穿过 M 与 $[OA)$ 交于点 K ，与 $[OB)$ 交于点 P ，使 $|KM|:|MP| = 2:3$ 。

在 $[OA)$ 上取任意点 $K_1, K_2, K_3, \dots$ 并且，作 $[K_1M)$, $[K_2M)$, $[K_3M)$, $\dots$ 在这些射线上作点 $P_1, P_2, P_3, \dots$ ，使 $|K_1M|:|MP_1| = 2:3$, $|K_2M|:|MP_2| = 2:3$, $|K_3M|:|MP_3| = 2:3, \dots$ 。不难看出，点 $P_1, P_2, P_3, \dots$ 属于平行于 $[OA)$ 的某一直线 L_1 。如果是这样，那么未知点 $P = L_1 \cap [OB)$ 。因为作出 L_1 并证明 $P = L_1 \cap [OB)$ 是未知点比给定问题简单得多。本题得解。

例 2 在锐角 $\triangle ABC$ 中，作高 AK, BP, CH 。它们相交于点 O 。圆 (O, r) 在 $\triangle ABC$ 内，试作三角形 $A_1B_1C_1$ 与圆 (O, r) 外切，其顶点在三角形 ABC 的各边之上。

这里，用例 1 寻找解答的方法是达不到目的的。因此，采用下述方法求解。我们经过挑选作出未知 $\triangle A_1B_1C_1$ (图 6.34)。

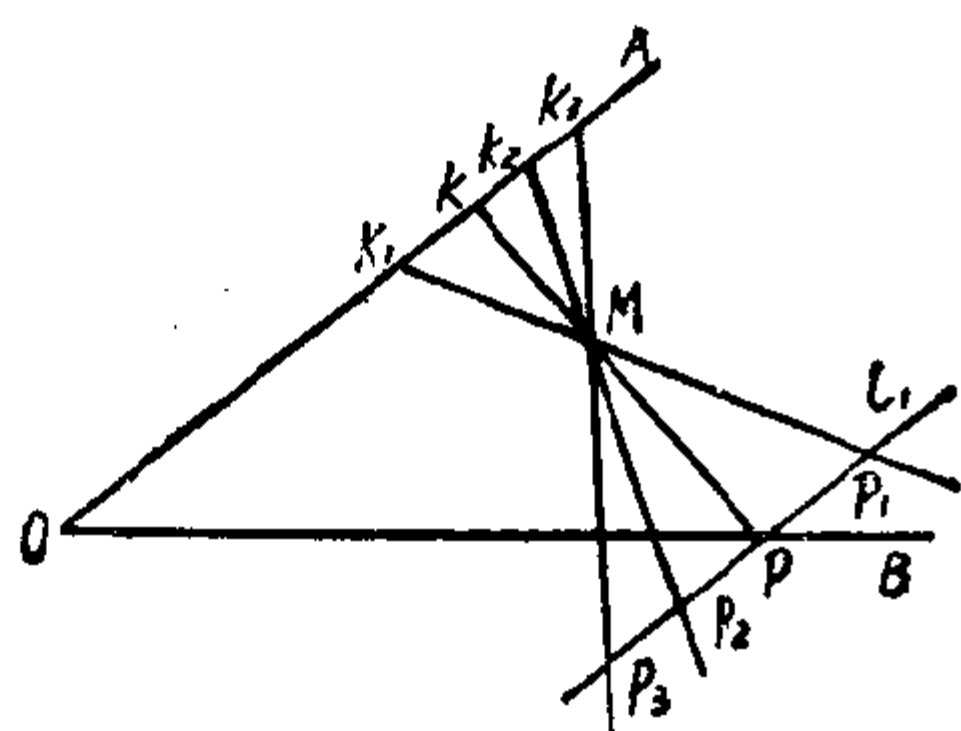


图 6.33

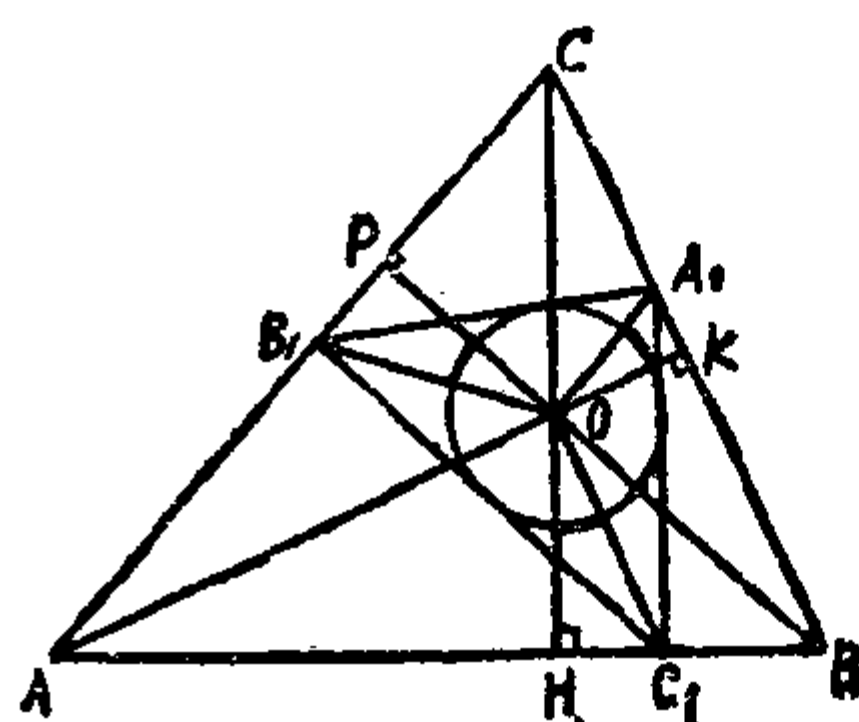


图 6.34

量度这个图上各不相同的角后得出假设： $\widehat{A_1OK} = \widehat{B_1OP} = \widehat{C_1OH}$ 。但不能确定这些角度值怎样取决于图 6.34 上所示的已知角。因此，作其半径不同于已知圆的半径 r 的圆。并经过挑

选作 $\triangle A_2B_2C_2$ (图6.35). 根据量度得到假设: $A_2\hat{O}K = B_2\hat{O}P$

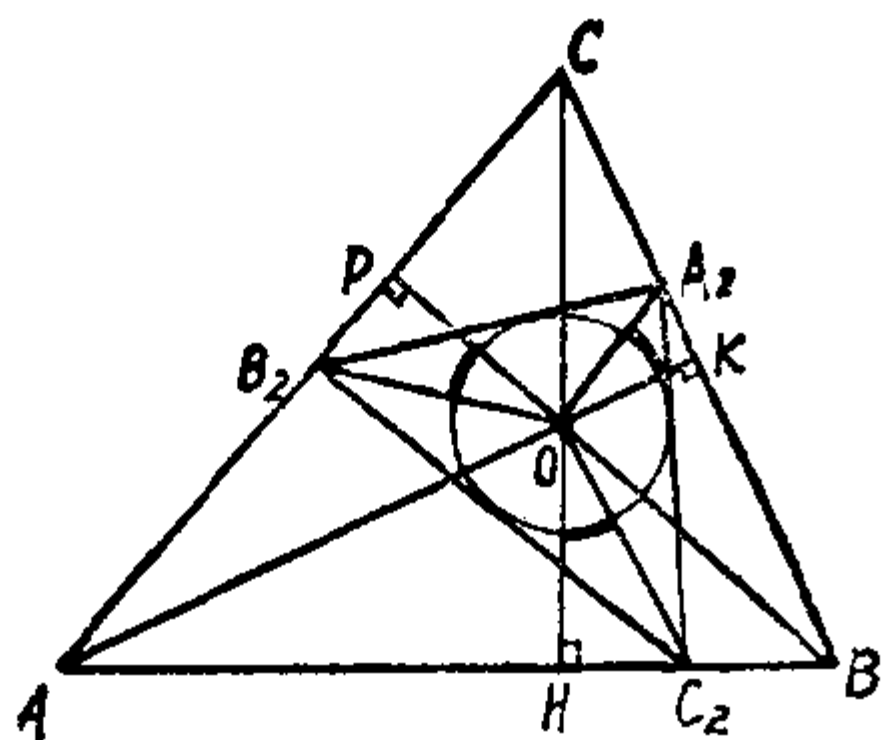


图6.35

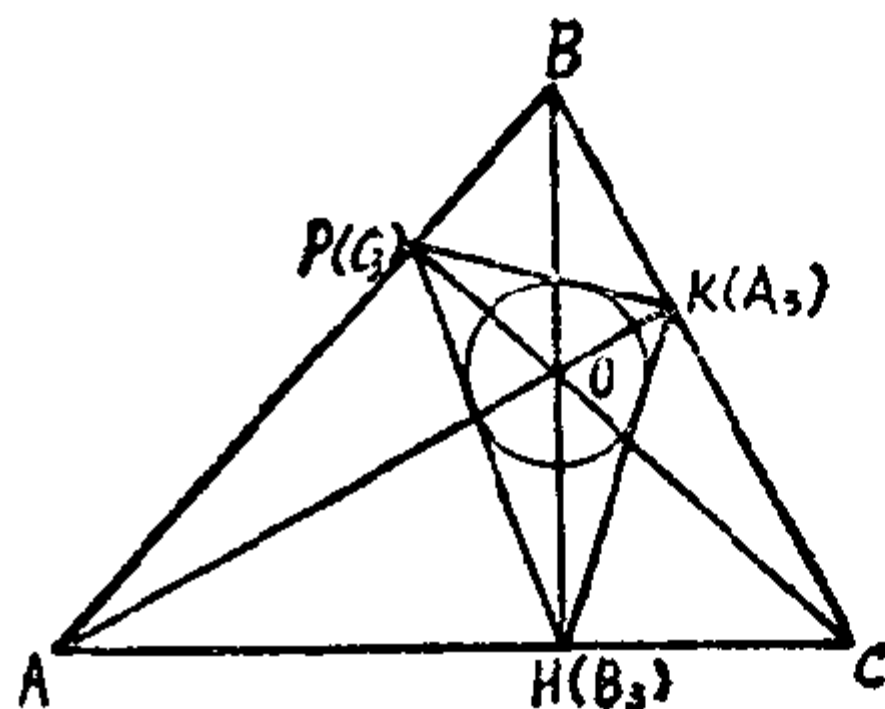


图6.36

$= C_2\hat{O}H$ 和 $B_2\hat{A}_2C_2 = B_1\hat{A}_1C_1$, $A_2\hat{B}_2C_2 = A_1\hat{B}_1C_1$, $A_2\hat{C}_2B_2 = A_1\hat{C}_1B_1$. 于是, 得到新的假设: 内切于 $\triangle ABC$. 外切于以 O 为圆心的半径不同的圆的所有三角形相似, 作 $\triangle PKH$ (图6.36) 并进行相应的量度后, 我们再得一个假设: 在 $\triangle PKH$ 中有以点 O 为圆心的圆内切, 并且, $\triangle KPH \sim \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2 \sim \dots$

这样就将例题转化为对下面假设的论证: 即证明未知 $\triangle A_1B_1C_1$ 相似于 $\triangle KPH$. 这个假设经证明后, 本题的解就显而易见.

练习

1 作 $\triangle ABC$, 其中 $S(ABC) = 16$, $|AM| = 6$, $|BK| = 4$ ($\vec{BM} = \vec{MC}$, $\vec{AK} = \vec{KC}$).

2 给定一个圆 ω , $[AB]$ 是它的直径, $C \in [AB]$. 在 ω 上求作点 X 和 Y , 使得 $Y = S_{(AB)}(X)$ 和 $(CY) \perp (AX)$.

3 给定锐角 BAC . 点 $M \in [AB)$, $K \in [AB)$; 试作过 M 和 K 且与 $[AC)$ 相切的圆 ω .

4 给定 (KM) 和 (KM) 两侧的点 A 及 B . 在 (KM) 上作点 X . 使得角 AXB 被 (KM) 平分.

5 给定一个圆 ω 及其圆上的点 M, L, H . 在 ω 中作一个内接 $\triangle ABC$, 使得其自 A 引出的中线、角平分线和高, 三者的延长线分别过点 M, L, H .

§ 6.4 代数法

几何题的代数解法如下: 将几何图形的未知元素用 $x, y, \dots$ 表示出来. 根据题设条件, 列出该图形已知元素和未知元素的相关方程(不等式). 之后, 求解所得的方程组(不等式). 于是我们要求的那些元素及其关系就被确定了. 就思路来看, 这是解几何题的一种最简单的方法. 列方程法可在范围广泛的问题中应用, 适当选择未知数, 可得不复杂的方程组(不等式).

例1 在 $[ABC - A_1B_1C_1]^{\perp}$ 中, $\widehat{ACB} = 90^\circ, |AC| = b, |CB| = a (b < a), B_0 \in [BB_1], C_0 \in [CC_1], |AC_0| = |C_0B_0| = |B_0A_0|$. 求 AC_0 . (图6.37).

记作 $|CC_0| = x, |BB_0| = y$. 显然 $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2} > b$. 因此, $x > y > 0$. 由 $\triangle ACC_0, \triangle ABB_0$ 和梯形 BCC_0B_0 得:

$$|AC_0|^2 = b^2 + x^2, \quad |AB_0|^2 = a^2 + b^2 + y^2,$$

$$|C_0B_0|^2 = a^2 + (x - y)^2.$$

因为 $\triangle AB_0C_0$ 为正三角形, 所以, 由上述诸等式得到求 x 和 y 的方程组:

$$a^2 + b^2 + y^2 = a^2 + (x - y)^2,$$

$$a^2 + b^2 + y^2 = b^2 + x^2.$$

由此得

$$3x^4 + 2x^2(b^2 - 2a^2) - b^4 = 0.$$

显然, 未知数选择是不能令人满意的, 获得问题答案仍然

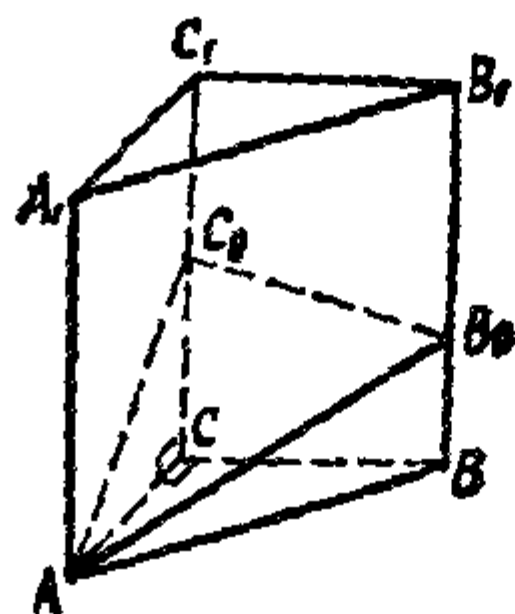


图6.37

要通过相当冗繁的变换. 因此, 我们回到开始解题时, 用 x 表示 $\triangle AB_0C_0$ 的边长. 于是, 由 $\triangle ACC_0$, $\triangle ABB_0$ 和直角梯形 C_0CBB_0 , 得

$$|CC_0| = \sqrt{x^2 - b^2}, \quad |BB_0| = \sqrt{x^2 - a^2 - b^2},$$

$$|C_0B_0|^2 = x^2 = a^2 + (|CC_0| - |BB_0|)^2.$$

由此得

$$x^2 = a^2 + (\sqrt{x^2 - b^2} - \sqrt{x^2 - a^2 - b^2})^2.$$

将对于 x^2 的无理方程变形为

$$3x^4 - 4x^2(a^2 + b^2) + 4a^2b^2 = 0 \quad (6.7)$$

由此得到:

$$x^2 = \frac{2}{3}(a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}).$$

因为 a 和 b 取一切值时, 根号下的式子为正, 且比 $a^2 + b^2$ 为小, 所以, 方程 (6.7) 有两个正数解, 但根据题设条件 $x^2 \geq a^2 + b^2$, 因此, 本题只能有一个解:

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}(a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4})}.$$

用 h 表示棱锥的高, 为使题设有解, 须满足 $x^2 < b^2 + h^2$ 的条件.

练习

1 $S(ABC) = 16$, $\vec{BM} = \vec{MC}$, $\vec{AK} = \vec{KC}$, $|AM| = 6$, $|BK| = 4$. 证明: $(AM) \perp (BK)$.

2 在 $[ABCD - A_1B_1C_1D_1]^1$ 中底为菱形, $|AB| = a$, $\widehat{ABC} = a$, $|AA_1| = b$, 求 $|B_1, (A_1D)|$.

3 在 $[D - ABC]$ 中, 所有的棱等于 a , 求过 A, B, ACD 面

的重心和棱BC中点K的球的半径.

4 圆内有一内接 $\triangle ABC$,由A和C到圆过B点的切线距离等于a和c,求 $|B, (AC)|$.

5 $[AH], [BK], [CD]$ 为锐角 $\triangle ABC$ 的高, $M = (AH) \cap (BK)$, $|AH| = 3$, $|BK| = 2\sqrt{2}$, $\vec{CM} = 5\vec{MD}$. 求 $S(ABC)$.

§ 6.5 几何题的矢量解法

兹指出矢量的两个重要性质, 这两个性质在解习题时要经常用到.

1 给定 $\triangle OAC$; $\vec{AB} = \frac{n}{m+n}\vec{AC}$ (图6.38); $\vec{OB} = \vec{OA} + \frac{n}{m+n}\vec{OC}$. 由此, $\vec{OB} = \vec{OA} + \frac{n}{m+n}(\vec{OC} - \vec{OA})$. 由此, $\vec{OB} = \vec{OA} + \frac{n}{m+n}\vec{OC} - \frac{n}{m+n}\vec{OA}$ 和

$$\vec{OB} = \frac{m}{m+n}\vec{OA} + \frac{n}{m+n}\vec{OC} \quad (1)$$

其中, 如果 $m=n$, 则 $\vec{OB} = 0.5(\vec{OA} + \vec{OC})$.

2 如果 $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ (图6.39), 则 $a^2 = (\vec{b} - \vec{c})^2 = b^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + c^2$ 和

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0.5(b^2 + c^2 - a^2). \quad (2)$$

将矢量代数应用于解几何题是以下列原理作为基础的, 即,

1 非零的 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线的充要条件是存在一个数 $x \neq 0$, 使等式 $\vec{b} = x\vec{a}$ 成立.

2 若 $\vec{a} \neq m\vec{b}$, 则与 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 共面的任意矢量 $\vec{c}$, 可唯一的

表为 $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ 的形式.

3 若 $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ 和 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 不共线, 则 $x = y = 0$.

4 对每一个空间矢量, 都有沿着三个给定不共面矢量的唯一分解.

5 若 $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ 和 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 不共面, 则 $x = y = z = 0$.

6 已知矢量的长度和矢量间的夹角(矢量个数多于1)的矢量选作基矢量, 在许多情况下, 将矢量沿正交矢量分解是合理的.

7 设 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ 是单位正交矢量. 若 $\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, 则 $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

8 若 $\vec{m}_1 = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$, $\vec{m}_2 = x_2\vec{a} + y_2\vec{b} + z_2\vec{c}$, 则 $\vec{m}_1 \pm \vec{m}_2 = (x_1 \pm x_2)\vec{a} + (y_1 \pm y_2)\vec{b} + (z_1 \pm z_2)\vec{c}$.

9 $(AB) \parallel (CD) \iff \vec{AB} = k\vec{CD}$.

10 $A \in (BC) \iff \vec{AB} = k\vec{AC}$.

11 $C \in [AB] \iff (\vec{AC} = k\vec{AB}, 0 \leq k \leq 1)$.

12 $(AB) \perp (CD) \iff \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$.

13 为求出线段 AB 的长度, 将 $\vec{AB}$ 沿基矢量展开, 并利用公式 $\vec{AB}^2 = |AB|^2$ 求出 $\vec{AB}^2$.

14 根据公式: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$, 求出角度值.

度量问题的解与矢量的标量积应用有关. 在解决仿射问题

时，通常不利用标量积的性质。

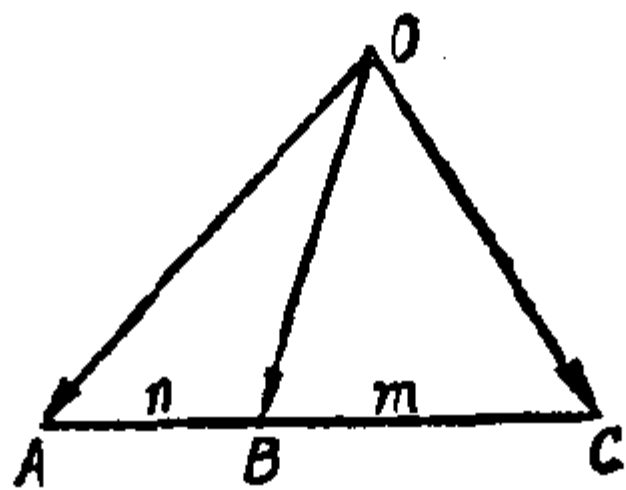


图6.38

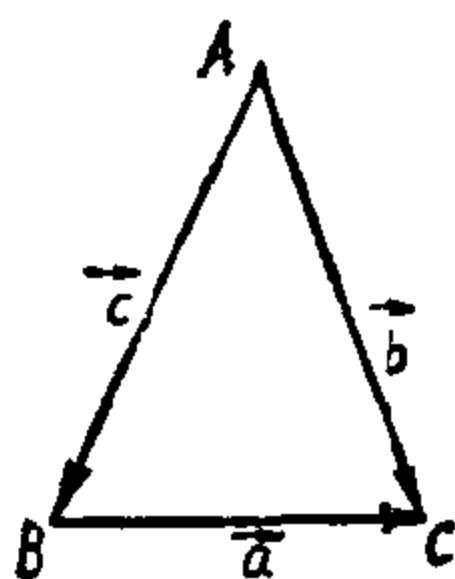


图6.39

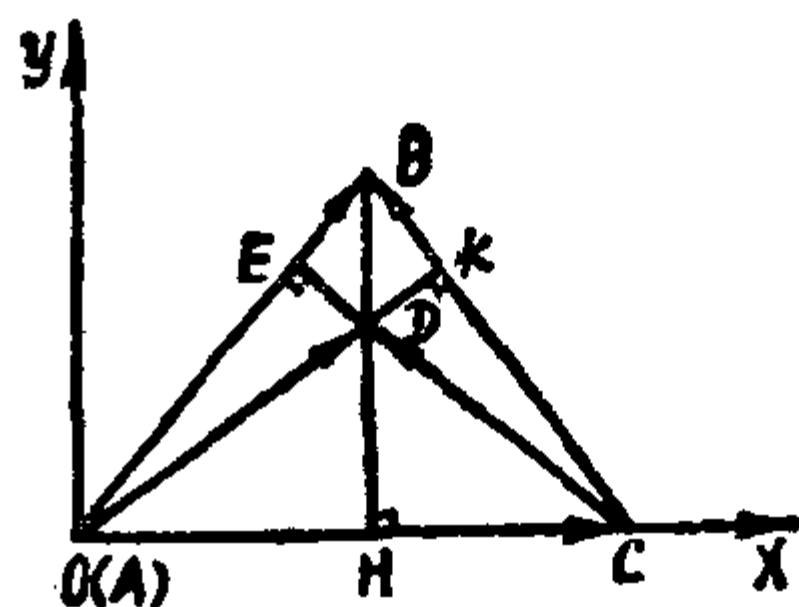


图6.40

习题矢量解法一般的步骤是：用矢量语言列出问题的条件，也就是按照题目的条件列出矢量方程组；选择基矢量；将研究中所引进的全部矢量沿着基矢量进行分解；简化矢量方程组；用代数方程（按照矢量沿着基矢量展开的唯一性原理）代替矢量方程；解代数方程组；说明所得方程解的几何意义。

例1 已给 $\triangle ABC$ ， $[AK]$ ， $[BH]$ ， $[CE]$ 为此三角形的高。证明：存在点 $D = (AK) \cap (BH) \cap (CE)$ 。

设 $[AC]$ 为 $\triangle ABC$ 的最大边长，于是 $\triangle ABC$ 就可对应于直角坐标系 xOy 布置成如图6.40所示。又设 $B(a; b)$ ， $C(c; 0)$ ，则

$$\vec{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}, \quad (6.8)$$

$$\vec{AC} = c\vec{i}, \quad \vec{CB} = \vec{AB} - \vec{AC} = (a - c)\vec{i} + b\vec{j}. \quad (6.9)$$

设 $D(x; y) = (CE) \cap (AK)$ ，于是

$$\vec{AD} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad (6.10)$$

$$\vec{CD} = \vec{AD} - \vec{AC} = (x - c)\vec{i} + y\vec{j}. \quad (6.11)$$

根据题设条件 $(AD) \perp (BC)$ 和 $(CD) \perp (AB)$ 。因此，

$$\left. \begin{aligned} \vec{AD} \cdot \vec{CB} &= 0 \\ \vec{CD} \cdot \vec{AB} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

由等式(6.8)一(6.12), 得

$$\left. \begin{aligned} (x\vec{i} + y\vec{j})(a-c)\vec{i} + b\vec{j} &= 0, \\ ((x-c)\vec{i} + y\vec{j})(a\vec{i} + b\vec{j}) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

或

$$\left. \begin{aligned} x(a-c) + yb &= 0, \\ (x-c)a + yb &= 0, \end{aligned} \right\}$$

由此 $x=a$, $y=(c-a)a:b$. 于是, 点D的横坐标等于a, 这就是说 $D \in (BH)$, 即 $D = (AK) \cap (BH) \cap (CE)$.

例2 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{AK} = 0.75\vec{AC}$; $\vec{BP} = 2\vec{PC}$; $M = (BK) \cap (AP)$. 求 $x = |BM| : |BK|$ 和 $y = |AM| : |AP|$ (图6.41).

取 $\vec{AB}$ 和 $\vec{AC}$ 作基矢量, 本题化为解方程 $\vec{AM} = y\vec{AP}$. 根据公式 (1), 得 $\vec{AM} = (1-x)\vec{AB} + x\vec{AK} = (1-x)\vec{AB} + 0.75x\vec{AC}$; $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$. 现在将方程 $\vec{AM} = y\vec{AP}$ 取作形为

$$(1-x)\vec{AB} + 0.75x\vec{AC} = y\left(\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}\right) \text{ 或 } \left(1-x-\frac{y}{3}\right)\vec{AB} + \left(0.75x-\frac{2}{3}y\right)\vec{AC} = \vec{0}.$$

因为 $\vec{AB}$ 和 $\vec{AC}$ 线性无关, 所以

$$\left. \begin{aligned} 1-x-\frac{y}{3} &= 0, \\ 0.75x-\frac{2}{3}y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

答 $x=8:11$, $y=9:11$.

例3 在 $[M-ABCD]^H$ 中, 所有的棱均等于1. $\vec{DK} = \vec{KM}$, $\vec{BP} = 0.25\vec{BM}$; $X = (MC) \cap (AKP)$. 求 $|MX| : |XC|$ (图6.42).

设 $|MX|:|XC|=x:y$. 非共面的 $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AM}$ 唯一地确定 $[M-ABCD]^n$, 并通过它可以表示 $\vec{AK}$, $\vec{AP}$, $\vec{AX}$. 矢量 $\vec{AK}$, $\vec{AP}$ 和 $\vec{AX}$ 共面. 因此

$$\vec{AX} = k \vec{AK} + p \vec{AP}.$$

根据公式(1), 得

$$\vec{AX} = \frac{1}{x+y} (y \vec{AM} + x \vec{AC}). \quad (6.14)$$

因为 $|MX| + |XC| = 1$, 所以, $y:(x+y) = 1-x$, $x:(x+y) = x$. 现在等式(6.14)可以写成下式:

$$\vec{AX} = (1-x) \vec{AM} + x \vec{AC}. \quad (6.15)$$

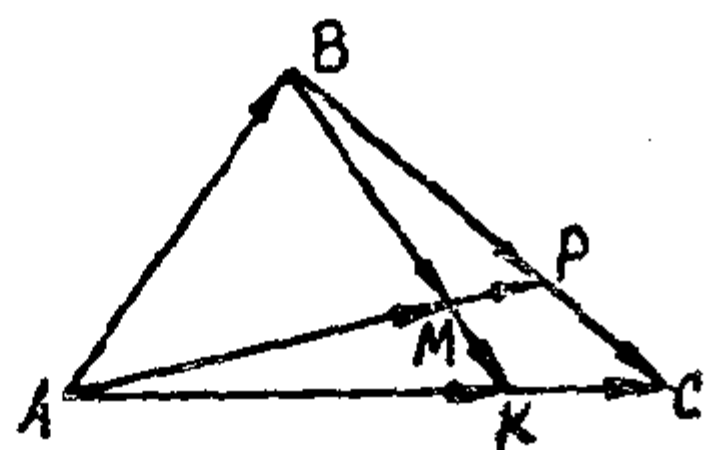


图6.41

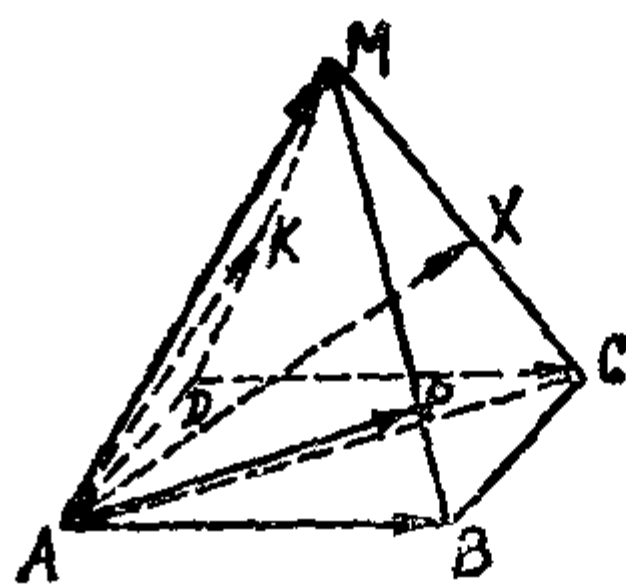


图6.42

由等式(6.13)和(6.15), 得

$$k \vec{AK} + p \vec{AP} = (1-x) \vec{AM} + x \vec{AC} \quad (6.16)$$

我们用基矢量 $\vec{AM}$, $\vec{AD}$, $\vec{AB}$ 来表示 $\vec{AK}$, $\vec{AP}$, $\vec{AC}$:

$$\vec{AK} = 0.5(\vec{AM} + \vec{AD}); \vec{AC} = \vec{AD} + \vec{AB}; \vec{AP} = 0.25(3\vec{AB} + \vec{AM}).$$

之后, 等式(6.16)具有如下形式:

$$(0.5k + 0.25p - 1 + x) \vec{AM} + (0.5k - x) \vec{AD} + (0.75p$$

$$-x) \vec{AB} = \vec{0}.$$

由此得出如下方程组:

$$\left. \begin{aligned} 0.5k + 0.25p - 1 + x &= 0, \\ 0.5k - x &= 0, \\ 0.75p - x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

解此方程组, 得 $x = 3:7$ 和 $|MX| : |XC| = 3:4$.

例4 在 $\Phi = [ABCD - A_1B_1C_1D_1]^\perp$ 中, $[ABCD]$ 为菱形, $|AB| = 1, \widehat{BAD} = 60^\circ, |AA_1| = 4, \vec{AO} = 0.5 \cdot \vec{OC_1}, O \in \Sigma, \Sigma \perp (AC_1), X = \Sigma \cap (BB_1)$. 求 $|BX|$.

因为这些矢量的长度和它们之间角度均已知, 所以由矢量 $\vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AA_1}$ 唯一地确定 Φ , 根据题设条件, 有

$$\vec{AC_1} \cdot \vec{OX} = 0. \quad (6.17)$$

用基矢量 $\vec{AA_1}, \vec{AB_1}, \vec{AD}$ 将 $\vec{AC_1}$ 和 $\vec{OX}$ (图6.43) 表成:

$$\begin{aligned} \vec{AC_1} &= \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}, \\ \vec{OX} &= \vec{AB} + \vec{BX} - \vec{AO} = \vec{AB} + \vec{BX} - \frac{1}{3}\vec{AC_1} \\ &= \frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AD} - \frac{1}{3}\vec{AA_1} + \vec{BX}. \end{aligned}$$

现在, 等式 (6.17) 具有如下形式:

$$\begin{aligned} (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}) \left(\frac{2}{3}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AD} - \frac{1}{3}\vec{AA_1} + \vec{BX} \right) \\ = 0. \end{aligned}$$

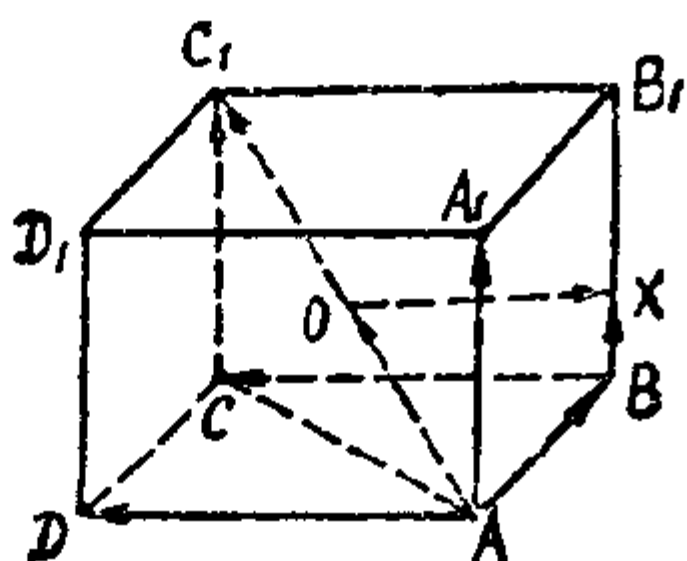


图6.43

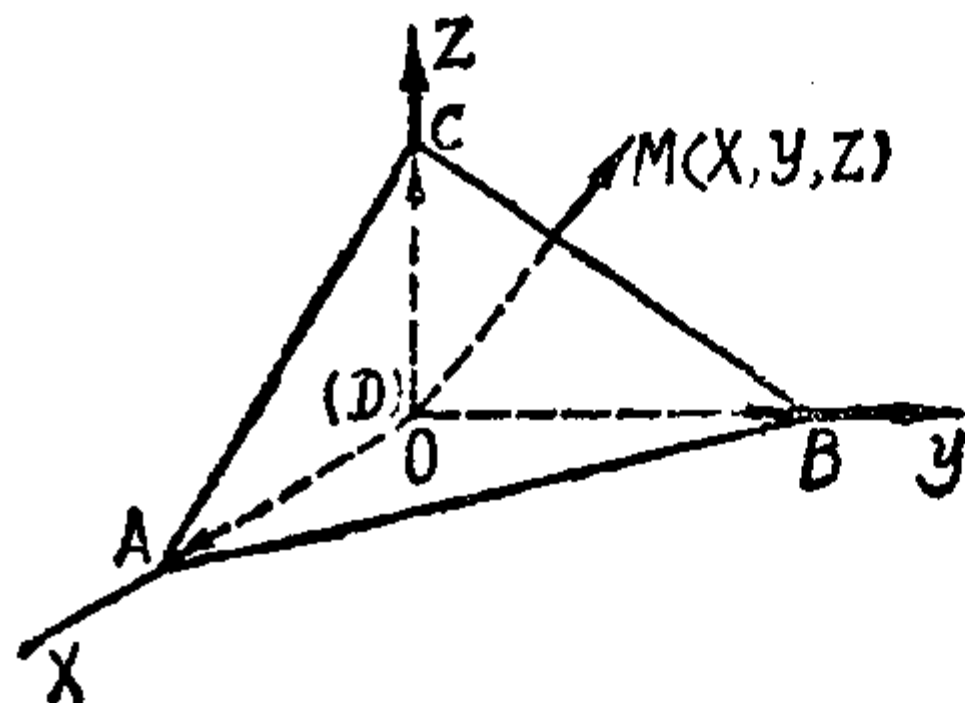


图6.44

展开此等式的括号式，并考虑到正交矢量的标量积等于零，得

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \vec{AB}^2 - \frac{1}{3} |\vec{AB}| |\vec{AD}| \cos 60^\circ + \frac{2}{3} |\vec{AD}| |\vec{AB}| \cos 60^\circ \\ & - \frac{1}{3} \vec{AD}^2 - \frac{1}{3} \vec{AA}_1^2 + |\vec{AA}_1| |\vec{BX}| \cos 0^\circ = 0, \end{aligned}$$

其中， $|\vec{AB}| = |\vec{AD}| = 1$ ， $|\vec{AA}_1| = 4$ 。由此 $|\vec{BX}| = 29:24$ 。

例5 在 $[D-ABC]$ 中， $\widehat{ADC} = \widehat{CDB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$ ， $|AD| = 6$ ， $|DB| = 8$ ， $|DC| = 24$ ， $|AM| = |BM| = |CM| = |DM|$ 。求 $|DM|$ 。

直角坐标系轴的方向如图6.44所示。设 $M(x, y, z)$ 。于是 $\vec{DM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 。根据题设条件 $\vec{AM}^2 = \vec{BM}^2 = \vec{CM}^2 = \vec{DM}^2$ 或

$$\begin{aligned} ((x-6)\vec{i} + (y-0)\vec{j} + (z-0)\vec{k})^2 &= ((x-0)\vec{i} \\ &+ (y-8)\vec{j} + (z-0)\vec{k})^2 = ((x-0)\vec{i} + (y-0)\vec{j} \\ &+ (z-24)\vec{k})^2 = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})^2 \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} (x-6)^2 + y^2 + z^2 &= x^2 + (y-8)^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + (z-24)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

由此得

$$\left. \begin{aligned} (x-6)^2 &= x^2, \\ (y-8)^2 &= y^2, \\ (z-24)^2 &= z^2 \end{aligned} \right\}$$

从而， $x=3$ ， $y=4$ ， $z=12$ 。得 $|\vec{DM}|^2 = 3^2 + 4^2 + 12^2 = 169$ ， $|DM| = 13$ 。

例6 在 $[D-ABC]$ 中， $|AB| = |AC| = |BC| = 10$ ， $|AD|$

$=6$, $|BD|=5$, $|CD|=7$. 求 $|DH| = |D, (ABC)|$ (图6.45).

我们取 $\vec{CA}, \vec{CB}, \vec{CD}$ 作为基矢量. 根据题设条件, 得

$$\left. \begin{aligned} \vec{DH} \cdot \vec{CA} &= 0, \\ \vec{DH} \cdot \vec{CB} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

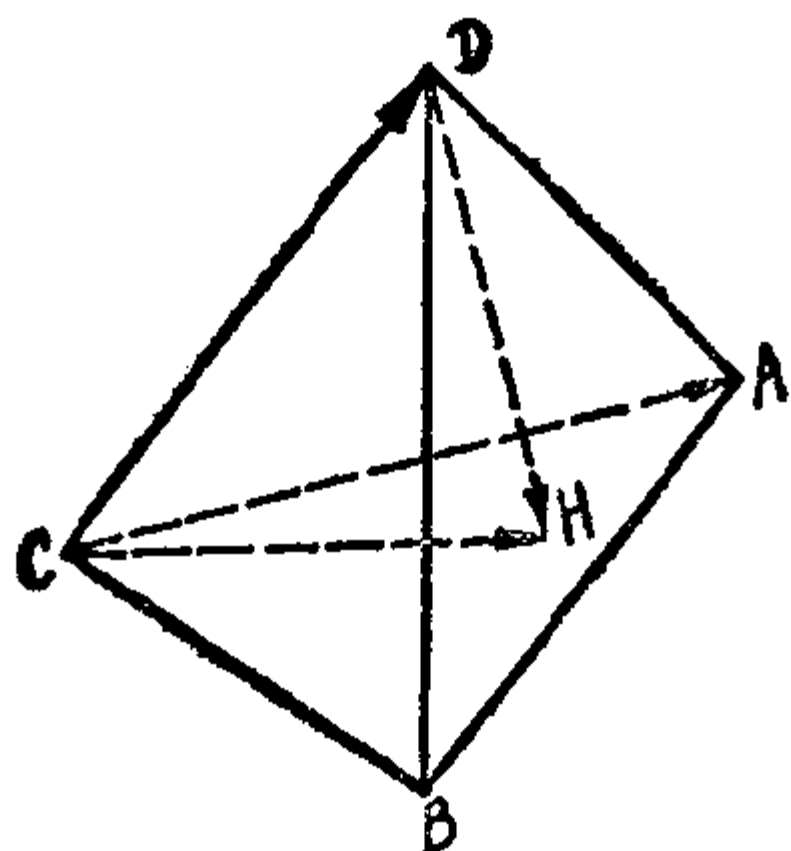


图6.45

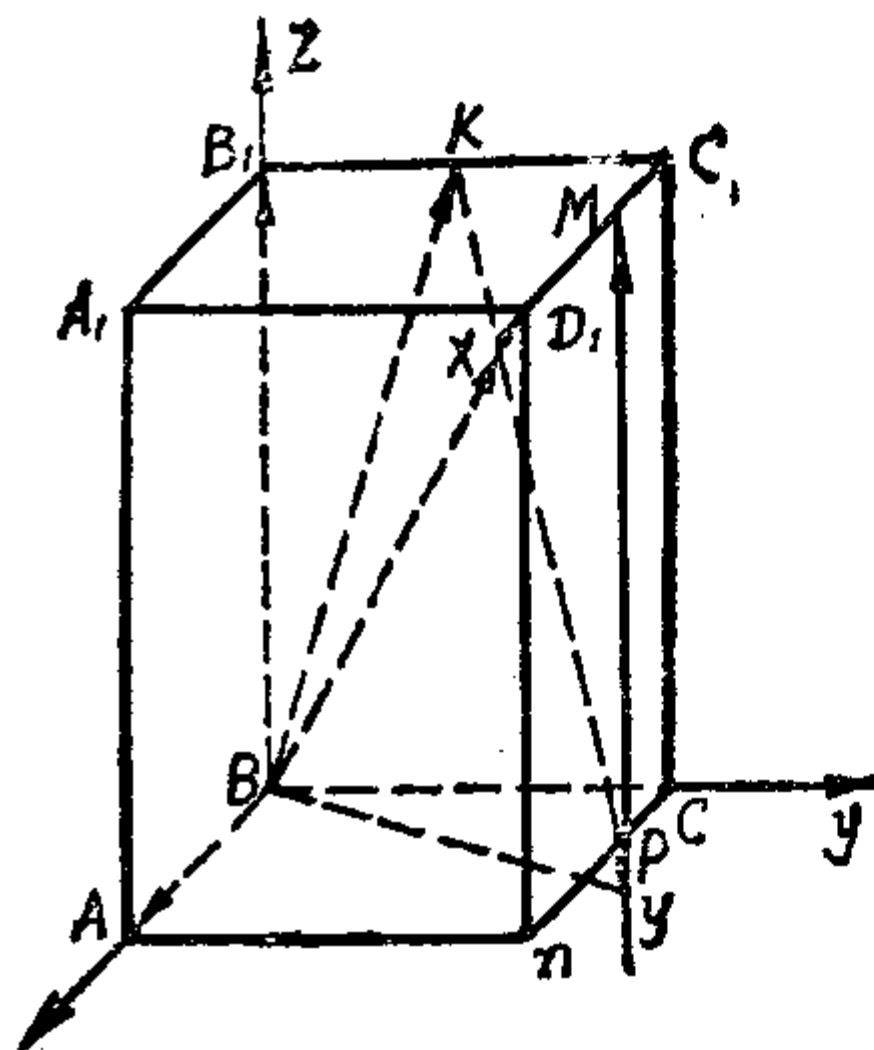


图6.46

设 $\vec{CH} = m\vec{CA} + n\vec{CB}$, 则 $\vec{DH} = \vec{CH} - \vec{CD} = m\vec{CA} + n\vec{CB} - \vec{CD}$

及方程组(6.18)具有如下形式:

$$\left. \begin{aligned} m\vec{CA}^2 + n\vec{CB} \cdot \vec{CA} - \vec{CD} \cdot \vec{CA} &= 0, \\ m\vec{CA} \cdot \vec{CB} + n\vec{CB}^2 - \vec{CD} \cdot \vec{CB} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

应用公式 (2), 得

$$\begin{aligned} 100m + 0.5n(100 + 100 - 100) \\ - 0.5(49 + 100 - 36) &= 0, \\ 0.5m(100 + 100 - 100) + 100n \\ - 0.5(49 + 100 - 25) &= 0. \end{aligned}$$

由此 $n=0.45$; $m=0.34$. 于是,

$$\vec{DH} = 0.34\vec{CA} + 0.45\vec{CB} - \vec{CD} \text{ 和}$$

$$\begin{aligned}\vec{DH}^2 &= 0.34^2 \vec{CA}^2 + 0.45^2 \vec{CB}^2 + \vec{CD}^2 + 2 \times 0.34 \\ &\times 0.45 \vec{CA} \cdot \vec{CB} - 2 \times 0.34 \vec{CA} \cdot \vec{CD} - 2 \times 0.45 \vec{CB} \cdot \vec{CD} \\ &= 1.89; \quad |DH| = \sqrt{1.89}.\end{aligned}$$

例7 给定一立方体(图6.46). $|AB|=1$, $B_1K=KC_1$, $\vec{CP}=0.25\vec{CD}$; $C_1M=0.25\vec{C_1D_1}$; $X \in (BD)$; $Y = (KX) \cap (MP)$. 试作出Y.

设立方体在直角坐标系中的位置如图6.46所示. 于是, $D_1(1; 1; 1)$, $K(0; 0.5; 1)$, $P(0.25; 1; 0)$, $M(0.25; 1; 1)$. 据题设条件 $\vec{BX}=x\vec{BD_1}$, $\vec{KX}=n\vec{KY}$, $\vec{PY}=m\vec{PM}$, 其中 x, n, m 为不等于零的未知数. 根据公式(1), 得

$$\begin{aligned}\vec{BX} &= (1-n)\vec{BK} + n\vec{BY} \quad \text{或} \\ x\vec{BD_1} &= (1-n)\vec{BK} + n\vec{BY}.\end{aligned}\tag{6.19}$$

在等式(6.19)中的矢量, 用 $\vec{i} = \vec{BA}$, $\vec{j} = \vec{BC}$, $\vec{k} = \vec{BB_1}$ 表示之. 从而得 $\vec{BD_1} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{BK} = 0.5\vec{j} + \vec{k}$; $\vec{BY} = 0.25\vec{i} + \vec{j} + m\vec{k}$. 等式(6.19)经变换后, 具有下列形式:

$$\left(x - \frac{n}{4}\right)\vec{i} + \left(x - \frac{1-n}{2} - n\right)\vec{j} + (x + n - 1 - nm)\vec{k} = \vec{0}.$$

由此得

$$\left. \begin{aligned}x - 0.25n &= 0, \\ x - 0.5(1-n) - n &= 0, \\ x + n - 1 - nm &= 0.\end{aligned} \right\}$$

解此方程组, 得 $m=1.75$, $|PY|:|PM|=7:4$.

例8 试列出过点 $M(2; 1; 1)$, $K(1; 0; -1)$, $P(0; 1; -3)$ 的平面方程.

设 $D(x, y, z) \in (MKP)$, 于是

$$\vec{MD} = n\vec{MK} + m\vec{MP} \quad (6.20)$$

式中 n, m 是未知数, 显然有

$$\vec{MD} = (x-2)\vec{i} + (y-1)\vec{j} + (z-1)\vec{k},$$

$$\vec{MK} = (1-2)\vec{i} + (0-1)\vec{j} + (-1-1)\vec{k},$$

$$\vec{MP} = (0-2)\vec{i} + (1-1)\vec{j} + (-3-1)\vec{k}.$$

因此可将等式(6.20)写成:

$$\begin{aligned} & (x-2)\vec{i} + (y-1)\vec{j} + (z-1)\vec{k} \\ &= n(-\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}) + m(-2\vec{i} - 4\vec{k}) \text{ 或} \\ & (x-2+n+2m)\vec{i} + (y-1+n)\vec{j} \\ & + (z-1+2n+4m)\vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

得方程组如下:

$$\left. \begin{aligned} x-2+n+2m &= 0, \\ y-1+n &= 0, \\ z-1+2n+4m &= 0 \end{aligned} \right\}$$

由此 $2x - z - 3 = 0$.

例9 已知 $A(2;3;1), B(4;1;2), C(6;3;7), D(-5; -4; 8)$. 求 $|DH| = |D, (ABC)|$.

设 $M(x; y; 0) = (DH) \cap (xoy)$. 于是

$$\left. \begin{aligned} \vec{DM} \cdot \vec{AB} &= 0, \\ \vec{DM} \cdot \vec{AC} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

显然,

$$\vec{DM} = (x+5)\vec{i} + (y+4)\vec{j} - 8\vec{k},$$

$$\vec{AB} = (4-2)\vec{i} + (1-3)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k},$$

$$\vec{AC} = (6-2)\vec{i} + (3-3)\vec{j} + (7-1)\vec{k} = 4\vec{i} + 6\vec{k}.$$

现在, 方程组(6.21)具有如下形式,

$$\left. \begin{aligned} 2(x+5) - 2(y+4) - 8 &= 0, \\ 4(x+5) - 48 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

由此 $x=7, y=4$. 于是, $M(7;4;0)$

如果 $(\vec{DA} \wedge \vec{DM}) = \alpha$, 那么 $|DH| = ||\vec{DA}| \cdot \cos \alpha|$. 但 $\cos \alpha = (\vec{DM} \cdot \vec{DA}) : (|\vec{DM}| |\vec{DA}|)$. 因此

$$\begin{aligned} |DH| &= |(\vec{DM} \cdot \vec{DA}) : |\vec{DM}|| = |(12\vec{i} + 8\vec{j} - 8\vec{k}) (7\vec{i} \\ &\quad + 7\vec{j} - 7\vec{k})| : 4\sqrt{17} = (12 \times 7 + 8 \times 7 + 8 \times 7) \\ &\quad : 4\sqrt{17} = 49 : \sqrt{17}. \end{aligned}$$

练习

1 给定平行四边形 $ABCD$, $\vec{BK} = 0.5\vec{BC}$, 试用 $\vec{AB}$ 和 $\vec{CD}$ 表示 $\vec{AK}$.

2 点 $D \in [BC]$ 和 $|BD| : |DC| = 3 : 2$, $A \in (BC)$, 试用 $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ 表示出 $\vec{AD}$.

3 给定平行四边形 $ABCD$, $\vec{DM} = \vec{MC}$, $\vec{AP} = 0.25\vec{AB}$, $\vec{AT} = -0.5\vec{AB}$, $\vec{AX} = -\vec{AD}$, $\vec{BK} = 0.5\vec{BC}$, $\vec{BH} = 1.5\vec{BC}$. 试用 $\vec{AD}$ 和 $\vec{AB}$ 表示出: (a) $\vec{KM}$; (b) $\vec{XT}$; (c) $\vec{PM}$; (d) $\vec{AH}$; (e) $\vec{TX} + \vec{XD} - \vec{DP}$; (f) $2\vec{AC} - \vec{CH}$; (g) $2\vec{XP} - 3\vec{PK}$.

4 给定平行四边形 $ABCD$. 试作出点 X , 若 (1) $\vec{DX} = 0.25\vec{DA} + 0.75\vec{DC}$; (2) $\vec{BX} = -2\vec{BA} + 3\vec{BC}$; (3) $\vec{AX} = -2\vec{AD} + 0.5\vec{AB}$.

5 给定平行四边形 $ABCD$. 求 x 和 y , 若 (1) $2x\vec{AD} = 3y\vec{AB}$; (2) $3x\vec{AD} - 4y\vec{AB} = 0$; (3) $(2+x)\vec{AD} + (y-2x)\vec{AB} = 0$.

6 给定 $[M-ABCD]^n$; 点 $O = (AC) \cap (BD)$, $\vec{CK} = 0.5\vec{CM}$,

$\vec{OP} = \vec{PM}$. 试按向量 $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AM}$ 展开: (1) $\vec{AK}$; (2) $\vec{MO}$; (3) $\vec{AP}$; (4) $\vec{DK}$; (5) $\vec{DO} + \vec{OP} + \vec{PK}$.

7 给定 $[M - ABCD]^n$. 求 x, y, z . 若: (1) $(x-1)\vec{AB} + (y-x)\vec{AD} + (1-z)\vec{AM} = \vec{0}$; (2) $x\vec{DC} + (z-x)\vec{BC} = (y-z)\vec{AM}$.

8 给定 $[D - ABC]$, $\vec{AK} = \vec{KB}$, $\vec{BM} = \vec{MC}$. 点 $P = (AM) \cap (CK)$. 试按向量 $\vec{DA}$, $\vec{DB}$, $\vec{DC}$ 展开向量 $\vec{DP}$.

9 给定一立方体 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. 试求向量间的夹角: (1) $\vec{D_1 A_1}$ 和 $\vec{C C_1}$; (2) $\vec{C_1 B}$ 和 $\vec{D D_1}$; (3) $\vec{BC_1}$ 和 $\vec{A_1 B}$; (4) $\vec{AC}$ 和 $\vec{DC_1}$; (5) $\vec{DA_1}$ 和 $\vec{B_1 B}$.

10 $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ 的三角形 ABC 内接于以 O 为圆心的单位圆, 试求(1) $\vec{OB} \cdot \vec{OC}$; (2) $\vec{OC} \cdot \vec{OA}$; (3) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$.

11 在正六边形 $ABCDEF$ (以 O 为中心)中, $|AB| = 4$. 试求: (1) $\vec{AB} \cdot \vec{ED}$; (2) $\vec{AD} \cdot \vec{CB}$; (3) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$; (4) $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$; (5) $\vec{OA} \cdot \vec{OD}$; (6) $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$; (7) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

12 在三角形中, $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$. 试求: (1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; (2) $\vec{BC} \cdot \vec{BA}$.

13 给定 $[D - ABC]^n$, $|AB| = |AD| = a$, $\vec{AM} = \vec{MB}$, $\vec{AK} = \vec{KD}$, $\vec{DP} = \vec{PC}$. 试求: (1) $\vec{AC} \cdot \vec{AB}$; (2) $\vec{AD} \cdot \vec{DB}$; (3) $\vec{PK} \cdot \vec{AC}$; (4) $\vec{MK} \cdot \vec{BC}$; (5) $\vec{KP} \cdot \vec{BA}$; (6) $\vec{PM} \cdot \vec{PB}$.

14 在三角形 ABC 中, $|BA| = |AC|$, $\vec{BM} = \vec{MA}$, $\vec{CK} = \vec{KA}$. $(CM) \perp (BK)$, 试求 $\angle BAC$.

15 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ 是平行六面体; $ABCD$ 是正方形, $|AB| = a$, $|AA_1| = a$, $\angle A_1 AB = \angle A_1 AD = \alpha$. 试求 $|BD_1|$ 和 $\angle (BD_1, AC)$.

16 $ABCD$ 是平行四边形. $\vec{BK} = 2\vec{KC}$, $(AK) \cap (BD) = M$, $\vec{AM} = x\vec{AK}$, $\vec{BM} = y\vec{BD}$. 试求 x 和 y 并说明它们值的几何意义.

17 $|AB| = c$, $|AC| = b$, $\angle BAC = \alpha$, $K \in [BC]$, $|BK| : |KC| = c : b$. 试求 $|AK|$.

18 $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$, $\vec{BM} = \vec{MC}$. 试求 $|AM|$.

19 $|AB| : |AC| = 3$, $\angle BAC = \alpha$, $K \in [BC]$, $\angle BAK = \angle KAC$. 试求 $\widehat{BKA}$.

20 在 $[D-ABC]$ 中, $(AC) \perp (BD)$, $(BC) \perp (AD)$. 试求 $(DC, \widehat{AB})$.

21 一非平面闭折线由6个边组成. 不相邻边的中点是两个三角形的顶点. 试证: 这些三角形中线的交点相重合.

22 在对两边平行的非平面六边闭折线中, 试证: 对边相等.

23 $ABCD$ 是平行四边形, $\vec{DM} = \vec{MC}$, $\vec{CK} = \vec{KB}$, $P = (DK) \cap (AM)$. 试求 $|DP| : |DK|$ 和 $|AP| : |AM|$.

24 在四边形 $ABCD$ 中, $|AD| = a$, $|BC| = b$, $(AD, \widehat{BC}) = \alpha$, $\vec{AK} = \vec{KB}$, $\vec{CM} = \vec{MD}$, $\vec{BP} = \vec{PD}$, $\vec{AH} = \vec{HC}$. 试求 $|KM|$ 和 $|HP|$.

25 证明: 三面角的两个平面角的平分线和第三个平面角相邻的角的平分线在同一平面上.

26 证明: 连接四面体顶点和其对面中线交点的线段相交于一点. 而且, 此点将每个线段分成 $3:1$ 之比.

27 证明: 过三棱锥对棱的中点所引的直线相交一点 (此点称作矩心).

28 证明: 四面体的对棱的中点, 关于矩心对称.

29 $ABCD A_1 B_1 C_1 D$ 是一平行六面体, 试判明 (CC_1) 和 $(A_1 BD)$ 是否相交

30 证明: 在梯形 $ABCD$ 中, 直线 AB 和 CD 与过两底中点的直线交于一点.

31 证明:在四边形中, 连接对边中点的线段和连接对角线中点的线段相交于一点, 且在此点被等分

32 $\vec{AM} = \vec{MB}$, $\vec{A_1M_1} = \vec{M_1B}$, $\vec{AK} = \vec{KA_1}$, $\vec{BH} = \vec{HB_1}$, $\vec{ME} = \vec{EM_1}$. 证明: $K \in (HE)$.

33 在凸四边形 $ABCD$ 中, AB 和 CD 边垂直. 证明: 另两边长度的平方和等于对角线长度的平方和.

34 在三角形 ABC 的 AB 与 BC 边上向外作正方形 $ABPQ$ 和 $BCKF$, $\vec{PM} = \vec{MF}$. 证明: $(BM) \perp (AC)$.

35 给定 $[ABCD - A_1B_1C_1D_1]^n$, $|AB| = 1$, $|BB_1| = 2$, $X \in (DB_1)$, $Y \in (BC_1)$, $(XY) \perp (DB_1)$, $(XY) \perp (BC_1)$. 求: (DB_1, BC_1) 和 $|XY|$.

36 证明: 平行四边形对角线的平方和等于 平行四边形各边平方和.

37 在一平面上给定四边形 $ABCD$ 和点 M . 证明: 关于此四边形各边中点, M 点的对称点是平行四边形的顶点.

38 给定四边形 $ABCD$. 过 A 作 (BC) 的平行线交 (BD) 于点 M , 过 B 作 AD 边的平行线交 (AC) 于 K . 证明: $(MK) \parallel (DC)$.

39 给定三角形 ABC , $\vec{AM} = 1/3 \vec{AC}$, $\vec{CK} = 2 \vec{CB}$. 点 $P = (KM) \cap (AB)$. 求 $|AP| : |PB|$ 和 $|MP| : |PK|$.

40 给定立方体 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. $\vec{A_1 P} = \vec{PC}$, $\vec{BM} = \vec{MB_1}$, $X = (APM) \cap (B_1 C_1)$. 求 $|B_1 X| : |XC_1|$.

41 给定 $[D - ABC]$. $\vec{DK} = 0.5 \vec{DA}$, $\vec{DM} = 1/3 \vec{DB}$, $\vec{AE} = 0.25 \vec{AC}$. 问: (KME) 将线段 BC 分成怎样的比例.

42 给定三角形 ABC . $\hat{ACB} = 90^\circ$, $X \in (AB)$, $K \in (AC)$, $H \in (CB)$, $(XK) \perp (AC)$, $(XH) \perp (CB)$. 若 $(KH) \perp (AB)$. 完成必要的计算后, 作出 X .

43 给定立方体 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. $2 \vec{A_1 K} = \vec{KC}$, $|AB| = 1$,

$X \in (AK)$, $Y \in (BD)$, $(XY) \perp (ABC)$. 进行必要的计算后, 试作出 X 和 Y , 并求出 $|XY|$.

44 在凸四边形 $ABCD$ 中, $\vec{AK} = \vec{KB}$, $\vec{CM} = \vec{MD}$. 试确定四边形的形状, 使此四边形的顶点是线段 KC , BM , MA , KD 的中点.

§ 6.6 坐标法

坐标法简化了中学几何习题解答, 用坐标法解题时, 常利用如下方程: 过已知两点(过一点及已知直线的角系数)的直线; 圆周和球面; 平面(一些线段围成的部分平面); 线段长度公式; 两直线垂直的条件. 计算范围取决于已知图形对应于直角坐标系有多少个恰当位置.

例1 在 $[M - ABCD]$ 中, $\vec{DC} = \vec{AB}$, $\widehat{ABC} = 90^\circ$, $|AB| = 3$, $|AD| = 4$, $|AM| = 2$, $(AM) \perp (ABC)$. 点 $K \in \Sigma$ ($\vec{MK} = \vec{KC}$) 和

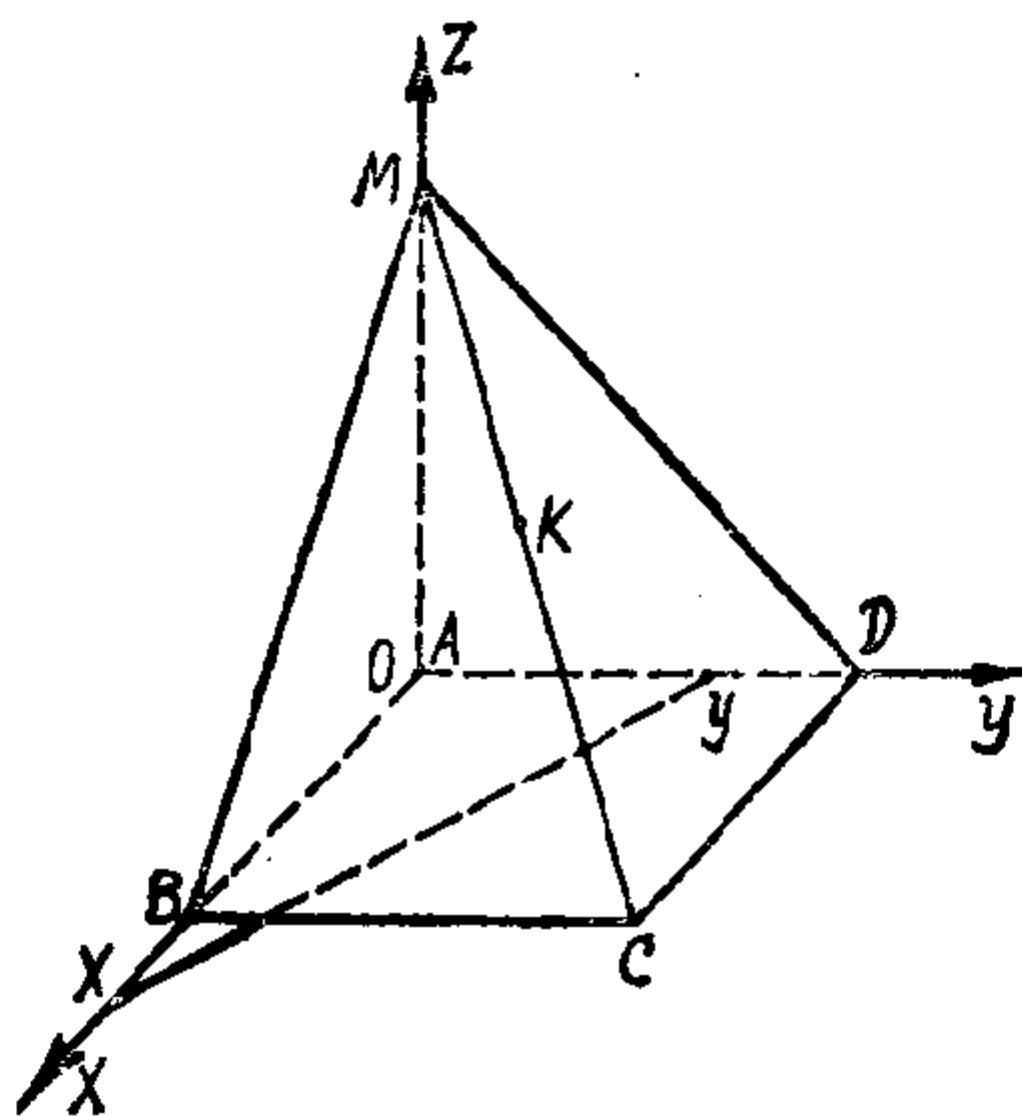


图6.47

$\Sigma \perp (MC)$; $X = \Sigma \cap (AB)$, $Y = \Sigma \cap (AD)$. 求 $|XY|$.

$[M - ABCD]$ 在直角坐标系的位置, 如图6.47所示. 显然,

$M(0,0,2)$ 和 $C(3,4,0)$. 设 $E(x,y,z) \in \Sigma$. 因为 $|MK| = |KC|$, 所以 $|EM| = |EC|$. 我们求得: $|EM|^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2$, $|EC|^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-0)^2$. 由此 $4z - 8y - 6x + 21 = 0$.

点 $X \in (ox)$. 因此 $X(x_1, 0, 0)$ 为了求 x_1 , 我们用零代替后一方程中的 y 和 z , 得 $x_1 = 3.5$.

同理, 得 $y(0; 2.625; 0)$. 于是 $|AX| = 3.5$. $|AY| = 2.625$. 由直角 $\triangle XAY$ 得 $|XY| \approx 4.8$.

练习

1 给定圆心为 O , 直径 $|AB| = 4$ 的圆. 点 C 为半径 OB 的中点, 在圆上求作点 X 和 Y , 对称于 (AB) 、使 $(YC) \perp (XA)$.

2 有半径分别为2, 8和10cm的三个圆两两外切. 求前两圆的内公切线被第三个圆割取的弦长.

3 $[ABCD - A_1B_1C_1D_1]$ 为长方体. $|AB| = 2$, $|BC| = 4$. $|BB_1| = 6$. 点 $O \in (\overrightarrow{D_1O} = \overrightarrow{OB})$ 和 $\Sigma \perp (D_1B)$, $x = \Sigma \cap (A_1B_1)$, 求 $|A_1X|$.

4 在 $[M - ABCDEF]^H$ 中, $[MO] \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$, $|AB| = 4$, $|MO| = 6$, K 是 $\triangle MCD$ 中线的交点. 求 $|AK|$.

5 在 $\triangle ABC$ 中, $|AB| = 4$, $|BC| = 3$, $|AC| = 3$, $|\overrightarrow{BK}| = |\overrightarrow{KC}|$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$. 求 $(\widehat{AKCM})$.

§ 6.7 图形相交法

这种方法常常叫做点的几何轨迹法. 确定只满足题设条件之一的点集, 作出只符合第二个题设条件的点集, 这两个点集的交集定出未知图形.

例1 锐角 $\triangle ABC$ 的高 AA_1, BB_1, CC_1 的垂足是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的顶点. 求证 $\triangle ABC$ 的高是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的内角平分线(图6.48).

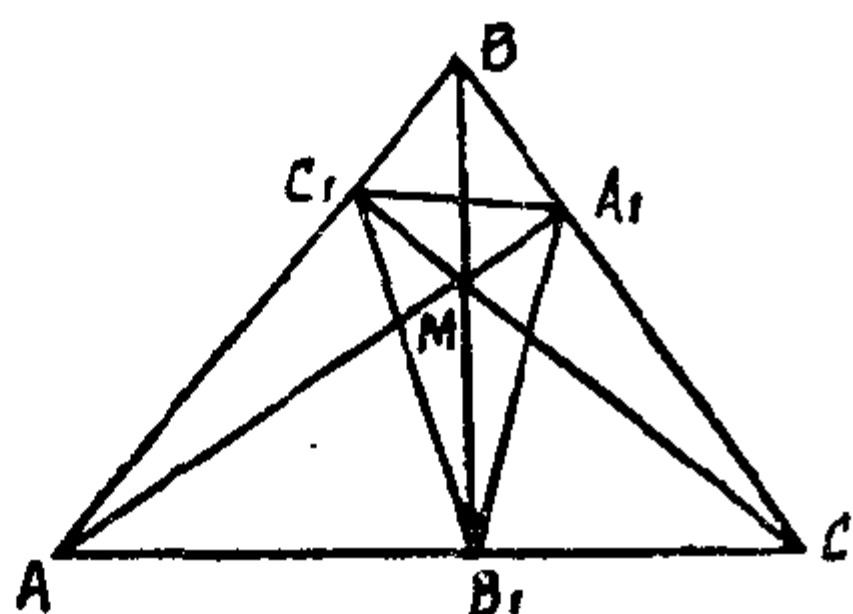


图6.48

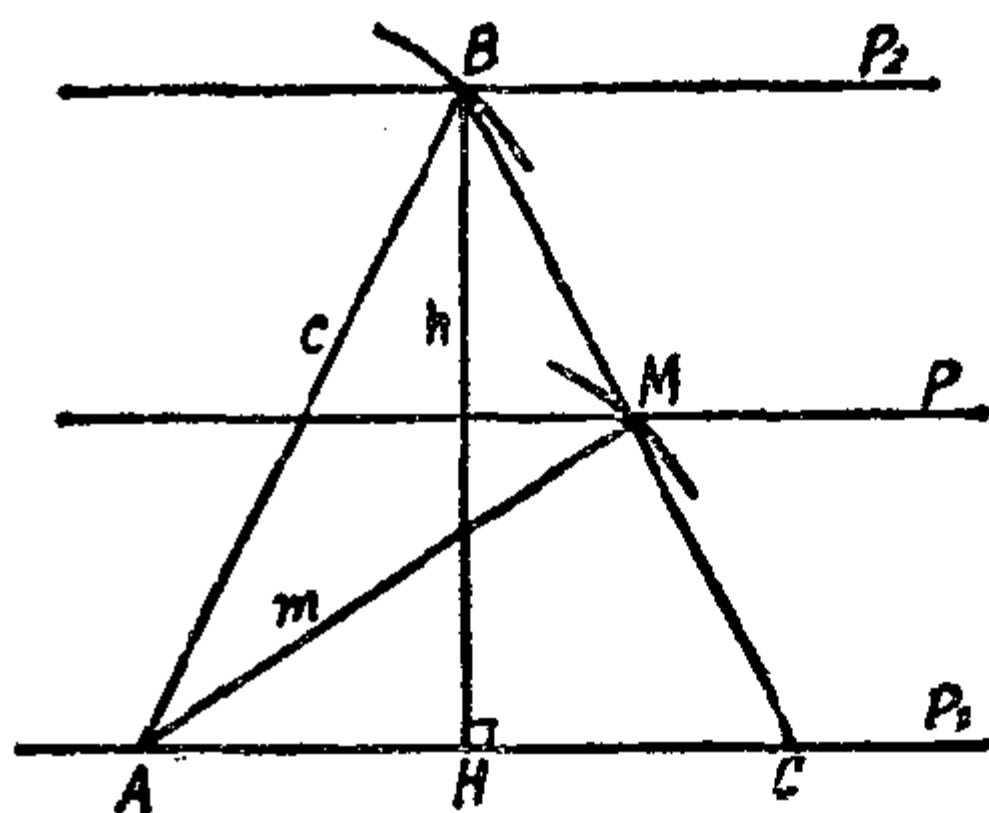


图6.49

设 $M = (AA_1) \cap (CC_1) \cap (BB_1)$. $\widehat{AC_1M} = \widehat{AB_1M} = 90^\circ$. 因此 C_1 和 B_1 在直径为 $[AM]$ 的圆上; $\angle C_1AM = \angle C_1B_1B$ (因为它们是立于弦 $[MC_1]$ 上的圆周角) $\widehat{CB_1M} = \widehat{CA_1M} = 90^\circ$. 因此 B_1 和 A_1 在以 MC 为直径的圆上且 $\widehat{BB_1A_1} = \widehat{BCC_1}$. 由 $\triangle ABA_1$ 和 $\triangle CBD_1$ 可知, $\widehat{BAA_1} = \widehat{BCC_1} = 90^\circ - \widehat{ABC}$. 于是 $\widehat{BB_1C_1} = \widehat{BB_1A_1}$. 由此很明显, $[B_1B)$ 是角 $C_1B_1A_1$ 的角平分线. 类似地可证明, $[A_1A)$ 和 $[C_1C]$ 是角 $C_1A_1B_1$ 和 $B_1C_1A_1$ 的角平分线.

例2 试作一 $\triangle ABC$, 它的 $|AB|=c$, $|BH|=h$, $|AM|=m$ ($\vec{BM} = \vec{MC}$ [$BH \perp (AC)$]).

由于已知求作的 $\triangle ABC$ 的高 BH 的长度, 因此, 可以确定 B 在平行于直线 P_1 与 P_1 的距离为 h (图6.49). 我们在 P_1 上任取一点 A , 因为 $|AB|=c$, 所以 B 也在圆 (A, C) 上. 这样, B 恰好被直线 P_2 和圆 (A, C) 这两个集合的交所确定. 我们看到, 如果 $c \geq h$, 那么, 这两个集合的交点是非空集合. 剩下应确定 C 在 P_1 上的位置. 如果确定什么样的集合的交点是点 M , 那么这个点

就确定了, 因为 $|AM| = m$, 所以 $M \in (A, m)$. 另一方面, M 与 P_1 和 P_2 等距. 因此 M 属于平行于 P_1 和 P_2 并与它们等距的直线 P .

我们作 P . 求出 $M = (A, m) \cap P$. 点 $C = (BM) \cap P_1$. 显然, 当且仅当 $m \geq 0.5h$ 时, M 才存在.

练习

- 1 已知 $\hat{B}$, 高 AH 和中线 AM . 试作出 $\triangle ABC$.
- 2 试作一菱形, 使它的两个对顶点在两已知点上, 而第三点在已知圆上.
- 3 给定两个同心圆 ω_1 和 ω_2 和圆 ω_3 . 试作出同 ω_1 、 ω_2 和 ω_3 相切的圆 ω .
- 4 在圆心为 O 的圆上, 作一内接直角三角形 ACB , 若已知 A 和直角边 AB 通过的点 K .
- 5 过已知点 A 作已知圆 (O, R) 的割线而它确定定长的弦.
- 6 在给定圆内, 试作一给定长度的弦, 使得它被给定直线等分.
- 7 已知 $\hat{A}$, 高 AH 和中线 BM , 试作出 $\triangle ABC$.

§ 6.8 几何变换法

平移法. 这种方法在于将所研究图形的某一线段或其它部分映象成某一矢量, 而把给定图形的分析 (作图) 化为更简单的辅助图形的分析 (作图). 而后完成逆平移, 而转到给定问题图形的分析 (作图).

例1 在平面上给定圆 (O, R) , 圆 (O_1, R_1) 和直线 a , 试作出 $[XY]$, 使其长为 m , 两端点在两个圆上并平行于直线 a (图 6.50).

如果我们找到点 $X \in (O, R)$, 那么习题就有解. 在 (O, R)

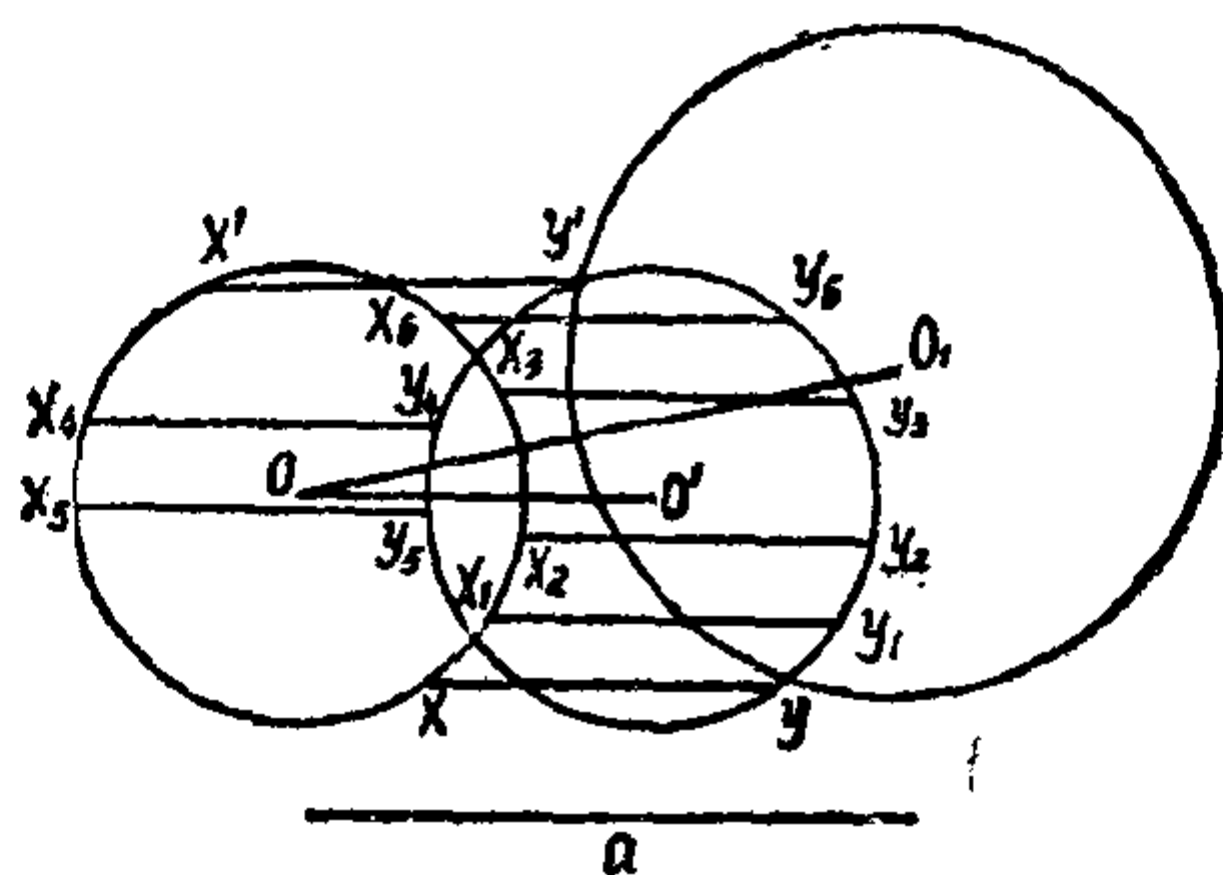


图6.50

上任取 n 个点 $X_1, X_2, X_3 \dots$. 作等于已知长且平行于 a 的线段 $X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3 \dots$. 不难看出, 点 $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ 属于某一圆 (O', R') . 过 $Y_1, Y_2, Y_3 \dots$ 集合的随意三点作圆后, 我们得假设, 即一切 $Y_1, Y_2, Y_3 \dots$ 事实上属于一个圆. 不仅如此, 我们还得到一个假设, $R' = R, [OO'] \parallel a, |OO'| = m$. 于是, 可以假定, 未知点 Y 是 (O, R) 和 (O', R') 的交点. 而且 $(O', R') = \vec{m}((O, R))$, 其中 $\vec{m} = \lambda a$ 和 $|\vec{m}| = m$. 寻找习题的解可通过证明这个假设来完成.

例 2 试作四边形 $ABCD$, 已知其四个角和两对边 AB 和 CD .

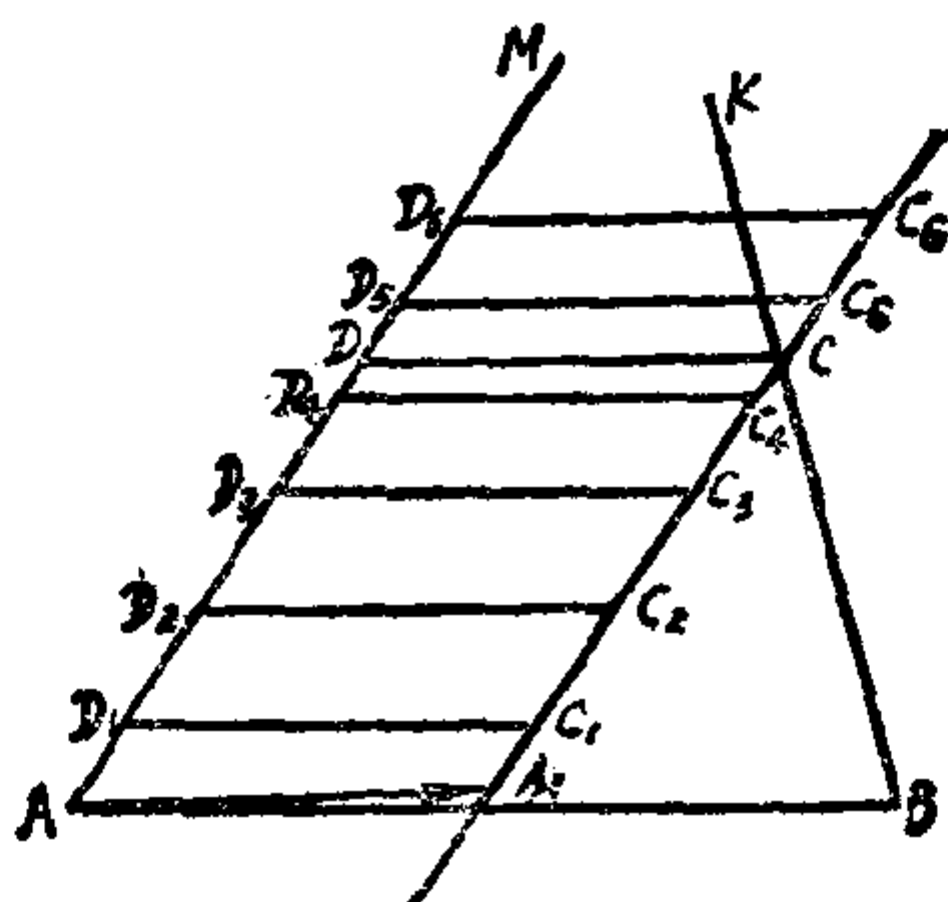


图6.51

作 $[AB]$ 和已知角 MAB 和 ABK (图6.51), 因为 $\widehat{ADC}$ 已知, 边长 DC 给定, 所以本题的解化为在 $[AM)$ 上寻得点 D , 我们在 $[AM)$ 上取任意点 $D_1, D_2, D_3, \dots$ 并作与 $[AM)$ 所成的角等于已知角 ADC 的线段 $D_1C_1, D_2C_2, D_3C_3, \dots$. 得到如下假设: $C_1, C_2, C_3, \dots$ 属于同一条直线 a . 而 $a = \overrightarrow{AA_1}((AM))$, 式中 $[AA_1] \uparrow \uparrow [DC]$ 和 $|AA_1| = |DC|$. 现在, 显而易见, $C = a \cap (BK)$.

例 3 已知梯形两底 AB 和 CD 及侧边 AD 和 CB , 试作此梯形 $ABCD$.

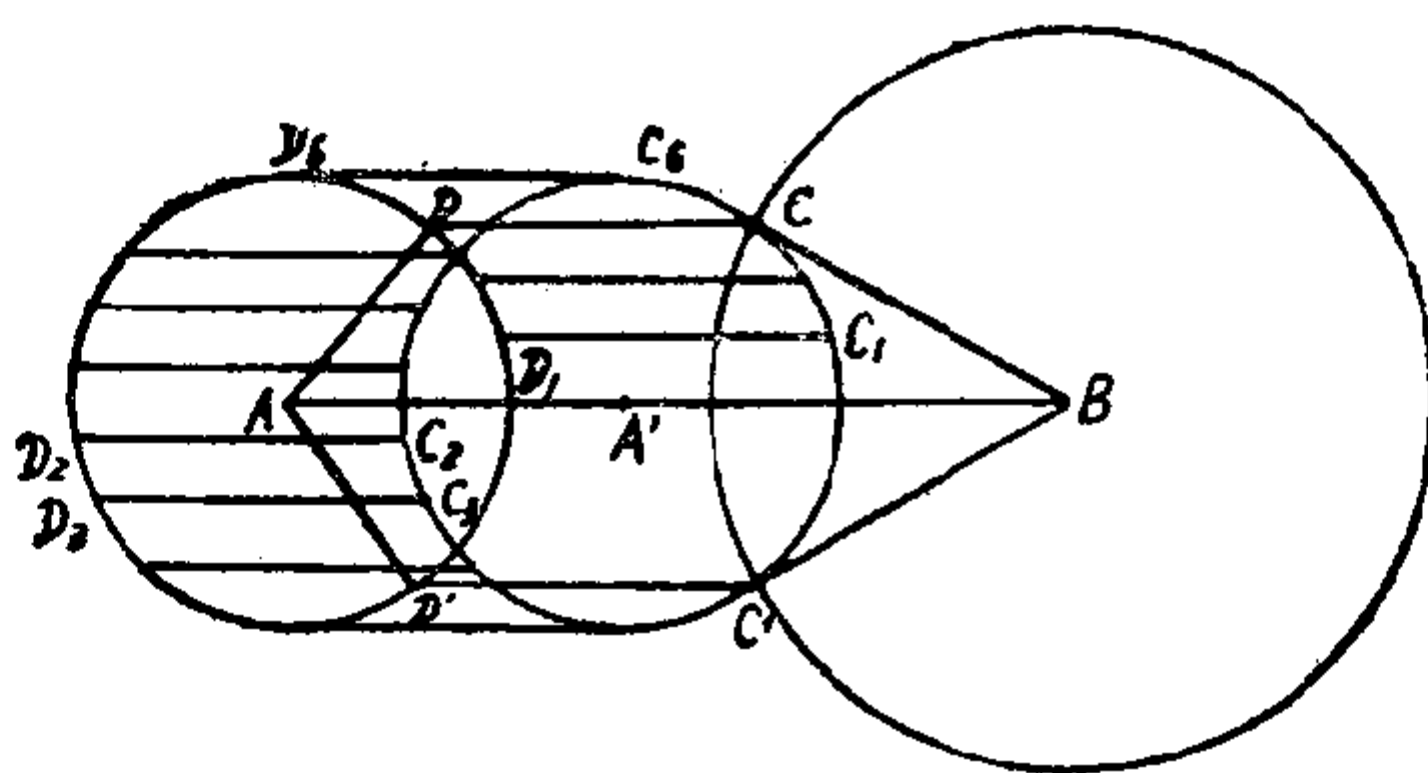


图6.52

作 $[AB]$ 和圆 $(A, |AD|)$ 和圆 $(B, |BC|)$, 梯形上底的 D 和 C 两点分别在两圆上. 如果确定点 C 或 D 在这两圆之一上的位置(图6.52). 则此题可解出. 在 $(A, |AD|)$ 上任取 n 个点 $D_1, D_2, D_3, \dots$ 并作线段 $D_1C_1, D_2C_2, D_3C_3, \dots$, 平行于 (AB) , 且与 $[DC]$ 相等. 之后, 可得如下假设: 点 $C_1, C_2, C_3, \dots$, 因而也有未知点 C , 属于某一个圆 (A', R') . 过点 $C_1, C_2, C_3, \dots$ 中任意三点作圆后, 发现(再一个假设!): $R' = |AD|, |AA'| = |DC|$, $[AA'] \parallel [AB]$. 于是, 得如下假设: 未知点 C 是 $(B, |BC|)$ 和由 $(A, |AD|)$ 中所得矢量 AA' 的圆周的交点. 本题的解答可通过论证这个假设而得之.

例 4 已知四边形 $ABCD$ 的各边和两对边 BA 和 CD 的夹角,

试作四边形ABCD.

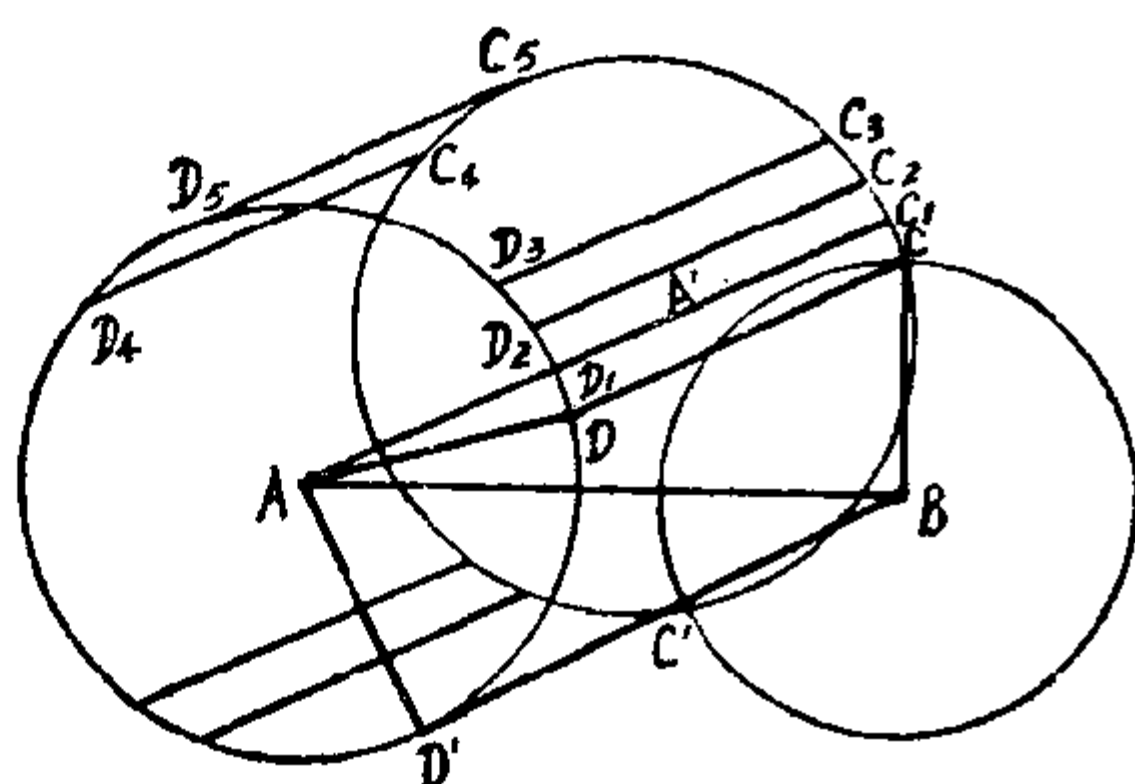


图6.53

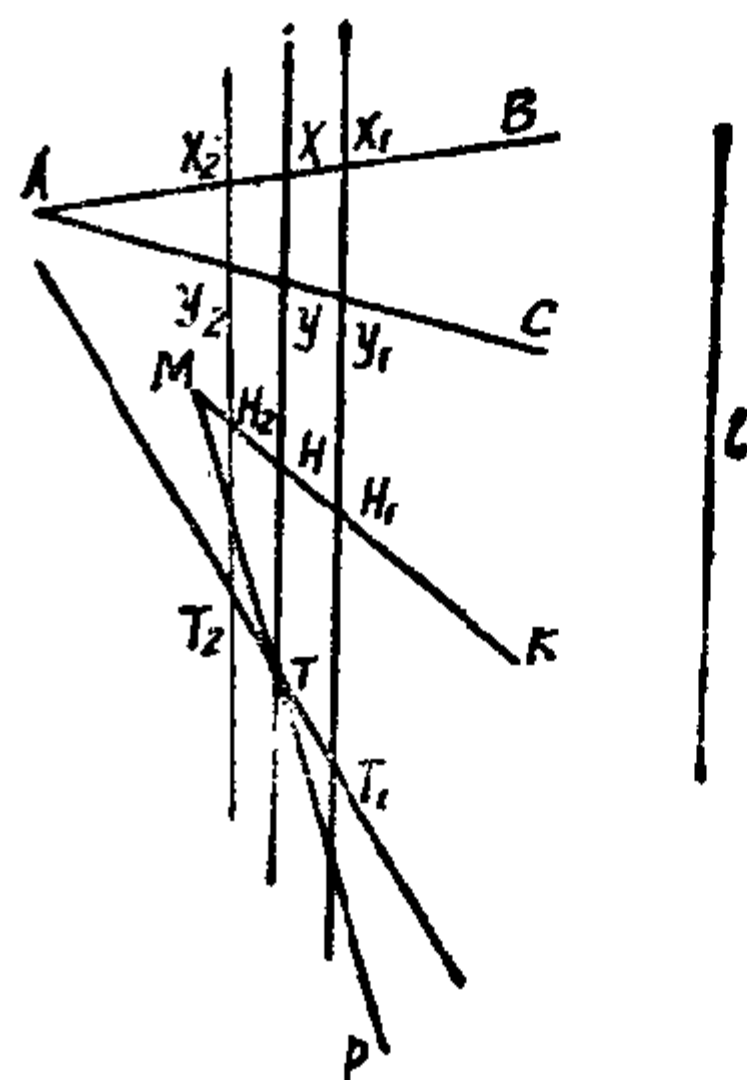


图6.54

作 $[AB]$ 和圆 $(A, |AD|)$ 和圆 $(B, |BC|)$ (图6.53)。线段 DC 的端点分属于这两个圆和 $(\widehat{AB}, DC) = \alpha$ 。在 $(A, |AD|)$ 上取任意点 $D_1, D_2, D_3, \dots$, 并作线段 $D_1C_1, D_2C_2, D_3C_3, \dots$, 它们等于给定长度并与 (AB) 构成给定角。而点 $C_1, C_2, C_3, \dots$ 位于某个圆上。过 $C_1, C_2, C_3, \dots$ 点集的任意三点作圆, 并进行相应的量度后, 可得如下假设: 点 $C_1, C_2, C_3, \dots$ 的集合属于由 $(A, |AD|)$ 矢量 $\vec{AA'}$ ($\widehat{A'AB} = \alpha$ 与 $|A'A| = DC$)所获得的 (A', R') 。

于是, $c = (A', R') \cap (B, |BC|)$ 。此命题易证。

例 5 已给角 BAC , KMP 和直线 l (图6.54)。直线 $a \parallel l$, $[XY] = a \cap \angle BAC$ 和 $[HT] = a \cap \angle KMP$ 。若 $|HT| = 2|XY|$, 试作 a 。

作数根平行直线 l 的直线, 这些直线与 $\angle BAC$ 相交而割成 $X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3, \dots$ 且与 $[MK)$ 相交于 $H_1, H_2, H_3, \dots$ 。在这些直线上作点 $T_1, T_2, T_3, \dots$, 使 $|H_1T_1| = 2|XY|, |H_2T_2| = 2|X_2Y_2|, \dots$ 之后, 我们看到 $T_1, T_2, T_3, \dots$ 属于同一直线, 此直线与 $[MP)$ 的交点给出了未知点 T 。于是, 证明此假设使得

所求题的解。

例 6 有居民点A和B,它们位于一条两岸平行的运河的两边(图6.55).现需建造一座桥XY.问:桥应设在何处才能使折线AXYB的长度为最短?

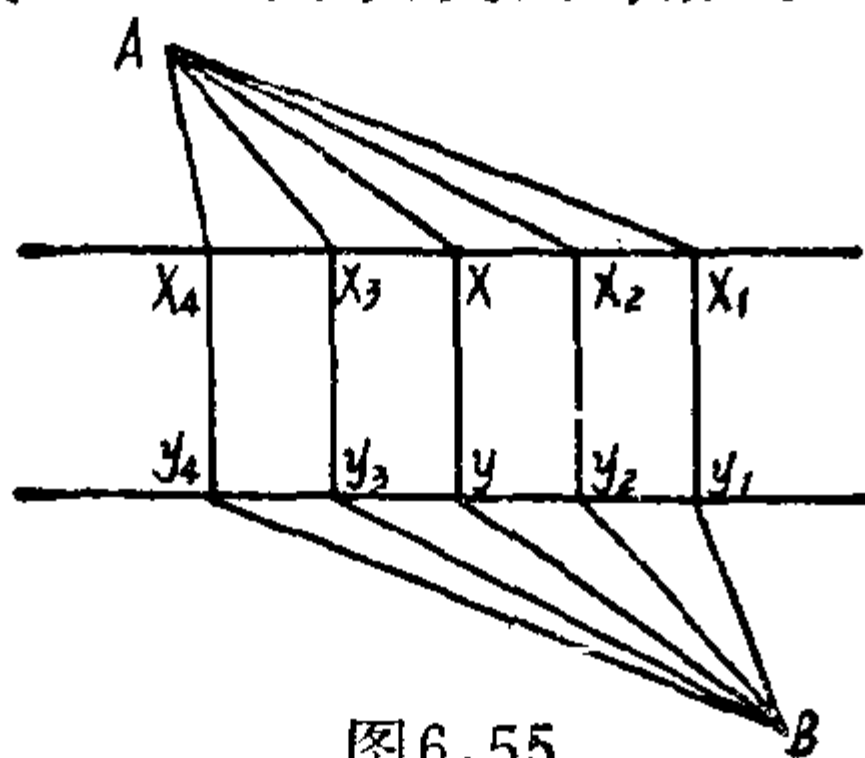


图6.55

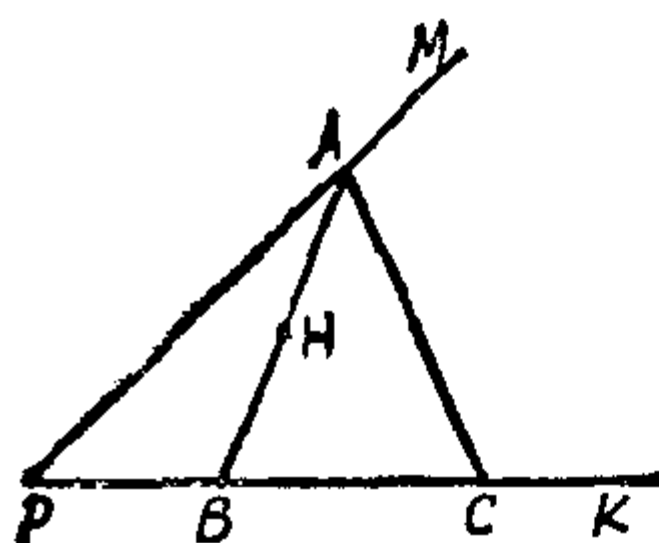


图6.56

作数条线段 $X_1Y_1, X_2Y_2, \dots$, 垂直于河的两岸. 经挑选, 找到使折线AXYB长度为最短的一根线段. 我们看到, $(AX) \parallel (YB)$. 这只是假设, 若 (AX) 和 (YB) 事实上具有这些性质, 则此题化为作出这样的平行线 (AX) 和 (BY) , 使 $[XY]$ 垂直于运河两岸. 但是, $(AX) = \vec{a}(BY)$, 其中 $\vec{a} = \vec{XY}$. 作 $B_1 = \vec{a}(B)$. 显然 $X = (B_1A) \cap (X_1X_2)$.

轴对称法.此法的本质在于: 假设问题预先被解决, 此时以某图形 Φ 关于某直线 l 对称的图形 Φ_1 来代替它. 然后, 图形 Φ_1 应满足图形 Φ 的条件, 结果后问题可以用某个已知方法加以解决的新问题. 在个别情况下, 有必要转换为问题的初始条件.

例 1 已给锐角 $\angle MPK$ (图6.56). 点H在角内, $c \in [PK)$. 若 $B \in [PK), A \in [PM), H \in [AB]$ 和 $|AB| = |AC|$. 试作 $\triangle ABC$.

如果定出 $[PM)$ 上A的位置, 则此题可解. 为了寻找解答, 我们作任意等腰 $\triangle BAC$ ($|AB| = |AC|$), 在 $[AB]$ 上任取H, 并过A作任意 (AM) . 点 $P = (BC) \cap (AM)$. 用量角器量度图6.56上的一切角后, 可以看到: $\widehat{MPK}, \widehat{PAB}$ 和 $\widehat{BAC}$ 之间存在着一定的关系, 这就是:

$$2\widehat{MPK} = 2\widehat{PAB} + \widehat{BAC} = 180^\circ. \quad (6.22)$$

但如何利用这假设寻找解题途径呢?怎样证明其正确性呢?

由等式(6.22)得 $2\widehat{PAB} + \widehat{BAC} = 180^\circ - 2\widehat{MPK}$. 显然, 若 $H' = S_{(PM)}(H)$; 则 $\widehat{H'AC} = 2\widehat{PAB} + \widehat{BAC} = 180^\circ - 2\widehat{MPK}$ (图6.57). 于是得到假设. 末知点A属于以 $H'C$ 为弦且张角为 $180^\circ - 2\widehat{MPK}$ 的圆弧上. 命题证毕.

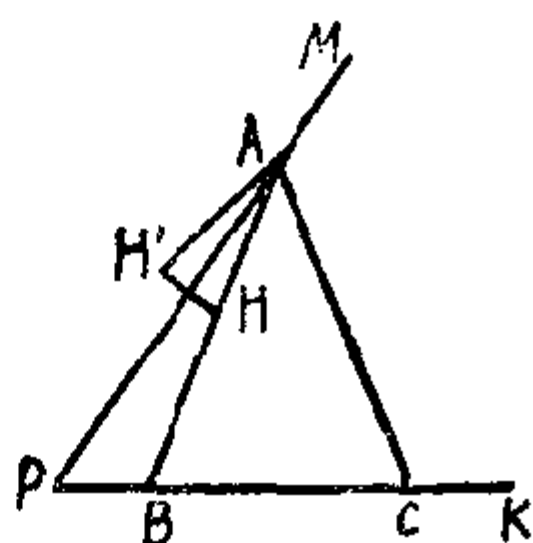


图6.57

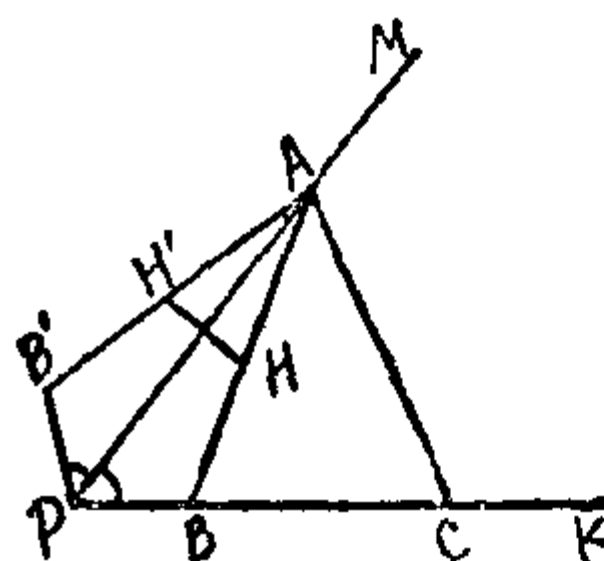


图6.58

因为等式(6.22)中包含 $2\widehat{MPK}$, 所以作出 $B' = S_{(PA)}(B)$ (图6.58). 显然, $\widehat{PB'A} = \widehat{PBA} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{ACP}$. 因此 $\widehat{B'AC} = 360^\circ - \widehat{PB'A} - \widehat{B'PC} - \widehat{PCA} = 360^\circ - (180^\circ - \widehat{ACP}) - 2\widehat{APK} - \widehat{PCA} = 180^\circ - 2\widehat{APK}$. 于是命题得证.

为找到点A, 我们作 $H' = S_{(PA)}(H)$; 任意 $\triangle CH'A'$, 其中 $\widehat{H'A'C} = 180^\circ - 2\widehat{MPK}$; $\triangle CH'A'$ 的外接圆 ω ; 点 $A = [PM) \cap \omega$.

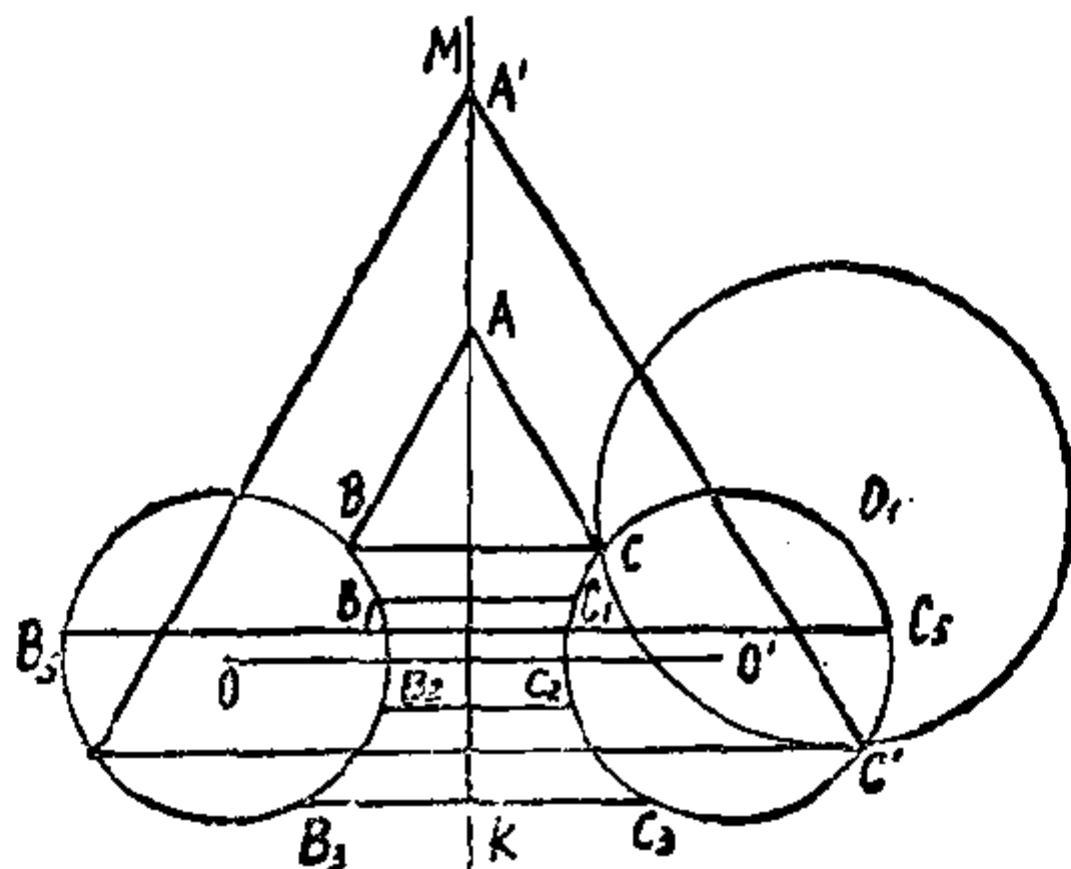


图6.59

例2 给定 (MK) ; 圆 (O, R) 和 (O_1, R_1) 属于关于 (MK) 的不同半平面(图6.59). 试作一正 $\triangle ABC$, 使得 $A \in (MK)$, $B \in (O, R)$, $C \in (O_1, R_1)$ 和 $(BC) \perp (MK)$. 显然 $B = S_{(MK)}(C)$.

在 (O, R) 上任取几点 $B_1, B_2, B_3, \dots$, 并作 $c_1 = S_{(MK)}(B_1)$, $c_2 = S_{(MK)}(B_2)$, $c_3 = S_{(MK)}(B_3)$, $\dots$. 不难看出, $c_1, c_2, \dots$ 属于 $(O', R') = S_{(MK)}((O, R))$. 显然, $c = (O', R') \cap (O_1, R_1)$.

例3 给定梯形 $ABCD$, $BAD = 90^\circ$. 试在 $[AD]$ 上作出一点 X , 使得和 $|BX| + |XC|$ 为最小.

在 $[AD]$ 上任取几点 $X_1, X_2, \dots$ (图6.60). 作其长度等于折线 BX_1C , BX_2C 的线段 $BC_1, BC_2, \dots$. 在 $[AD]$ 上经挑选找到点 X , 使 $|BX| + |XC|$ 为最小. 我们看到, 长度等于 $|BX| + |XC|$ 的线段 BC' 的端点 C' 属于 (DC) . 经量度, 可作如下假设: $c' = S_{(AD)}(C)$ 和 $X = (BC') \cap (AD)$. 为证此假设, 须考虑 $\triangle BX'C'$ (X' 是线段 AD 上的任意点).

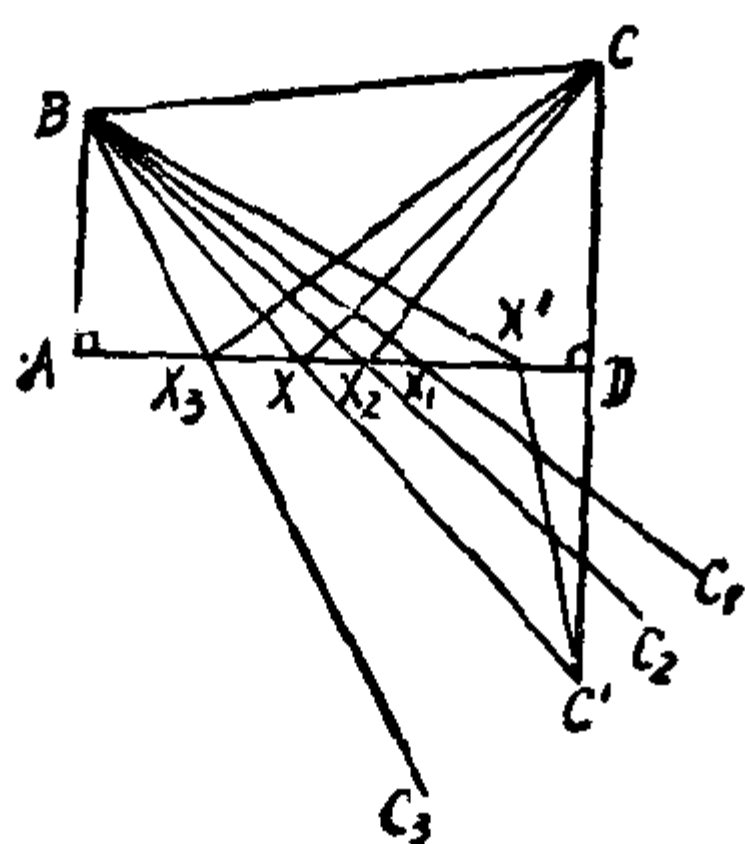


图6.60

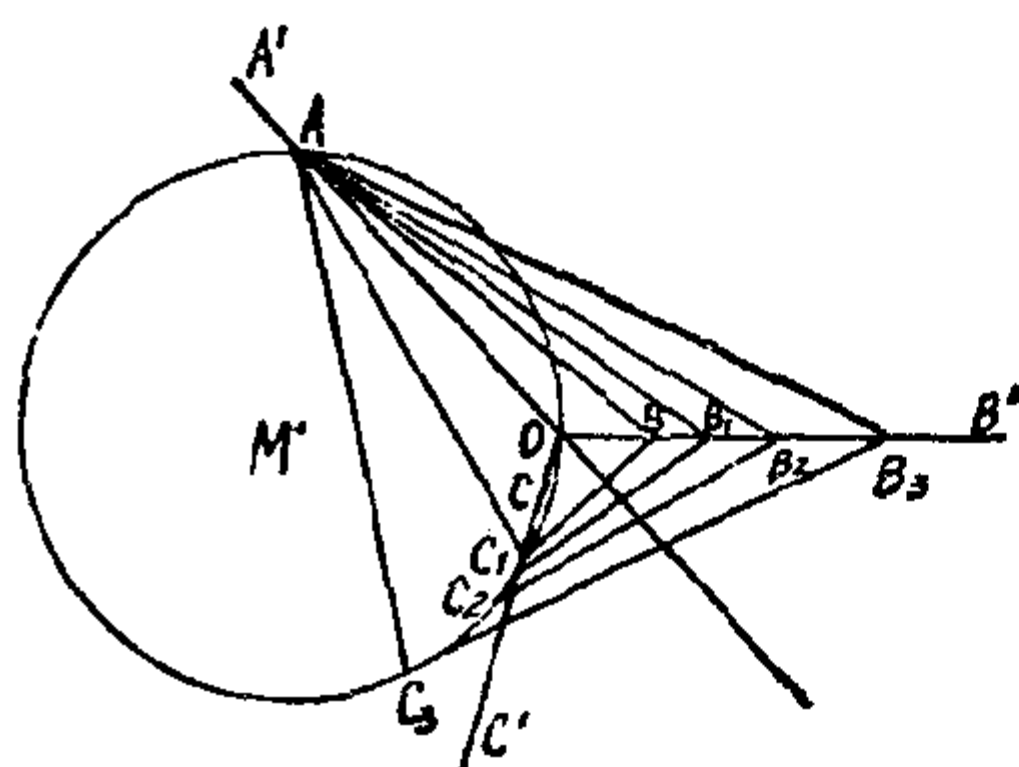


图6.61

例4 给定 $[OA')$, $[OB')$, $[OC')$ 和 $A \in [OA')$. 若 $B \in [OB')$, $C \in [OC')$ 和 $\triangle ABC$ 的角平分线属于 $[OA')$, $[BB')$, (OC) . 试作 $\triangle ABC$.

在 $[OB')$ 上任取几点 $B_1, B_2, \dots$ (图6.61)作: $a_1 = S_{(A'O)}((AB_1))$, $a_2 = S_{(A'O)}((AB_2))$, $\dots$ 和 $b_1 = S_{(B'O)}((AB_1))$,

$b_2 = S_{(BO)}((AB_2))$, ... 得 $c_1 = a_1 \cap b_1$, $c_2 = a_2 \cap b_2$, ...

注意到, $c_1, c_2, \dots$ 属于圆的某一曲线. 过 $c_1, c_2, \dots$ 构成的集合的任意三点作圆后, 可得假设: $c_1, c_2, \dots$ 属于过 A, O , 和圆 ω . 且圆心 M 属于 (OB) . 于是, 得出未知点 $c = \omega \cap [OC')$ 的假设, 现在剩下的问题是只要证明 c 实际上属于 ω .

为此, 我们作任意圆 (M, R) (图6.62). 过 M 作任意 (MO) ($O \in (M, R)$). 在 (M, R) 上作任意 A 和 K . 作 $\angle OAC \cong \angle KAO$ 和 $B = (MO) \cap (AK)$. 显然, $|KO| = |OC|$ 和 $\widehat{KOB} = \widehat{BOC}$. 因此, $\triangle KOB = S_{(BO)}(\triangle OBC)$. 由此得出: $\widehat{KBO} = \widehat{OBC}$ 和 $\widehat{OCB} = \widehat{OCA}$.

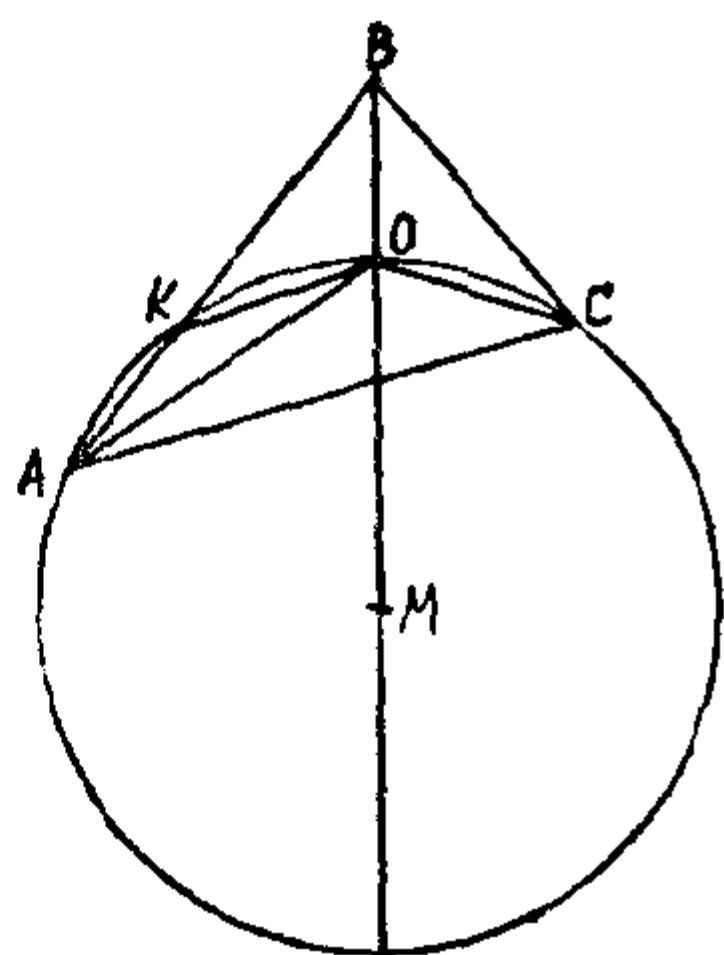


图6.62

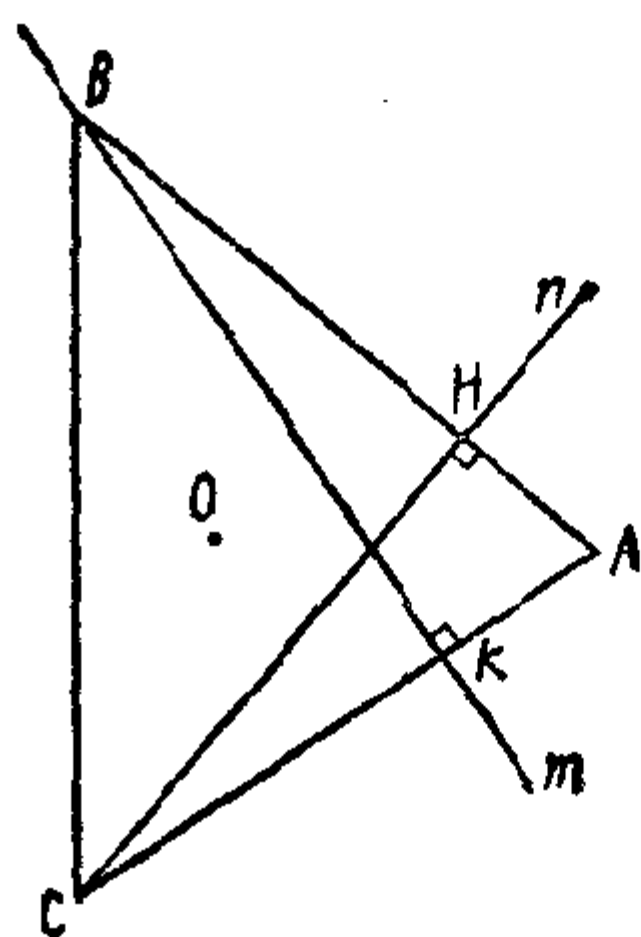


图6.63

例 5 在平面上给定直线 m 和 n (图6.63) 及点 O . 试作 $\triangle ABC$, 使其高 $[CH]$ 属于 n , 高 $[BK] \subset m$, 而 O 是外接圆的圆心.

过 O 作 $m_1 \parallel m$, $n_1 \parallel n$ (图6.64). 显然, $C = S_{m_1}(A)$, $B = S_{n_1}(A)$. 因此, 此题的解化为在 n 上寻找点 C . 在 n 上任取几点 $C_1, C_2, C_3, \dots$. 作 $A_k = S_{m_1}(C_k)$ 和 $B_k = S_{n_1}(A_k)$, 式中 $k = 1, 2, 3, \dots$. 我们看到, 点 B_k 属于一条直线 p . 而未知点 $B = m \cap p$. 于是得如下假设: 为了在 M 上寻找 B 需要作 $n' = S_{m_1}(n)$ 和 $n'' = S_{n_1}(n')$. 于是 $B = n'' \cap m$. 由 $A = S_{m_1}(C)$ 和 $B = S_{n_1}(A)$ 得假设为真.

旋转法。此法在于，任意已知或未知图形围绕某一中心转动某个角度后，对所研究的图形分析化为对更简单图形的分析。然后作逆旋转，便得未知图形，旋转中心和旋转角选择应使由于旋转而把同一数值元素重合或使它们相互位置关系更为简单。

例1 给定 $\triangle ABC$ ，试在 $[AB]$ 和 $[AC]$ 分别作出点 P 和点 M ，使 $|BP| = |PM| = |MC|$ (图6.65)。

显然，存在一点 O ，使 $[BP] = R_{\widehat{BAC}}([CM])$ 。在等腰 $\triangle OPM$ 中，角 POM 等于角 BAC 。因此 $|OP| : |MP| = k$ 。但 $|PM| = |BP|$ ，由此 $|OP| : |BP| = k$ 。因而，点 P 是 $[AB]$ 与圆（与 O 和 B 的距离之比等于 k 的点集）的交点。

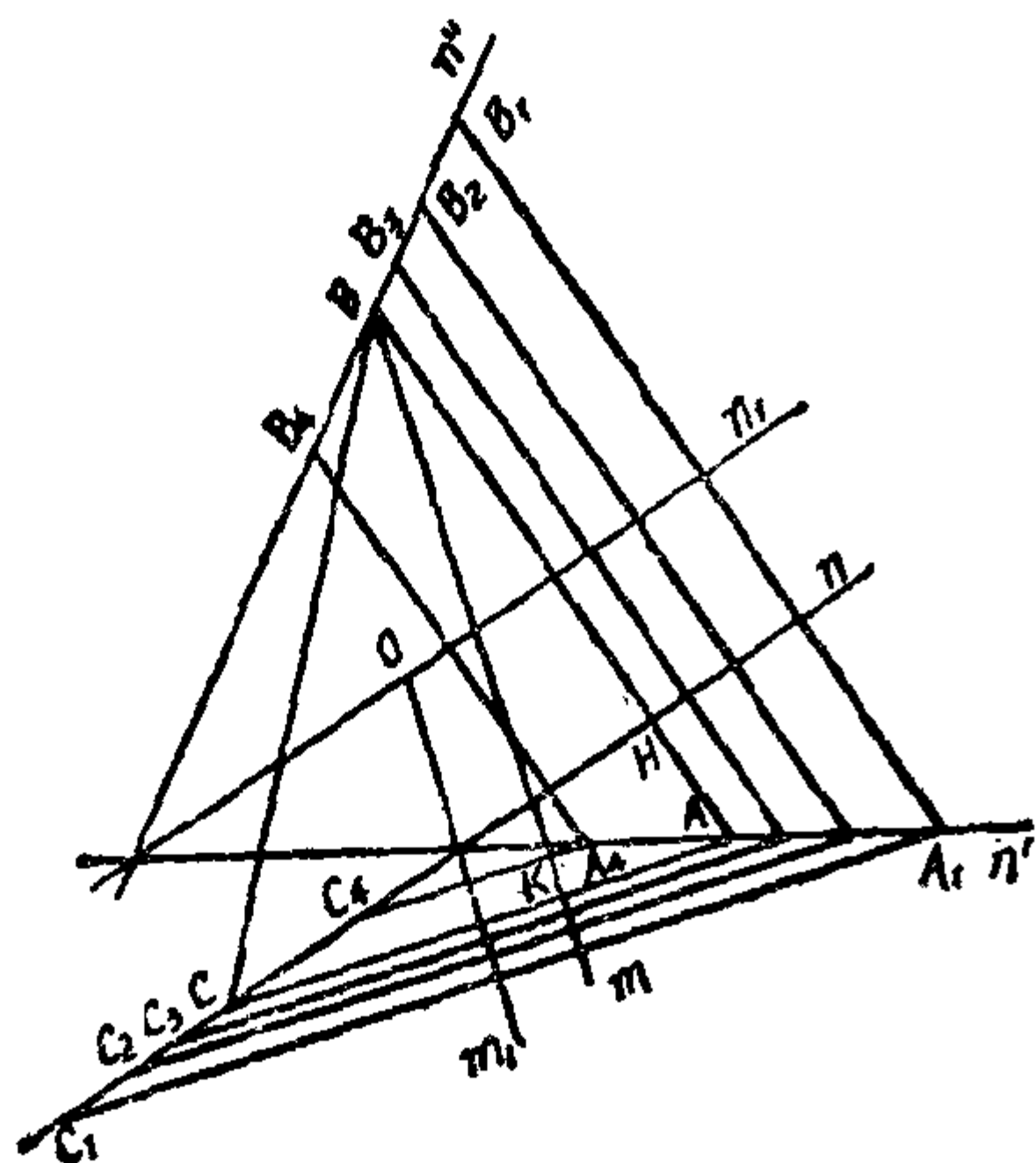


图6.64

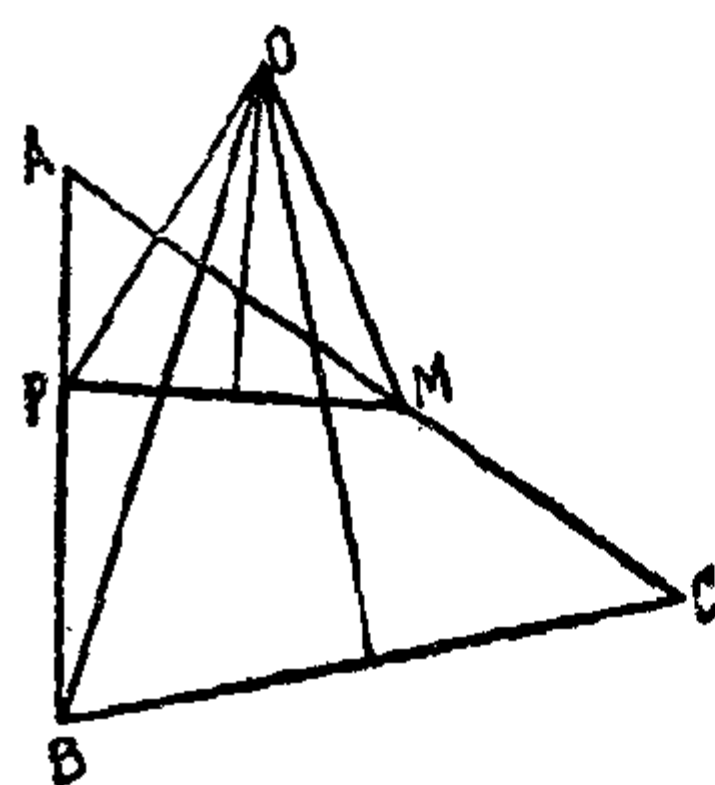


图6.65

例2 试作一正 $\triangle ABC$ ，使得它的顶点 A 和 B 分别在切点为 P 的两个等圆 (M, R) 和 (K, R) 上。同时，与两圆的公切点同在一一条直线上。且使得第三顶点 C 在两给定圆的外公切线 (DE) 上 (图6.66)。

在 (M, R) 上取几个点 $A_k (k=1, 2, \dots)$, 且在 (K, R) 上作点 B_k 使 $\overrightarrow{A_k P} = \overrightarrow{P B_k}$. 作正 $\triangle A_k B_k C_k$ 的集合. 注意, 点 C_k 属于某一圆(假设!).

用工具作图和量测可证此假设, 并用另一假设来代替它, 即: 点 C_k 属于直径为已知的相切圆直径的 $\sqrt{3}$ 倍、其圆心在 (M, K) 的垂线上的圆. 此假设的正确性从图形上不难得出.

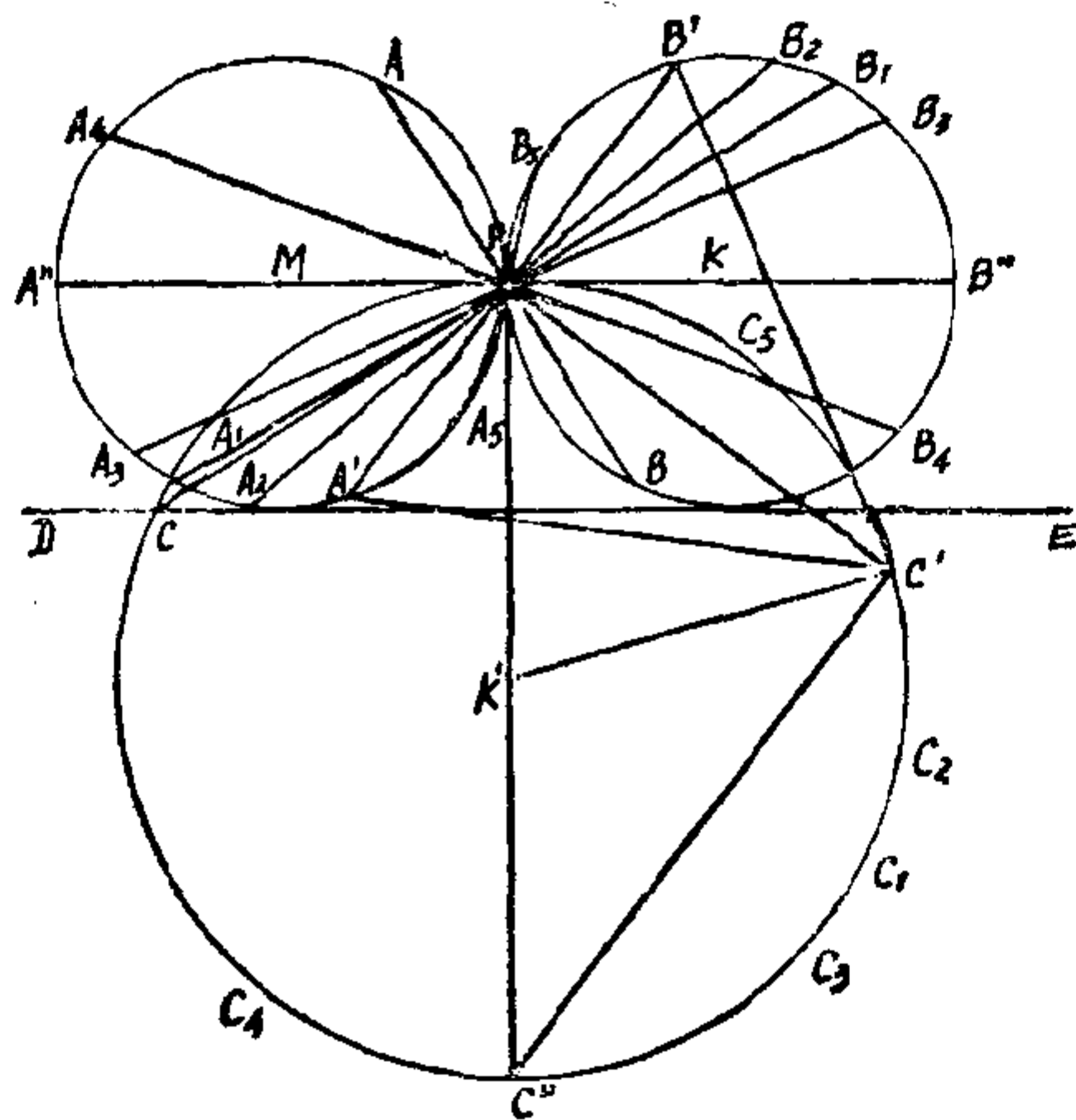


图6.66

于是, 未知 $\triangle ABC$ 的作图可按下面次序作出: 围绕 $P[PK]$ 旋转 90° 后, 在它的像上作出 $[PK']$, 使 $|PK'| = \sqrt{3} |PK|$. 作圆 $(K', |K'P|)$. 未知点 $C = (DE) \cap (K', |K'P|)$.

位似法和相似法. 将给定问题化为作与未知图形位似(相似)的图形的问题, 也就是略去表征待求图形中的任何一条件, 然后作出辅助图形进行相似变换, 使得变换后的图形满足被略去的条件, 从而得出待求图形.

例1 试对一给定梯形 $ABCD$ (图6.67), 作穿过它平行于底的线段 FH , 使得 FH 被对角线分成等长线段 FK, KM 和 MH .

先查明此题能有几个解. 为此, 过对角线 BD 和 AC 的交点 O 作 $[F_0H_0] \parallel [BC]$. 显然, $\triangle OH_0D \sim \triangle BCD$, $\triangle BCA \sim \triangle F_0OA$. 因此, $|F_0O| = |OH_0|$.

再作几条平行于梯形底的线段 FH . 随着 (F_0H_0) 和 (FH) 之间的距离增加, 等长的 $|FK|$ 和 $|MH|$ 将从 $|OH_0|$ 减小到零, 而 $|KH|$ 将从零增加到梯形一个底的长度. 因此, 线段 FH 存在两种情况使得 $|FK| = |KM| = |MH|$. 这两种情况在图 6.67 中对应于线段 F_1H_1 和 F_2H_2 . 由此可知, $[M_1C]$ 是 $\triangle K_1H_1C$ 的中线. 但 $\triangle CK_1H_1 \sim \triangle CAD$. 因此 $E \in (M_1C)$ ($\vec{AE} = \vec{ED}$). 现在很明显, $M_1 \in (F_1H_1)$ 和 $M_1 = (CE) \cap (BD)$.

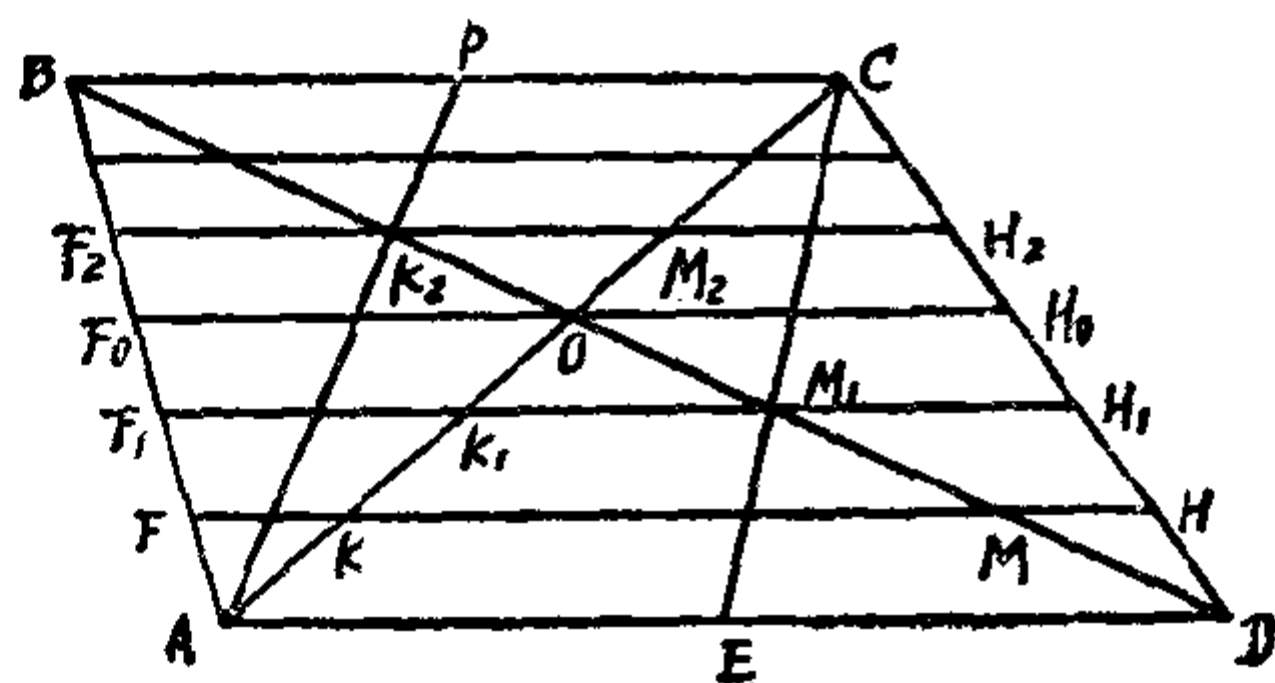


图 6.67

类似地讨论, 可得出: $K_2 \in (F_2H_2)$, $K_2 = [DB] \cap [AP]$ ($\vec{BP} = \vec{PC}$).

例2 试根据一 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心 O , 中线交点 K , 及其高 AH 的垂足 H , 作出此三角形.

因为 $\angle OMH = 90^\circ$, 所以中线 AM 的底 M 在直径为 OH 的圆 ω 上(图 6.68). 在 ω 上试取若干个点 $M_1M_2 \dots$ 且作出对应于它们的中线 $M_1A_1, M_2A_2 \dots$ (之所以能作出, 因为 $|MK| : |KA| = 1:2$) 我们看到, $A_1, A_2, \dots$ 属于圆 $\omega_1 = H_{K_2}(\omega)$. 至此, 作未知 $\triangle ABC$ 的步骤就明显了(图 6.69).

作 ω ; $D' = H_{kk}(D)$ 为圆 $\omega_1 = H_{kk}^2(\omega)$ 的中心. 三角形 ABC 的

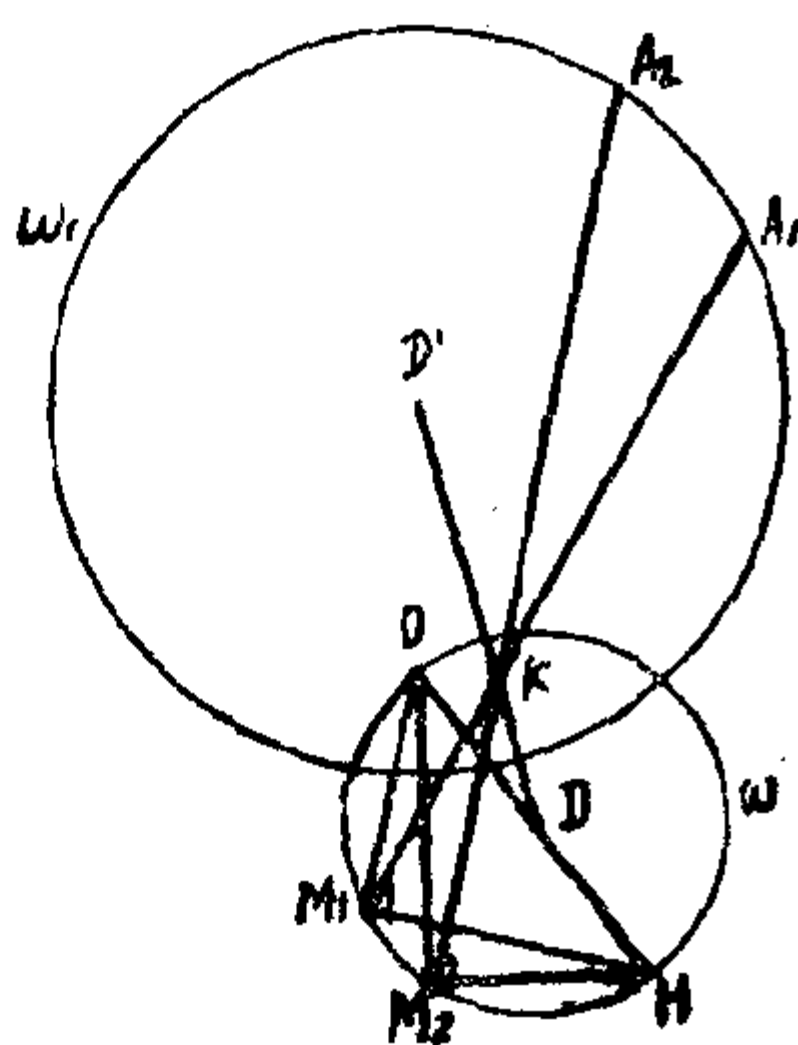


图6.68

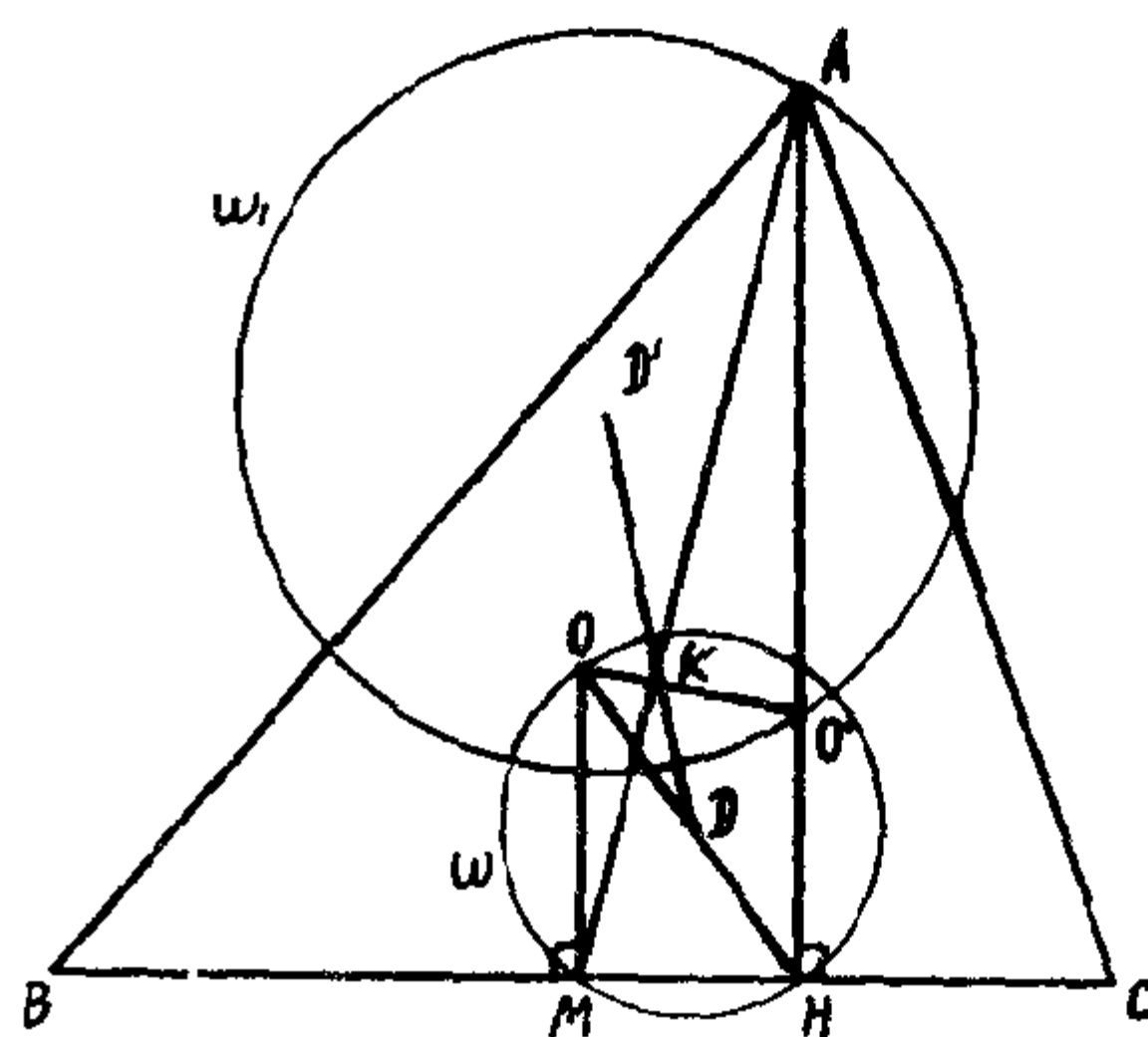


图6.69

未知顶点 A 属于 ω_1 . 因为 $[HA] = H_{kk}^2([OM])$, 所以得 $O' = H_{kk}^2(O)$. 点 $A = \omega_1 \cap (O'H)$. 下一步作图是很明显的.

练习

平移法

1 已给点 A 和 B 及其之间的直线 $(MK) \parallel (PH)$. 在 (MK) 和 (PH) 之间沿给定方向作 $[CD]$, 使得 $|AC| + |CD| + |BD|$ 为最小.

2 证明: 如果四边形 $ABCD$ 中, $2|MN| = |AB| + |CD|$ ($\vec{AM} = \vec{MD}$, $\vec{BN} = \vec{NC}$), 则此四边形为梯形.

3 求作平面到两已知直线的距离之和为已知量的点集.

4 已知四边形两对边中点连线, 对角线之间的夹角和对角线与一边之间的夹角. 试作出此内接四边形 $ABCD$.

5 证明: 如果三角形两角平分线相等, 则此三角形为等腰三角形.

6 已知一四边形 $ABCD$ 的各边及 $|PK|$ ($\vec{AP} = \vec{PD}$, $\vec{BK} = \vec{KC}$)

试作此四边形。

轴对称法

7 证明：关于不相重合的平行直线，平面的轴对称之积是平移。

8 证明：关于平行不重合直线，空间的两次轴对称之积是平移。

9 证明：关于垂直相交的直线 a 与 b 空间的两次轴对称之积，是关于垂直这两直线并过它们交点的直线 C 的轴对称。

10 证明：若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 属于同一平面， $|AB| = |A_1B_1|$ ， $|BC| = |B_1C_1|$ 和 $|CA| = |C_1A_1|$ ，则，或由轴对称，或由两个轴对称轴之积，或三个轴对称之积可归 $\triangle ABC$ 映射到 $\triangle A_1B_1C_1$ 。

11 关于平行线 a, b, c ，平面的轴对称之积是轴对称。

12 证明：相对于互相垂直在 O 点相交的 x, y, z 线，空间对称轴之积是空间的恒等变换。

13 证明：关于相交于 O 点的直线 a, b, c 的平面轴对称之积是轴对称。

14 已给一锐角三角形 ABC 。试作出一点 X ，使得四边形 $ABCX$ 是圆内接和圆外接四边形。

15 试作出四边形 $ABCD$ ，若已知四边形的各边， $[AC)$ 是角 A 的平分线。

旋转法

16 证明：平面旋转 R_α° 是关于同一平面上相交于点 O 且夹角等于 0.5α 的两直线的平面的两个对称轴之积。

17 证明：旋转 R_α° 射线 AB 映射到射线 A_1B_1 ，证明 $[A_1B_1)$ 和 $[AB)$ 之间的夹角为 α 。

18 证明：若 $[A_1B_1)$ 同 $[AB)$ 构成角 α ，则旋转 α 角，可将

$[A, B_1)$ 映射到 $[AB)$ 。

19 证明：按同一方向，具有中心 O_1 与 O_2 和旋转角为 α 及 β 的两个平面旋转之积是旋转角为 $\alpha + \beta$ 的旋转。若 $\alpha + \beta \neq 360^\circ$ 。

20 已给两个同心圆及圆外的一点 A ，试作出正 $\triangle ABC$ 使其顶点 B 与 C 在两圆上。

21 试作出内接于一平行四边形的新的平行四边形，使其边长的比为给定的比，对角线的夹角为给定的角。

22 证明：空间的中心对称将平面映射到平行于它的平面。

23 证明：关于垂直的 x 和 y ($o = x \cap y$)，平面的轴对称之积是关于 O 的中心对称。

24 证明：关于 O 和 O_1 ，空间中心对称的之积是矢量 $\vec{a} = 2\vec{OO_1}$ (即沿方向 $\vec{OO_1}$ 移动 $|2\vec{OO_1}|$ 距离的平移)

25 关于 O, O_1, O_2 ，空间中心对称的之积是关于 O' 的中心对称 ($\vec{O_2O'} = -\vec{OO_1}$)。

26 依次关于平行四边形四顶点 A, B, C, D 的空间四个中心对称的之积是恒等变换。

位似法和相似法

27 证明：位似 $H_{O_1}^{k_1}$ 和 $H_{O_2}^{k_2}$ 的合成是位似 H_O^k ($k = k_1 \cdot k_2$)，如果 $k \neq 1$ ；是平移，如果 $k = 1$ 。

28 证明：若 $H_{O_2}^{k_2} \cdot H_{O_1}^{k_1} = H_{O_3}^{k_1 k_2}$ ，则 $O \in (O_1 O_2)$ 。

29 已知 $\triangle ABC$ 的顶角 A ，高 AH 和 $|AC| : |AB|$ ，试作此三角形。

30 证明：连接锐角三角形两高垂足的线段，截得的三角形与原三角形相似。

31 已给角度和其内的一点 M ，试过 M 作一直线使得由角的两边截得线段被 M 分成 $2:3$ 之比。

杂题

32 已给立方体 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

1) $[A_1 B_1] \rightarrow [DC]$ 如何移动?

2) $[C_1 C] \rightarrow [A_1 B_1]$ 是怎样两个位移的积?

3) 是否存绕轴的旋转, 使 $[ADD_1 A_1]$ 被映射到 $[CDD_1 C_1]$?

4) 试证: 当立方体绕 (AC_1) 旋转 120° 时, 立方体被映射到自身.

5) $\triangle A_1 BD \rightarrow \triangle CD_1 B_1$ 如何移动?

6) 指出某直线, 而绕该直线的旋转使 $\triangle DD_1 C_1 \rightarrow \triangle A_1 B_1 C_1$.

7) $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{A_1 M} = \overrightarrow{MD_1}$. 证明: $[A_1 D] = S_{(KM)}([D_1 B_1])$

8) 绕 $(B_1 D)$ 旋转能否有 $\triangle A_1 AB \rightarrow \triangle B_1 C_1 D_1$?

33 证明: 关于不重合的平行平面的两个对称之积是平移.

35 证明: 若棱锥 $[M-ABC]$ 和 $[K-ABC]$ 是位于相对于 (ABC) 的不同半空间内, $|AM| = |AK|$, $|BM| = |BK|$ 和 $|CM| = |CK|$, 则 $M = S_{(ABC)}(K)$.

36 证明: 若 $[D-ABC]$ 和 $[D_1-A_1 B_1 C_1]$ 的对应棱边相等, 则有将棱锥之一映射到另一棱锥的位移. 或者是关于平面的对称, 或者是关于平面的二个、三个或四个对称的积.

37 证明: 绕轴旋转是位移.

38 证明: 若 $[AB)$ 和 $[A_1 B_1)$ 不共向, 则存在将 $[AB)$ 映射到 $[A_1 B_1)$ 的绕轴的空间旋转.

39 在平面上给出五角形各边中点的五点, 试作出此五角形的顶点.

40 试根据斜边和直角边之和作出直角三角形.

41 试按照边 BC , 边 AC 与边 AB 之差及角 B 作出 $\triangle ABC$.

§6.9 投影图的基本作图

平行投影的基本性质. 如果投影线平行于直线 l , 而不平行于被投影的直线(线段), 则: 直线的投影是直线, 平行直线的投影是平行线; 平行线段投影长度之比等于其长度之比.

任意三角形可以认为是任意形状三角形的映象. 任意平行四边形可以认为是任意平行四边形的映象.

任意四边形及其对角线可以认为是三角棱锥的映象.

今后假设: 图形被映射到的平面为投影平面, 亦即一张纸, 教室黑板等的平面.

基本问题 解作空间图形的射影图的任何问题, 可归结为作若干个射影图的基本作图.

例1 试作出正六边形 $\Phi = [ABCDEF]$ 的映象(图6.70).

将 Φ 补成正 $\triangle MKP$. 取任意 $\triangle M_1K_1P_1$ 当作 $\triangle MKP$ 的映象(图6.71). $|MF|:|FE|:|EP| = 1:1:1$. 因此 $|M_1F_1|:|F_1E_1|:|E_1P_1| = 1:1:1$. 类似地, $|K_1C_1|:|C_1D_1|:|D_1P_1| = 1:1:1$ 和 $|M_1A_1|:|A_1B_1|:|B_1K_1| = 1:1:1$.

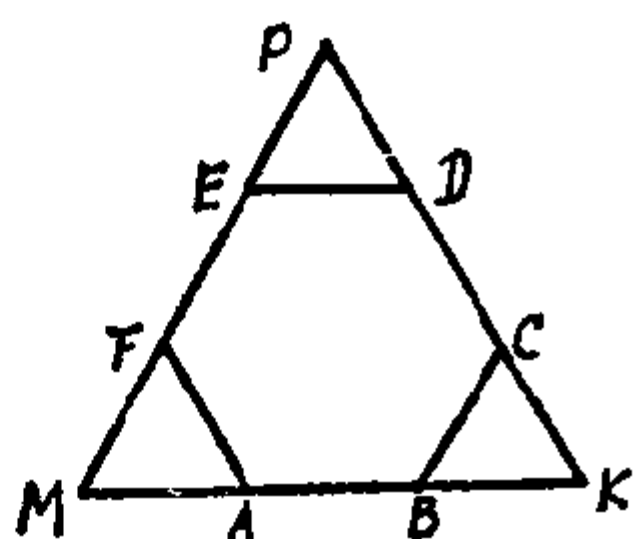


图6.70

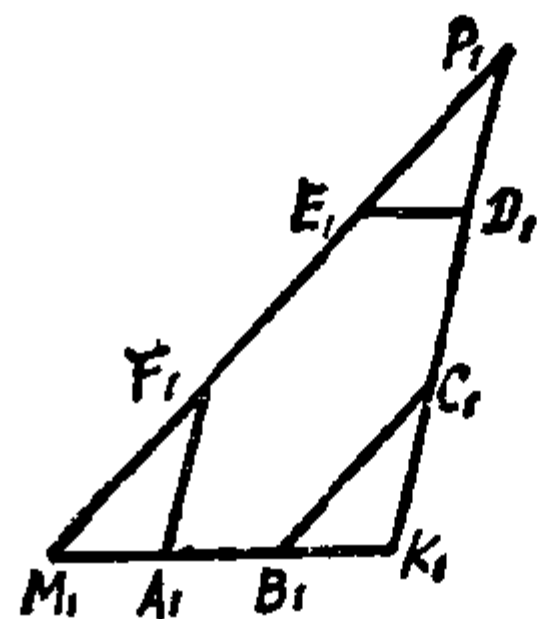


图6.71

例2 试作一平行六面体 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ 的映象

取任意四边形 AA_1DB 和它的对角线 AD 和 A_1B 一起当作 $[A'—ADB]$ 的映象(图6.72). 其他棱的映象根据平行投影的

基本性质作出。

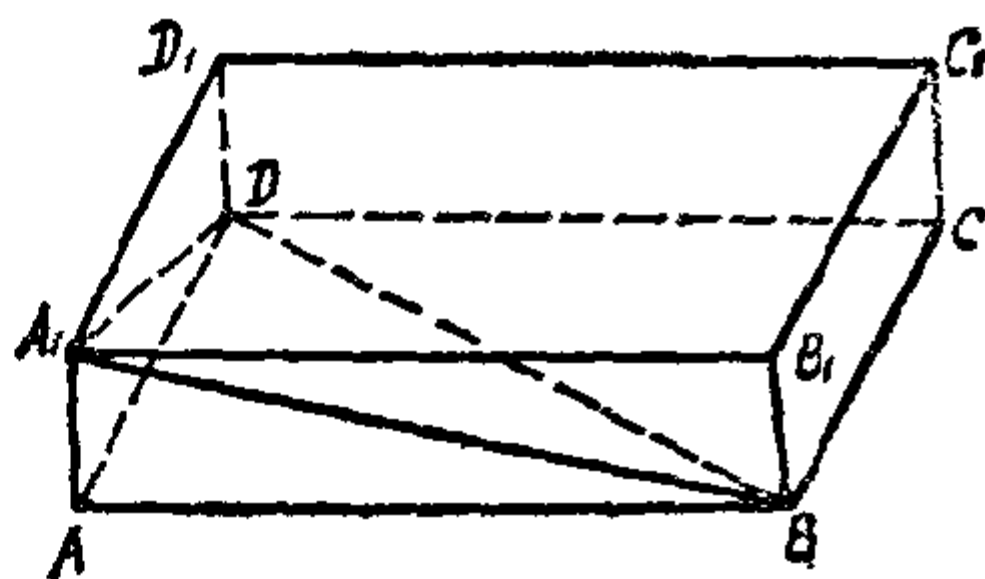


图6.72

例3 试作出 $[M-ABCD]^n$ 的映象。

作任意四边形 $AMCB$ 和它的对角线 AC 和 BM 是 $[M-ABC]$ 的映象(图6.73)。作平行四边形 $ABCD$ 是正方形 $ABCD$ 的映象。 $O = (AC) \cap (BD)$ 。 $[MO]$ 是 $[M-ABCD]^n$ 高的映象。

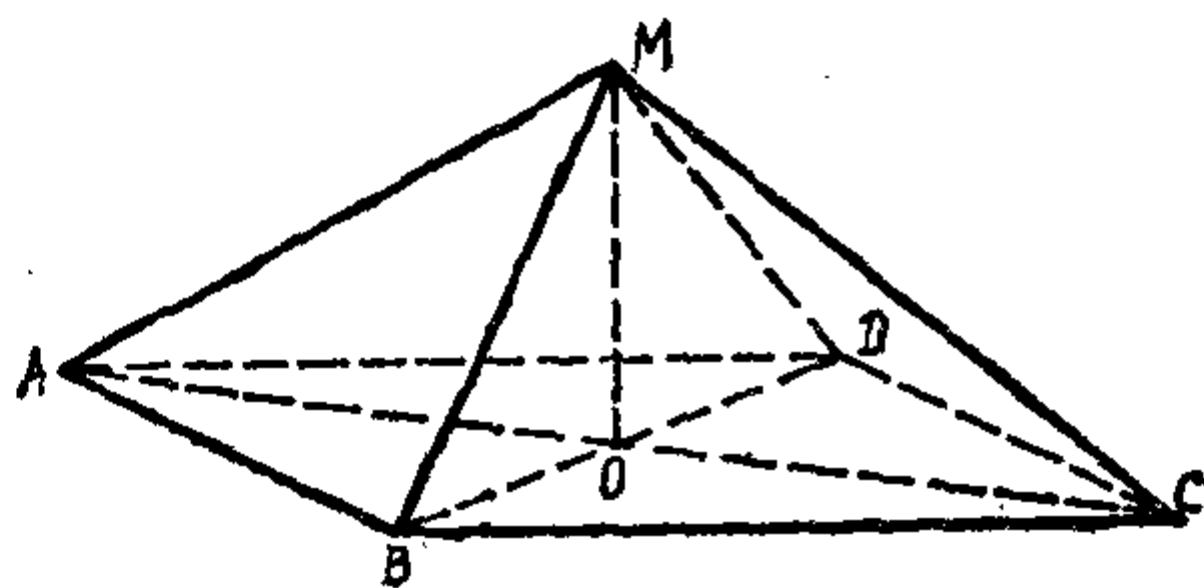


图6.73

例4 给定一 $\triangle ABC$, 它的 $|AB| = 6, |AC| = 10, \vec{BM} = \vec{MC}$
 $\widehat{BAK} = \widehat{KAC}, K \in [BC]$. 试作 $\triangle ABC$, $[AM]$ 和 $[AK]$ 的映象。

取任意 $\triangle A_1B_1C_1$ 当作 $\triangle ABC$ 的映象(图6.74). $\vec{BM} = \vec{MC}$
 $\Rightarrow |B_1M_1| : |M_1C_1| = |BM| : |MC| = 1:1. \widehat{BAK} = \widehat{KAC}$
 $\Rightarrow |B_1K_1| : |K_1C_1| = |BK| : |KC| = |AB| : |AC|$. 于是, $|B_1K_1| : |K_1C_1| = 6:10 = 3:5$.

例5 给定 $\triangle ABC$, 其中 $\widehat{ACB} = 90^\circ, |AC| = 2, |CB| = 3$.
 $[CH] \perp (AB), H \in (AB)$. 试作出 $\triangle ABC$ 和 $[CH]$ 的映象。

取任意 $\triangle A_1B_1C_1$ 当作 $\triangle ABC$ 的映象(图6.75). 在直角 $\triangle A$

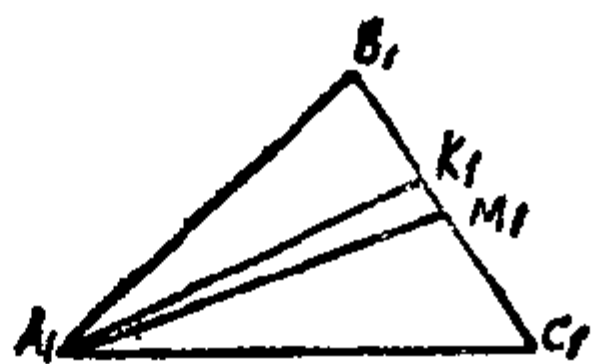


图6.74

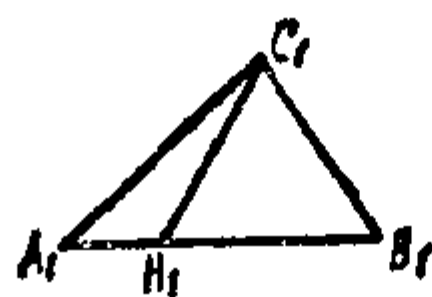


图6.75

CB 中, $|AH|:|HB| = |AC|^2:|CB|^2$. 因此 $|A_1H_1|:|H_1B_1| = |AH|:|HB| = 2^2:3^2 = 4:9$.

例6 在 $\triangle ABC$ 中, $|AC| = 20$, $|CB| = 13$, $|AB| = 21$, $H \in (AB)$, $[CH] \perp (AB)$. 试作出 $\triangle ABC$, $[CH]$ 和 $\triangle ABC$ 外接圆圆心 O 的映象(图6.76).

令 $\triangle A_1B_1C_1$ 是 $\triangle ABC$ 的映象. 因为 $|A_1H_1|:|H_1B_1| = |AH|:|HB|$, 所以本题化为求 $|AH|:|HB|$. 按海伦公式 $S(ABC) = 126$. 因为 $0.5|CH||AB| = 126$, 所以 $|CH| = 12$. 由 $\triangle AHC$ 得 $|AH| = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$. 因此 $|A_1H_1|:|H_1B_1| = 16:5$ (图6.77) 点 O 为 AC 和 AB 两线段中垂线的交点(图6.76). 如果 $[HK] \perp (AC)$, 则 $|A_1K_1|:|K_1C_1| = |AK|:|KC| = |AH|^2:|HC|^2 = 16^2:12^2 = 16:9$.

$[AC]$ 和 $[AB]$ 的中垂线分别平行于 (KH) 和 (CH) . 因此, 这些中垂线的映象分别平行于 (K_1H_1) 和 (C_1H_1) (图6.77).

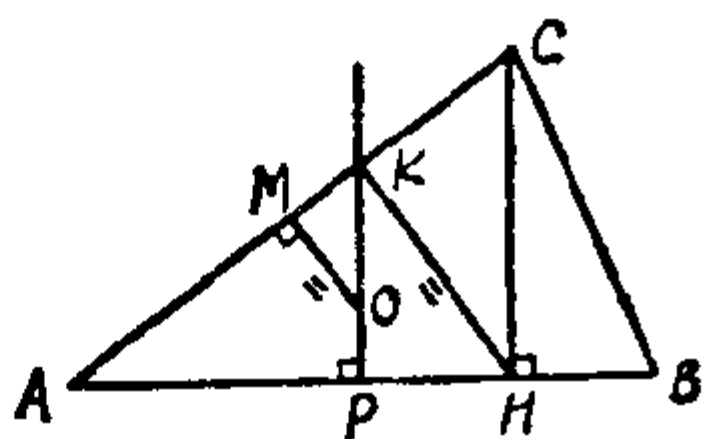


图6.76

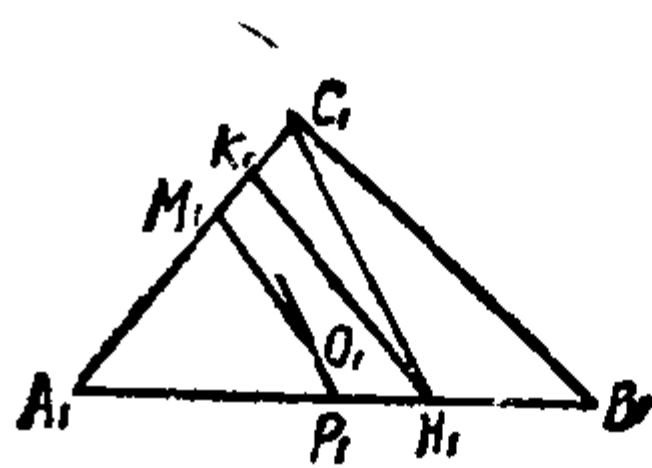


图6.77

例7 给定一立方体 $ABCD A_1B_1C_1D_1$ 的映射(图6.78). $M = (CD_1) \cap (C_1D)$, $\vec{AP} = 0.75\vec{AB_1}$. 试作出 $X = (PM) \cap$

(ABC) 。

点 $X \in (ABC)$ 和 $X \in \Sigma$ ，其中 Σ 为过 (PM) 的任意平面。因此，直线 l 和平面 Σ 交点 X 作图题可分两个步骤解出：1)作 Σ 与通过 l 的任何一个平面的交线 a ；2)作 $X = l \cap a$ 。

如果直线恰好属于所映象图形的任意两点 P 和 M 。那么首先作出这个图形为过 P 和 M 的平面所截的切面(假定这个切面的一个边属于直线 a)比较合理。

对于本题条件，已经映象出通过 (PM) 的立方体切面(矩形 AB_1C_1D)，切面的 AD 边属于 (ABC) 。因此未知点 $X = (PM) \cap (ABC) = (PM) \cap (AD)$ 。

例8 给定 $[D-ABC]$ 的映象(图6.79)。 $P \in \triangle ABD$ ， $K \in \triangle BCD$ ， $(PK) \nparallel (ABC)$ 。试作出 $X = (PK) \cap (ABC)$ 。

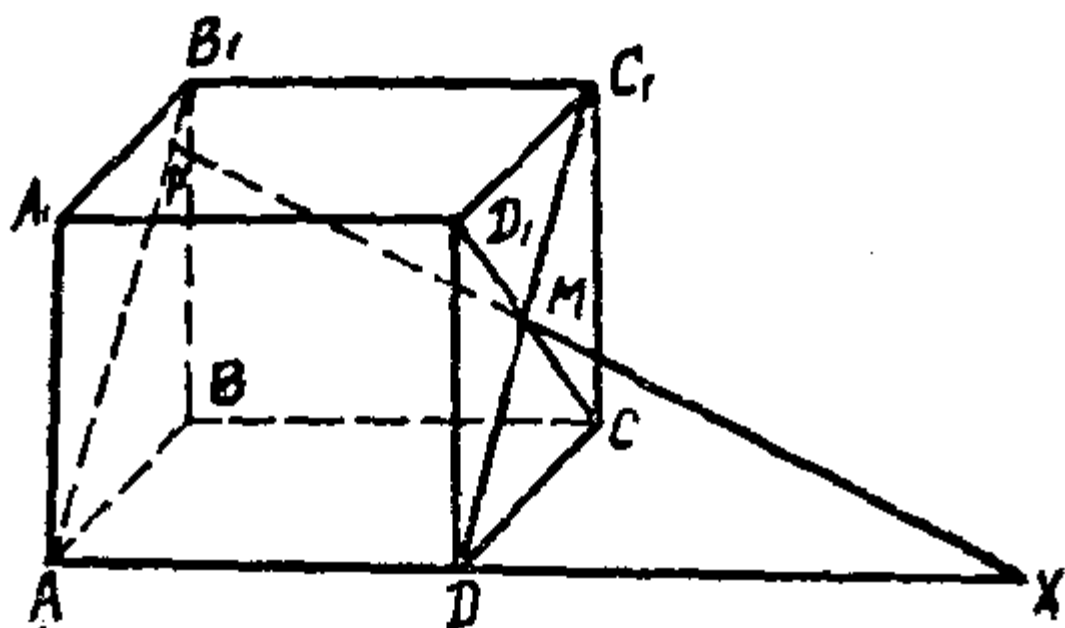


图6.78

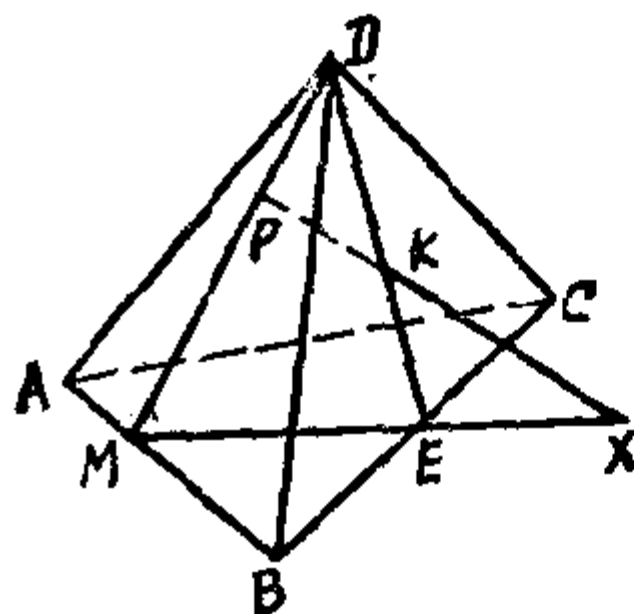


图6.79

在棱锥为过 (PK) 交 (ABC) 的平面所截的所有切面中，最简单的作图是由点 P ， K ， M 所决定的切面。因为 $(DP) \cap (AB) = M$ ， $(DK) \cap (BC) = E$ ， $(ME) \subset (ABC)$ 。未知点 $X = (MBD) \cap (PK)$ 。

例9 给定 $\Phi = [M-ABCD]$ 的映象(图6.80)。 $P \in \triangle ADM$ ， $K \in \triangle BCM$ 。试作出 $X = (MBD) \cap (PK)$ 。

作 $\triangle MP_1K_1 = \Phi \cap (MKP)$ ， $M_1 = (BD) \cap (P_1K_1)$ 。因为 $(MM_1) = (MBD) \cap (MP_1K_1)$ 和 $(PK) \subset (MP_1K_1)$ ，所以 $X = (MM_1) \cap (PK)$ 。

例10 给定 $\Phi = [ABCD - A_1B_1C_1D_1]$ 的映象. $P \in [B_1D]$ (图6.8). 试作出 $X = (AP) \cap (A_1B_1C_1)$, $Y = (AP) \cap (B_1BC)$, $Z = (AP) \cap (D_1DC)$.

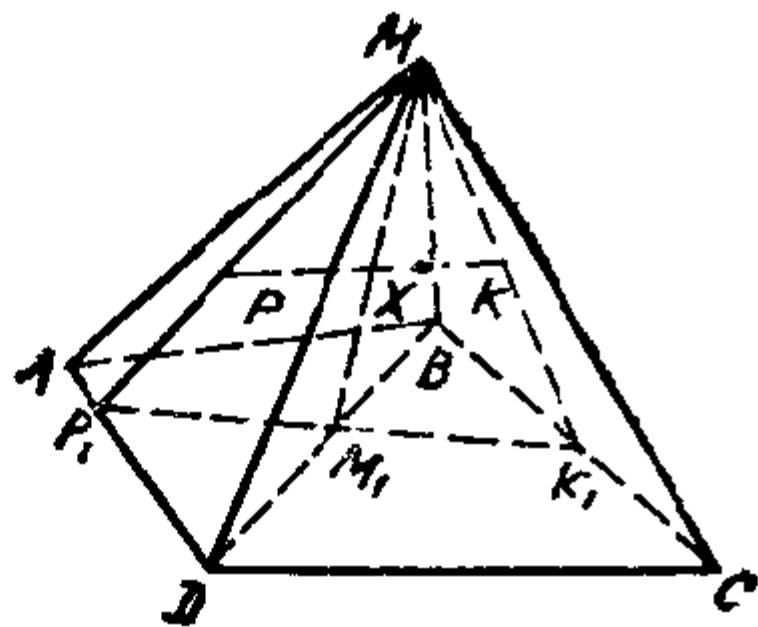


图6.80

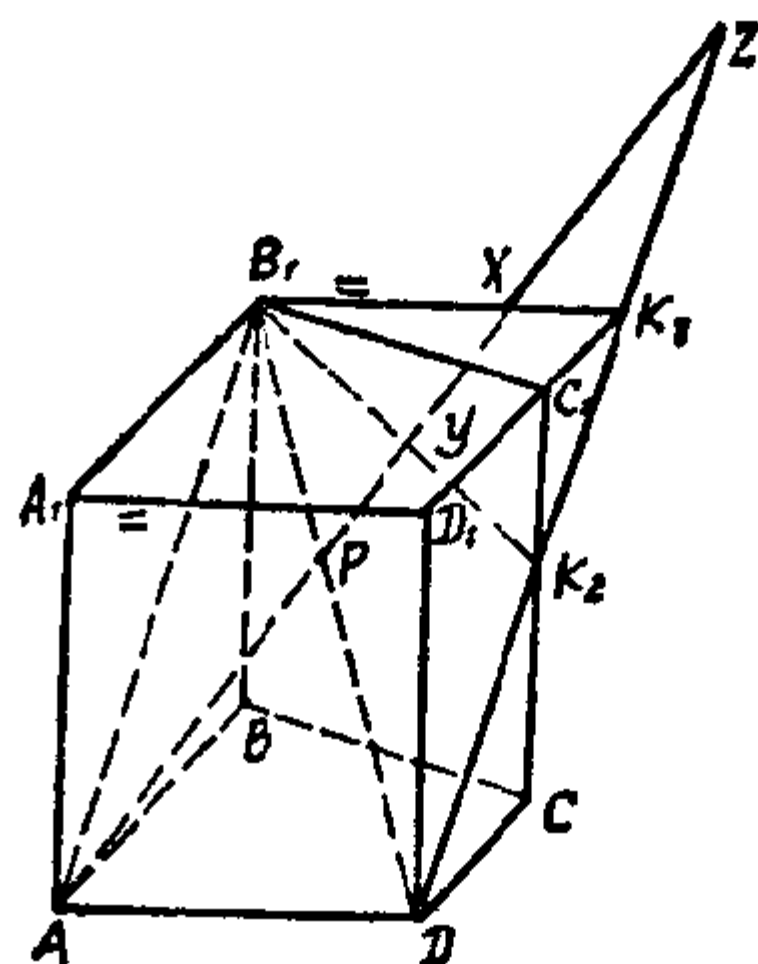


图6.81

因为 $X \in (A_1B_1C_1)$, 所以作出 $\Phi' = \Phi \cap (APB_1)$ 是合适的. 因为 $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$, 所以 Φ' 沿 $(B_1K_1) \parallel (AD)$ 直线过 $(A_1B_1C_1)$. $K_1 = (B_1K) \cap (C_1D_1)$, $K_2 = (C_1C) \cap (DK)$. 切面 $\Phi' = [AB_1K_2D]$. $X = (B_1K_1) \cap (AP)$, $Y = (B_1K_2) \cap (AP)$, $Z = (AP) \cap (DK_2)$.

练习

1 试作一等边梯形的映象, 该梯形的对角线为交点分成1:2之比.

2 试作立方体 $ABCD A_1B_1C_1D_1$ 的映象, 若 (ACC_1) 与图形所在平面平行.

3 给定 $\triangle ABC$ 的映象. $\hat{ACB} = 90^\circ$, $|AC| = 3$, $|BC| = 4$. 试作角 BAC 的平分线的映象.

4 给定正方形 $ABCD$ 的映象. $\vec{AK} = 0.25\vec{AC}$, $X \in (AB)$. 试作 X 的映象, 若 $(KX) \perp (AC)$.

5 给定 $\triangle ABC$ 的映象, $|AB| = |AC|$, $|AC| = 2|BC|$. 试作此三角形高 AK 和 BH 的映象.

6 给定 $\triangle ABC$ 的映象, 其中 $|AB|:|BC|:|CA| = 2:4:5$. 试作内切圆心和外接圆心 X 和 Y 的映象.

7 给定 $[ABCD - A_1B_1C_1D_1]$ 的映象, $K \in [AA_1]$, $P \in [A_1B]$, $E \in [B_1D]$, $M \in [D_1C_1]$, $H \in [C_1D]$. 试作下列点的映象:

(1) $X \in (KH) \cap (A_1B_1C_1)$; 2) $Y \in (KM) \cap (B_1BC)$; 3) $Z = (ME) \cap (ABC)$; 4) $F = (BH) \cap (ADD_1)$; 5) $T = (PE) \cap (ABC)$, $L = (PH) \cap (BDD_1)$.

8 给定 $[M - ABCD]$ 的映象. $\vec{CD} = 2\vec{BA}$. 试作下列点的映象:

- 1) $X = (ABC) \cap (BCM) \cap (ADM)$;
- 2) $O = (ABC) \cap (DBM) \cap (ACM)$;
- 3) $Y = (KC) \cap (ADM)$; 4) $Z = (PH) \cap (BDM)$;
- 5) $T = (KH) \cap (CDM)$; $F = (DCM) \cap (ABM)$,

若 $|MF| = |AB|$.

9 给定立方体 $\Phi = [ABCD - A_1B_1C_1D_1]$ 的映象:

- 1) $X \in (B_1D)$, $Y \in (ABC)$. 试作 X 与 Y , 若 $\vec{XC_1} = \vec{C_1Y}$;
- 2) $\vec{AM} = \vec{MB}$, $P \supset M$, $P \parallel (D_1B)$. 试作出 P 与立方体表面的第二个交点.

3) $\vec{B_1K} = \vec{KC_1}$, $X \in (AB_1)$, $Y \in (ABC)$. 试作出 X 和 Y , 若 $\vec{XY} = 0.5\vec{CK}$;

4) $\vec{AM} = \vec{MA_1}$, $\vec{A_1K} = \vec{KB_1}$. 试作 (KX) , 若 $(KX) \times (MC)$ 和 $(KX) \times (DB_1)$;

5) $\vec{B_1K} = \vec{KC_1}$, $X \in (A_1D)$, $Y = (B_1X) \cap (AD_1K)$, $\vec{B_1Y}$

$=\overrightarrow{YX}$. 试作 X ;

6) $\overrightarrow{CR_1} = \overrightarrow{KC_1}$, $P \times (A_1C_1)$, $P \times (B_1D)$, $P \parallel (BK)$. 试作 P .

10 给定 $[M - ABCD]^{\pi}$ 的映象. $\overrightarrow{Ak} = \overrightarrow{kD}$, $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PC}$, $X \in (MD)$. 试作 X , 若 $(RPX) \parallel (BM)$.

11 给定 $[M - ABCD]^{\pi}$ 的映象. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{KE}$, $PX \parallel (CA)$ 和 $p \parallel (CDM)$. 试作 $X = p \cap (CDM)$.

§6.10 正交直线和平面的作图

有关这类问题有:

作过已知点 A 和垂直于已知直线 m 的直线 h ;

作与两条相交直线的公垂线;

作过已知点 A 且垂直于已知平面的直线;

作垂直于已知直线的平面;

作与已知平面成角 α 的平面;

作与已知平面成已知角 α 的相交直线.

兹举例说明上述问题的解法.

例1 给定立方体 $[A - D_1]$ (本节用此符号表示立方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$). $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{kA_1}$, $|AB| = 6$. 试作出 $[kX] \perp (B_1D)$, 若 $X \in (B_1D)$. 求 $|KX|$ (图6.82).

在 (B_1D) 上取这样一些点, 使之可以求出这些点之间的距离和由 k 到这些点的距离. 于是可将习题归结为已知三边画三角形的高. 因为 $|B_1D| = 6\sqrt{3}$, $|PB_1| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$, $|RD| = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$, 所以取 $\triangle KB_1D$ 作为这样的三角形是合理的. 现在, 将问题归结为求 $|B_1X| : |XD|$ (见§6.9中的例6).

解这道题的第二种方法是: 过 (B_1D) 作一平面, 从 K 引垂

线 KH ，作 $[HX] \perp (B_1D)$ 。于是， $[KX] \perp (B_1D)$ （三垂线定理）。

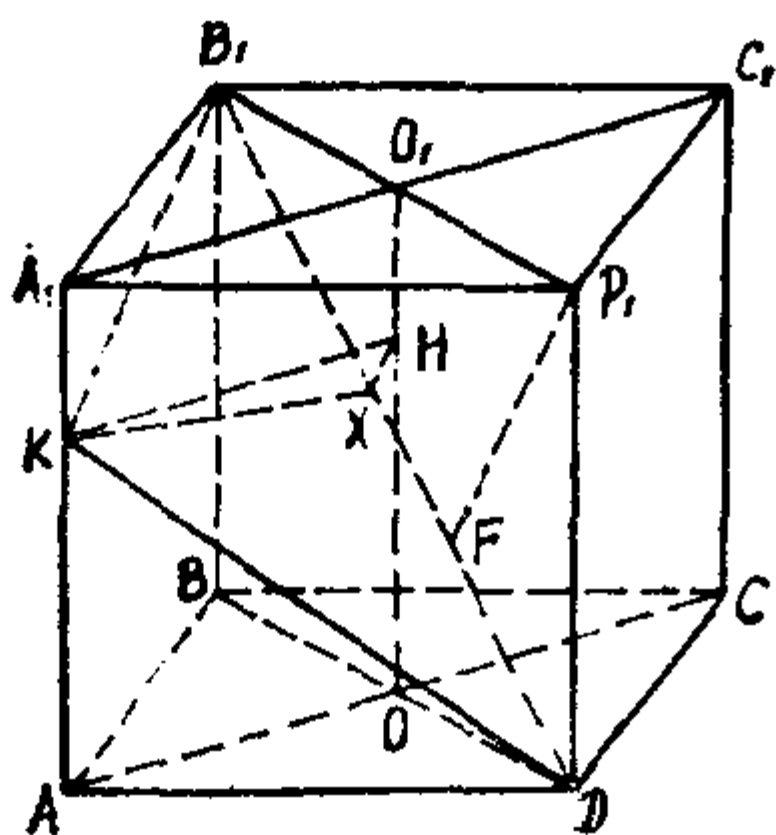


图6.82

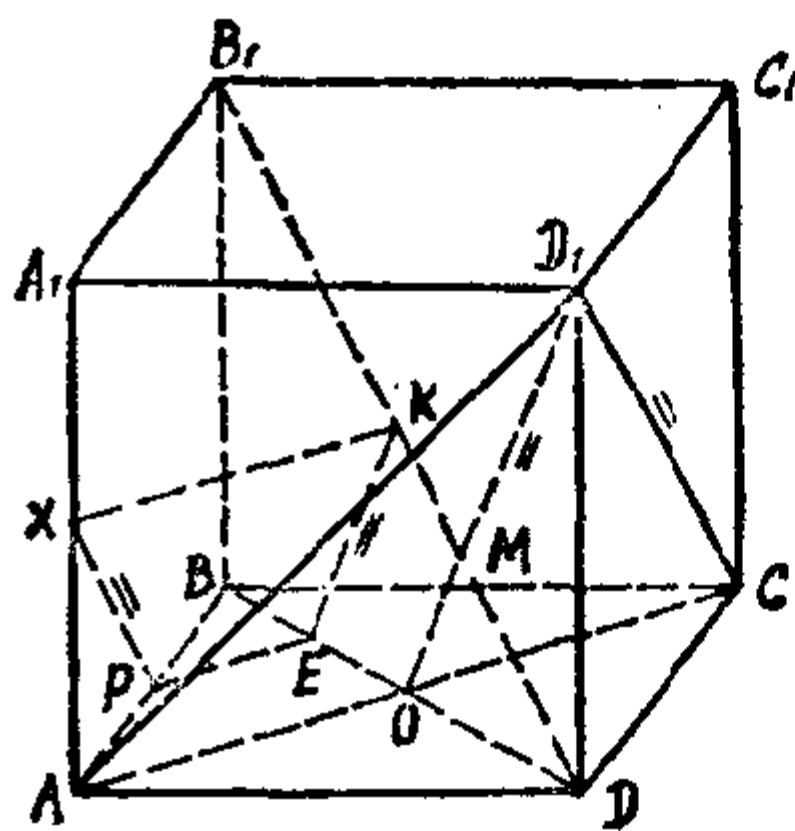


图6.83

取 (BDD_1) 作为 Σ 是合理的。显然， $(AC) \perp (BDD_1)$ 。过 K 作平行于 (AC) 的直线。在与 (OO_1) 的相交得 H 。 $(KH) \perp (BDD_1)$ 。作 $[D_1F] \perp (B_1D)$ ， $|B_1F| : |FD| = |B_1D_1|^2 : |D_1D|^2 = 2:1$ 。作 $[HX] \parallel (D_1F)$ 。

例2 给定立方体 $[A-D_1]$ （图6.83）。 $\overrightarrow{Dk} = k\overrightarrow{B_1}$ ， $X \in [AA_1]$ 。试作 X ，若 $[Xk] \perp (B_1D)$ 。

作垂直于 (B_1D) 的立方体的任意切面。已知 $(D_1AC) \perp (B_1D)$ 。设 $o = (BD) \cap (AC)$ 。那么 $M = (OD_1) \cap (B_1D)$ 和 $M = (B_1D) \cap (AD_1C)$ 。作平面 $\Sigma \parallel (AD_1C)$ 切立方体。显然， $\Sigma \perp (B_1D)$ 且 $x = (AA_1) \cap \Sigma$ 。因为平行平面沿平行直线与第三平面相交，所以 x 的作图归结如下。过 k 作直线 $l \parallel (OD_1)$ 。得 $E = (BD) \cap l$ 。过 E 作直线 $m \parallel (AC)$ 。得 $P = m \cap (AB)$ 。过 P 作直线 $n \parallel (D_1C)$ 。得 $x = X \cap (AA_1)$ 。

例3 已给一立方体的平行投影图如图6.84所示。 AA_1B_1B 面平行于图形平面，试求与投影（图形）平面方向倾斜成 φ 角值。

因为 AA_1B_1B 面平行于图形平面，所以在图6.84上所画的线段 AB 之长等于立方体的棱长。通过量度，我们发现，棱 AD

画成与 AB 等长的线段. 因为 $[AD] \perp (ABA_1)$, 且棱 AD 的投影等于这棱, 所以 $\varphi = 45^\circ$.

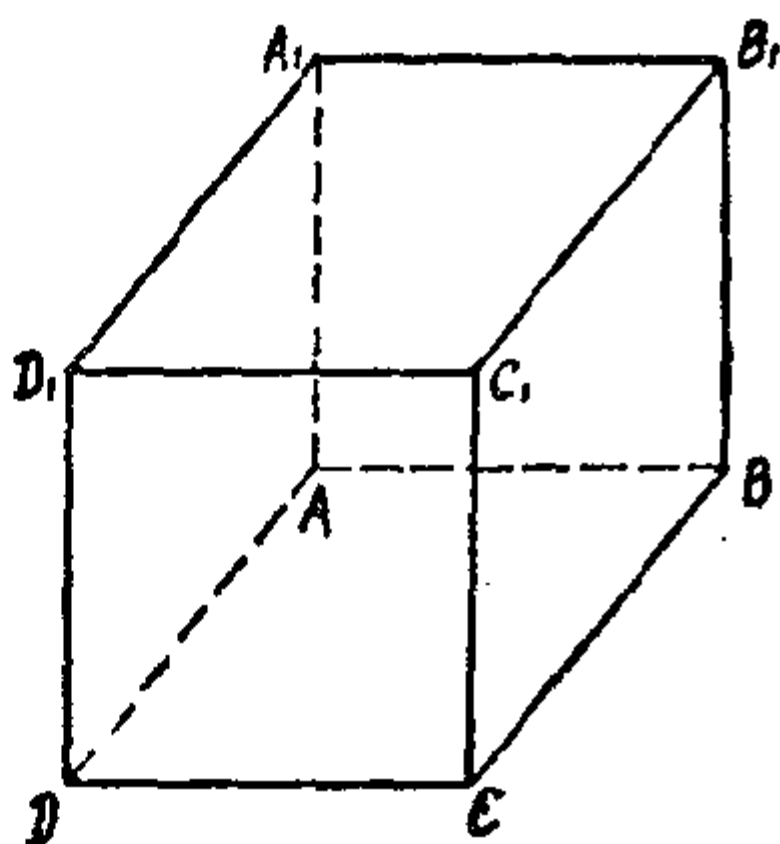


图6.84

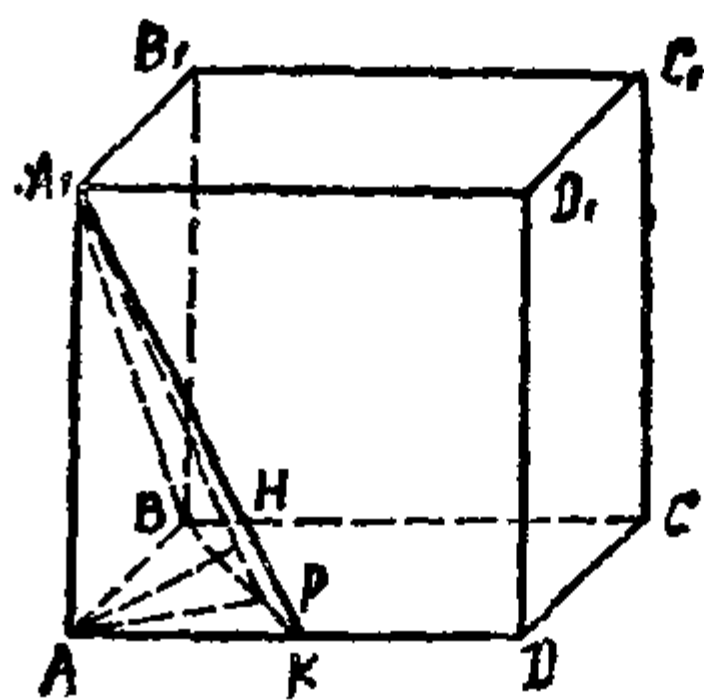


图6.85

例4 给定一立方体 $[A - D_1]$ (图6.85). $|AB| = 4$, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KD}$. 试作出 $[AH] \perp (A_1BR)$, $H \in (A_1BR)$. 求出 $|AH|$.

解这种习题的一般步骤如下. 过 A 作某一平面 $\Sigma \perp (A_1BK)$. 作 $[AH] \perp l$, 其中 $l = \Sigma \cap (A_1BK)$.

本题中, $[AA_1] \perp (ABD)$, $(BK) \subset (ABD)$. 因此, 取过 (AA_1) 的平面作为 Σ 是合理的. 作 $[Ap] \perp (BK)$. 那么 $(A_1P) \perp (BK)$, $(AA_1P) \perp (BKA_1)$. 作 $[AH] \perp (A_1P)$. 那么 $[AH] \perp (A_1BK)$. 怎样作出 P 和 H ? 因为 $[AP]$ 是直角 $\triangle BAK$ 的高, 因此 $|KP| : |PB| = |AK|^2 : |AB|^2 = 2^2 : 4^2 = 1 : 4$. 由直角 $\triangle PAA_1$ 推知 $|PH| : |HA_1| = |AP|^2 : |AA_1|^2$. 显然, 为了解题, 必须知道 $|AP|$. 由直角 $\triangle KAB$ 得 $|AP| \cdot |BK| = |AK| \cdot |AB|$, $|AP| = |Ak| \cdot |AB| : |Bk| = (2 \times 4) : \sqrt{2^2 + 4^2} = 4 : \sqrt{5}$.

于是 $|pH| : |HA_1| = (4 : \sqrt{5})^2 : 4^2 = 1 : 5$. 由直角 $\triangle pAA_1$ 得 $|AH| \cdot |A_1P| = |AP| \cdot |AA_1|$. 由此得

$$|AH| = |AP| \cdot |AA_1| : |A_1P| = |AP| \cdot |AA_1| : \sqrt{|AA_1|^2 + |AP|^2} = \sqrt{6} : 3.$$

例5 已给 $-[D-ABC]^*$ (图6.86). $p \in \triangle BCD$. 直线 $P \in l$ 和 $l \perp (BCD)$. 试作 $X = l \cap (ABC)$, $Y = l \cap (ACD)$ ($|AD| = |AB|$).

解题步骤如图6.86所示. 现在来阐明这种解法. 思路是: 两条垂直线是平行的, 将投影图上的平行直线 (不平行于投影方向) 画成平行直线. 因此, 先作 (DBC) 的任意垂直线是合理的. 为此须作任意平面 $\Sigma \perp (DBC)$, 在 Σ 上作垂直于 Σ 和 (DBC) 交线的直线. 选 (ADR_1) 作为 Σ , 因为在投影图上容易作出 $R_1 - [BC]$ 的中点. 其次 $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OK_1}$ [D_0] $\perp (ABC)$ 及 $\hat{DOK}_1 = 90^\circ$. 所以能够画出直角 $\triangle K_1OD$ 的高 OR_2 :

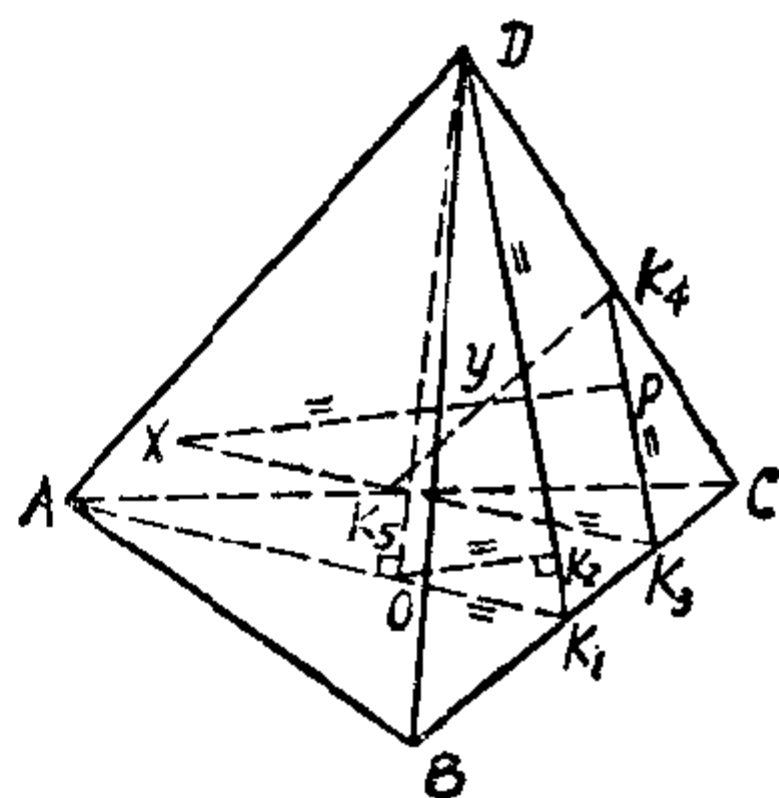


图6.86

$$\begin{aligned}
 |K_1K_2| : |K_2D| &= |OK_1|^2 : |OD|^2 \\
 &= \left(\frac{1}{3}|AK_1|\right)^2 : \left(|AD|^2 - \left(\frac{2}{3}|AK_1|\right)^2\right) \\
 &= \frac{1}{9}|AB|^2 \sin^2 60^\circ : \left(|AB|^2 - \frac{4}{9}|AB|^2 \sin^2 60^\circ\right) \\
 &= 1:8.
 \end{aligned}$$

例6 给定一长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ (图6.87). $|AD| = 2$, $|CC_1| = 4$, $|CD| = 3$, $\overrightarrow{DO} = 3\overrightarrow{OB_1}$, $O \in \Sigma$, $\Sigma \perp (B_1D)$. 试作平面 Σ 切此长方体.

解题步骤如图6.87所示。

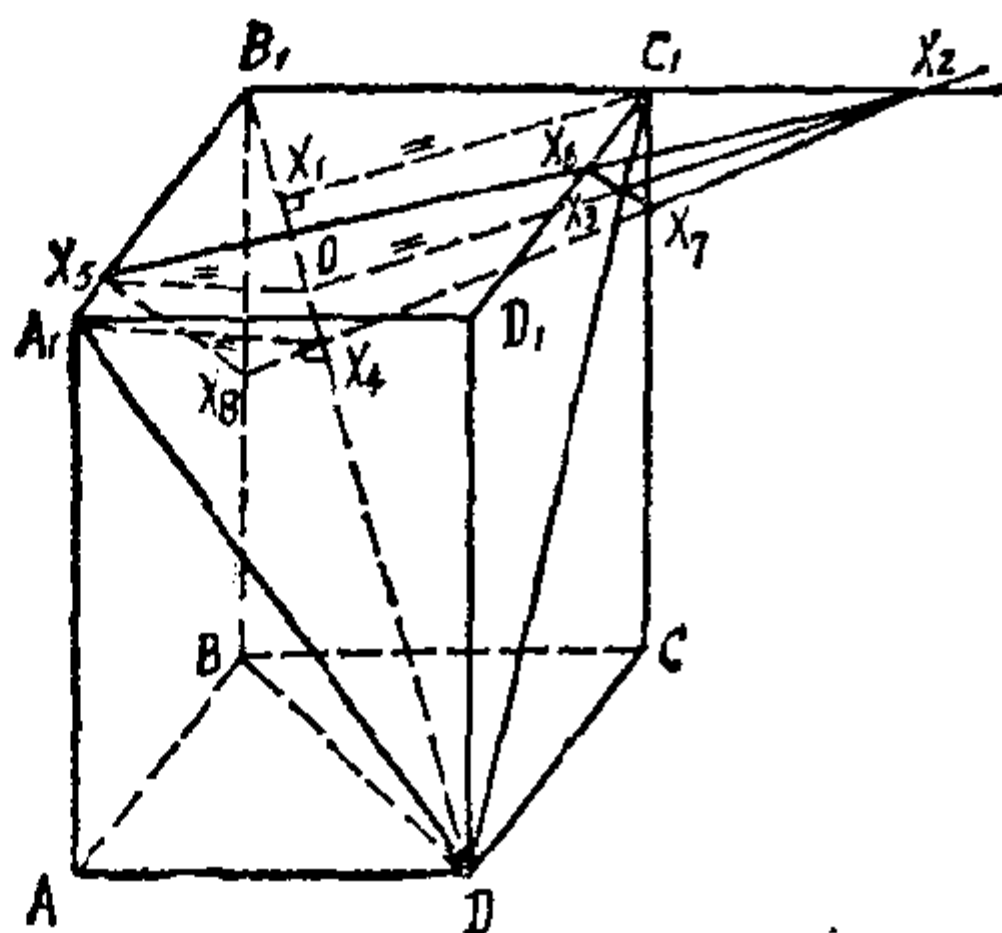


图6.87

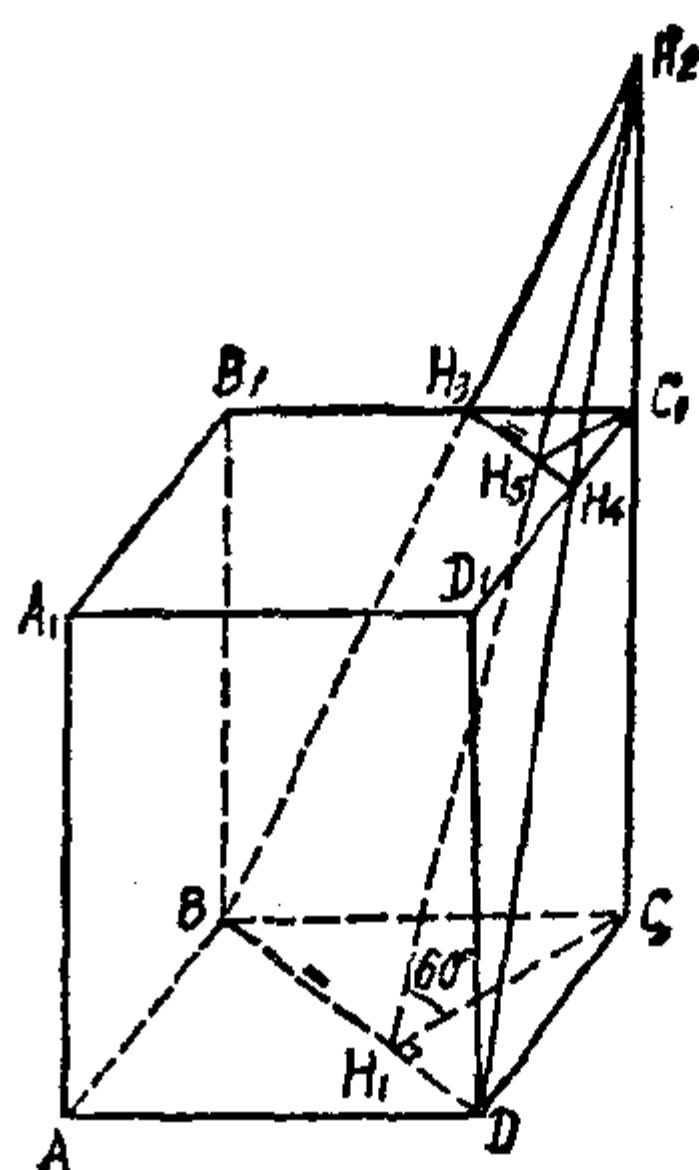


图6.88

例7 给定一长方体 $\Phi = [ABCD - A_1B_1C_1D_1]$. $|BC| = 4$, $|CD| = 3$, $|CC_1| = \sqrt{3}$ (图6.88). $(BD) \subset \Sigma$ 及 $(\Sigma, \widehat{BDC}) = 60^\circ$. 试作 $\Phi_1 = \Phi \cap \Sigma$.

作图步骤如图6.88所示。

练习

- 1 给定立方体 $[A - D_1]$. $|AB| = 1$, $\overrightarrow{B_1M} = \overrightarrow{NC_1}$, $X \in (DM)$, $[D_1X] \perp (DM)$. 试作出 X 并求出 $|D_1X|$.
- 2 给定立方体 $[A - D_1]$. $|AB| = 1$, $X \in (AD_1C)$, $[DX] \perp (AD_1C)$. 试作出 X 并求出 $[DX]$.
- 3 给定立方体 $[A - D_1]$. $|AB| = 1$, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MB_1}$, $X \in (AD_1C)$, $[MX] \perp (AD_1C)$. 试作出 X 并求出 $|MX|$.
- 4 给定 $\Phi = [A - D_1]$. $|AB| = 1$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{AR} = 0.75 \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PD_1}$. 试作出 $\Phi_1 = \Phi \cap (MKP)$ 和在 (ABC) 上正交投影 Φ_1 . 求出 $(\Phi_1 \widehat{ABC})$, (DD_1, Φ) , $S(\Phi_1)$.

5 给定立方体 $\Phi = [A - D_1]$. $|AB| = 1, \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{AK} = 0.75\overrightarrow{AB}$, $(MK) \subset \Sigma$, $(\Sigma, \widehat{ABC}) = 60^\circ$. 试作出 $\Phi_1 = \Phi \cap \Sigma$. 求出 $s(\Phi_1)$.

6 在 $\Phi = [D - ABC]^\pi$ 中. $|AB| = |AD| = 1, \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}, \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MD}$. 试作出 $\Phi_1 = \Phi \cap (PKM)$. 求出 $(\Phi_1, \widehat{ABC})$ 和 $s(\Phi_1)$.

7 在 $[D - ABC]$ 中, $\widehat{ADC} = \widehat{ADB} = \widehat{BDC} = 90^\circ, |AD| = 6, |DC| = 8, |DB| = 24$. 试作出 X , 若 $|AX| = |BX| = |CX| = |DX|$. 并求出 $|DX|$.

8 在 $\Phi = [D - ABC]^\pi$ 中, $|DA| = |AB| = 1, \overrightarrow{Ak} = \overrightarrow{kB}, k \in \Sigma, \Sigma \parallel (CD), \Sigma \perp (BCD)$. 试作出 $\Phi_1 = \Phi \cap \Sigma$. 求出 $S(\Phi_1)$ 和 $(\Sigma, \widehat{ABC})$.

9 在立方体 $\Phi = [A - D_1]$ 中. $|AB| = 1, \overrightarrow{B_1K} = \overrightarrow{KC_1}, (KB) \subset \Sigma, \Sigma \perp (AA_1C)$. 试作出 $\Phi_1 = \Phi \cap \Sigma$. 求出 $S(\Phi_1)$ 和 $(\Phi_1, \widehat{ABC})$.

10 在立方体 $\Phi = [A - D_1]$ 中, $|AB| = 1, \overrightarrow{A_1P} = \overrightarrow{PB_1}, \overrightarrow{BE} = 0.75\overrightarrow{BB_1}, (PE) \subset \Sigma, \Sigma \perp (AA_1C)$. 试作出 $\Phi_1 = \Phi \cap \Sigma$. 求出 $S(\Phi_1)$ 和 $(\Phi_1, \widehat{ABB_1})$.

11 在立方体 $\Phi = [A - D_1]$ 中. $|AB| = 1, O = (DB) \cap (AC), \overrightarrow{B_1E} = 0.25\overrightarrow{B_1B}, \overrightarrow{A_1E} = \overrightarrow{EB_1}, O \in \Sigma, \Sigma \parallel (DE), \Sigma \perp (A_1C_1C)$. 试作出 $\Phi_1 = \Phi \cap \Sigma$. 求出 $(PE, \widehat{\Sigma})$.

12 试作出立方体 $[A - D_1]$ 的这样的平行投影, 其上、棱边 AD_1 和 B_1D 为互相垂直的线段.

13 在图689上为给定正四面体的平行投影. 棱 AC 和 BD 平行投影 (图形) 平面. 试求在图形投影平面 Σ 上的投影方向的倾角. 求 $(ACD, \widehat{\Sigma})$ 和 $(\Sigma, \widehat{ABD})$.

14 在图6.90上为给定正四面体 $DABC$ 的平行投影。 $[AC] \parallel \Sigma$, $[DB] \parallel \Sigma$ (Σ 是投影平面)。试求投影方向和 (DB) 与 (AC) 之间的夹角。

15 在立方体 $[A \sim D_1]$ 中, $\overrightarrow{A_1K} = \overrightarrow{KC_1}$, $|AB| = 1$, $X \in (AK)$, $Y \in (BD)$, $(XY) \perp (ABC)$, 试作出 X 和 Y 。求出 $|XY|$ 。

16 在立方体 $[A \sim D_1]$ 中, $\overrightarrow{B_1K} = \overrightarrow{KC_1}$, $\overrightarrow{C_1M} = 0.25\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{CP} = 0.25\overrightarrow{CD}$, $X \in (BD_1)$, $Y \in (MP)$, $Y \in (RX)$, 试作出 X 和 Y 。

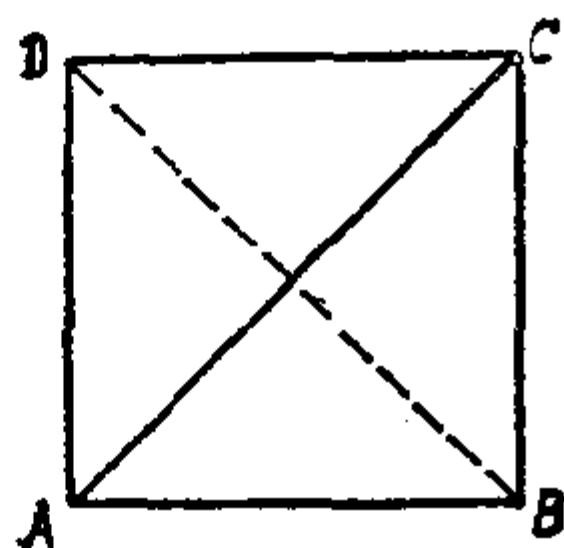


图6.89

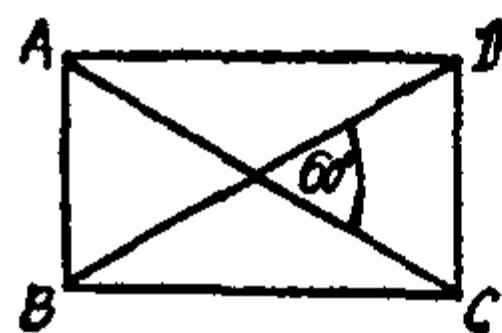


图6.90

17 在立方体 $[A \sim D_1]$ 中, $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MD}$, $|AB| = 1$, $X \in (BD_1)$, $Y \in (B_1C)$, $(XY) \parallel (AM)$ 。试作出 $P = (XY) \cap (ABB_1)$ 并求出 $|pY|$ 。

18 在立方体 $[A \sim D_1]$ 中, $|AB| = 1$, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$, $X \in (BD_1)$, $Y \in (CB_1)$, $(XY) \perp (MD)$, $(XY) \parallel (ABC)$ 。试作出 X , Y , $P = (XY) \cap (ABB_1)$ 和求出 $|pY|$ 。

19 在立方体 $[A \sim D_1]$ 中, $|AB| = 1$, $X \in (DB_1)$, $Y \in (D_1C)$, $(XY) \parallel (ABC)$, $(XY) \perp (B_1D)$ 。试作出 $[XY]$ 并求出 $|XY|$ 。

§ 6.11 用平面作多面体截面的作图法

作棱锥和棱柱截面的迹线法。这一方法是, 作平面割线与棱

锥或棱柱底的交叉直线（迹），位于此多面体的迹与侧平面和对角截面相交点的对面。这些点与给定割线平面点一起定出直线，此直线属于待求截面的边（对角线）。

例1 给定 $[M-ABCD]$ 的图形（图6.91）。 $P \in [AM]$, $E \in [MD]$, $K \in [MB]$ 。试作出 $\Phi = [M-ABCD] \cap (PKE)$ 。

为了作出迹 $P = (PRE) \cap (ABC)$ ，必须找到属于 (PKE) 和 (ABC) 的两个点。因为 $(XY) \subset (ABC)$ 和 $(XY) \subset (PKE)$ ，所以，我们可作 $Y = (PE) \cap (AD)$, $X = (PK) \cap (AB)$ 。 $(XY) = P$ 。为了作出 $F = (CM) \cap (PKE)$ ，我们求 $H = P \cap (ACM)$ 。显然， $H = P \cap (AC)$ 。我们作 $F = (HP) \cap (MC)$ 。显然， $\Phi = [PEFK]$ 。

将 n 角棱锥（棱柱）分成三角棱锥（棱柱）的方法。由给定的 n 角棱锥（棱柱）作三角棱锥（棱柱） Π ，在其侧棱上有待求截面点。作此棱锥（棱柱）的截面，之后是和图形 Π 有公共部分的三角棱锥（棱柱）的截面。

例2 给定 $\Phi = [ABCDE - A_1B_1C_1D_1E_1]$ 的图形（图6.92）。 $P \in [AA_1]$, $H \in [EE_1]$, $T \in [BB_1]$ 。试作出 $\Phi' = \Phi \cap (PHT)$ 。

三角形 PHT 是棱柱 $ABEA_1B_1E$ 的截面。棱柱 $ABCA_1B_1C_1$, $ADEA_1D_1E_1$ 与此棱柱有公共部分。设 $M = (AC) \cap (BE)$, $K = (AD) \cap (BE)$, $M_1 = (A_1C_1) \cap (B_1E_1)$, $K_1 = (A_1D_1) \cap (B_1E_1)$, $[MM_1] = [ACC_1A_1] \cap [BEE_1B_1]$ 。因此，存在 $Q = (TH) \cap (MM_1)$; $\triangle PTY = [ABC - A_1B_1C_1] \cap (PHT)$ 。其中 $Y = (PQ) \cap (CC_1)$ 。根据类似的讨论，得 $F = (TH) \cap (KK_1)$, $X = (PF) \cap (DD_1)$ 。显然， $\triangle PHX = [ADE - A_1D_1E_1] \cap (PTH)$ 。五边形 $PTYXH$ 是所求的截面。

将 n 角棱柱（棱锥）补充成三棱锥（棱柱）的方法。将给定棱柱补成三棱锥。作出此棱柱的截面。待求截面作为三角棱柱截面的一部分而得到。

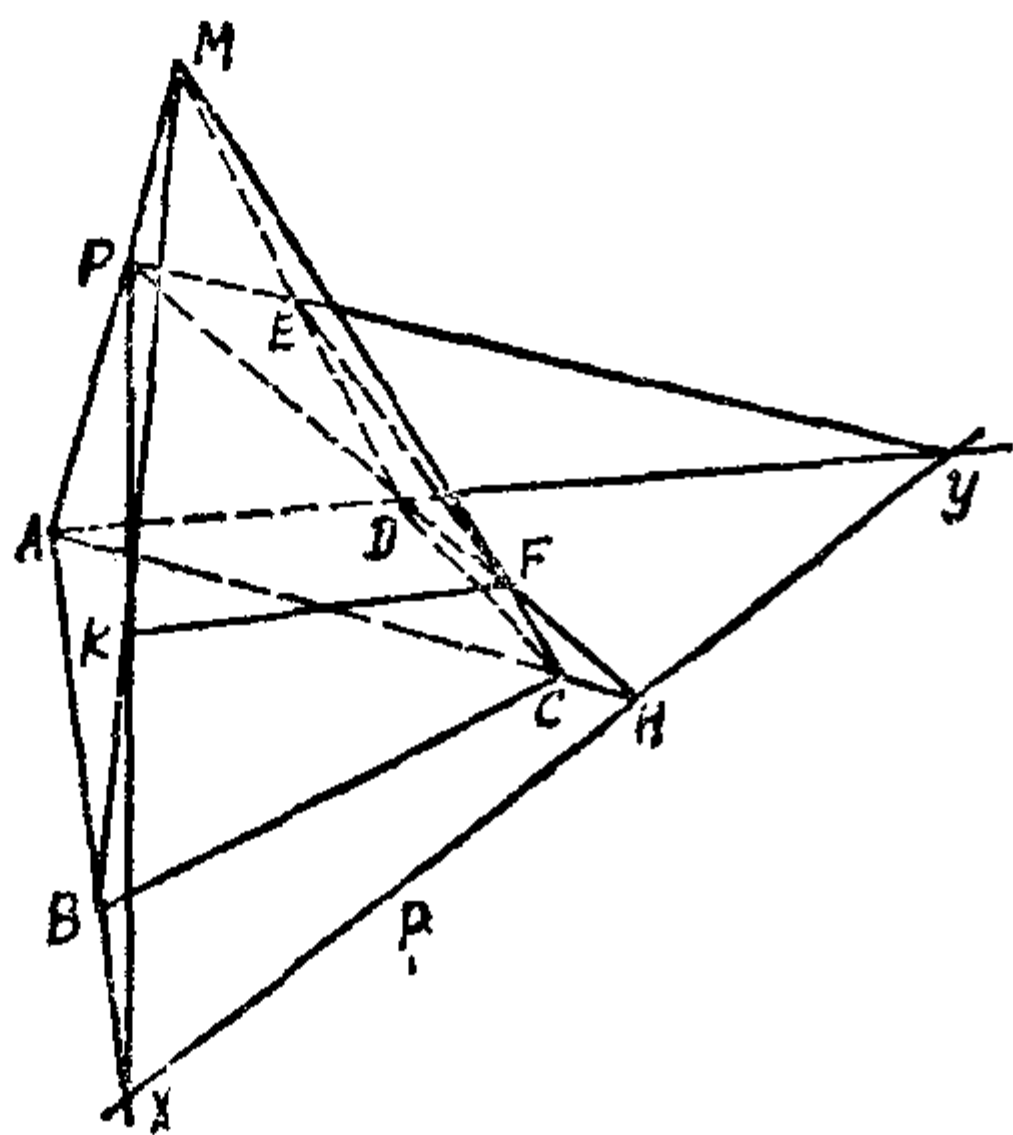


图6.91

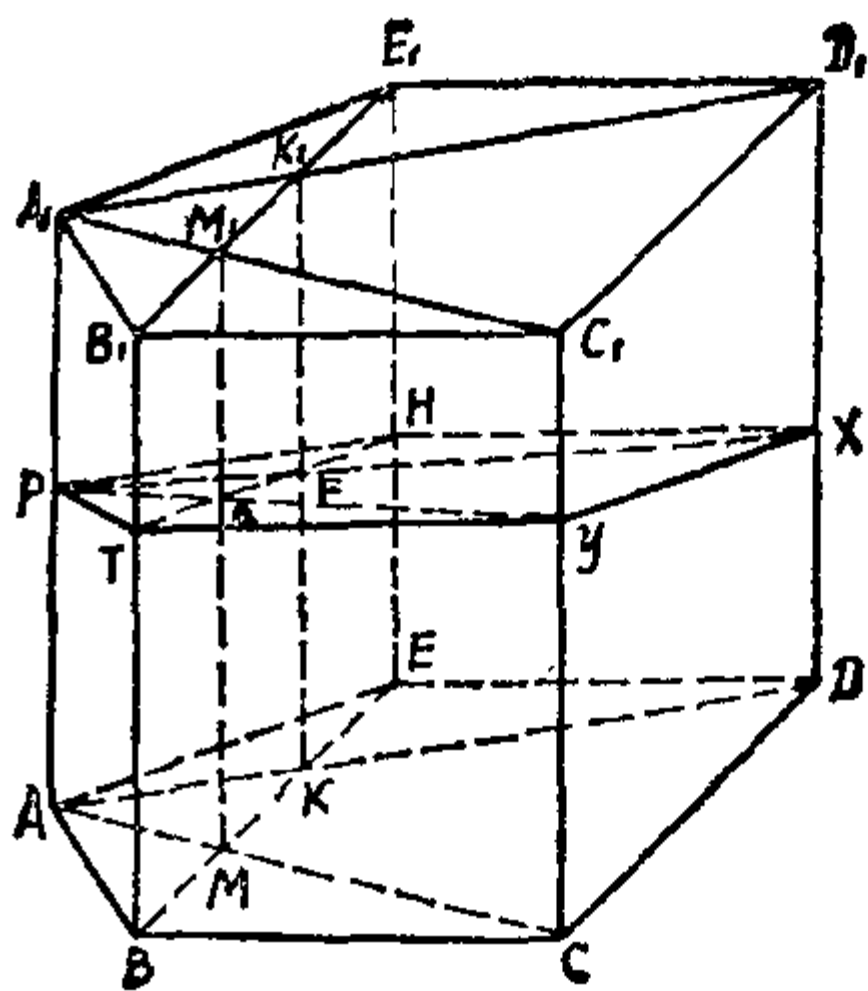


图6.92

例3 给定 $[M-ABCDE]$ 的图形 (图6.93). $F \in [AM]$, $T \in [MC]$. 试作出 $\Phi = [M-ABCDE] \cap (FBT)$.

作 $P = (BC) \cap (DE)$, $K = (AB) \cap (DE)$. 显然, $[M-ABCDE] \subset [M-KBP]$. 作 $\Phi' = [M-KBP] \cap (FBT)$, $X = (FB) \cap (KM)$, $Y = (BT) \cap (MP)$, $\triangle XYB = \Phi'$. 得 $Q = (EM) \cap (XY)$, $H = (MD) \cap (XY)$. 显然, $\Phi = [QHTBF]$.

平行直线法. 此法的基础是利用如下平行平面的性质: 平行平面在平面上相交的直线彼此平行.

例4 给定 $[ABCDE-A_1B_1C_1D_1E_1]$ 的图形(图6.94). $k \in [AA_1]$, $M \in [CC_1]$. 试作出平面 (KBM) 截得棱柱的截面.

过 (AA_1) 作平 $\Sigma \parallel (BCC_1)$. 得 $P = (ED) \cap \Sigma$, $P_1 = (E_1D_1) \cap \Sigma$, $F = (CD) \cap \Sigma$, $F_1 = (C_1D_1) \cap \Sigma$. 因为 $\Sigma \parallel (BCC_1)$, 所以 (KBM) 沿 $(KX) \parallel (BM)$ 相交成 Σ , $X \in (FF_1)$. 得 $O = (PP_1) \cap (KX)$, $T = (MX) \cap (DD_1)$, $Y = (EE_1) \cap (TO)$. 五边形 $KBMTY$ 为所求的截面.

练习

1 已给 $\Phi = [M - ABCD]$ 的图形。其顶点的坐标 $(m, n, d, h, k, \geq 0)$: $A(0, 0, 0)$; $M(0, 0, 4)$; $B(4, 0, 0)$; $C(m, n, 0)$; $D(0, d, 0)$ 。点 $p \in [AM]$ 和 $P(0, 0, k)$ 。 $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{KD}$, $H(h, 0, 0)$ 和 $P \neq H$ 。试作出 $\Phi_1 = \Phi \cap (HPK)$ 的。若给定 k, h, m, n, d 某个值。试举出 k, h, m, n, d 使得 Φ_1 为下列情况的那些值: 1) 面积为 $2d$ 的直角三角形; 2) 等腰三角形; 3) 等边三角形; 4) 直角梯形, 其一个底比另一个底大一倍; 5) 面积为 10 的长方形; 6) 五边形; 7) 周长为 $2d$ 的正方形; 8) 四边形 $KPBC$ (不是梯形!)。

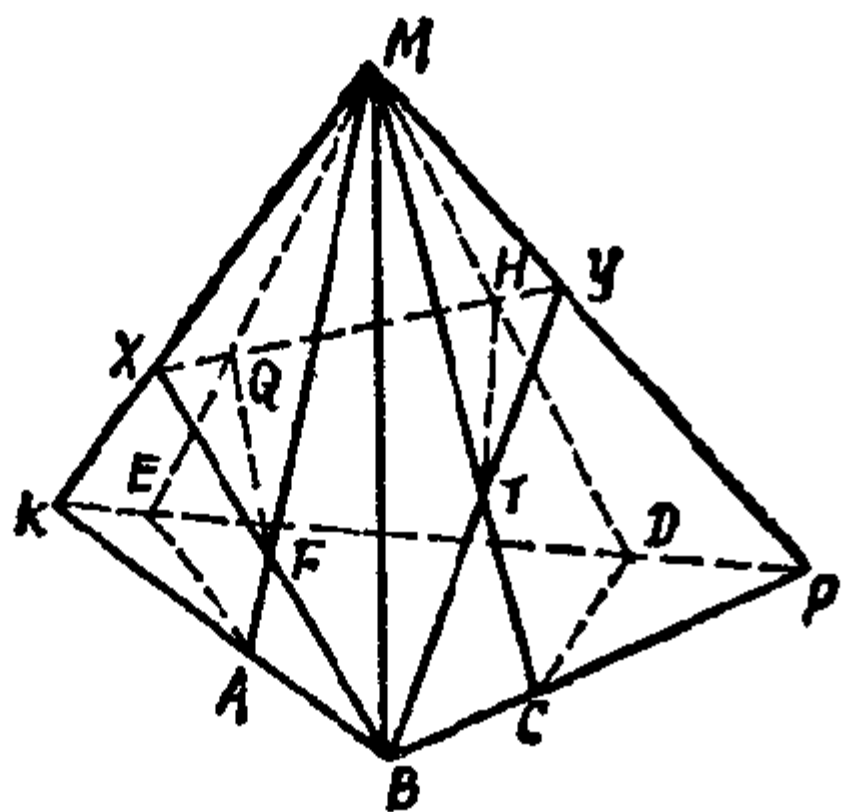


图6.93

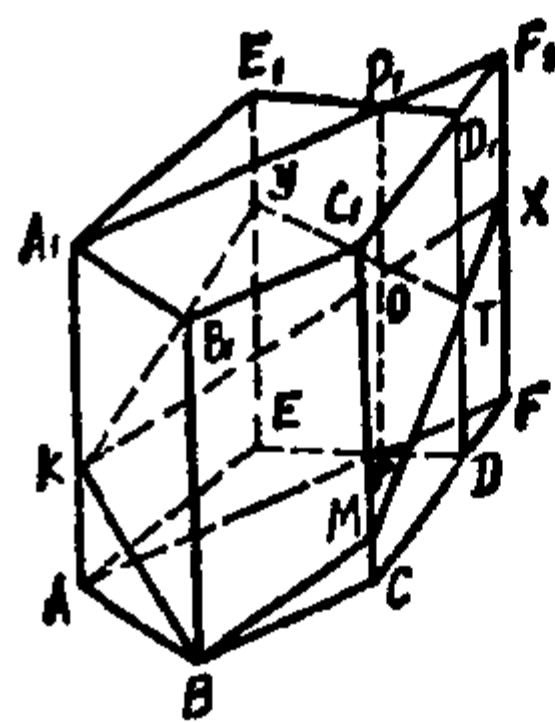


图6.94

2 已给 $\Phi = [ABCD - A_1B_1C_1D_1]$ 的图形。其顶点的坐标为 $(h, b, c, a, k, m, d \geq 0)$: $A(0, 0, 0)$; $C(c, a, 0)$; $D(d, 0, 0)$; $A_1(0, 0, 8)$ 。 $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{KBB_1}$; $\overrightarrow{A_1B} = m\overrightarrow{A_1D_1}$; $\overrightarrow{DH} = h\overrightarrow{DC}$ 。试作出 $\Phi_1 = \Phi \cap (MKH)$, 若给定 h, b, c, a, k, m, d 某个值。当 h, b, c, a, k, m, d 为何值时, 截面 Φ_1 是: 1) 面积为 100 的正方形; 2) 正三角形; 3) 边比为 1:2 的长方形; 4) 上下底为 1:2 的等边梯形; 5) 正六边形; 6) 五边形; 7) 非直角菱形; 8) 平面平行于 (AD) , (DB_1) 和 $(DB_1) \in \Phi_1$ 的四边形。

3 给定 $[ABCD - A_1B_1C_1D_1]^*$ 。 $|AB| = 2$, $|AA_1| = 4$ 。

试作出用平面切得的截面是：1) 最大面积的正三角形；2) 最大周长的长方形；3) 最大面积的菱形；4) 等边六边形；5) 最大周长的等腰三角形；6) 在 (AA_1D_1) 上的正交投影是四边形 $ADMA_1$ ($\overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{MD}$) 的等边梯形；7) 具有边比1:2 (它在 (ABC) 上的正交投影是正方形 $ABCD$) 的平行六面体。

§ 6.12 求多面体元素问题解的方法

中学里，对计算各种多面体一部分的线段长度和角度大小的习题给以很大的注意。这些习题包括：求棱锥和棱柱的高，棱锥侧棱与其底平面的倾角，多面体的棱长，二面角，等等不难理解，任何多面体都是某几个多面角的子集合。特别是许多多面体可作为某几个三面角的一部分来研究。因此，求多面体元素的每一道习题的解，都可由三面角的平面角和二面角的大小求出。

下面引述求多面体各元素的一组练习，它由三部分组成：1) 求直三面角各元素的练习；2) 解任意三面角的练习；3) 编制求多面体各种不同元素值步骤的练习。

作业1

图6.95画出 $[O - A_1C_1B_1]$ ，其中 $\widehat{OCA_1} = \widehat{OB_1C_1} = 90^\circ$ ， $(A_1OC_1, OC_1B_1) = 90^\circ$ ， $A_1\widehat{OC_1} = \beta < 90^\circ$ ， $B_1\widehat{OC_1} = \alpha < 90^\circ$ ， $A_1\widehat{OB_1} = \gamma$ ， $(C_1OA_1, OA_1B_1) = \hat{A}$ ， $(A_1O_1B_1, O_1BC_1) = \hat{B}$ 。试得出下列元素之间关系的等式：1) γ, α, β ；2) $\beta, \hat{B}, \gamma$ ；3) $\beta, \hat{B}, \alpha$ ；4) $\alpha, \hat{B}, \gamma$ ；5) $\gamma, \hat{A}, \hat{B}$ ；6) $\hat{A}, \hat{B}, \alpha$ 。

完成作业的步骤如下：

1 指出图6.95所示的直角三角形。

- 2 图6.95中, 哪个角大小等于 $\hat{B}$;
- 3 证明: $\hat{A}, \hat{B}, \gamma < 90^\circ$.
- 4 设 $|OA_1| = 1$, 则 $|OB_1| = \cos\gamma$, $|OC_1| = \cos\beta$, $\cos x = |OB_1| : |OC_1| = \cos\gamma : \cos\beta$ 和
- $$\cos\gamma = \cos\alpha \cos\beta. \quad (6.23)$$

试指出得出上面所有各等式的三角形.

5 等式(6.23)表 α, β 和 γ 之间的关系. 它是由锐角为 α, β, γ 的直角三角形得出的. 试用类似的方法得出 $\hat{B}, \beta, \gamma$ 角之间的关系式.

6 试由直角三角形 $OC_1A_1, OB_1C_1, A_1C_1B_1$ 确定 $\alpha, \beta, \hat{B}$ 之间的关系式.

7 试由三角形 $OB_1A_1, A_1C_1B_1, OB_1C_1$ 得出 $\hat{B}, \alpha, \gamma$ 之间的关系式

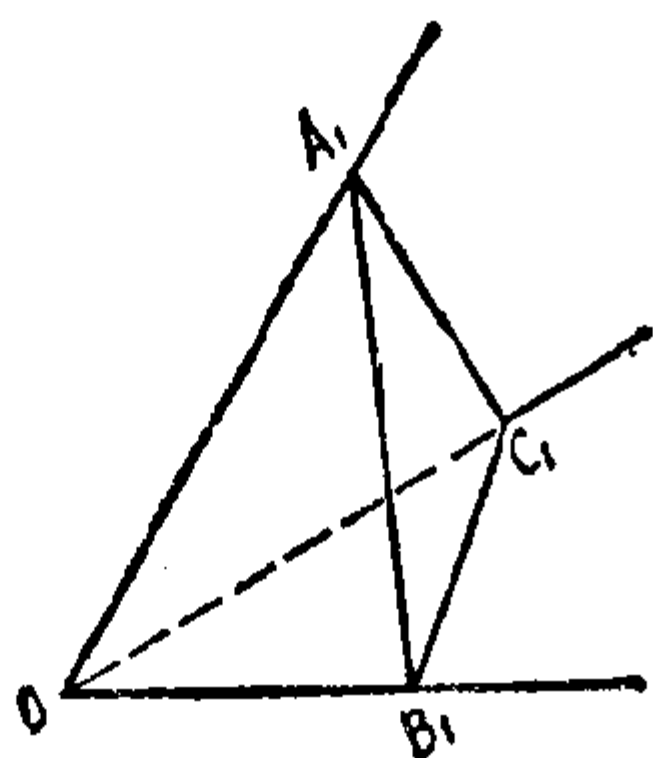


图6.95

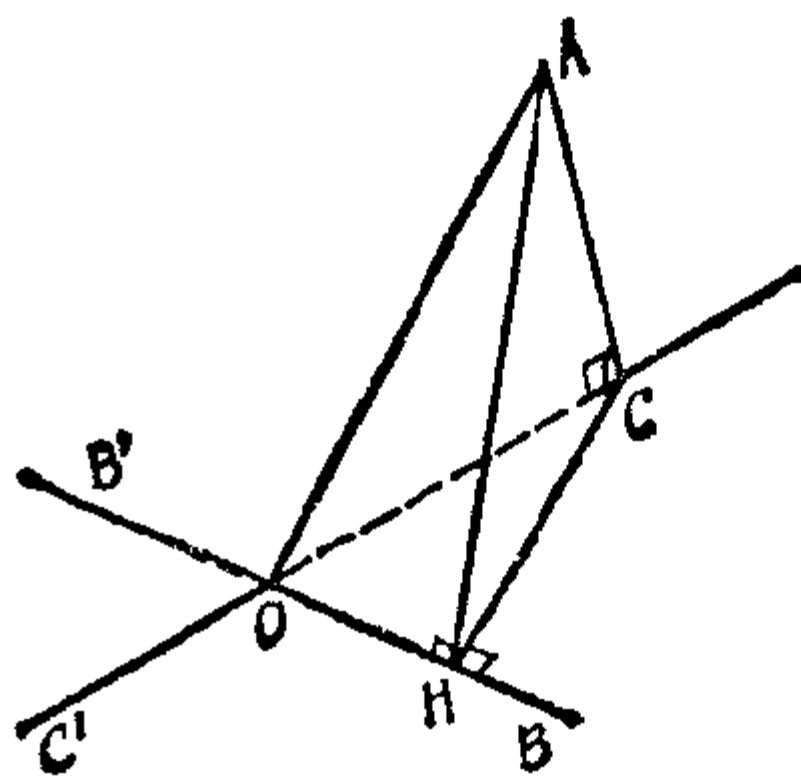


图6.96

8 图形 $OA_1C_1B_1$ 是以O为顶点的直三面角和以 OC_1 为棱的直二面角. 我们已经得到如下等式:

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cos\beta; \quad (6.24)$$

$$\sin \hat{B} = \sin\beta \sin\gamma; \quad (6.25)$$

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \operatorname{tg}\beta : \sin\alpha; \quad (6.26)$$

$$\cos \hat{B} = \operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \gamma. \quad (6.27)$$

从这些等式中的每一个等式，可求出其中包含的一个角的数值，若已知另两角的数值。我们先得 $\hat{A}$ ， $\hat{B}$ ， γ 之间和 $\hat{A}$ ， $\hat{B}$ ， α 之间的两个关系式。由等式(6.26)得

$$\operatorname{tg} \hat{A} = \operatorname{tg} \alpha : \sin \beta. \quad (6.28)$$

将等式(6.26)和(6.28)逐项互乘并利用关系式(6.25)，得

$$\operatorname{tg} \hat{A} \operatorname{tg} \hat{B} = \frac{1}{\cos \gamma}. \quad (6.29)$$

由等式(6.27)得

$$\cos \hat{A} = \operatorname{tg} \beta : \operatorname{tg} \gamma \quad (6.30)$$

将等式(6.25)逐项除等式(6.30)

$$\frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{A}} = \frac{\sin \beta \operatorname{tg} \gamma}{\sin \gamma \operatorname{tg} \beta} = \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}.$$

由此并从等式(6.23)得

$$\sin \hat{B} : \cos \hat{A} = 1 : \cos \alpha. \quad (6.31)$$

9 图6.96画出了正交三面角 $OCAB$ ， $OCAB'$ ， $OC'AB'$ 和 $OC'AB$ 。[AC]⊥(BOC)，[CH]⊥(OB)。试指出这些三面角的锐平面角，钝平面角和二面角。

作业2

1 利用作业1中的公式，试求：1) $\cos \beta$ ，如果 $\alpha = 30^\circ$ ， $\gamma = 60^\circ$ ；2) $\cos \hat{B}$ ，如果 $\beta = 30^\circ$ ， $\gamma = 45^\circ$ ；3) $\operatorname{tg} \hat{B}$ ，如果 $\hat{A} = 60^\circ$ ， $\alpha = 45^\circ$ ；4) $\sin \beta$ ，如果 $\hat{B} = 45^\circ$ ， $\alpha = 30^\circ$ 。

2 是否存在正交三面角 $OA_1B_1C_1$ ，其中：1) $\beta = 45^\circ$ ， $\hat{B} = 30^\circ$ ；2) $\gamma = 60^\circ$ ， $\alpha = 45^\circ$ ；3) $\hat{A} = 20^\circ$ ， $\hat{B} = 20^\circ$ ；4) $\hat{B} = 60^\circ$ 。

$\alpha = 30^\circ$; 5) $\gamma = 30^\circ$; 6) $\gamma > \beta$; 7) $\beta > \hat{B}$; 8) $\hat{A} > \alpha$; 9) $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \gamma$;
10) $\sin \hat{A} > \sin \alpha$?

3 γ 随着正交三面角 $OA_1B_1C_1$ 的 α 和 β 的增大,将怎样变化(减小或增大)?

4 $\hat{B}$ 随着 β 的减小和 γ 的增大而减小,真否?

5 如果 $\hat{B}$ 不变, γ 随着 α 减小而增大,真否?

6 图6.97画出一 $[M-ABCD]^n$. $O = (AC) \cap (BD)$, $(\hat{BAM}, \hat{AMD}) = 120^\circ$. 1) 三面角 $ABMD$ 由什么样的正交三面角组成的? 它有怎样的平面角和二面角? 2) 应用作业1的一个等式, 求出 $\hat{MAB}$, $(\hat{MAB}, \hat{ABO})$, $\hat{MAO}$, $(\hat{ABM}, \hat{BMO})$; 3) 试求 $|O, (MAB)|$, 如果 $|BC| = 2$.

7 在长方体 $[ABCD-A_1B_1C_1D_1]$ 中, $|AD| = 4$, $|AB| = 3$, $|AA_1| = 10$, $\vec{AM} = \vec{MA_1}$. 应用公式(6.27)于直三面角 $DAMB$ 后, 试求出 $(\hat{ABD}, \hat{BDM})$.

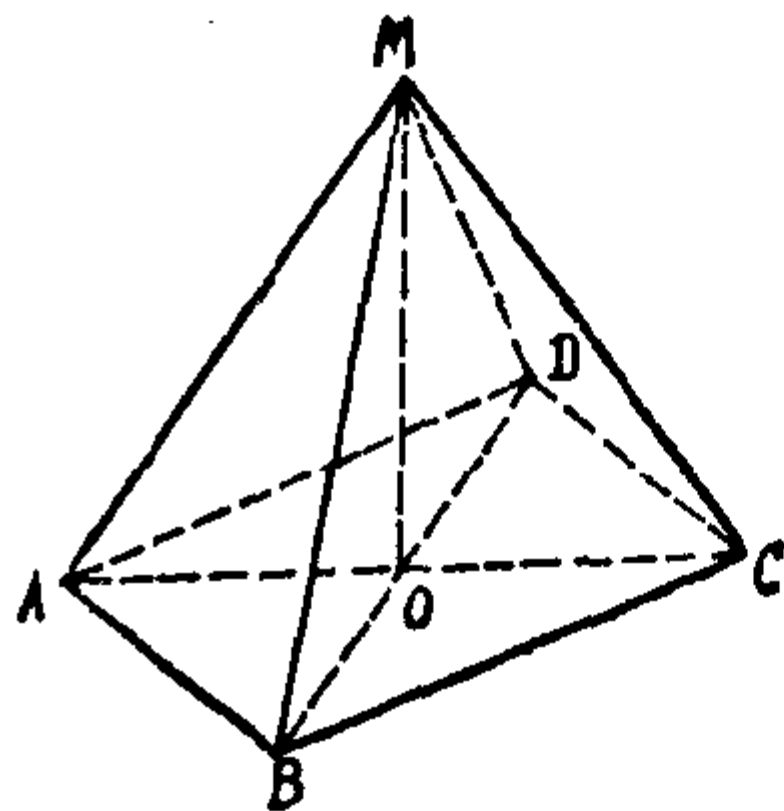


图6.97

作业3

给定三面角 $OABC$, 其中 $\hat{BOC} = \alpha$, $\hat{AOC} = \beta$, $\hat{AOB} = \gamma$, $(\hat{OA}, \hat{BOC}) = \hat{AOA'} = \varphi$, $(\hat{COA}, \hat{OAB}) = \hat{A}$, $(\hat{BOC}, \hat{OCA}) = \hat{C}$, $(\hat{COB}, \hat{OBA}) = \hat{B}$. (指定已给三面角 $OABC$ 为图形 Φ , 而正交三面角 $OA'AB$ 和 $OA'AC$ 相应为 Φ' 和 Φ'').

1 应用公式(6.25)于 Φ' 和 Φ'' , 试求 $\hat{B}$, $\hat{C}$, β 和 γ 之间的关系式.

2 应用公式(6.23)于 Φ' 和 Φ'' , 试求 $\widehat{A'OC}$, 如果 α, β, γ 为已知值.

3 试得出 $\widehat{C}, \alpha, \beta, \gamma$ 之间的关系式.

4 利用公式(6.31), 试得出 $(\widehat{COA}, \widehat{OAA'})$, A, B 和 C 之间的关系式.

5 利用公式(6.29)和(6.31), 试求出 α , 如果 $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 30^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$.

作业4

在 $[D-ABC]$ 中, $|AC| = |AB| = |BC| = a$, $(\widehat{DAC}, \widehat{ACB}) = \beta$, $(\widehat{DBC}, \widehat{ACB}) = \alpha$, $(\widehat{DAB}, \widehat{ABC}) = \gamma$, $[DP] \perp (AC)$, $[DK] \perp (BC)$, $[DH] \perp (AB)$, $O \in (ABC)$, $[DO] \perp (ABC)$.

1 试证: $[OH] \perp (AB)$, $[PO] \perp (AC)$, $[OK] \perp (BC)$.

2 设 O' 为内接于 $[D-ABC]$ 的球心. 问: $(O'AC)$, $(O'A'B)$ 和 $(O'BC)$ 具有何种性质?

3 点 O'' 为 $\triangle ABC$ 外接圆心. $(O''X) \perp (ABC)$, $D = S_2(A)$. 试证: $O_1 = \Sigma \cap (O''X)$ 为 $[D-ABC]$ 外接球中心.

4 试证: $|OK| : |OP| : |OH| = |\operatorname{ctg} \alpha| : |\operatorname{ctg} \beta| : |\operatorname{ctg} \gamma|$.

5 试证: $|DO| = 2S(ABC) : (a(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma))$.

6 试建立在 $[D-ABC]$ 不存在正确性时的 α, β, γ 之间的关系式.

7 试求棱锥 $DABC$ 的体积.

8 试计算 $[D-ABC]$ 内球的半径 r .

9 问: 当 α, β 和 γ 取何值时, r 为最大?

10 问: 当 α, β 和 γ 取何值, 时点 $O' \in [DO]$?

11 应用公式(6.26)于三面角 $AOCD$ 和 $AOBD$, 试求出

$\widehat{OAC}$.

12 试计算 $(AD, \widehat{ABC})$.

13 试求出 $\widehat{DAC}$ 和 $\widehat{DAB}$.

14 试计算 $(CAD, \widehat{ADB})$.

15 试求出 $[D-ABC]$ 外接球半径.

16 试求出 $[D-ABC]$ 侧面面积

17 试计算 $|O, (ACD)|$.

§6.13 旋转图形的表面面积和体积

中学的《几何》(十年级)的教材已经用不同的方法导出多面体和旋转体的体积公式.但是可以用一个统一的方法导出这些公式.对于被测多面体和旋转体的体积问题,我们简述如下.

每一个物体 T 要对应于被称为体积的可定正数 V ,以使它满足如下条件:1)立方体的棱长取作长度的测量单位,立方体的体积就是体积的测量单位;2)等边体有相等的体积;3)如果物体由几个物体组成,其中任何两个设有公共内点,则该物体的体积等于全部这些物体的体积之和.

无须证明,对于给定长度单位,所表述的问题有唯一解.

定理.任何物体的体积等于 $\int_0^H S(x)dx$ (H 和 $S(x)$ 是通用符号).

它的证明归结为 $\int_0^H S(x)dx$ 的值符合于上述所有三条件.

事实上,如果将立方体 Φ 的棱长取作长度测量单位,则 $H=1$,

$S(x)=1$, $V(x)=\int_0^1 1dx=1$.其次,在全等物体中,它们相对

应的所有部分全等。因此，如果 $\Phi_1 \cong \Phi_2$ ，则 $H_1 = H_2 = H$ ， $S_1(x) = S_2(x) = S(x)$ ， $\int_0^{H_1} S_1(x) dx = \int_0^{H_1} S_2(x) dx$ ， $\int_0^H S(x) dx$ 也具有三个性质，由下列积分性质得出：(1) 若 $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ 和 Φ_1 与 Φ_2 不具有公共的内部点，则 $S(x) = S_1(x) + S_2(x)$ 和 $\int_0^H S(x) dx = \int_0^H S_1(x) dx + \int_0^H S_2(x) dx$ ；(2) $\int_0^H S(x) dx = \int_0^h S(x) dx + \int_h^H S(x) dx$ 。

在等式 $V(\Phi) = \int_0^H S(x) dx$ 证明之后，便将确定多面体和旋转体图形体积的所有公式化为求解应用通用公式的标准问题。从而使有可能处理较为复杂的各种不同的几何图形的体积计算。

在《几何》(十年制)中指出，圆柱体、锥体、截头锥体的侧面积和表面积都可以应用相应的渐近线面积。球的表面积是当其半径增量趋于零时它的体积增量与半径增量之比的极限。

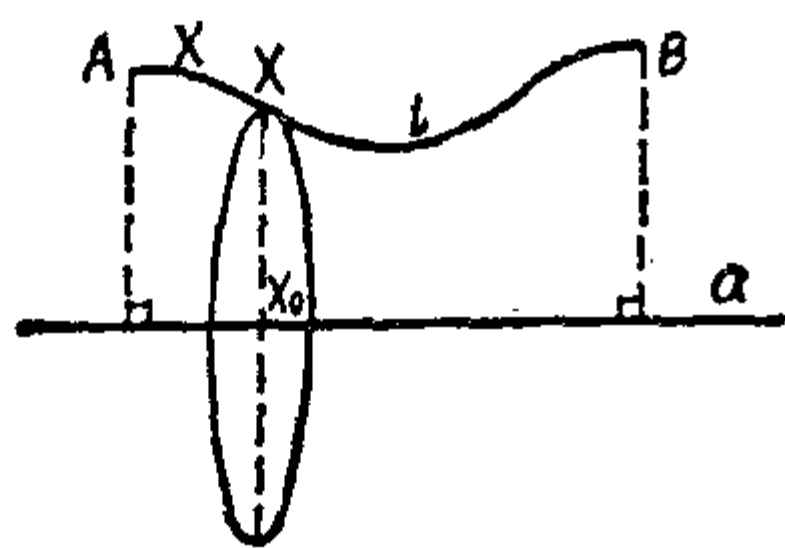


图6.98

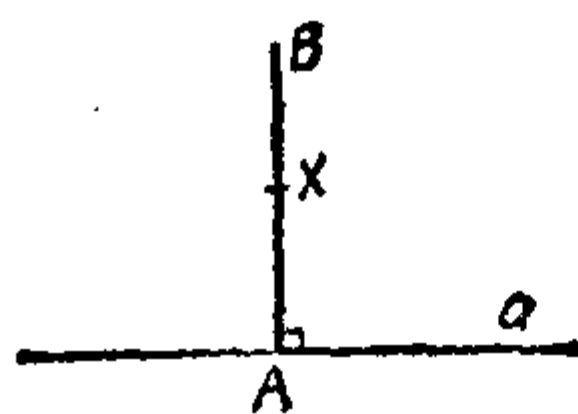


图6.99

但是，可以用旋转图形的面积公式和定义来计算。应该指出，曲边梯形的面积由公式 $S = \int_a^b f(x) dx$ 确定出来。

曲边梯形可看作由坐标 x 和 $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) 的所有线段端点联接而成。类似于连续曲线 AB 绕同平面的 a 轴旋转而成的图

形(图6.98)，可以看作由这样的所有圆周组成，此圆周的平面垂直于旋转轴，而圆心在此轴上，它们与母线 AB 相截而成。因此旋转曲面的大小由下式确定：

$$S(\Pi) = \int_0^l C(x) dx$$

式中 l 是母线 AB 的长度。

若 X 是母线 AB 上的任意一点，则 x 是曲线 AX 的长度， $C(x)$ 是旋转点 X 绕直线 a 旋转而成的周长。

当用这种方法确定旋转表面积时，针对特殊情况可以用统一算法得出计算公式。

兹列举公式 $S(\Pi) = \int_0^l C(x) dx$ 的应用。

例1 点 $A \in a$ (图6.99)， $[AB] \perp a$ ， $|AB| = r$ 。试求 $[AB]$ 绕轴 a 旋转而成的图形(圆)面积。

设 X 是 $[AB]$ 上的任意点及 $|AX| = x$ 。于是 $l = r$ ， $C(x) = 2\pi x$ 。因此 $S(\Pi) = \int_0^r 2\pi x dx = \pi r^2$ 。

例2 $[AB] \parallel a$ ， $|a, [AB]| = r$ ， $|AB| = h$ 。试求 $[AB]$ 绕 a 旋转而成的图形面积(图6.100)。

如果 X 是 $[AB]$ 的任意点，且 $|AX| = x$ ，则 $C(x) = 2\pi r$ ， $l = r$ 。因此 $S(\Pi) = \int_0^h 2\pi r dx = 2\pi rh$ 。

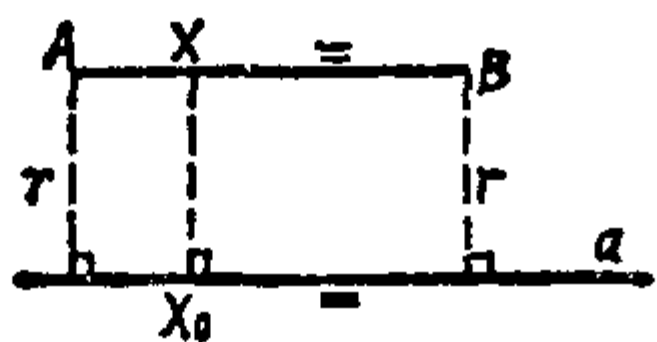


图6.100

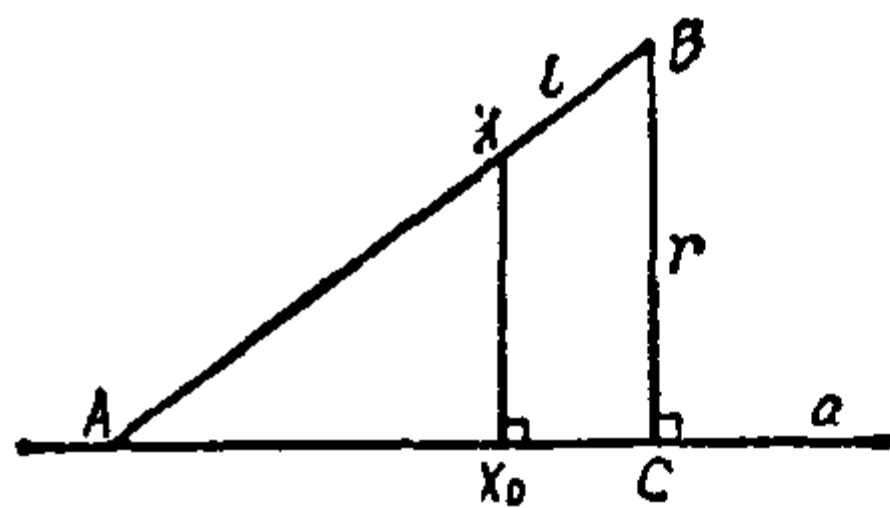


图6.101

例3 一直角 $\triangle ACB$ 绕 (AC) 旋转. 求 $[AB]$ 绕 (AC) 旋转而成的表面面积, 如果 $|AB|=l$, $|BC|=r$ (图6.101).

设 X 是 $[AB]$ 的任意点, 且 $|AX|=x$. 作 $[XX_0] \perp (AC)$. 显然, $|XX_0|:r = x:l$. 由此 $|XX_0| = xr:l$, $C(x) = 2\pi rx:l$. 因此

$$S(\Pi) = \int_0^l 2\pi(r/l)x dx = \pi rl.$$

例4 求扇形 AB 绕 (AO) 旋转而成的表面面积, 如果 $|AO|=r$, $\widehat{AOB}=\alpha$ (图6.102).

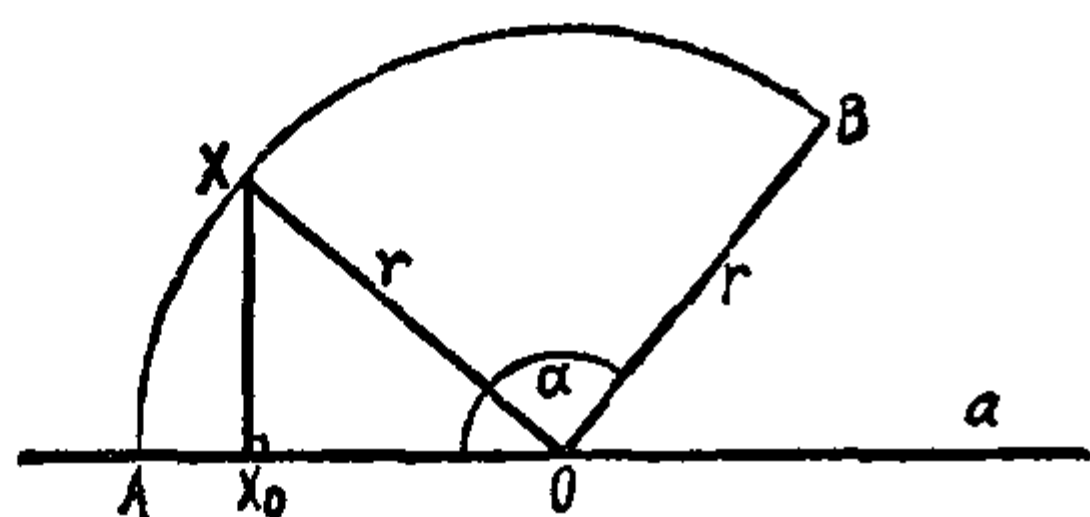


图6.102

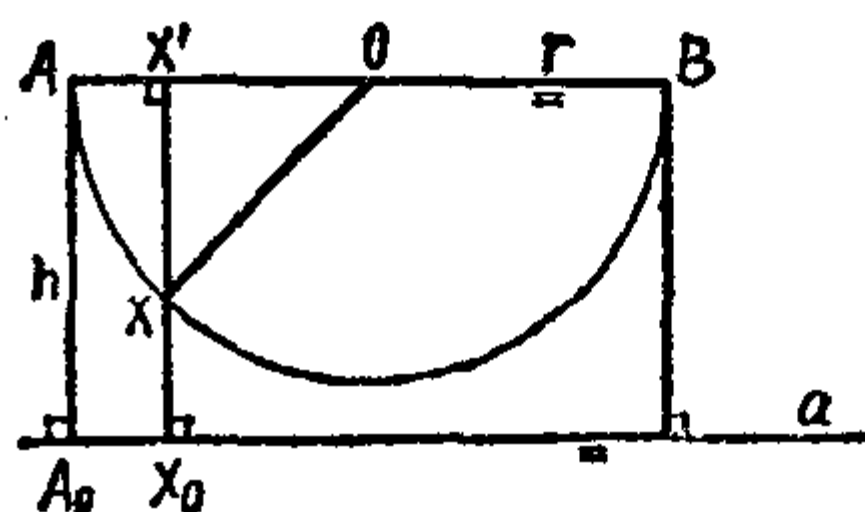


图6.103

如果 X 是弧 AB 上的任意点, 且 $\widehat{AX}=x$, 那么 $x=r(\widehat{AOX})$ (角 AOX 值以弧度表示之). 由此 $\widehat{AOX}=x:r$, $|XX_0|=r\sin x/r$, 因此 $C(x)=2\pi r\sin x/r$. 显然, $\widehat{AB}=r\alpha$. 这样, $S(\Pi) = \int_0^{r\alpha} 2\pi r\sin x/r \times dx = 2\pi r^2(-\cos\alpha + 1)$.

特别是, 如果 $\alpha=\pi$, 则 $S(\Pi)=4\pi r^2$, 即球的面积等于 $4\pi r^2$.

下面, 列举一个«非标准»的问题.

例5 一半径为 r 的半圆, 它相对于 a 的位置如图6.103所示. 试求此半圆绕 a 旋转而成的表面面积.

显然, $l=\pi r$. 如果 $X \in \widehat{AB}$, $\widehat{AX}=x$, 则

$|XX_0|=h - |XX'| = h - r\sin x/r$, $C(x) = 2\pi(h - r\sin x/r)$.

因此

$$S(\Pi) = \int_0^{\pi} 2\pi(h - r \sin x/r) d = 2\pi r(\pi h - r).$$

§6.14 内切球和外接球

在中学的立体几何中，有关多边形内切球和多边形外接球半径的计算题目，占有重要的地位，现在来简述一下这些球的基本性质。

多边形内切球球心是多边形一切二面角平分面的交点。

多边形外接球球心 O 的位置可用下述方法之一定出来：

1) 点 O 是通过多面体非平行平面外接圆的圆心并垂直于非平行平面的两条直线的交点；2) 点 O 是通过多面体非平行棱中点、并垂直于这些棱的三个平面的交点。3) 点 O 是通过一个面的外接圆圆心，且垂直于此圆的平面 Σ 的直线和垂直于过不与 Σ 平行的棱的中点的平面，且垂直于此棱的直线的交点。

一个球面是由四个非共面的点所确定的。因此，求解多面体外接球半径的任何习题都可由其内切球的证明和计算绕某个三棱柱外接球的半径（顶点是给定多面体的顶点）得出。

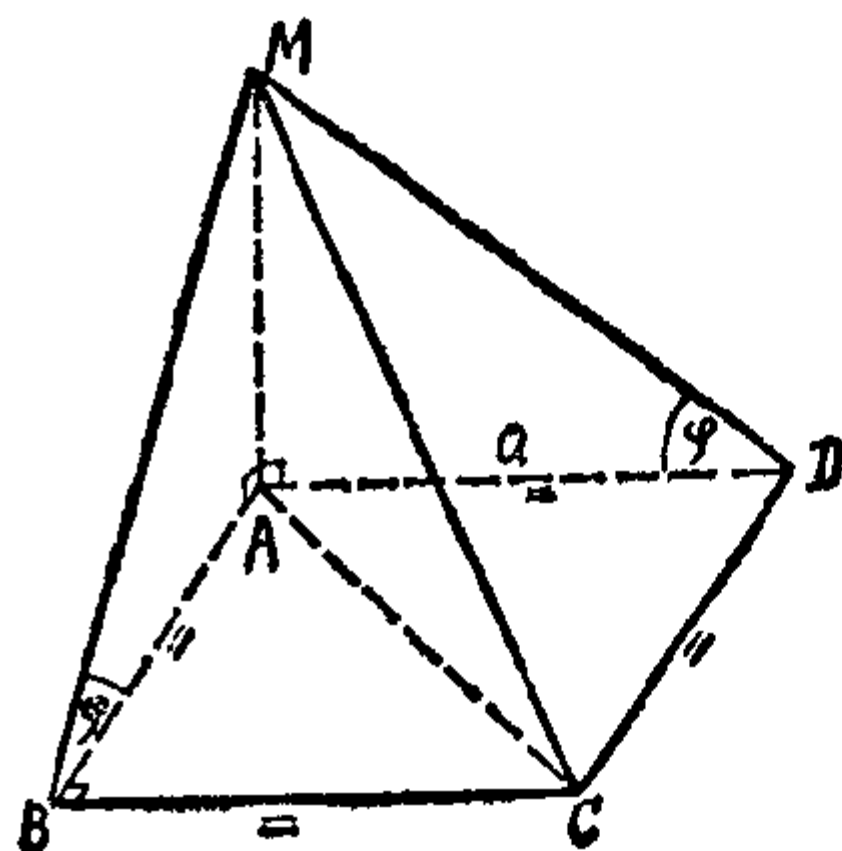


图6.104

例1 边长为 a 的正方形是棱锥的底，底棱的两个二面角为直角，而另外两个二面角等于 φ 。求棱锥内切球的半径。

[MA] 是棱锥的高（图6.104）。因此

$$V = \frac{1}{3} |MA| a^2 = \frac{1}{3} a^3 \operatorname{tg} \varphi;$$

$$S(MAD) = S(MAB) = 0.5 a^2 \operatorname{tg} \varphi;$$

$$S(MB) = S(ACB) : \cos \varphi = 0.5 a^2 : \cos \varphi.$$

于是，棱锥的全面积是：

$$S = a^2 (1 + \operatorname{tg} \varphi + 1 : \cos \varphi).$$

因而

$$\begin{aligned} r &= 3V : S = a^3 \operatorname{tg} \varphi : (a^2 (1 + \operatorname{tg} \varphi + 1 : \cos \varphi)) \\ &= \frac{a \sin \varphi}{\cos \varphi + \sin \varphi + 1}. \end{aligned}$$

练习

1 在 $[D-ABC]$ 中， $\hat{ADC} = \hat{CDB} = \hat{ADB} = 90^\circ$ 。试作出棱锥外接球的球心。

2 在 $[D-ABC]$ 中， $(AC) \perp (BCD)$ ， $\hat{BDC} = 90^\circ$ 。试作出棱锥外接球的球心，并求出半径。如果 $|AB| = 10$ 。

3 在 $[D-ABC]$ 中， $|AD| = |DB|$ ， $(DC) \perp (ADB)$ ， $\hat{ADB} = 120^\circ$ 。试作出棱锥外接球的球心。

4 在 $[D-ABC]$ 中， $\hat{ACB} = 90^\circ$ ， $|AC| = |CB| = |CD| = |DB| = |AD| = 2$ 。试作出棱锥的高 DH 和棱锥外接球的球心。并求出 $(DAB, \hat{ABC})$ ， $(CD, \hat{ACB})$ ， $(DCB, \hat{CBA})$ ， $(DA, \hat{CAB})$ 。

5 在 $[D-ABC]$ 中， $(DB) \perp (ABC)$ ， $\hat{ACB} = 90^\circ$ ， $|AC| = |DB| = 3$ ， $|CB| = 4$ 。试由过 (AC) ， (DB) ， (AB) 并分别等分二面角的平面作出棱锥截面。作出内切于棱锥的球的球心。

§ 6.15 解几何题的形式

学生在书写题设条件、作图、求解过程时，往往比寻找习题解答本身所花费的时间还要多，不仅如此，一些繁琐的解题修饰方法使得教师无法很快地予以检验它。本小节，我们试图指出各种不同几何题的一些更合理，更迅速的写出解出解答的方法。

教材上的习题应满足许多要求，其中包括：题目本身应该表述得充分严密；解答尽可能简短（但理由充分）；教师能有效地掌握学生的独立作业。

如果系统地利用中学几何教材上采用的集合符号，以及习题中常研究的图形及其间比例的符号，是能够达到上述诸点要求的。

这些符号是： $\Gamma, \Sigma, \Theta, \dots$ 是平面； $|\Phi, \Phi_1|$ 是图形 Φ 和 Φ_1 之间的距离； $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB}$ 的点 M 是 $[CB]$ 的中点； $\overrightarrow{AK} = 0.25 \overrightarrow{AA_1}$ 是点 K 属于线段 AA_1 ，并从顶点 A 算起把它分为 $1:3$ ； $\square ABCD$ 是正方形； $\square ABCD$ 是矩形； $\square ABCD$ 是平行四边形； $\diamond ABCD$ 是菱形； $\square ABCD$ 是梯形； $\triangle ABC \overset{20^\circ}{\cong} \triangle MKP$ 是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle MKP$ 全等； $[M-ABCD]$ 是以 $ABCD$ 为底的棱锥 $MABCD$ ； $[M-ABCD]^n$ 是以 $ABCD$ 为底的正棱锥； $(\widehat{AB}, CD)$ 是 (AB) 和 (CD) 之间角的数值； $[ABCD-A_1B_1C_1D_1] \perp$ 是以 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$ 为底的直棱柱； $(\widehat{AD}, ABC)$ 是 (AD) 和 (ABC) 之间角的数值； $(\widehat{ABC}, BCD)$ 是半平面 BCA 和 CBD 之间二面角的数值。

下面，列举一些直观性例子来说明题设条件及解题符号写法的优点（简明，清晰，直观，论证完备）。

例1 $[ABCD-A_1B_1C_1D_1]$ 是立方体； $|AB|=2$ 。试求：

$A_1 \widehat{BD}; (DC_1, \widehat{ADD_1}); (A_1 \widehat{D_1}, C_1 B); (A_1 \widehat{B_1}, C_1 C A_1);$
 $(A_1 \widehat{AC}, A_1 AB); (DB_1, \widehat{A_1 AC}); (A_1 \widehat{B}, DC); (DC_1 \widehat{B}, A_1 AC);$
 $(C_1 \widehat{B}, A_1 C_1 C); |A_1, (BDC_1)|.$

例2 在 $\Phi_1 = [ABCDEF - A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1]^{\Pi}$ 中, $|AA_1| = 4$ 试作出 $\Phi = \Phi \cap (ABD)$ 并求出 $S(\Phi_1)$, 如果 $|AB| = 4$.

例3 试作出梯形 $ABCD$ ($[BC] \parallel [AD]$), 其中 $|BC| = b$, $|AD| = a$, $|AC| = d$, $|BD| = m$.

学生在作出全等于待求梯形 $ABCD$ 的梯形 $X_1 X_2 X_3 X_4$ 中, 连续构图步骤在图 6.105 上可清楚看出: 作出给定长度 a 的 $[X_1 X_2]$ 在 $(X_1 X_2)$ 得到给定长度 b 的 $[X_2 X_3]$; 根据三个已知边得到 $\triangle X_1 X_3 X_4$; 过 X_4 作出平行于 $(X_1 X_3)$ 的直线, 过 X_2 作出平行于 $(X_3 X_4)$ 的直线; 得到点 X_5 .

教师看图 6.105, 就可立即评定习题的解答, 阅读解释文字已无必要.

例4 给定圆 ω 及其上的三个不重复的点 H, L, M , 这些点

是此圆内接三角形 ABC 自顶点 A 起的高, 角平分线和中线的延长线与圆的交点. 试作出此三角形.

此题的全部解答都示于图 (图 6.106) 上, 在图旁边给出了简单却又十分完备的论证. 我们来读完图 6.106 上所示的解题过程.

在 ω 上作出了点 X_1 ($X_1 L = LH$). 弧 $X_1 H$ 的中点用小 x 在图

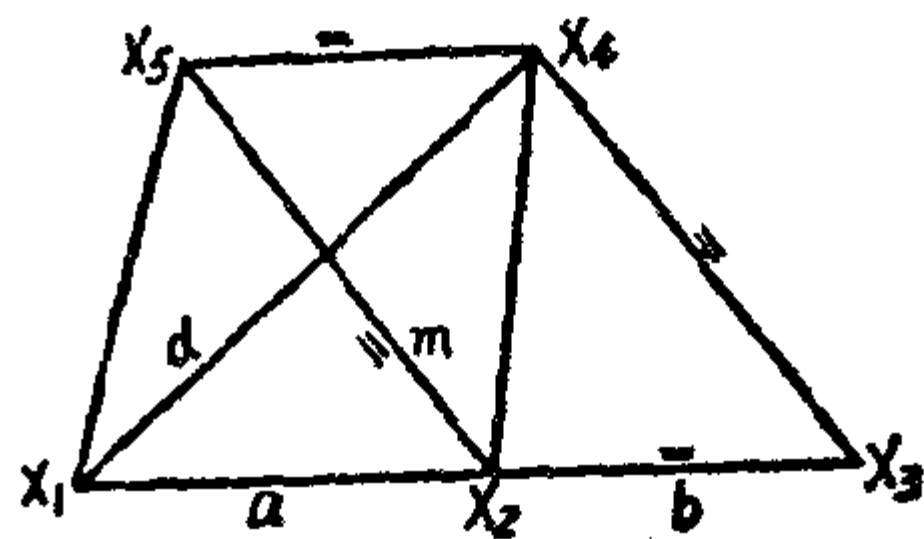


图 6.105

• 在 $\cong$ 上的数码表示苏教材上的相应定理编号——译注, 下同。

$BL=LC \Rightarrow 1.$
 $(BC) \cap (HX_1) \Rightarrow 2.$
 $43 \Rightarrow 3.A$

例5 给定角 BAC 内的一点 O 。试在角的两边上作出点 X 和 Y ，使得 $\overrightarrow{XO} = \overrightarrow{OY}$ 。

• 184 •

例6 $\Phi = [ABCD - A'B'C'D']$ 是长方体。 $|AB| = 12$, $|AD| = 16$, $|AA'| = 14.4$; $(C'A) \subset \Sigma$, $\Sigma \parallel (BD)$. 试作出 $\Phi' = \Sigma \cap \Phi$ 并求出 $S(\Phi)$.

图6.108表明, 怎样用平面 Σ 作出平行六面体的截面 Φ' , 怎样论证每一个构图步骤以及如何拟定算出截面面积的步骤.

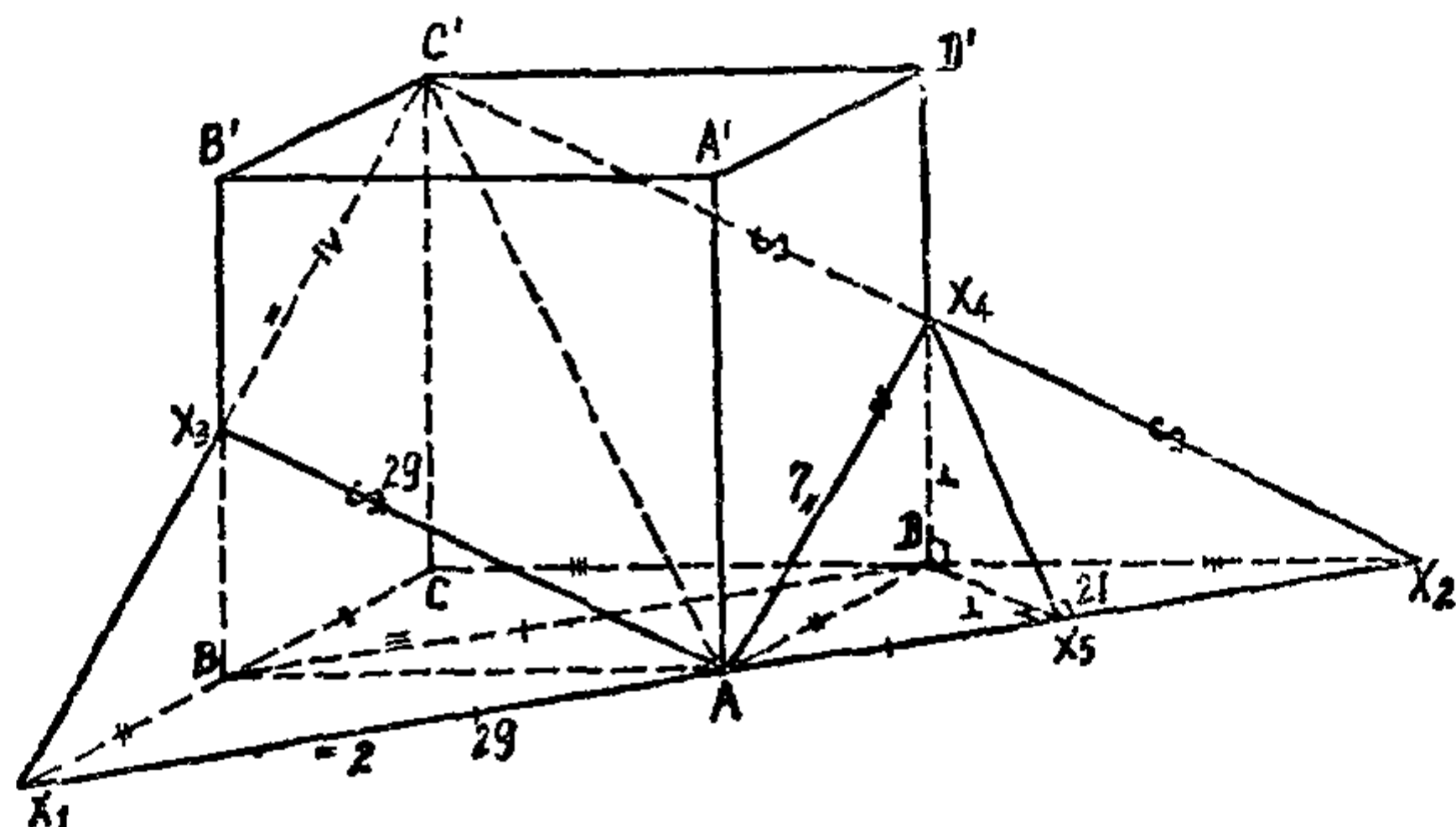


图6.108

所画图形应该精确, 并具有能够清楚表明单个图形之间形象地比例尺寸, 还要指出其性质. 用不同的颜色描绘出图形的已知量和未知量. 同样应把辅助作图区别开来. 图上一定要针对“证明题”和“计算题”的要求分别采用记号: !, ?. 下面举例说明如何合理的应用符号简化证明题和计算题的形式.

例7 给定 $[D-ABC]$, $\hat{ADB} = \hat{BDC} = \hat{ADC} = 90^\circ$, $|AD| = 6$, $|DC| = 8$, $|DB| = 24$, X 是 $[D-ABC]$ 外接球的球心. 试求 $|DX|$.

设: 在投影图上求出点 X , 如图6.109所示. 以后的计算极为简单: $|DX| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

例8 图6.110为立方体 $ABCD A'B'C'D'$ 的图形. 平面 $A'AD$ 平行于平行投影 (图平面) 的平面. 作立方体的棱 BB' 和 $A'D'$ 交于点 X , 使 $|A'X| : |XD| = 4:1$ 和 $|B'X| : |XB| = 3:2$,

试求投影在投影平面上的方向倾角 φ 。

问题的完备解答（具有论据）示于图6.111。

例9 给定： $(AK) \perp (ABC)$ (1); $(BM) \parallel (AK)$ (2), $(BM) \perp (ABC)$ (3);

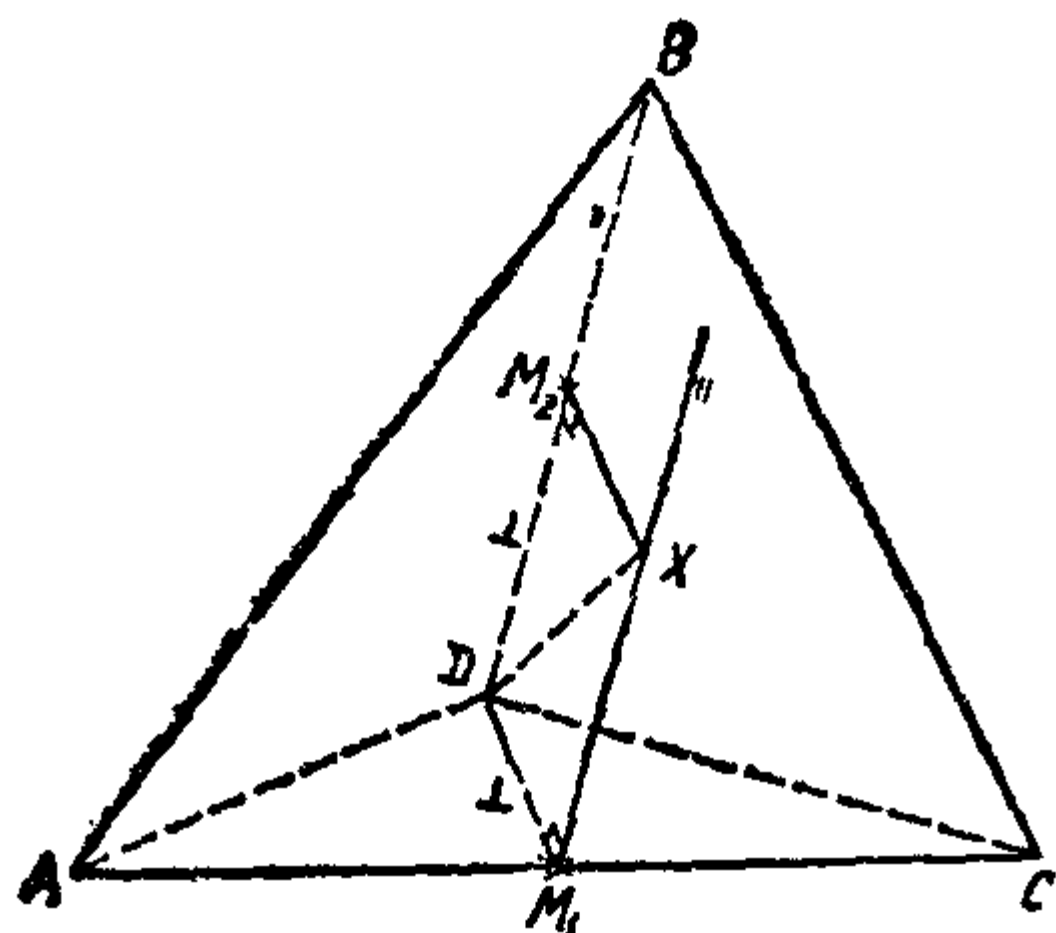


图6.109

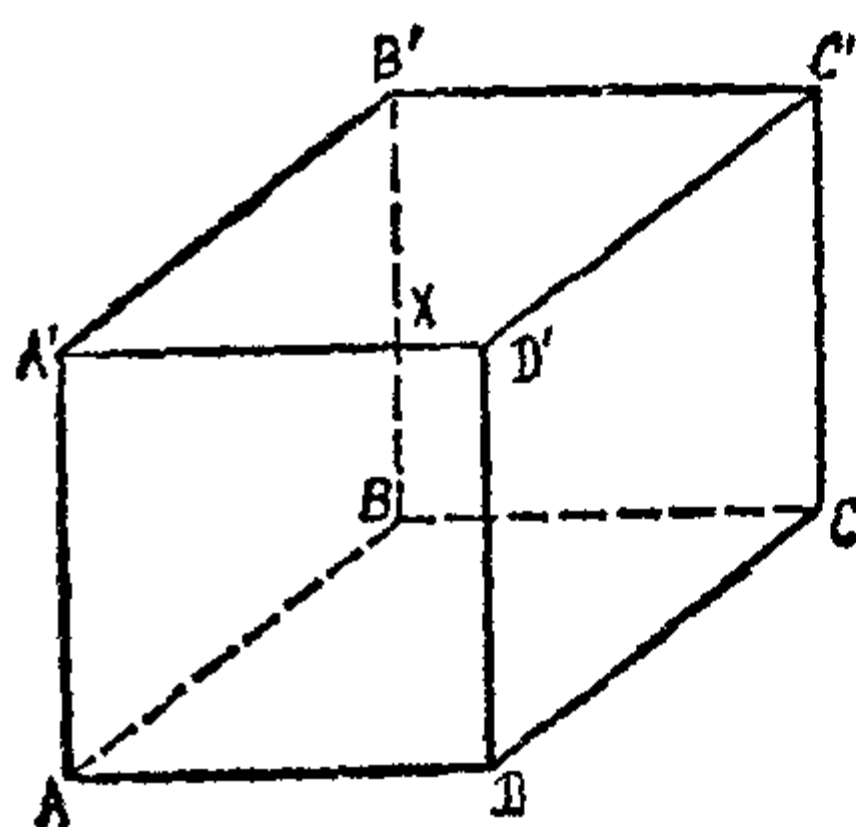


图6.110

解 (2) $\Rightarrow \vec{BM} = x \vec{AK}$ (图6.112); (1.) $\Rightarrow \vec{AK} \cdot \vec{AB} = \vec{AK} \cdot \vec{AC} = 0$; $\vec{BM} \cdot \vec{AB} = x \vec{AK} \cdot \vec{AB} = 0$ (3.); $\vec{BM} \cdot \vec{AC} = x \vec{AK} \cdot \vec{AC} = 0$; (4.) ((3.)和(4.)) $\Rightarrow (BM) \perp (ABC)$.

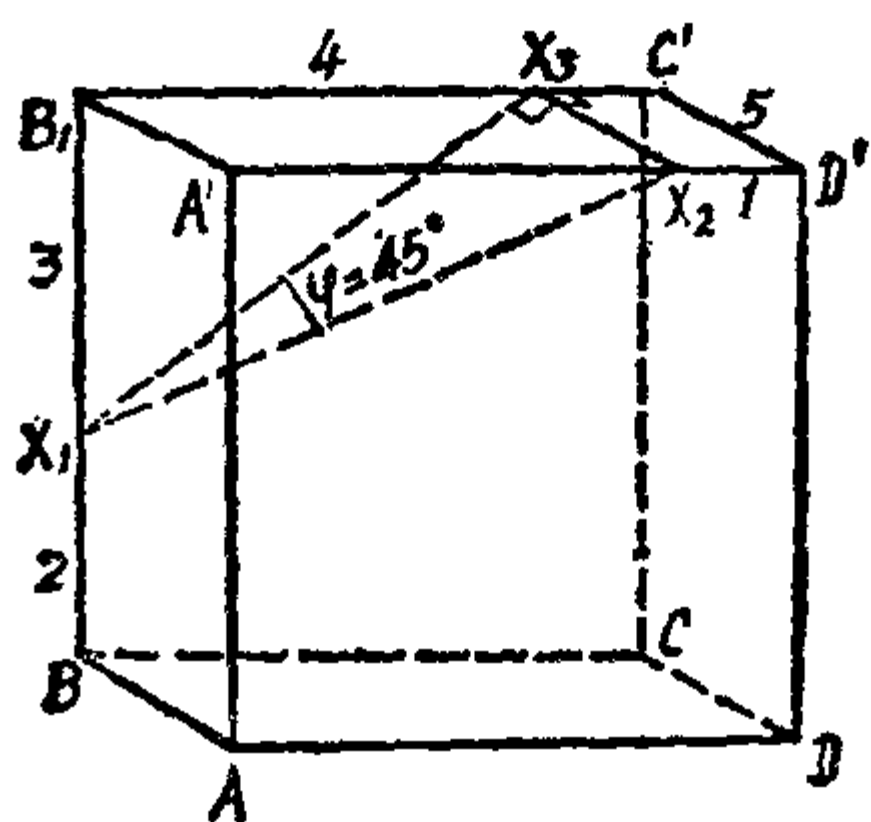


图6.111

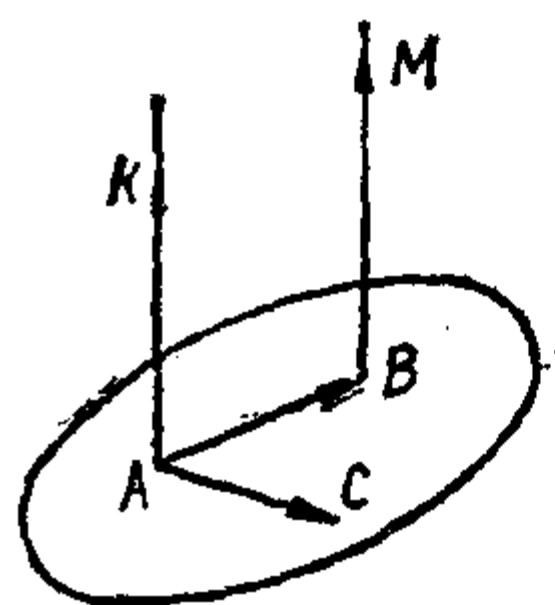


图6.112

此题经研究后，不难用《几何》（九年制）的逆定理15的方法加以证明。

例10 给定: $[M-ABC]$, $|AM| = |MB|$, $|AC| = |CB|$, $[CD] \perp (AB)$, $[MH] \perp (CD)$, $[MH] \perp (ABC)$!

命题的完备证明方法示于图6.113上 (引证教材上相应定理)。写下 $[MH] \perp (ABC)$ (6.7.14) 为全部讨论作出总结。

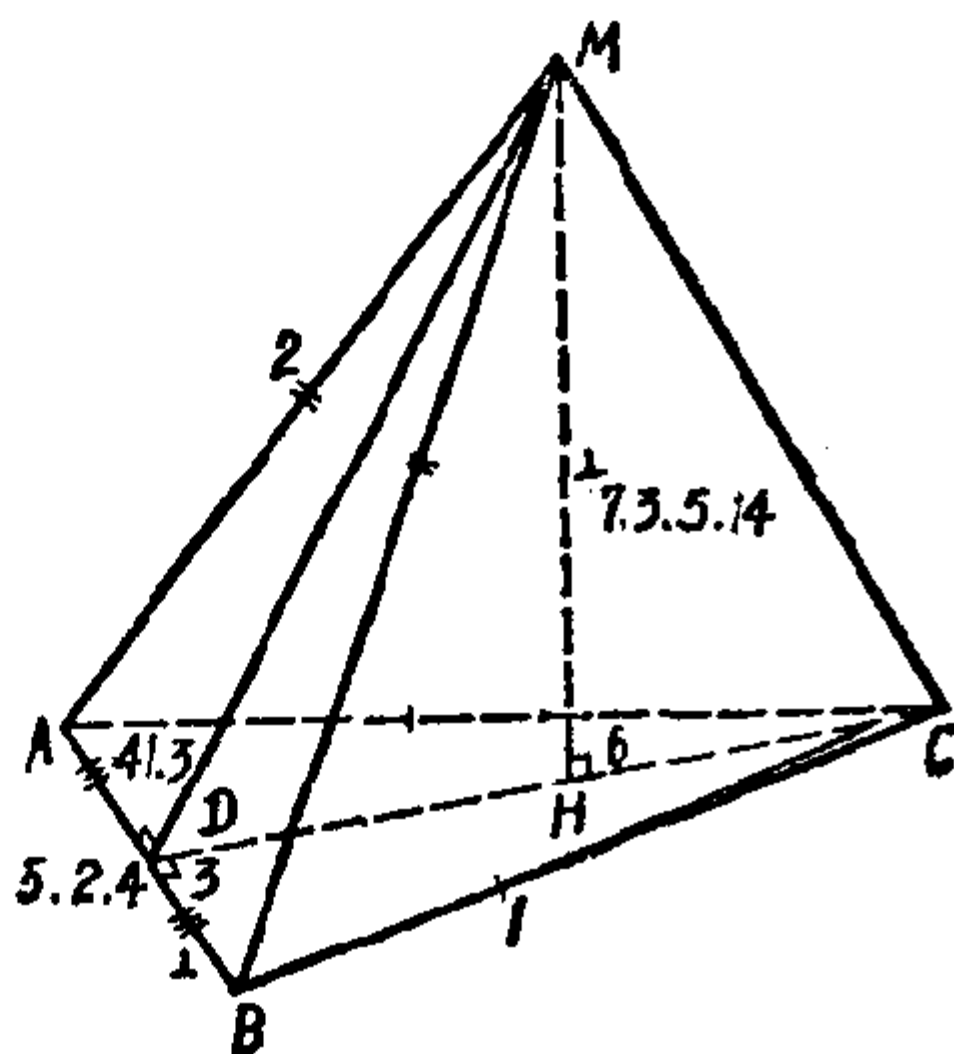


图6.113

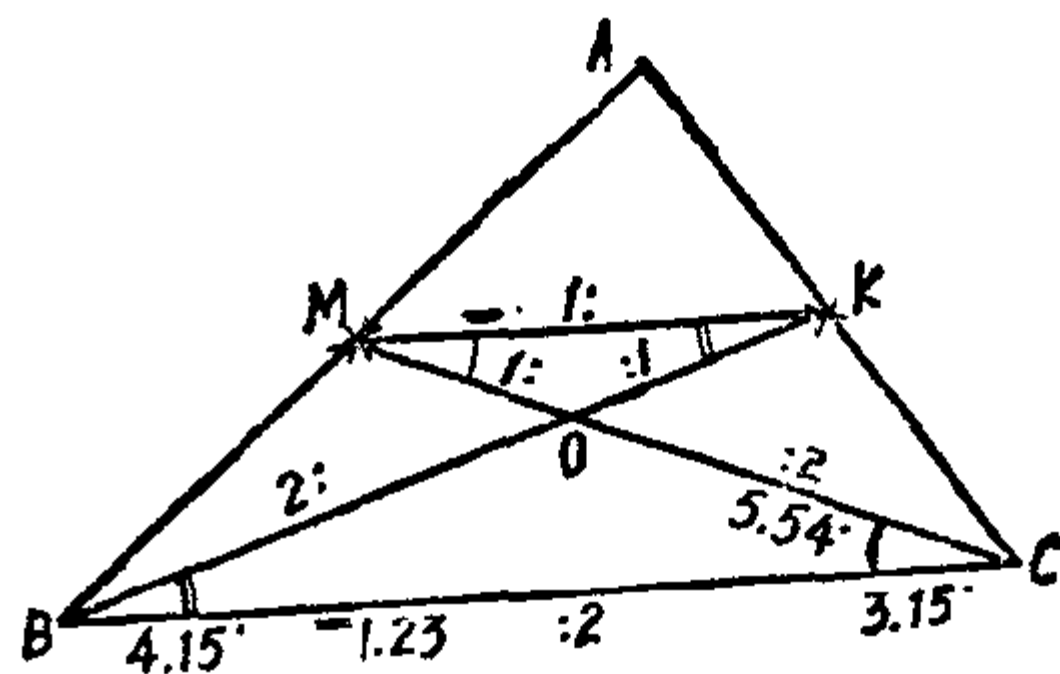


图6.114

例11 给定: $\triangle ABC$, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, $O = (BK) \cap (MC)$. $|MO| : |OC|$? $|KO| : |OB|$?

图6.114指出了题设条件、解题经过、证明和答案。

如果各种不同几何图形和其间的比例的约定记号从四年级开始就被系统地加以应用, 那么, 学生就会正确无误和合理地利用它们, 并且乐意采用各种各样的记号, 因此, 使学生避免繁琐的解法叙述。

最后, 我们举例指明, 利用图形的特殊处理方法, 如何能快速检查学生理解几何图形的许多性质和概念的掌握情况。

在图6.115上, 画出了长方体 $[ABCD-A'B'C'D']$. 其中, $|AD| = 4$, $|DC| = 3$, $|AA'| = 8$.

按图上的编号, 指出: 1) $\angle(A_1D, ABC)$; 2) $\angle(DD', BC)$; 3) $\angle(CA, BB'C')$; 4) $\angle(B'C'C, A'C'C)$; 5) $\angle(CA_1B_1, A_1$

B_1B).

投影: 6) $[B'D_1]$ 在 (ABC) 上; 7) $[AD]$ 在 $(C_1C'B')$ 上;
8) $[C'C]$ 在 (CBB') 上; 9) $[XY] \parallel (BB'D')$; 10) $[XY]$, 如果
 $(\widehat{XY, BCA}) < 90^\circ$; 11) 直角; 12) 钝角; 13) 最大面积的正方
形; 14) $[XY] \perp (B'D'D)$; 15) $[XY]$, 如果 $0 < (\widehat{XY, B'D'D})$
 $< 90^\circ$; 16) $\angle(B'D_1, ABC)$; 17) $[XY]$ 和 $[X'Y']$, 如果
 $(XY) = S_{(A_1DC)}(X'Y')$; 18) $[XY]$ 和 $[X'Y']$, 如果 $|(XY),$
 $(A_1DC)| = |(X'Y'), (A_1DC)|$; 19) $[XY]$, 如果 $|[XY],$
 $(A'B'C')| = |(XY), (ADC)|$; 20) $[XY]$, 如果 $(\widehat{XY, B'BC'})$
 $= (\widehat{XY, C'D'C})$; 21) $\angle(A'OO', OO'B')$.

学生在单页纸上只写出图号.

答 1) 4; 2) 1; 3) 6; 4) 6; 5) 3; 6) 8; 7) 9; 8) 14;
9) 10, 14, 8, 11, 22; 10) 11, 22, 11) 1, 2, 12, 13;

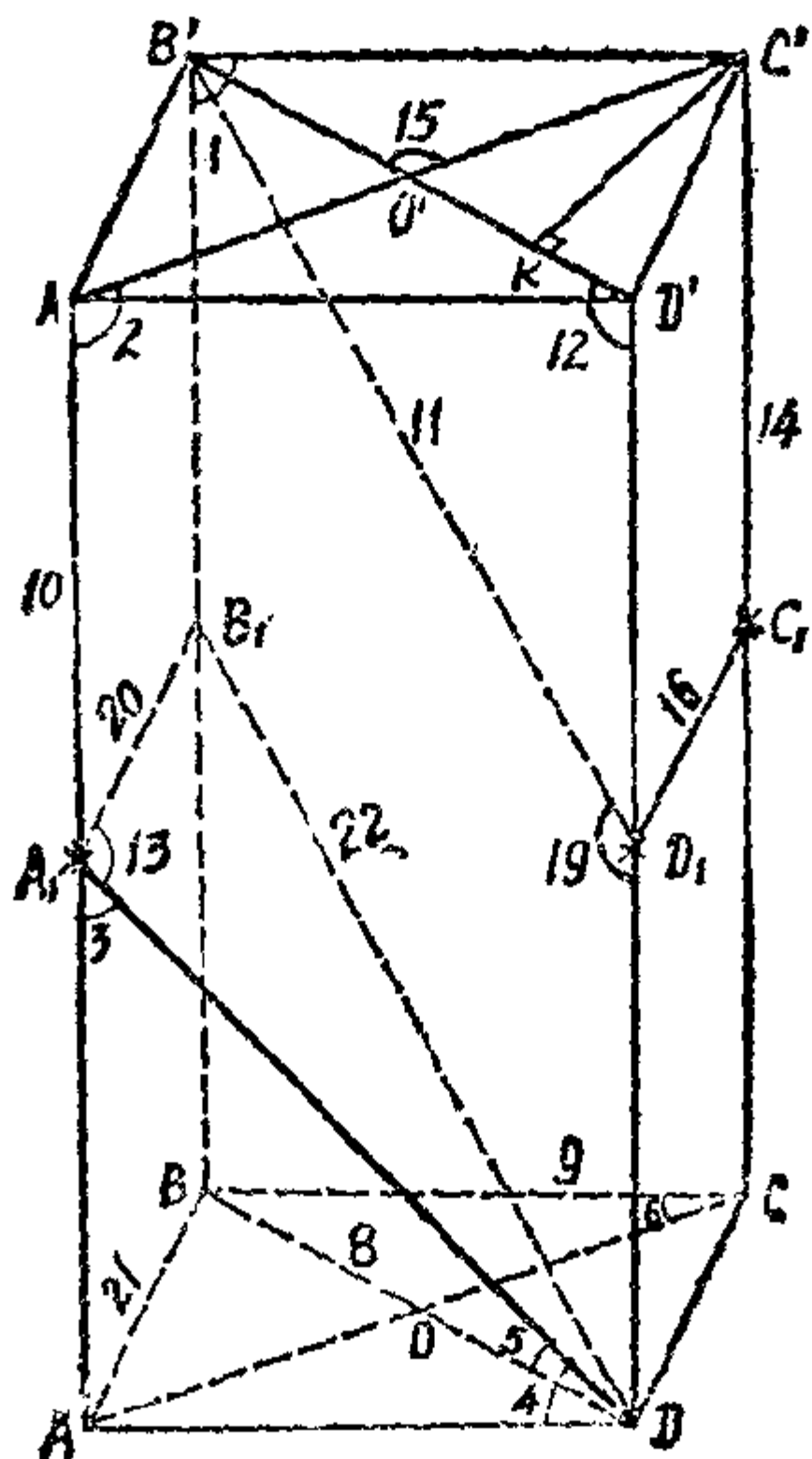


图6.115

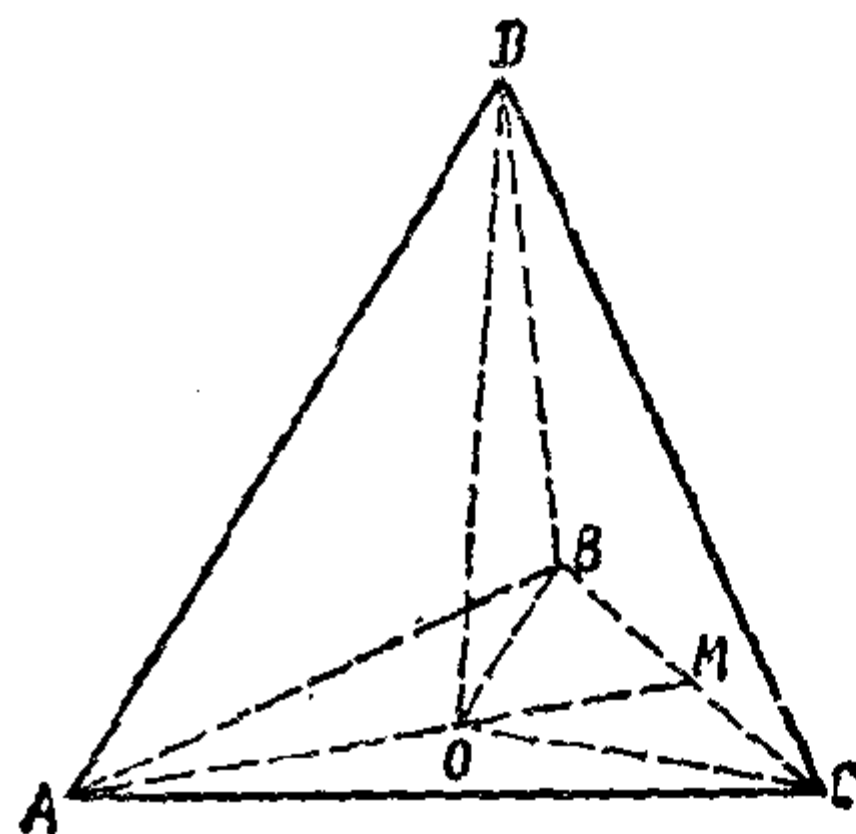


图6.116

12) 19; 13) $BDD'B'$; 14) 23; 15) 16, 20; 16) -; 17) 16
和21, 20和20, 22和22; 18) 21和16, 20和22; 19) 20, 16;
20) 10, 14; 21) 没有

§ 6.16 解题讨论

解含参数的题, 不仅要找到几何图形的待求元素的值, 而且要确定使得习题有解时参数的值. 通常, 在得到题的答案之后 (根据表示图形已知元素和未知元素之间关系的公式) 进行解的讨论. 但是, 常常是开始确定参数的允许值. 然后进行运算, 比较合理. 这样的步骤不仅使得讨论本身简化, 而且可找到更合理的解答, 可避免确定使得习题有解时参数值的可能错误.

例1 在 $[D-ABC]$ 中, $|AB| = |AC|$, $|BC| = a$, $\widehat{BAC} = 2\alpha$, $|DA| = |DB| = |DC|$, $\widehat{DAC} = \beta$. 试求 $|AD|$.

棱锥的侧棱相等. 因此, $\triangle ABC$ 外接圆圆心是棱锥高的垂足 (图6.116). 因为 $|AB| = |AC|$, 所以, $O \in [AM]$ ($\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$). 角 OAC 是角 DAC 在 (ABC) 上的正交投影. 角 DAC 为锐角. 角 OAC 也是锐角. 因此, $[D-ABC]$ 当且仅当 $0 < \beta < 90^\circ$, $0 < \alpha < 90^\circ$ 和 $\beta > \alpha$ 时存在.

现在解算此题.

我们记作: $\widehat{DAO} = x$. 由 $\triangle AOD$ 得 $|AD| = |AO| : \cos x$. $[AO]$ 是 $\triangle ABC$ 外接圆半径. 因此, $|AO| = |BC| : 2\sin 2\alpha = a : 2\sin 2\alpha$. 角 x 由直角三面角 $AODC$ 求得:

$$\cos \beta = \cos \alpha \cos x; \quad \cos x = \cos \beta : \cos \alpha.$$

因而,

$$|AD| = |AO| : \cos x = a \cos \alpha : (2 \sin 2\alpha \cos \beta)$$

$$=0.25a:\sin\alpha\cos\beta.$$

因为对于钝角 α 和 β 数值 $0.25a:\sin\alpha\cos\beta>0$, 所以解这道题的很多人都认为对 α 和 β 不需要附加任何补充条件. 预先完成的研究可避免此错.

练习

试确定: 参数取何值时, 下列各题有解 (不求解这些题).

1 求 $[M-ABCD]^{\Pi}$ 的全表面, 其中 $|AB|=a$, $\widehat{MAB}=\varphi$.

2 在 $[D-ABC]$ 中, $|DA|=|DB|=|DC|=a$; $\widehat{ADB}=\alpha$, $\widehat{BDC}=\beta$, $\widehat{CDA}=\gamma$. 试求棱锥的体积.

3 在 $[M-ABCD]^{\Pi}$ 中. $|DA|=a$, $(\widehat{BAM}, \widehat{AMD})=\alpha$, 试求棱锥的体积.

4 在长方体 $[ABCD-A_1B_1C_1D_1]$ 中, $(\widehat{BD_1}, \widehat{ABC})=\alpha$, $(\widehat{BD_1}, \widehat{ABB_1})=\beta$, $|AA_1|=a$, 试求长方体体积.

5 试求正六棱锥的侧面面积, 其中侧棱等于 b , 侧棱的二面角等于 φ .

6 一正四棱锥的底边为 a , 侧面与底的倾角为 α . 过棱锥的底边作垂直于对面侧平面并与其侧棱相交的平面. 试求此梯形截面的面积.

§ 6.17 几何题解的检验

对所得结果进行检验, 这是与寻找解题途径相关联的多方面步骤的组成部分. 现在来简述一下能快速检验各种不同题解的几种建议.

1 平面几何计算题(不含参数解的检验可通过作出相应图形并量度其各个元素(得答案的近似值)来实现).

例1 试计算三角形 ABC 中线 AM 的长度。已知三角形中 $|AB|=12$, $|BC|=13$, $|CA|=14$ 。

作出 $\triangle ABC$ 并量度 $[AM]$ 后,我们就得到能判断 $|AM|$ 精确值的 $|AM|$ 近似值。

2 平面几何计算题 (含参数)解的检验可通过如下方法进行: 1)解参数取某特殊值时的习题并将所得结果与一般形式的答案比较; 2)解作图题 (参数取某一值)。

例2 在四边形 $ABCD$ 中, $\widehat{BAD} = \alpha \leq 90^\circ$, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, $|AB|=a$, $|AD|=b$ 。试求 $x = \widehat{BAC}$ 。

由计算所得的 $\operatorname{tg} x = (b : a \cos \alpha) : a \sin \alpha$ 可检验 1) 给定 $\alpha = 90^\circ$ 和 $a = b$ 或 $\alpha = 60^\circ$ 和 $a = b$, 2) 作出四边形 $ABCD$, 给定 α , a 和 b 为某个数值后, 通过量度可求出 $\widehat{BAC}$ 的近似值。

3 平面几何作图题 (含参数) 解的正确性, 可借助给定参数取不同值时所求图形的作图来检验。

4 立体几何计算题 (不含参数) 解的正确性, 可通过作出相应空间图形的展开图, 随后量度线段和角度值检验。如用参数代替某些数据, 也可以解出这个问题。

例3 在 $[D-ABC]^{\Pi}$ 中, $|AB|=4\text{cm}$, $|AD|=6\text{cm}$ 。平面

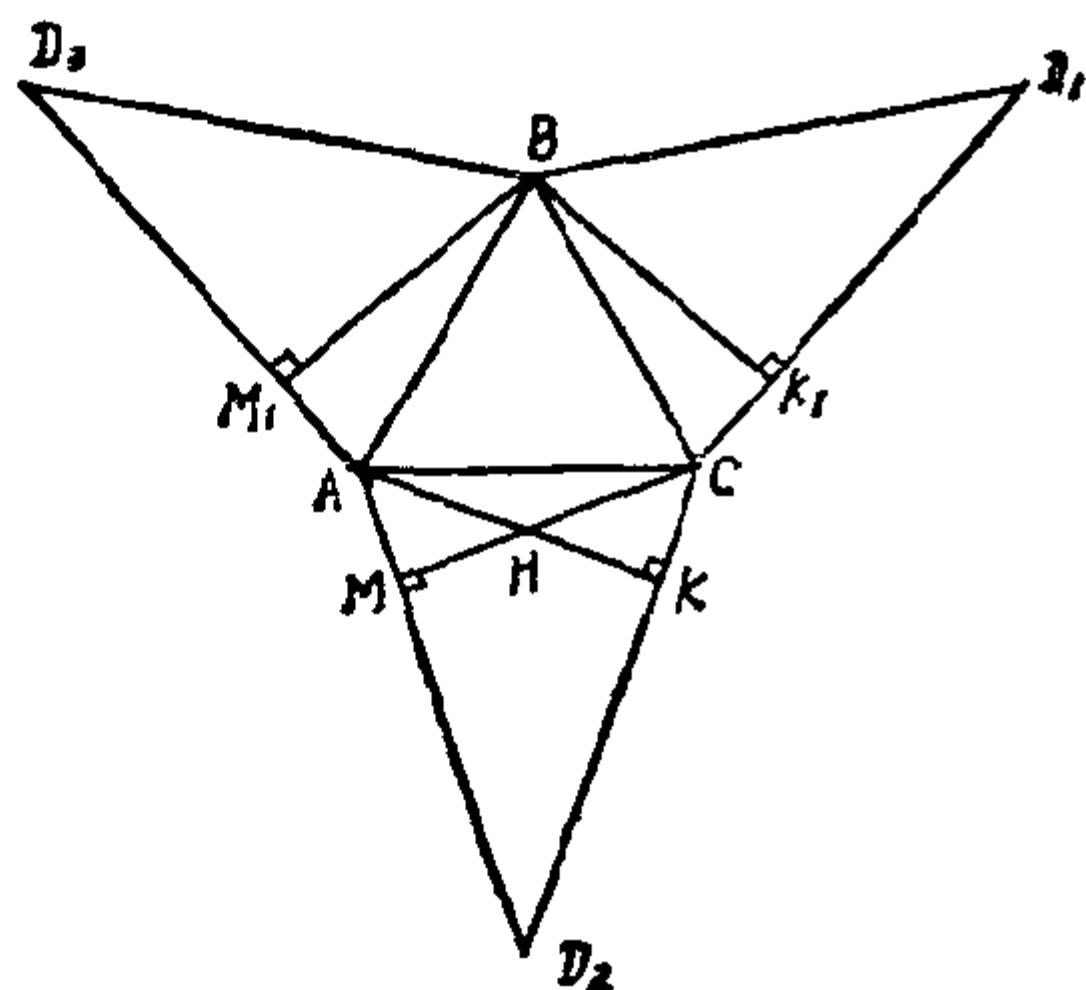


图6.117

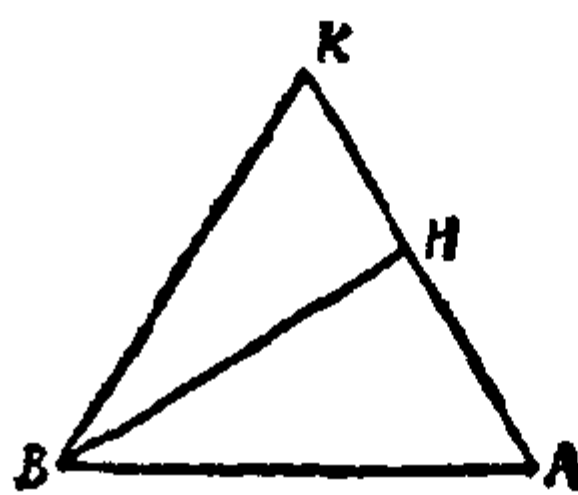


图6.118

Σ 过 A 且 $\Sigma \perp (CD)$ 。平面 Γ 过 C 且 $\Gamma \perp (CD)$ 。点 $H = (ACD) \cap \Gamma \cap \Sigma$ 。试求 $|HB|$ 。

作棱锥 $DABC$ 的展开图(图6.117)。作 $\triangle BKA$ 及线段 BH (图6.118)。通过量度得 $|BH| \approx 3.4\text{cm}$ 。

精确答案为: $|BH| = \sqrt{23:2}$ (测量误差小于千分之一)。

5 立体几何计算题(含参数)解的检验与平面几何类似的题一样进行。

第七章 非标准问题的解法

§ 7.1 数的还原问题

数的还原问题明显地表现出综合的特性。解这种题目时，要利用自然数的许多性质：偶数相乘为偶数；奇数相乘为奇数；使得 k 位数乘一位数得 k 位数或 $(k+1)$ 位数的条件；自然数的特征，等等。

例1 将下数还原(以 $\times$ 记作从 0 至 9 的数字)：

$$\begin{array}{r}
 (1) \quad \times \times 7 \times \times \times \times \times \times \times \times \mid \times \times \times \times 7 \times \\
 (2) \quad \times \times \times \times \times \times \times \mid \times \times 7 \times \times \\
 \hline
 (3) \quad \times \times \times \times \times 7 \times \\
 (4) \quad \times \times \times \times \times \times \times \\
 \hline
 (5) \quad \quad \times 7 \times \times \times \times \\
 (6) \quad \quad \times 7 \times \times \times \times \\
 \hline
 (7) \quad \quad \times \times \times \times \times \times \times \\
 (8) \quad \quad \times \times \times \times 7 \times \times \\
 \hline
 (9) \quad \quad \quad \times \times \times \times \times \times \\
 (10) \quad \quad \quad \times \times \times \times \times \times \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

为了简化讨论，我们把各行编上号码。在行上写明在用 1 至 10 的数除的过程中所得的数。

除数是六位数。商数的第三位数是 7。六位数乘 7 得六位数(见第 6 行)。但这只是当且仅当除数是以数字 1 起首时才有可能。于是，除数形为：

$$1 \times \times \times 7 \times .$$

为简化讨论，将除数和商写成如下形式：

$$1 \overline{ABV} 7 \Gamma$$

$$DE 7 \mathcal{K}K.$$

其次，在第 2、6、10 行中是六位数。在第 4、8 行中是七位数。因此

$$E = 8 \text{ 或 } E = 9, \quad \mathcal{K} = 8 \text{ 或 } \mathcal{K} = 9, \quad 1 \leq A \leq 4.$$

如果数 $1 \overline{ABV} 7 \Gamma$ 乘 8 或 9 得 7 位数，则这个数一定是从数字 1 起首的。因此，第 4 和第 8 行中的数是从 1 起首的。

假设 $A = 4$ ，那么，设第 6 行中的数是以数字 9 起首的，但因为从六位数(行 5)减六位数(行 6)得六位数(行 7)，所以这是不可能的。于是 $A \neq 4$ 。根据同样原因 $A \neq 3$ 。因而

$$A = 1 \text{ 或 } A = 2.$$

假设 $A = 1$ ，那么根据第 6 行，我们得 $B = 1$ (由第 4 和第 8 行得 B 不可能等于零；由第 6 行得 B 不可能大于 1)。

于是我们假设除数为

$$111B 7 \Gamma$$

由 4 和 8 行得 $B \neq 0$ 。另一方面， $B < 4$ (由第 6 行得)。

如果除数具有下列形式：

$$11117\Gamma, 11127\Gamma, \text{ 或 } 11137\Gamma,$$

那么，第 8 行中 Γ 取任何值，右起第三位数字都不可能等于 7。

因而， $A \neq 1$ 和 $B > 3$ 。

于是，除数具有如下形式：

12BB7Г

到现在为止，我们把所有已确定了数字都记入给定的例中：

$$\begin{array}{r}
 \times \times 7 \times \times \times \times \times \times \times \mid 12BB7Г \\
 \times \times \times \times \times \times \mid \hline DE7ЖК \\
 \hline
 \times \times \times \times \times 7 \times \\
 1 \times \times \times \times \times \times \\
 \hline
 \times 7 \times \times \times \times \\
 8 7 \times \times \times \times \\
 \hline
 \times \times \times \times \times \times \times \\
 1 \times \times \times 7 \times \times \\
 \hline
 \times \times \times \times \times \times \times \\
 \times \times \times \times \times \times \times \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

现在不难得出，第 5 行的头一个数字是 9，第 7，8 两行开头的两个数字是 1 和 0：

$$\begin{array}{r}
\times \times 7 \times \times \times \times \times \times \times \quad \left| \begin{array}{l} 12\text{БВ}7\Gamma \\ \hline \text{ДЕ}7\text{ЖК} \end{array} \right. \\
\times \times \times \times \times \times \\
\hline
\times \times \times \times \times 7 \times \\
1 \times \times \times \times \times \times \\
\hline
9 \ 7 \times \times \times \times \\
8 \ 7 \times \times \times \times \\
\hline
1 \ 0 \times \times \times \times \times \\
1 \ 0 \times \times 7 \times \times \\
\hline
\times \times \times \times \times \times \\
\times \times \times \times \times \times \\
\hline
0
\end{array}$$

因为 $120 \times 9 = 1030$, $121 \times 9 = 1089$, $122 \times 9 = 1098$, $123 \times 9 = 1107$. 所以, 如果 $\text{Ж} = 9$, 由第 8 行得这一行的第三位数字不可能大于 2. 但

$$120 \times 7 = 840, \quad 121 \times 7 = 847, \quad 122 \times 7 = 854.$$

因此, 由第 6 行得 $\text{Ж} \neq 9$. 于是, $\text{Ж} = 8$. 继而,

$$123 \times 7 = 861, \quad 124 \times 7 = 868, \quad 125 \times 7 = 875, \quad 126 \times 7 = 882.$$

由此, 由 6 行也得知, $\text{Б} = 4$ 或 $\text{Б} = 5$. 但是 $\text{Б} \neq 4$, 因为 $1249 \times 8 = 9992$ (见 8 行). 因而 $\text{Б} = 5$.

比较 3 行和 4 行, 得知第 3 行从 1 起首 (第 3 行的头一位数字不可能大于 1, 是因为除数的头一位数字为 1).

此外,

$$125 \times 8 = 1000, 126 \times 8 = 1008.$$

所以，8 行的第三位数字是 0。现在得到这样的方案：

$$\begin{array}{r}
 \times \times 7 \times \times \times \times \times \times \times \quad | \quad 125B7\Gamma \\
 \times \times \times \times \times \times \quad | \quad \hline DE78K \\
 \hline
 1 \times \times \times \times 7 \times \\
 1 \times \times \times \times \times \times \\
 \hline
 9 \ 7 \times \times \times \times \\
 8 \ 7 \times \times \times \times \\
 \hline
 1 \ 0 \times \times \times \times \times \\
 1 \ 0 \ 0 \times 7 \times \times \\
 \hline
 \times \times \times \times \times \times \\
 \times \times \times \times \times \times \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

其次

$$\begin{aligned}
 &1251 \times 7 = 8757, \quad 1252 \times 7 = 8764, \quad 1253 \times 7 = 8771, \\
 &1254 \times 7 = 8778, \quad 1255 \times 7 = 8785, \quad 1256 \times 7 = 8792, \quad 1257 \times 7 \\
 &= 8799, \quad 1258 \times 7 = 8806.
 \end{aligned}$$

因此(见第 6 行) $1 \leq B \leq 7$ 。

数 $125B7\Gamma$ (Γ 为任意值时) 乘 8, (第 8 行的) 右起第三位数字当且仅当 $B \times 8$ 的乘积是以数字 2 为尾数时才等于 7 ($8B$ 为偶数)。如果 $B = 4$ 或 $B = 9$, 这是有可能的。但 $1 \leq B \leq 7$ 。于是 $B = 4$ 。

因为 $7 \times 8 = 56$ 。所以 $\Gamma \times 9 < 40$ ，即 $\Gamma \leq 4$ 。继而，

$$125470 \times 7 = 878290, \quad 125474 \times 7 = 878318.$$

因此，第六行左起第三位数字为 8，第五行左起第三位数字为 9，则

$$\begin{array}{r|l}
 \times \times 7 \times \times \times \times \times \times \times & 12547\Gamma \\
 \times \times \times \times \times \times & \hline
 \hline
 1 \times \times \times \times 7 \times & \text{DE78K} \\
 1 \times \times \times \times \times \times & \\
 \hline
 9 \ 7 \ 9 \times \times \times & \\
 8 \ 7 \ 8 \times \times \times & \\
 \hline
 1 \ 0 \ 1 \times \times \times \times & \\
 1 \ 0 \ 0 \times 7 \times \times & \\
 \hline
 1 \times \times \times \times \times & \\
 \times \times \times \times \times \times & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

从第 9 行得 $K = 1$ 。

因为 $125471 \times 8 = 1003768$ ， $125474 \times 8 = 1003792$ 。所以，当 $\Gamma \leq 4$ 时，7 行中左起第四位数为 6（是 6 而不是 5。因为 $7 + 5 = 12$ ）。

现在得到

$$\begin{array}{r}
 \times \times 7 \times \times \times \times \times \times \times \quad | \quad 1254\Gamma \\
 \times \times \times \times \times \times \quad | \quad \overline{DE781} \\
 \hline
 1 \times \times \times \times 7 \times \\
 1 \times \times \times \times \times \times \\
 \hline
 9 \ 7 \ 9 \times \times \times \\
 8 \ 7 \ 8 \times \times \times \\
 \hline
 1 \ 0 \ 1 \ 6 \times \times \times \\
 1 \ 0 \ 0 \ 3 \ 7 \times \times \\
 \hline
 1 \ 2 \ 5 \ 4 \ 7 \times \\
 1 \ 2 \ 5 \ 4 \ 7 \times \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

对第 5、6、7 行进行比较后得。第 6 行左起第四位数不应大于 3。如果 $2 \leq \Gamma \leq 4$ 。这是可能的。

第 7 行中左起第 5 位数可能等于 2 或 3。但因为 $125472 \times 8 = 1003776$ ， $125473 \times 8 = 1003784$ ， $125474 \times 8 = 1003792$ ，所以，7 行中左起第 5 位数只有可能是 3，且 6 行中第四位数是 3。

据此可得

$\times \times 7 \times \times \times \times \times \times \times$ $\times \times \times \times \times \times$ $1 \times \times \times \times 7 \times$ $1 \times \times \times \times \times \times$ $9 \ 7 \ 9 \ 9 \times \times$ $8 \ 7 \ 8 \ 3 \times \times$ $1 \ 0 \ 1 \ 6 \ 3 \times \times$ $1 \ 0 \ 0 \ 3 \ 7 \times \times$ $1 \ 2 \ 5 \ 4 \ 7 \times$ $1 \ 2 \ 5 \ 4 \ 7 \times$ 0	12547Γ $\Delta E 781$
--	--

对 3、4、5 行进行比较后，得 4 行中右起第二位数可能是 8 或 7。但 $12547 \times 9 = 112923$ ， $18 \leq 9\Gamma \leq 40$ 。因此， $E \neq 9$ ，也就是 $E = 8$ 。但 $12547 \times 8 = 100376$ ， $16 \leq 8\Gamma \leq 32$ 。因此 $\Gamma = 2$ 或 $\Gamma = 3$ ，因而又得

$\times \times 7 \times \times \times \times \times \times \times$ $\times \times \times \times \times \times$ $1\ 1\ 0\ 1\ 7\ 7\ \times$ $1\ 0\ 0\ 3\ 7\ \times\ \times$ $9\ 7\ 9\ 9\ \times\ \times$ $8\ 7\ 8\ 3\ \times\ \times$ $1\ 0\ 1\ 6\ 3\ \times\ \times$ $1\ 0\ 0\ 3\ 7\ \times\ \times$ $1\ 2\ 5\ 4\ 7\ \times$ $1\ 2\ 5\ 4\ 7\ \times$ 0	12547Γ $\Delta 8781$
--	---

由头三行明显看出：在第三行中左起第三位数为6或7。通过直接检验可以确知，当且仅当 $\Delta = 3$ 或 $\Delta = 5$ 时，方能成立。

不难检验， $\Delta \neq 3$ 。于是 $\Delta = 5$ 。至此可见 $\Gamma = 3$ 。

最后得到数 7375428413 除以 125473 得 58781。

练习

1 将被除数、除数和商数的数字还原。

$$\begin{array}{r}
 1) \quad \begin{array}{r}
 \times \times \times \times \times \times \times \times \\
 \times \times \times \times \\
 \hline
 \times \times \times \\
 \times \times \times \\
 \hline
 \times \times \times \times \\
 \times \times \times \\
 \hline
 \times \times \times \times \times \\
 \times \times \times \times \\
 \hline
 \end{array}
 \quad \begin{array}{r}
 \times \times \times \\
 \hline
 \times 7 \times \times \times
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2) \quad \begin{array}{r}
 \times \times \times \times \times \times \\
 \times \times \times \times \\
 \hline
 \times \times \times \\
 \times \times \times \\
 \hline
 \times \times \times \times \\
 \times \times \times \times \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad \begin{array}{r}
 \times \times \times \\
 \hline
 \times 8 \times
 \end{array}
 \end{array}$$

2 下题中每一个字母和每一个符号 $\times$ 都表示 0 至 9 的数字 ($A \neq 0$);

$$\begin{array}{r}
 \text{ATOM} \cdot \text{ATOM} \\
 \hline
 \times \times \times \times \times \\
 \times \times \times \times \\
 \times \times \times \times \\
 \times \times \times \times \\
 \hline
 \times \times \times \times \text{ATOM}
 \end{array}$$

式中不同的字母对应于不同的数字。试用数字代替字母和 $\times$ 。

§7.2 探索数的性质的途径

寻求和证明数性质的主要方法是研究它们之间的各种特殊关系和简述相应的假设。通过证明这些假设的正确与错误来完成这类习题的解答

例1 证明：存在无穷多个自然数 n ， 2^n 的数字之和大于 2^{n+1} 的数字之和

记 S_n 是数 2^n 的数字和。

为要得到 S_n 性质的最初假设，我们列出表7.1。

表 7.1

n	2^n	S_n	n	2^n	S_n
1	2	2	6	64	10
2	4	4	7	128	11
3	8	8	8	256	13
4	16	7	9	512	8
5	32	5	10	1024	7

这个表的头十行可证题设条件，例如， $s_3 > s_4 > s_5$ ， $s_8 > s_9 > s_{10}$ 。而且看到

$$s_9 = s_3, \quad s_{10} = s_4 \quad (7.1)$$

这也许也意味着将在以后出现形如(7.1)的等式。但对于推测整个次序的结构还不够，若是用它的分析打开解题的途径的话。因此将表7.1继续列下去。

续表 7.1

n	2^n	s_n	n	2^n	s_n
11	2048	14	21	2097152	26
12	4096	19	22	4194304	25
13	8192	20	23	8388608	41
14	16384	22	24	16777216	37
15	32768	26	25	33554432	29
16	65536	25	26	67108864	40
17	131072	14	27	134217728	35
18	262144	19	28	268435456	43
19	524288	29	29	536870912	41
20	1048576	31	30	1073741824	37

至此，暂停再列表7.1，设法找出 s_n 新的特性。我们看到，

$$s_9 = s_3 = 8, \quad s_{10} = s_4 = 7, \quad s_{17} = s_{11} = 14, \quad s_{18} = s_{12} = 19,$$

$$s_{25} = s_{19} = 29, \quad s_{21} = s_{15} = 26, \quad s_{22} = s_{16} = 25,$$

$$s_{30} = s_{24} = 37, \quad s_{29} = s_{23} = 41.$$

这就表明：如果 $s_k = s_l$ ，则 $k = l + 6$ 。但另一方面，等式 $s_{k+6} = s_k$ 并不总是成立的。例如， $s_{20} \neq s_{14}$ ， $s_{14} \neq s_8$ 。但 $s_{20} = s_{14} + 9$ ， $s_{14} = s_8 + 9$ ， $s_{26} = s_{20} + 9$ ， $s_7 = s_1 + 9$ ，等等。这就再得一个假设：

$$s_{k+6n} = s_k + 9m \quad (7.2)$$

式中 n, k 是自然数； m 是自然数或零。

假设(7.2)需要《确证》，用等式(7.2)解题尚不明显，因此我们继续列表7.1。

进一步研究表7.1便证实假设(7.2)。于是，解题的关键

续表 7.1

n	2^n	s_n	n	2^n	s_n
31	2147483648	47	52	4503599627370496	79
32	4294967296	58	53	9007199254740992	77
33	8589934592	62	54	18014398509481984	82
34	17179869184	61	55	36028797018963968	92
35	34359738368	59	56	72057594037927936	85
36	68719476736	64	57	144115188075855872	80
37	137438953472	56	58	288230376151711744	70
38	274877906944	67	59	576460752303423488	77
39	549755813888	71	60	1152921504606846976	82
40	1099511627776	61	61	2305843009213693952	74
41	2199023255552	50	62	4611686018427387904	85
42	4398046511104	46	63	9223372036854775808	89
43	8796093022208	56	64	18446744073709551616	88
44	17592186044416	58	65	36893488147419103232	86
45	35184372088832	62	66	73786976294838206464	109
46	70368744177664	70	67	147573952589676412928	110
47	140737488355328	68	68	295147905179352825856	103
48	281474976710656	73	69	590295810358705651712	89
49	562949953421312	65	70	1180591620717411303424	70
50	1125899906842624	76	71	2361183241434822606848	86
51	2251799813685248	80	72	4722366482869645213696	109

在于寻找恰好每六行重复着 s_n 的某些性质。

但为什么正是在 2^n 乘以 2^6 时得的数,其数字之和或者等于数 2^n 的数字之和,或者不同于它乘以 $9m$ 呢? 为什么 s_n 不随着 n 的增加而单调递增呢?

数 2^6 及其数字之和具有什么性质呢?

我们看到: $s_6 = 10$, 而 $2^6 = 64 = 63 + 1 = 9 \times 7 + 1$, 然而由

此又得到什么性质呢？我们不妨用特例弄清楚其中的任何一个性质：

$$2^{13} \times 2^6 = 8192 \times (9 \times 7 + 1) = 9 \times 7 \times 8192 + 8192$$

现在得知， s_{19} 为什么与 s_{13} 乘 s_8 不同。

此外，显然，数 $9 \times 7 \times 8192$ 能被 9 整除，因而它的 数字之和也能被 9 整除。这样一来，等式(7.2)的正确性是显而易见的。

但为什么 s_n 不呈单调递增呢？

表 7.2

n	s_n	n	s_n
1	2	22	$7 + 8 \times 9 = 79$
2	4	23	$5 + 9 \times 9 = 86$
3	8	24	$10 + 9 \times 9 = 91$
4	7	25	$2 + 10 \times 9 = 92$
5	5	26	$4 + 10 \times 9 = 94$
6	10	27	$8 + 10 \times 9 = 98$
7	$2 + 1 \times 9 = 11$	28	$7 + 11 \times 9 = 106$
8	$4 + 1 \times 9 = 13$	29	$5 + 12 \times 9 = 113$
9	$8 + 1 \times 9 = 17$	30	$10 + 12 \times 9 = 118$
10	$7 + 2 \times 9 = 25$	31	$2 + 13 \times 9 = 119$
11	$5 + 3 \times 9 = 32$	32	$4 + 13 \times 9 = 121$
12	$10 + 3 \times 9 = 37$	33	$8 + 13 \times 9 = 125$
13	$2 + 4 \times 9 = 38$	34	$7 + 14 \times 9 = 133$
14	$4 + 4 \times 9 = 40$	35	$5 + 15 \times 9 = 140$
15	$8 + 4 \times 9 = 44$	36	$10 + 15 \times 9 = 145$
16	$7 + 5 \times 9 = 52$	37	$2 + 16 \times 9 = 146$
17	$5 + 6 \times 9 = 59$	38	$4 + 16 \times 9 = 148$
18	$10 + 6 \times 9 = 64$	39	$8 + 16 \times 9 = 152$
19	$2 + 7 \times 9 = 65$	40	$7 + 17 \times 9 = 160$
20	$4 + 7 \times 9 = 67$	41	$5 + 18 \times 9 = 167$
21	$8 + 7 \times 9 = 71$	42	$10 + 18 \times 9 = 172$

设 s_n 从 $n=7$ 起单调递增。则按照公式(7.2)所得的下列数列 s_n (表7.2)为真(在《最小增长速率》条件下)。

不难看出,若 S_n 是一单调递增数列,则 $S_{12} - S_6 = 37 - 10 = 27$, $S_{18} - S_{12} = 64 - 37 = 27$, $S_{24} - S_{18} = 91 - 64 = 27$, $S_{30} - S_{24} = 118 - 91 = 27$, 等等。这就是下式为真:

$$S_{6k} = 10 + 27(k-1) \quad (7.3)$$

公式 (7.3)与题设条件相矛盾。那么怎样才能证明这个公式不成立呢? S_n 为什么不是递增数列呢?

看来,应当研究,数 2^n 的数字的数随着 n 的变化怎样从 k 变化到 $k+b$ 的。因此我们再回到表7.1上。当 n 从1增加到6时,数 2^n 的数字的数从1位数增加到2位数,当 n 从7增加到12时,数 2^n 的数字的数则从3位数增加到4位数。当 n 从13增加到18时,数 2^n 的数字的数则从4位数增加到6位数。当 n 从19增加到24时,数 2^n 的数字的数则从6位数增加到8位数,如此等等。当 n 从55增加到60时,则数 2^n 的数字的数从17位数增加到19位数,等等。

于是,我们又得到一个假设:随着 n 从 m 增加到 $(m+6)$, 数 2^n 的数字的位数 N_n 以不大于2递增着。如果这个假设为真的话,那么

$$S_{k+6} - S_k \leq 2 \times 9 = 18. \quad (7.4)$$

而这个命题与公式 (7.3) 相矛盾,按照公式 (7.3) 有

$$S_{k+6} - S_k = 27.$$

于是,如果命题 (7.4) 为真,那么,等式 (7.3) 不成立,因而,数列 S_n 也不可能从 n 以任意数值 n 开始单调递增。

因此,对于解题,剩下要证明的是命题 (7.4) 为真。

我们来讨论表7.1的几个片断,例如 $n=7, 8, \dots, 12$; $n=13, 14, \dots, 18$; $n=55, 56, \dots, 60$ 。从数 S_n 的数字变化中可以看到什么呢?

如果数 2^n 的第一个数字是1,则数 2^{n+1} 的第一个数字将是2或3. 数 2^{n+2} 的第一个数字将是4, 5, 6或7. 因而数 2^{n+3} 的数字只可能是比数 2^n 的数字大一个数字. 由此很明显,如果数 2^n 的第一个数字是1, 则

$$N_{n+b} - N_8 \leq 2 \quad (7.5)$$

同理可证等式(7.4)为真, 如果数 2^n 的第一个数字为2, 3, 4, 5, 6, 7, 8或9的话.

在寻找此题的解答过程中, 我们再次深信, 耐心地对研究各种数的集合性质是多么重要, 仅仅根据这一点, 就可作多种《工作》假设. 论证和应用这些假设是寻求问题《关键》的组成部分.

练习

1 在小数中, 将0.12345678910111213141516171819202122...写成连续的所有自然数. 这个小数是循环小数吗?

2 求出并论证非一位数的数字积与此数之间的关系.

3 1) 从12345678910111213141516...5960数中删去100个数字, 使得剩下的数为最小.

3 2) 从此数中删去100个数字使剩下的数为最大.

4 是否存在这样的自然数 n , 使得 $1/2 + 1/3 + \frac{1}{4} + 1/5 + \dots + 1/n$ 为整数?

5 一个数, 若其数字之和用5乘时不变, 问能否被9整除

6 从任意100个整数中能否选择一个或几个数, 使得所选数之和结尾于两个零?

7 某数用十进制写出来, 它的数字中有300个1, 而剩下的数字都等于零, 试问这个数能否是完全平方数?

8 试求数11 111 111和1 111...111(1重复出现100次) 的

最大公约数.

9 从数 $1, 2, 3, \dots, 200$ 中任选101个数,在所选择数中间能否总是有这样两个数,它们之中的一个数可被另一个数整除.

10 在所有数字为1的数中,找出被由100个3所组成的数 $33 \dots 33$ 整除的最小数.

11 如果某个四位数乘上将此数按相反次序排列的数,则得到后三位数为零的八位数,试求所有这样的数.

12 一具有 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 数字的所有可能的七位数,今将其次序任意排列,试证:这些数中的任一个数都不能被它们中的另外任一个数整除.

13 试证:借用两个或三个数字写在十进位制中的任何准确平方数至少包含两个不同的数字.

14 试证:任何准确平方数都不能借用同时是偶数或同时是奇数的恰恰五个不同的数字在十进位制中写出.

15 当 a 为何整数时,多项式 $x^{18} + x + 9$ 被 $x^2 - x + a$ 整除.

16 试证:在奇数为基数的记数制中所写的整数,当且仅当它含有奇数数字的奇数时,才为奇数.

17 设 a 和 b 为整数,问: $a:b + b:a$ 之和能否为整数.

18 当自然数 n 为何值时, $n^4 + n^2$ 能被 $2n + 1$ 整除.

19 有100个自然数 $a_1, a_2, \dots, a_{100}$,其中的每一个数都不大于100,它们之和等于200.试证:从这些数中可以选择几个数,使之和为100.

20 能否将数 $1, 2, 3, \dots, n$ 按这样的次序布置,使之对任何两个数之半和不等干这些数之间的任何一个数.

21 N 个砝码中的每个砝码的质量有整数克,将它们分成质量相等的 k 堆.试证:可以用不少于 k 个不同的方法,从砝码中拣走一个砝码使剩下的 $(N - 1)$ 个砝码不能分成 k 个相等质量

的砝码。

22 今有质量为1, 2, 3, ..., n 的数个砝码, 将它们分成质量相等的三堆. 问 n 应为多少?

23 一正方形房间用平行于墙壁的壁板分成几个较小的正方形房间, 每个小房间的边长为整数. 试证: 所有壁板长度之和被4整除.

24 按我们现在日历规则, 一百年的第一天始终不能是星期天, 星期三或星期五, 这是为什么?

§ 7.3 《非标准》方程解的求法

解《非标准》方程时, 采用的主要方法有: 1) 展成含变量表达式的因子; 2) 研究方程中表达式的性质; 3) 研究含变量表达式在其定义的不同集合上的性质.

例1 求出方程

$$a^3 + b^4 = c^5 \tag{7.6}$$

即使一个自然数的解.

采用什么工作假设, 以便由此假设可以拟定寻找解答的途径呢? 兹列表7.3

表7.3

n	n ³	n ⁴	n ⁵	n	n ³	n ⁴	n ⁵
1	1	1	1	9	729	6561	59049
2	8	16	32	10	1000	10000	100000
3	27	81	243	11	1331	14641	161051
4	64	256	1024	12	1728	20736	248832
5	125	625	3125	13	2197	28561	371293
6	216	1296	7776	14	2744	38416	537824
7	343	2401	16807	15	3375	50625	759375
8	512	4096	32768				

由表7.3可知, 第一, 方程

$$n^3 + n^4 = n^5 \quad (7.7)$$

没有自然数解.

事实上, 由方程(7.7)得 $n^3(1+n-n^2)=0$. 而这个方程没有自然数解.

第二, 显然 $a > c$ 或 $b > c$.

第三, 数 n^5 是 n 数字为末尾. 数 n^4 是1, 5, 0或6结尾的.

第四, 如果 n 是奇数, 则 n^3, n^4 和 n^5 是奇数, 如果 n 是偶数, 则 n^3, n^4, n^5 是偶数.

我们假设 $a=2k, b=2p, c=2m$, 于是, 得下列方程序列:

$$(2k)^3 + (2p)^4 = (2m)^5; \quad 8k^3 + 16p^4 = 32m^5;$$

$$k^3 + 2p^4 = 4m^5.$$

由此得, $k=2l$ 和

$$8l^3 + 2p^4 = 4m^5; \quad 4l^3 + p^4 = 2m^5, \text{ 等等}$$

现在查明: $a=2^x, b=2^y, c=2^z$ (x, y, z 是自然数). 由方程(7.6)得

$$2^{3x} + 2^{4y} = 2^{5z}$$

或

$$2^{5z}(2^{3x-5z} + 2^{4y-5z}) = 2^{5z}.$$

由此得

$$2^{3x-5z} + 2^{4y-5z} = 1.$$

因为 x, y, z 是自然数, 所以后一方程等价于

$$\left. \begin{aligned} 3x - 5z &= -1, \\ 4y - 5z &= -1. \end{aligned} \right\}$$

由此得

$$z = \frac{3x+1}{5} = \frac{4y+1}{5}.$$

现在很明显, $x=8$, $y=6$, $z=5$. 于是, $a=2^8$, $b=2^6$, $c=2^5$.

例2 求方程

$$y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x \quad (7.8)$$

的全部自然数解.

变换方程(7.8)形为

$$\begin{aligned} y(y+1) &= x^3(x+1) + x(x+1); \\ y(y+1) &= (x+1)(x^2+1)x. \end{aligned} \quad (7.9)$$

下面我们试图推测方程(7.9)的某些解. 当 $x=1$ 时, 方程 $y(y+1)=2 \times 2 \times 1$ 没有自然数解. 当 $x=2$ 时, 方程 $y(y+1)=3 \times 10 \times 1$ 有解 $y=5$. 当 $x=3$ 时, 方程 $y(y+1)=4 \times 10 \times 3$ 没有自然数解. 当 $x=4$ 时, 方程 $y(y+1)=5 \times 17 \times 4$ 没有自然数解.

经这些情况的讨论表明方程(7.9)有自然数解. 如果下列方程组之一个有解的话, 即

$$\left. \begin{aligned} y &= x, \\ y+1 &= (x+1)(x^2+1); \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y &= x+1, \\ y+1 &= x(x^2+1); \end{aligned} \left. \begin{aligned} y &= x^2+1, \\ y+1 &= (x+1)x. \end{aligned} \right\}$$

当解出这些方程组后, 我们确知: 只有第三个方程组有自然数解(2; 5).

练习

- 1 什么样数的平方等于四个连续奇数的乘积?
- 2 证明: 无论在什么样的自然数 n 中, 数 $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ 不会有准确的平方.
- 3 证明: 不存在三个连续的奇数. 其中的每个数是二个非零数的平方和.

4 求方程 $5^x + 2 = 17^y$ 的自然数解。

5 一个班有31个学生。全班学生的年龄共434岁。问在班上能否找到20个年龄总数不少于280岁的学生？

6 25卢布能否兑换成票面价值为1卢布，3卢布，5卢布，使得恰好有10张。

7 一个人，如果他上班步行，下班乘车共用1.5小时；如果来回均乘车，在路上共用30分钟。试问：若此人上、下班均步行的话，那么他在路上共用多少时间。

8 试证下列命题真否：《若一片树林比其中每棵树上的树叶多，那么至少在两棵树上树叶的数目一样》。

9 证明： 3^k 不可能表成两个正整数平方和的形式。

10 一男孩以4公里/小时速度行走，一女孩以3公里/小时速度行走。一狗以10公里/小时速度奔跑，在某一时刻，男孩和女孩从同一地同向开始沿道路运动，而狗总是在男女孩之间来回奔跑。问一小时后，狗位于何地 and 它面向哪个方向？

11 有8名象棋手参加循环棋赛（每次每人下一盘），每人拿到不同的分数，取第二名者拿到的分数相当于第5名至第8名一起的分数，问：第3名和第5名棋手相互输赢情况

12 试求 x, y, z 的一切整数使得 $4^x + 4^y + 4^z$ 有完全平方。

§ 7.4 逻辑问题的解法

矩阵法.我们来讨论一 n 行和 n 列矩阵.将每个行或列方向中的任何一个方向命为入口.被命名的矩阵有四个入口:上、下、左、右.如果沿任何入口都可以到达矩阵的元素,则将矩阵的元素叫做相容的.如果不能这样做,则这种元素叫做不相容的.兹举例来说明矩阵法的应用.图上的不相容元素以画阴影表示

之。

例1 一列运行在莫斯科至敖德萨的单间车箱内有：莫斯科人(M)，列宁格勒人(Л)，基辅人(K)，图拉人(T)，哈尔科夫人(X)，敖德萨人(O)。他们的名字以字母A.B.B.Г.Д.E为起首。途中已查明：1) A和莫斯科人是医生；Д和列宁格勒人是教师；图拉人和B是工程师；2) 基辅人,B和E是伟大卫国战争的参加者；图拉人未在军队服役过；3) 哈尔科夫人比A年长，敖德萨人比B年长，而E最年轻；4) B和莫斯科人曾去过基辅，而B和哈尔科夫人到过文尼察。试确定每个乘客名字的头一个字母和职业。

我们列有两入口的矩阵。据第一个入口排住址。第二个入口排乘客名字(表7.1)。元素AM, ДЛ, ТВ, АЛ, АТ, ДМ, ДТ, ВЛ, BM不相容(按题设第一个条件)。按题设第二个条件，元素BT和ET不相容。在T列的入口仅留下一个元素。因此，沿Г行，除ГT外全部元素不相容。按第三个条件。元素AX, BO, EX, BX不相容。按题设第四个条件，元素BM, BX, BX不相容。现在很明显：E行中除EM之外，全部元素都不相容。同样，Д行中除ДX外的全部元素，B行中除BЛ外的全部元素，A行中除AO外的全部元素都不相容。

因此，得出答案(图7.2)。

例2 在少先队夏令营的一个帐篷里，住着阿列克赛(A)，鲍里斯(B)，瓦列里(B)和格里戈里(Г)。经认识后，已知他们原来在小学不同年级学习。每人在一下列小组活动：象棋组(Ш)，少年自然科学研究组(Ю)，建筑组(K)，摄影组(Ф)。又知：1) A和二年级生同在一个学校学习。少年自然科学研究组组员和一年级生住在一个城市，B和摄影师比其他来得晚；2) B和四年级生是早晨去行军的，而B和三年级生晚上在B和建筑师那

个小镇上中奖；3) Γ 比摄影师年轻，A 比 B 年纪大，象棋手比 A 年纪大；4) 星期天 A 和建筑师参加了比赛，四年级生当裁判员，摄影师得了病。试求每个少先队员的名字和参加些什么活动。

我们列出具有三个入口的矩阵（图 7.3）。把不相容的元素与条件的依赖关系用各种不同的斜线划出。元素 2A, 1Ю, БФ 是不相容的（按题设的第一个条件）。按题设的第二个条件，元素 3Б, 3В, 4В, К3, БК, ВК 不相容。按题设的第三个条件，元素 4Г, 1Ф, 4А, АШ, 1А 不相容。现在，由图 7.3 看出：A 是三年级生，因为象棋手比 A 年纪大且象棋手只可能是四年级生。由此得出：元素 $\Gamma\text{Ш}$, 2Ш, 3Ш, 4Ю, 4К, 4Ф 不相容。很明显，元素 3Г 不相容。因此四年级生只能是 E。于是，元素 1Б, 2Б

	М	П	Т	К	Х	О
А						
Б						
В						
Г						
Д						
Е						

图 7.1

	М	П	Т	К	Х	О
А						
Б						
В						
Г						
Д						
Е						

图 7.2

	1	2	3	4	Ш	Ю	К	Ф
А								
Б								
В								
Г								
Ш								
Ю								
К								
Ф								

图 7.3

不相容。现在，元素 БЮ, ВШ, ГШ 不相容是显然的。由题设的第四个条件得元素 АК 和 АФ 不相容。由此得到元素 БЮ, ГЮ 和 ГФ 不相容。因为 3Г 比摄影师年轻，所以元素 2Г 和 1Б 不相容。剩下的不相容元素是很明显的。

所得矩阵给出习题答案。

图的应用。借助于图，可以直观地表示研究对象及其间的关系。在这种情况下，容易看出所研究情况的全部逻辑可能性。由于图本身的可观察性，对于不满足所有情况的全部多余的量

能够把这些条件分类,排除不合式的情况。对象是用点来描述,而对象之间的关系则用线段来描述。

例3 依万(И)、德米特里(Д)和斯捷藩(С)三人在莫斯科(М),列宁格勒(Л)和基辅(К)的中学里教不同的课程化学(X)、生物(Б)、物理(Φ)。已知:1) 依万不在莫斯科工作,德米特里不在列宁格勒工作;2) 莫斯科人不教物理;3) 在列宁格勒工作的人教化学;4) 德米特里不教生物。问这些人各在哪个城市担任什么课程?

将问题分成三个集合:名字的集合,教学课程的集合,城市的集合,集合元素用点来表示(图7.4规定点对应于名字,课程,城市第一个字母)。如果它们描述不同人们的特征,那么,不同集合两个点用虚线连结。如果它们对应于一个人的特征,那么,不同集合的两个点用实线连结。画在7.4上的图包含习题给定集合的全部元素及其间的关系。图的语言的习题归结为对具有实线边和不同集合点为顶点三个三角形作图。

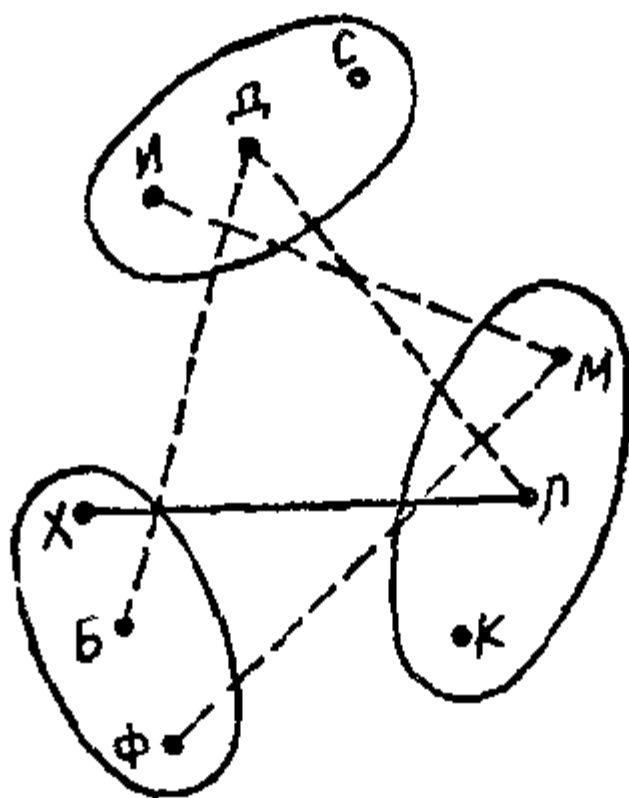


图7.4

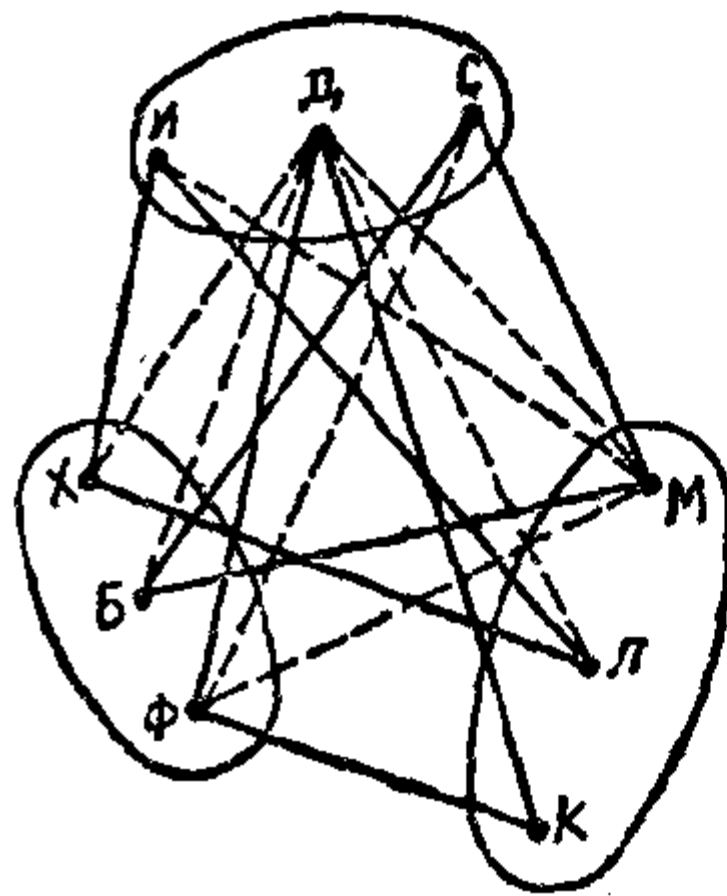


图7.5

现作虚线XД(图7.5), 因为Л对应于X而Л不对应于Д, 即X不可能对应于Д。

用图对这类题进行典型运算：如果在以三个不同集合为顶点的三角形中，一个边是实线，第二个边是点划线，那么第三个边应当是虚线。

显然，如果某一点是用虚线连结第二个集合的两个点，那么，它应该用实线连结这集合的第三点。因此，作实线 $\Phi\Delta$ 。

兹作虚线 $M\Delta$ ，因为在三角形 $\Delta\Phi M$ 中， $\Delta\Phi$ 边是实线，而 ΦM 边是虚线。

我们作实线 ΔK ，因为 ΔM 和 ΔL 是虚线。

现在作实线 ΦK 。

如果在以不同集合为顶点的三角形中，两个边是实线，那么，第三个边也应该是实线。因此，第一个实线三角形 $\Delta\Phi K$ 是作出来了。

我们作实线段 MC, IL, XI, BM, BC 。

实线三角形 $\Delta\Phi K, LXI$ ，和 $СMB$ 的各顶点给出题设问题的答案：斯捷藩在莫斯科教生物。依万住在列宁格勒教化学。德米特里在基辅教物理。

练习

1 在排星期一的课表时，有三位教师都希望给他们这样排课：数学排第一或第二；历史排第一或第三；文学排第二或第三。试问有几种排课方法，怎样安排课表才能让全体教师都满意？

2 玛莎、莉达、热尼亚和卡佳善玩各种乐器（大提琴、大钢琴，吉他和小提琴），但每人只会一种乐器；她们又掌握各种不同的外语（英、法、德、西班牙），但每人只会一种语言。玩吉他的姑娘会说西班牙语、莉达和玛莎不会玩小提琴也不会大提琴且不会讲英语。说德语的姑娘不会玩大提琴。热尼亚懂法语但不会玩小提琴。试问：他们玩哪种乐器和说哪种语言才能

使每个人都熟悉。

3 四位女友打听到了阿娘住在列宁格勒的那条大街上，房号是多少，她们每人作了两种回答：

第一个人：1) 阿娘不住在涅夫斯基大街；2) 房号为84。

第二个人：1) 阿娘不住在涅夫斯基大街，也不住在契卡洛夫斯基大街；2) 房号可被2、3、4、6除尽。

第三个人：1) 阿娘住在涅夫斯基大街；2) 房号为96。

第四个人：1) 阿娘住在莫斯科大街；2) 房号末尾是6。

每位女友的说法之一为真，而另一说法为假。试问阿娘住在哪儿？

4 有三个强盗分赃。每一个人都相信他能把赃物平均分配，但另两个人不相信他，假若是两个人的话，那么事情就好办：一个人把赃物分成两份，另一个人拿自己认为是多的那一份。试指出三个强盗应该如何办才能使他们中的每个人都相信自己所得赃物不少于全部赃物的三分之一（赃物是这样不同种类的东西，以致不存在各个部分的公平比较方法）

5 M城的浑名为阿尔奇，鲍斯和维斯利的三个著名暴徒之一偷得一个钱包，在审讯他们三人中的每个人给出如下供词：

阿尔奇：我没有扒钱包。

在盗窃那天我离开了M城。

维斯利偷了钱包。

鲍斯：维斯利偷了钱包。

若是我也拿到钱包，我就不招认。

我也有这么多钱。

维斯利：我没有拿钱包。

我早就想有个好皮包。

阿尔奇说得对，他离开了M城。

在审讯过程中查明，每个暴徒的三条供词中有两条真的，一条假的。试问：谁偷了钱包？

§ 7.5 组合问题

在解决很多需要多次运算的各种组合问题时，图解法能使寻求的解更为直观。并预告逻辑错误。根据《棋盘原理》对不同对象及其间关系涂上颜色也可简化各种组合的分析。

例1 一个大桶里面盛有120升水，罐子A容纳7升，罐子B容纳5升。怎样往每罐子里罐一升水（不能把水反倒进大桶里，但可以把水倒到地面上）？

装满和倒出罐子A14次，从大桶里倒掉98升，还剩22升。装满罐子A后，再从A灌满罐子B。之后，A中仍留下2升水。

倒尽罐子B。从罐子A的2升水转注到B中，再装满罐子A，再从A倒满罐子B，之后，A中留下4升水。

我们从B中倒尽所有的水。再把罐子A的4升水转注入B中。装满A，再从它倒满罐子B。之后，A中留下6升水。

表7.4

Б	А	В	Б	А	В
22	0	0	8	0	4
15	7	0	1	7	4
15	2	5	1	6	5
15	2	0	1	6	0
15	0	2	1	1	5
8	7	2	1	1	0
8	4	5	0	1	1
8	4	0			

把罐子B的水全部倒掉，再用A的水装满它，之后，A中留

下1升水。倒空罐子B。把大桶中留下的一升水转注 B中。把大桶B中的水转注到罐子，从罐子A转注到罐子B。从罐子转注到地上的全过程直观地示于表7.4。

例2 将一平面分成正六边形形状的相等房间.在某些墙壁上这样作门：对于任何由三个墙壁汇集（六边形的各边）的顶点，正好两个墙壁上有门。证明：经过这种迷宫的任何闭路都通过偶数个门。

仅仅具有公共门的两个六边形房间为相邻房间。把房间涂上两种颜色，使得相邻房间有不同颜色(图7.6)。

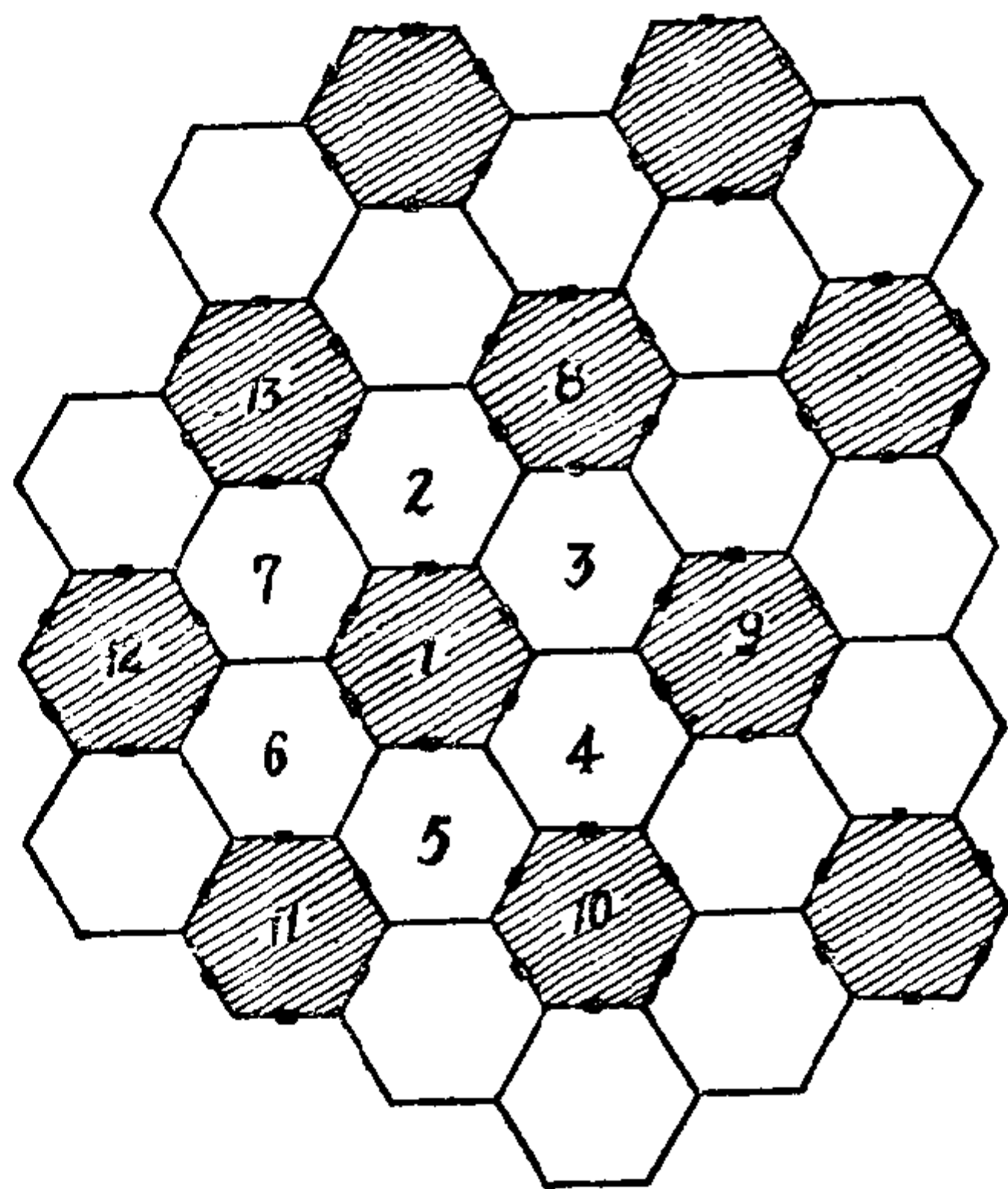


图7.6

此后，命题就显而易见，因为由一种颜色的房间到同一颜色的房间的任何过渡，都要通过另一种颜色的房间。

练习

1 一种玩石块的游戏：有两堆石块，两个玩游戏者中的每个人依次仅从一堆石块拿取任何数量的石块，规定抓起最后石块者得胜。请找出让对手先下手或自己先下手以保证赢对方的玩法。

2 一个水桶，盛满了12升牛奶，如果只用容积为5升和7升的器皿，那么如何把牛奶分成相等的两份。

3 棋盘的 $b2, b7, g2, g7$ 和 $d4$ 位置上，摆着5个车，在同一方向同时移动车一个方格，当任何一个车走出棋盘边界，它就被吃掉，直玩到吃掉五个车为止。试问怎样走法才能使得五个车所走过的总着数为最小？

4 将一圆分成六个扇形，在每个扇形上布置一枚跳棋，任何两个跳棋准许在相邻的扇形里移动一着，但要使一个跳棋沿顺时针方向移动，另一个跳棋沿反时钟方向移动。试问：在同一扇形里全部跳棋能否聚到一块。

5 一块尺寸 $4 \times n$ 的棋盘上，马能否每个位置都到一次，且最后一着回到原来的位置？

6 有一城市平面图（图7.7），能否选定一散步路线，使得每座桥只经过一次？

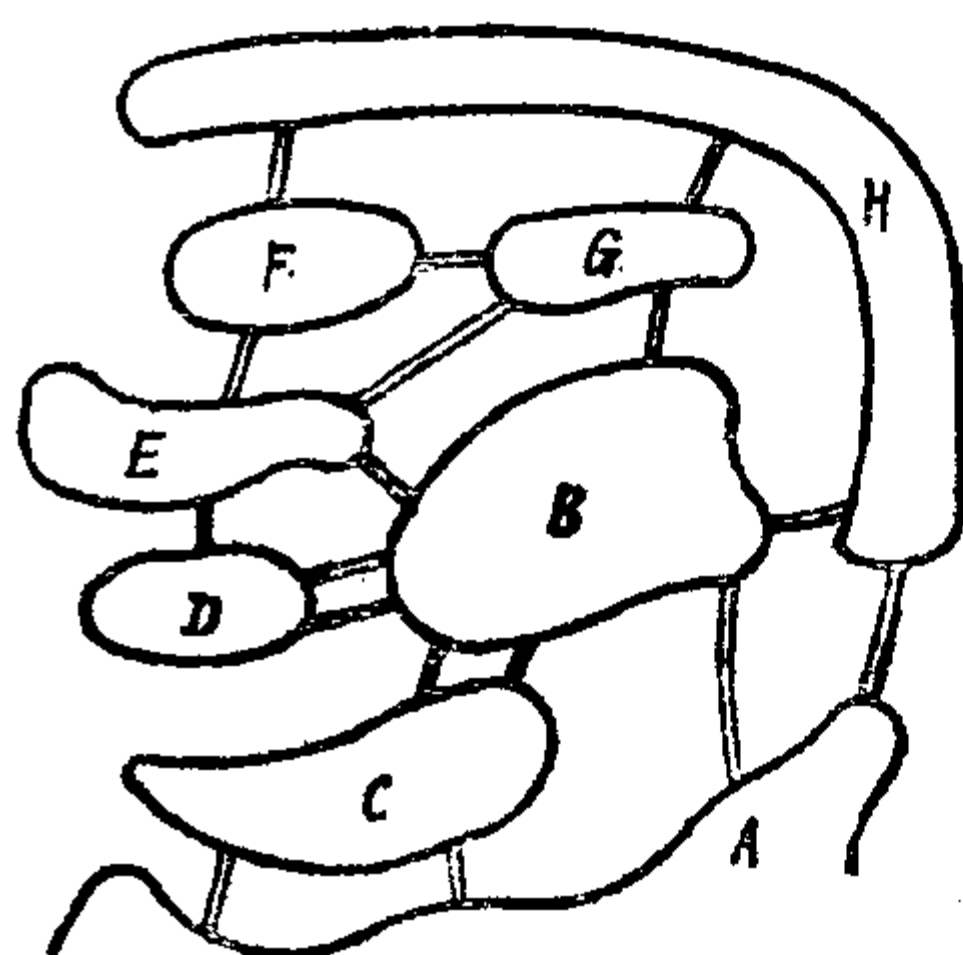


图7.7

7 屉子里放着100个不同颜色的小球，其中有28个红的，20个绿的，12个黄的，20个蓝的，10个白的和10个黑的。问：应当从屉子里摸出多少最小数目的小球才能使得其中必有15个同一颜色的小球？

8 在有64个方格的棋盘上连着写1到64的数（在最上列左起1到8，接着的下列为9到16，等等）。8个车的摆法是使任何两个都不互相攻击。试算出摆着8个车的8个位置上所写的数之和。试求出这个和可能有的一切值。

9 由 25×25 的方格组成一方形表格。此表的625个的每一方格记下头25个自然数的一个。同时：a) 相对于主对角线对称的方格里，写上相等的数；b) 两个一样的数不能摆在同一行或同一列。试问：主对角线上的所有数两个两个地不同真否？

10 一个人手提两个容积为15升和16升水的容积。试问：用怎样的方法才能倒成恰恰8升水？

11 一个人有容积为8升盛酒的小桶和瓦罐。其次，他从小桶给瓦罐盛满酒，而小桶倒满水。当水和酒完全混合时，他再次给瓦罐盛满，重新给小桶加满水。此后，小桶里的水酒各半。试问瓦罐应有多大容积？

12 将方形网眼排球网的绳结怎样邻接连起来的最大绳数，才能够划分得使网眼不散成单块？（网眼尺寸为 10×10 个孔）。

13 在世界青年联欢节上有六位代表见面。查明：代表中任何三个人中间，有两个可以彼此讲任何一种语言。试证：可以找出三个代表他们每个人都可以和每个代表交谈。

14 一城市有 n 条（多于1）公共汽车路线。同时：a) 在每条路线上有恰恰三个车站；b) 从每条路线上都可换乘到各条路线上并且有一个站；c) 从每一站可以不换车驶到各站上，并且只

有一条路线。试问这个城市有几条公共汽车路线？

15 有100名学生参加数学小组，已知：小组的任何四个学生中间至少可以找到一个和其余三个认识的学生。试证：可以找出认识所有其余99名学生的小组参加者。认识所有其余99名参加者的最小学生数是多少？

16 在有20名学生参加的小组里，给20道习题。结果是每个学生解出了两道题和每道题由两个学生解出的。能否组织习题的选择，使得每个学生讲述一个所解的习题，并且全部习题都有人讲清楚？

17 能否用数字填满空的正方形（对于每种情况都不相同，要使任何两个方格都不含同一数字），使得大多数的行、列和对角线上的数之和等于15（见图7.8）。

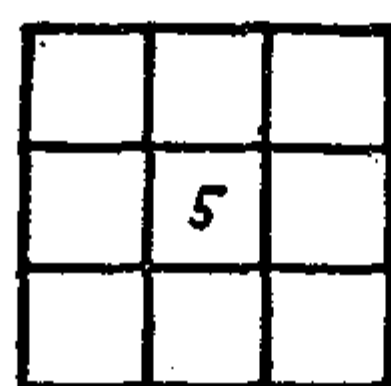


图7.8

18 五个质量不同的物体要求按其质量减少排列之。仅仅可以利用无砝码的最简单的称来判明两个被比较物体哪个重些。怎样做才能使得称量数为最小。

19 今给4枚外形相同的硬币。其中的每一枚都应5克重，已知但一枚且仅一枚硬币有另外的质量。如果利用等臂天平和一个五克的小秤砣，借助两次过秤如何判定伪币和查明哪个硬币重些或哪个硬币轻一半？

20 一城市有10条互相平行的街道和另外10条垂直穿过它们的街道。试问：通过所有十字路口的闭口路线能有最小转弯数是多少？

21 世界上的每个人握了某种数目的手。试证：凡握过奇数次手的人数一定是偶数。

22 证明：如果随便挑选6个人，那么，这六个人之中要么

可以找到三个人，这三个人中每个人和其余的两个人认识，要么可以找到三个人，其中的一个人也不认识其余的人。

§ 7.6 平面图形的相互位置

借用研究比较少量图形的对应比例关系可以说明大量平面图形相互位置性质的《工作》假设。当逐步总括明显了的性质以后，就可“揭示”习题中全部所述点集的性质。

例1 一条由203个链节组成的封闭折线，而且任何两个链节都不在一条直线上。对于这种链线，自身相交的交点最多能有多少个？

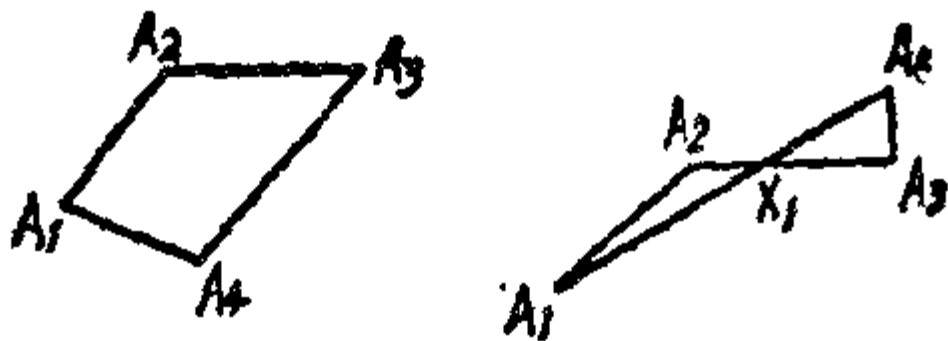


图7.9

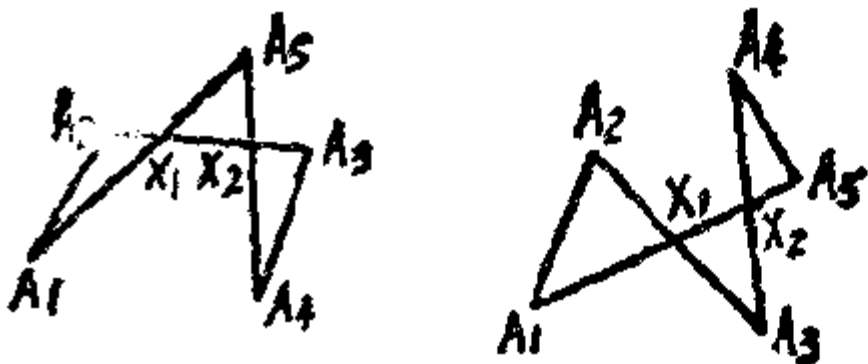


图7.10

由题设件条可知，这条折线的任何三个顶点都不在一条直线上。

为得到《工作》假设，我们作几条折线，其任何两链节都不在一条直线上（图7.9—7.17）。讨论具有链节数不同及其各种不同相互位置的折线，引入下列假设：

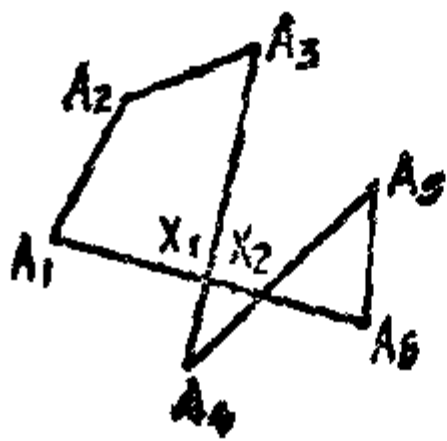


图7.11

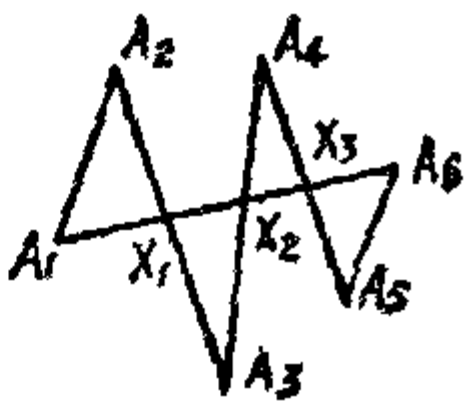
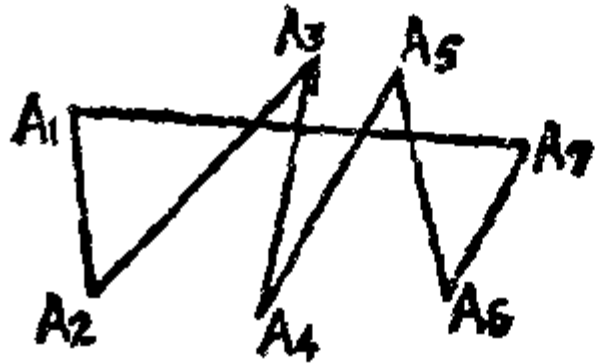


图7.12



- 1) 由 n 个链节组成折线的每个链节可穿过不大于 $(n-3)$ 个

链节。之所以这样是因为每一个链节不穿过本身及与本身连结在一起的两个链节，

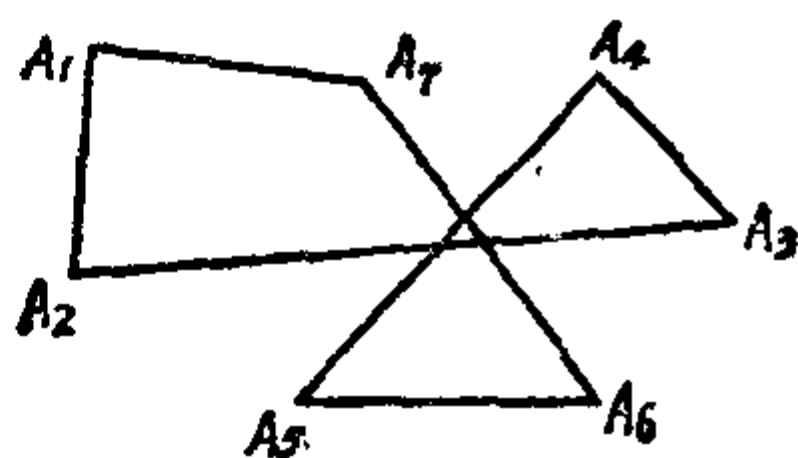


图7.13

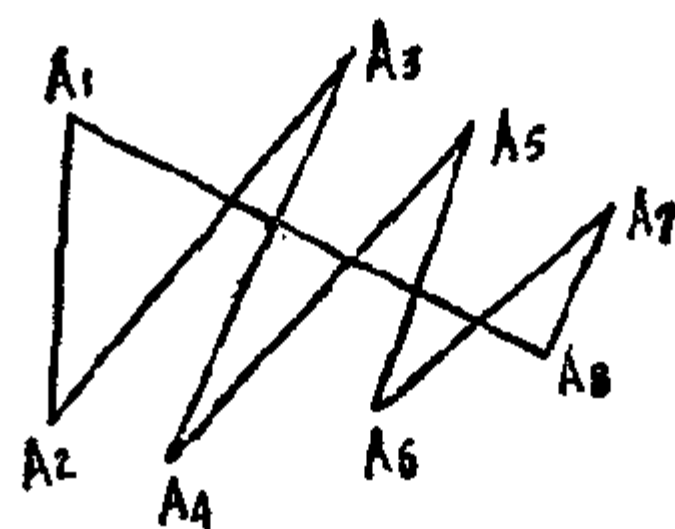


图7.14

2) 因此,折线自身相交的交点的总数不能大于 $n(n-3):2$;

3) 本题中 $n=203$, 因此, 所讨论点的最大数目不大于 $203 \times 200 : 2 = 20300$;

4) 由图7.15和7.17可知,如何做才能作出交点为最大数目的折线。一般说来,图7.15的思路是,如果一个圆被许多点分为203个相等的部分,并且在圆内作出203个的内接三角形,那么,我们会得到20300个自己相交的交点,因为任何星形式的等边203边形的三条链环,没有公共点。

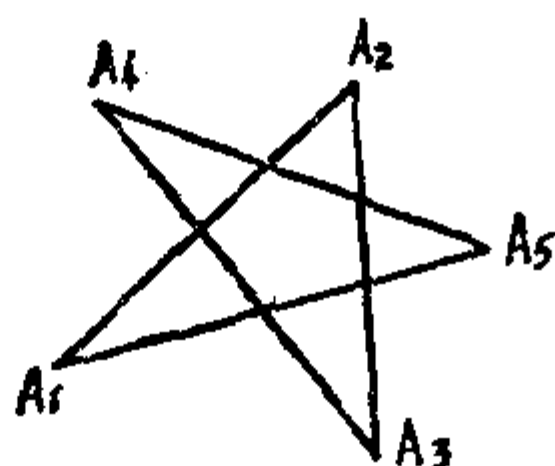


图7.15

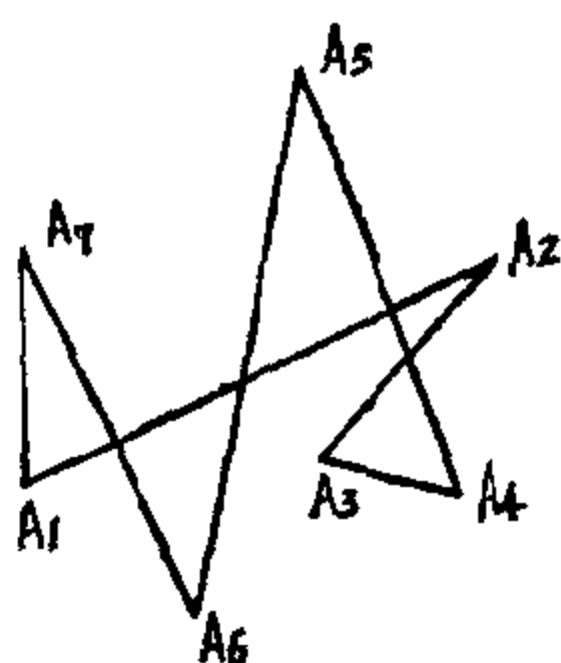


图7.16

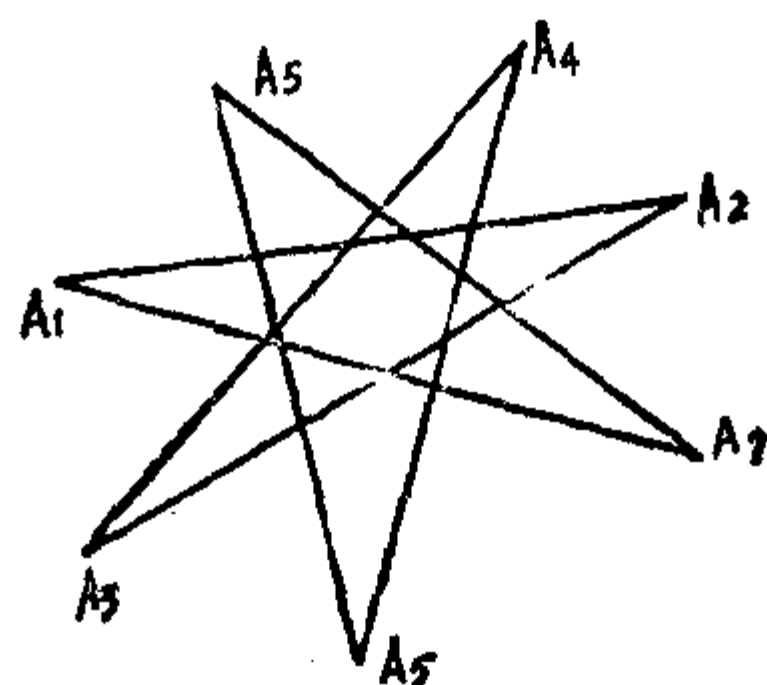


图7.17

例2 在一个单位正方形内给定9个点。证明:在顶点为已知点的所有三角形当中,至少有一个三角形的面积不超过 $1:8$ 。

在正方形ABCD里作出任意9个点($|AB|=1$),画出三角形,从而得到一些线段网和各种各样三角形的集合,以致不能简单

地指出三角形的某些性质(图7.18)。因此,研究少数点,例如 $n=3$ 的相应问题(图7.19)。度量三角形 MKP 和 $M_1K_1P_1$ 相应边和高,并随之进行计算,就有可能得到假设:《正方形内的任何

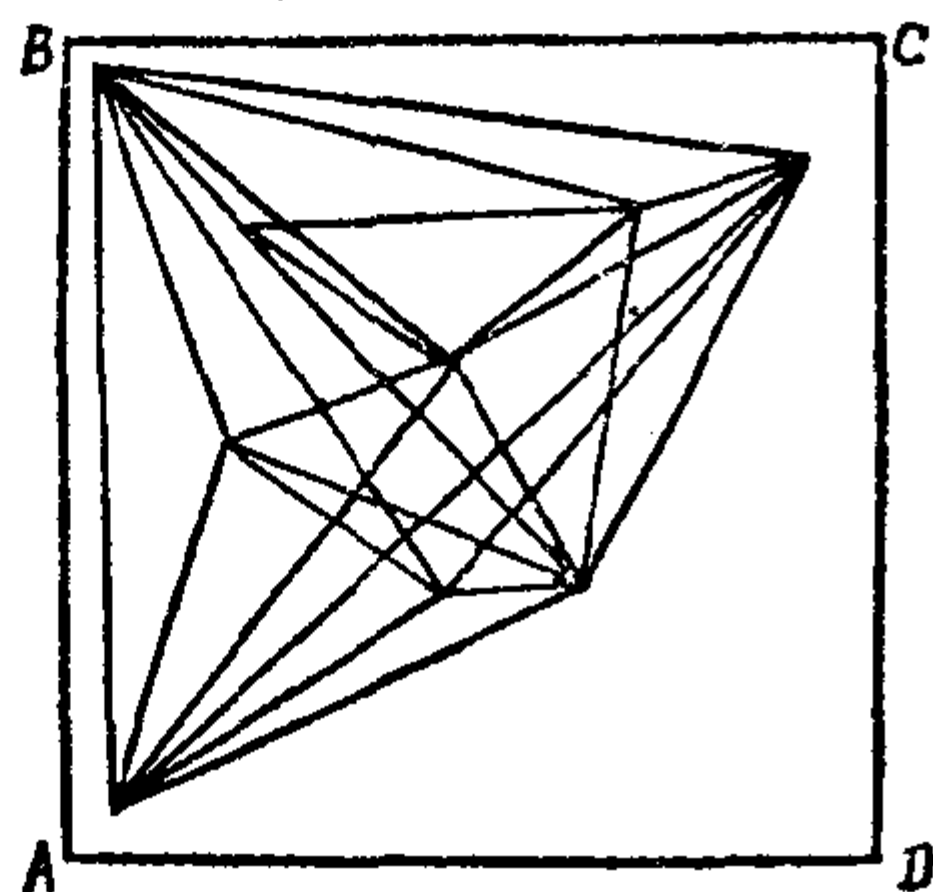


图7.18

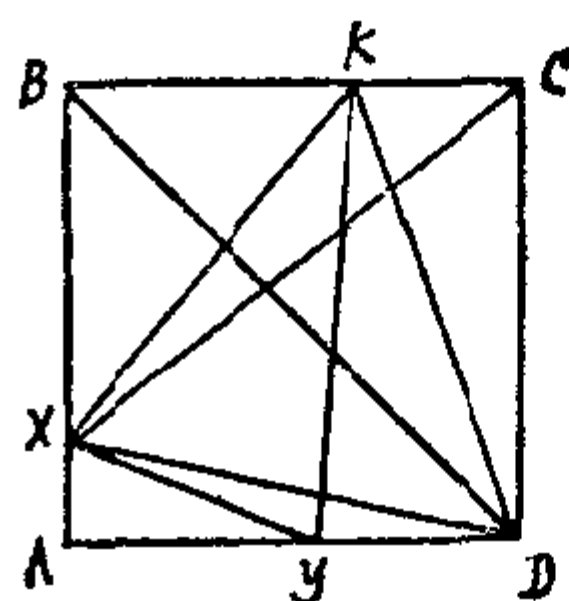


图7.19

三角形的面积,都不超过该正方形面积的一半》。

暂且不证明这一性质,考虑一下如何用它解算所研究的习题。

当然,可将给定的正方形用线段分成四个相等的正方形。又因为有9个点,所以在此正方形中的每一个内,都不少于三个已知点(图7.20)。

现在根据假设,可以确定:

$$S(XYZ) \leq 0.5s(HEKA) \leq 0.5 \times 0.25 = 1:8.$$

于是,为了解题,须证明上述假设。

在图7.21上画三角形 ABC , XKD , XKY , 这些三角形的顶点都在正方形的边上。显然,

$$S(ABD) = 0.5s(ABCD),$$

$$S(XKD) < S(XCD) = 0.5s(ABCD),$$

$$S(XYK) < S(XKD) < 0.5S(ABCD).$$

现在很明显,当三角形顶点在正方形的各边上的任何位置

时，它的面积不大于正方形面积的一半。

假如三角形 FMK 的一个顶点不在正方形的任一边上（图

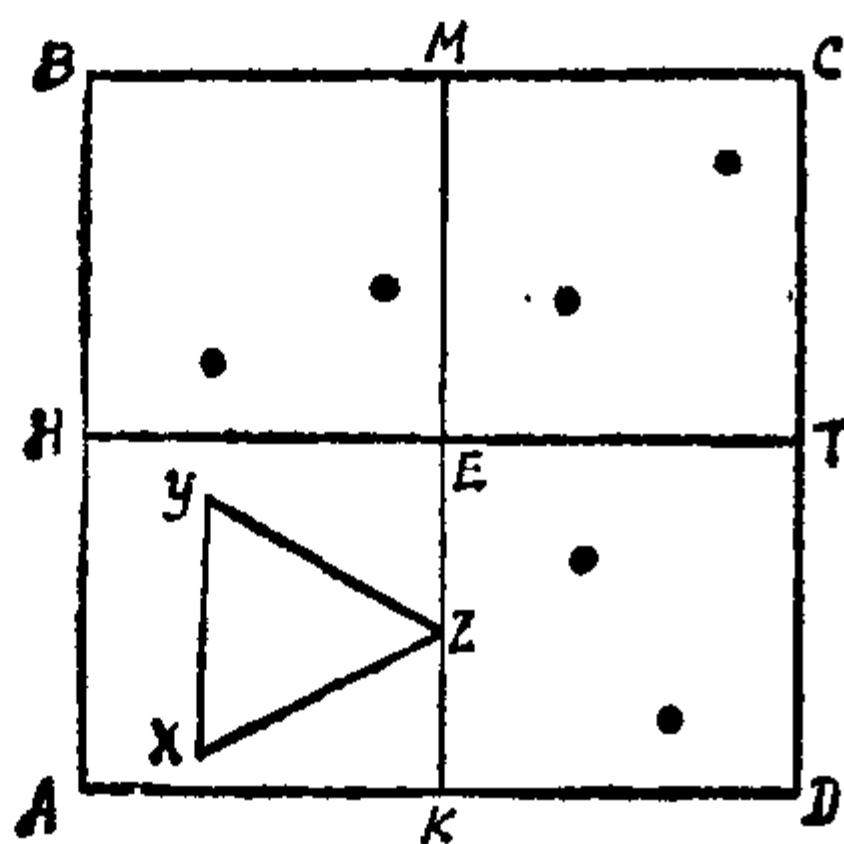


图7.20

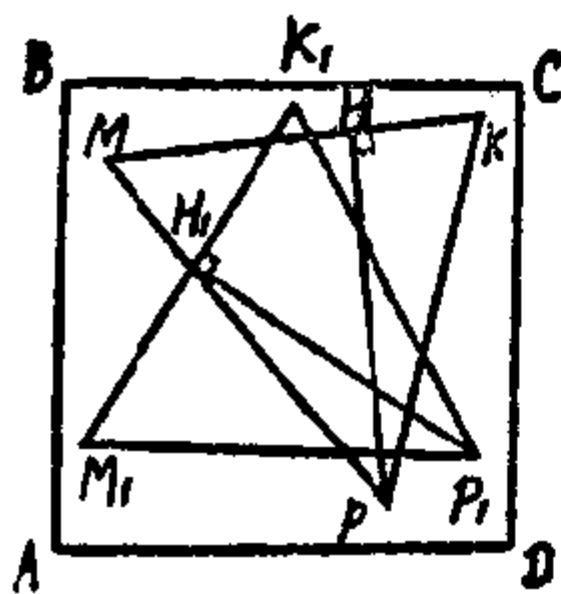


图7.21

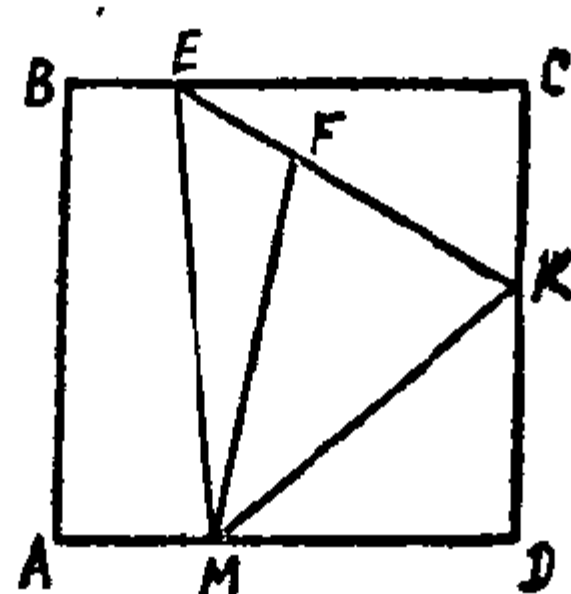


图7.22

7.22), 则此三角形可画成三角形 MKE , 它的所有顶点都在正方形的各边上, 因此, 这种情况下的命题也为真。

练习

1 有五个点, 其中的任意三点不在一条直线上。试证: 从五个点里可挑选四点, 此四点是凸四边形的顶点。

2 在一平面上给定六点, 其中的任意三点都不在一直线

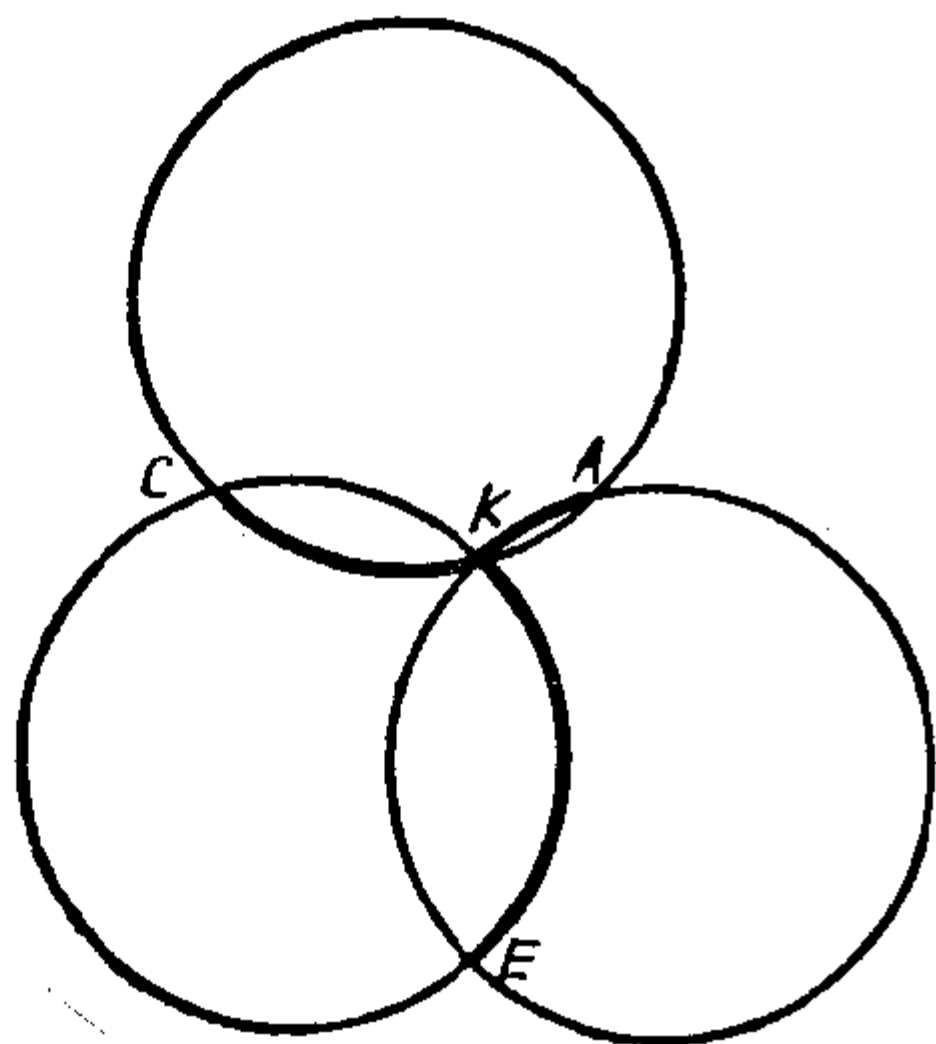


图7.23

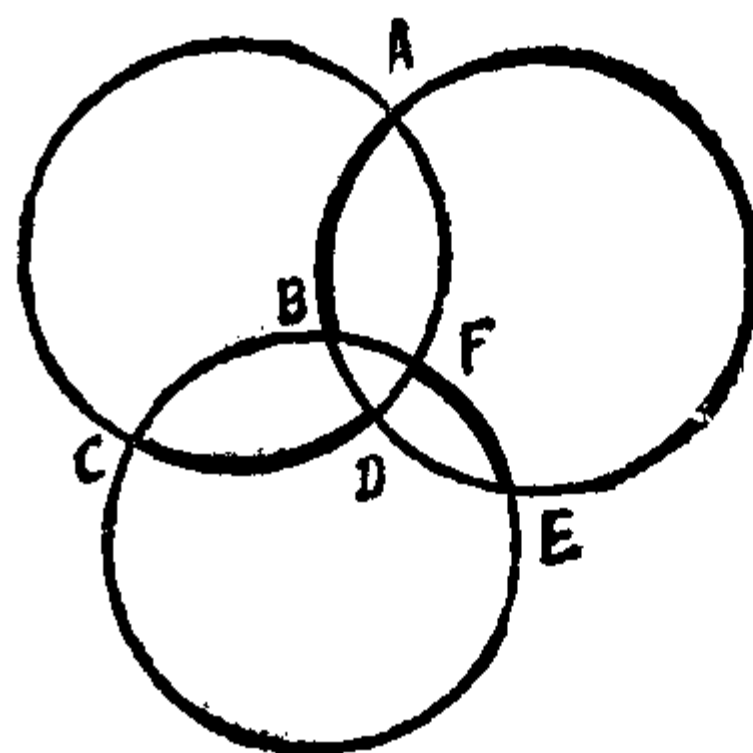


图7.24

上. 试证: 在六点中有三点, 它形成不小于 120° 角的三角形,

3 试证: 不能引出一条与 $|OO|$ 边形的所有边都相交的直线.

4 在平面上给定 $n > 3$ 个点, 其中的任何3点都不在同一条直线上. 问能否画一个圆, 使它总过不小于给定 n 的3点, 也不包含任何这些 n 点之一在内.

5 在平面上布置 n 个点, 使这些点中的任何4点位于凸四边形的顶点上. 试证: 所有点都位于凸 n 边形的顶点上.

6 能否在平面上布置4个圆. 使它们把平面分成16份.

7 在平面上能否布置8条线段, 使每条线段都和另外3条线段正好相交.

8 能否在平面上布置7条线段和7个点, 使得过每个点都恰好有3条直线, 每条直线上恰好有3个点.

9 在一凸六边形上, 所有的角全等. 问此凸六边形的对边具有什么样的共性?

10 已给一凸四边形 $ABCD$ 和四个这样的圆, 每个圆都和四边形的一个边及这个边的邻边的延线相切. 问这些圆的圆心具有什么样性质?

11 试证: 在半径为1的圆内, 不可能选出5个以上的点, 使这些点间的所有两个两个点的距离大于1.

12 由连接三角形两垂足的线段中点所作垂线分此三角形的第三边为什么样的比例?

13 在五个圆中, 每四个圆有公共点. 试证: 所有的五个圆有公共点.

14 在平面上给定三个半径相同的圆:

(1) 圆相交于一点, 试求弧 AK , CK 和 EK (图7.23)之和等于几?

(2) 如果圆不相交于一点 (图7.24), 试求被标上记号的弧 AB , CD , EF 之和等于几?

§ 7.7 构造问题

有关寻找解构造问题的途径方法, 已在 § 6.3 中讲述过. 在解《非标准》构造题时, 主要困难是找出它们的全部解答.

例1 给定点 $D(0, 0, 0)$; $A(1, 0, 0)$; $B(0, 2, 0)$; $C(0, 0, 3)$. 求作顶点是给定点的所有平行六面体的图形.

从平行六面体的8个顶点上, 将不属于某个面的4个点 A , B , C , D , 用非常不同的方法标出平行六面体 (图7.25a—2).

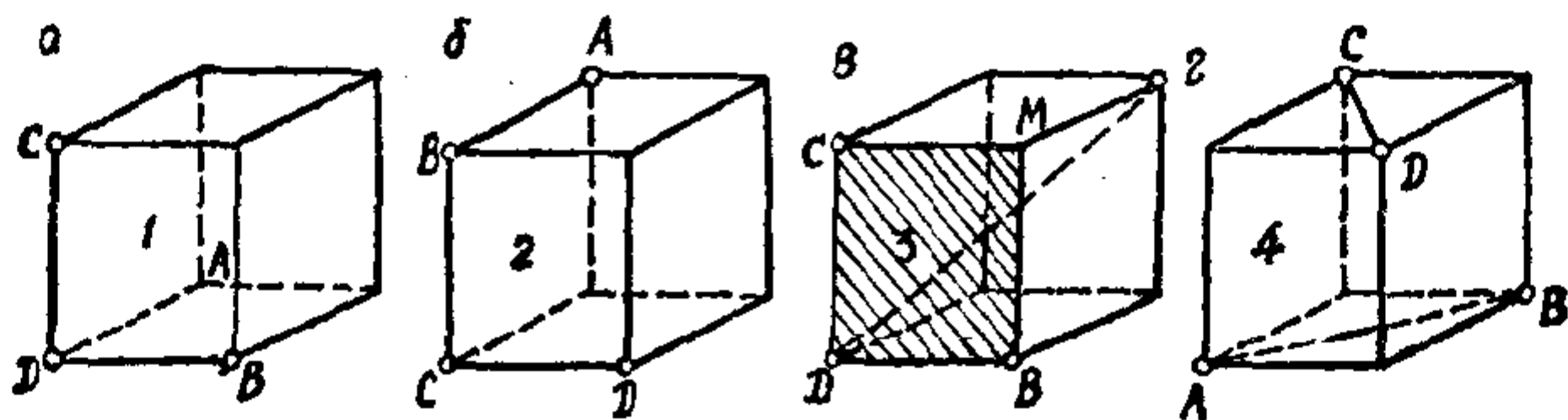


图7.25

现在对每一种所标出的情况, 寻找能按照给定4点作出多少数目的这种形式的平行六面体.

1 每4个点 A , B , C , D 可以是给定点线段端点的3根线段的公共顶点. 因此可以作出1型 (图7.26—7.29) 的四个平行六面体.

2 线段 AB 和线段 CD 属于由一对平行平面所确定的异面直线, 这对平行平面位于平行六面体的相对面. 作为由给定点所确定的3线段折线的端点, 可以取4个点中的每两个点. 因此具有不同端点的折线数等于 $c_4^2 = 6$. 2型的所有折线为12: $ABDC$ 和 $ACBD$, $ACDB$ 和 $ADCB$, $ABDC$ 和 $ADBC$, $BADC$ 和 $BDAC$,

$BACD$ 和 $BCAD$, $CABD$ 和 $CBAD$ 。因此有12个2型平行六面体。

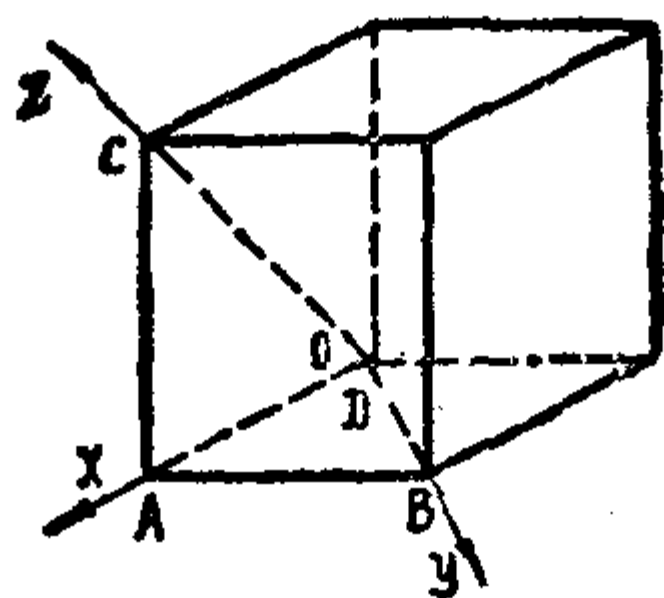


图7.26

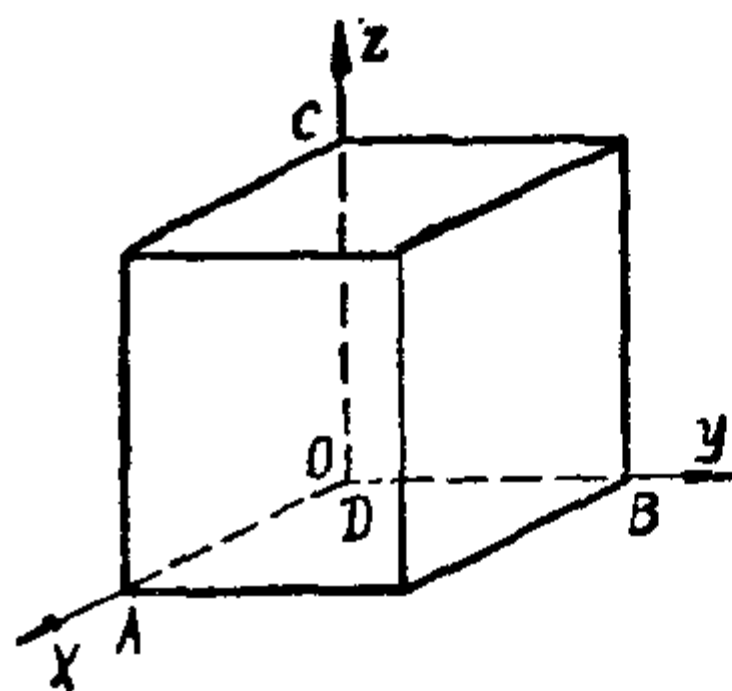


图7.27

3 4个点 A, B, C, D 中的每个点都可以作为 D 点引出来(图7.25, B)。这些点中的每个点和两个别的点确定出平行六面体的面。这些面构成划虚线的面 $CDBM$ 。因此,有12个3型平行六面体。

4 最后, 4型有一个平行六面体。

这样一来, 有29个不同的平行六面体, 对于每个平行六面体来说, 其顶点是给定的不共面点 A, B, C, D (因为节省篇幅, 故对每种形式只画出单个一种 (图7.25—7.29))。

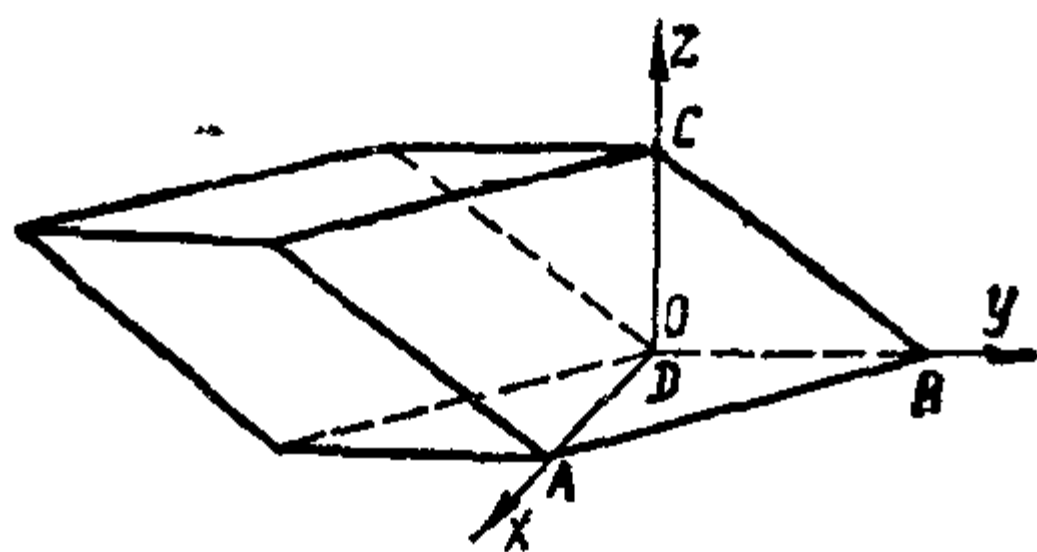


图7.28

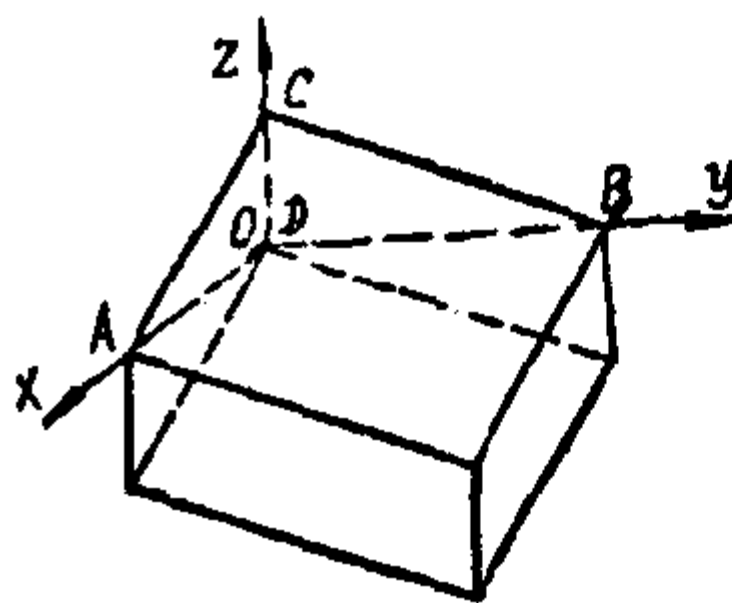


图7.29

例2 将给定三角形 ABC 分成两个相似于它的三角形。

我们来研究某些熟悉形式的三角形, 即研究一些特例来帮助发现问题的一般解。

- 1 易知, 某些等边三角形是不能分成两个等边三角形的;
- 2 将高 KH 的直角三角形 ACB (7.30) 分成两个直角三角

形 AHC 和 CHB ，它们相似于给定的三角形。

3 任何锐角三角形不能分成两个锐角三角形。

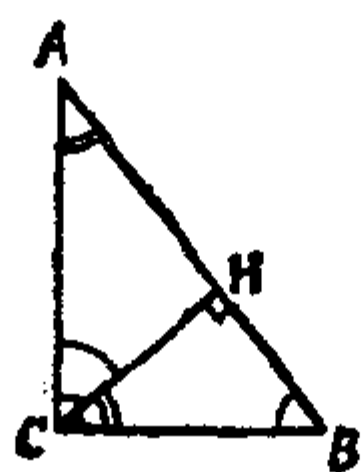


图7.30

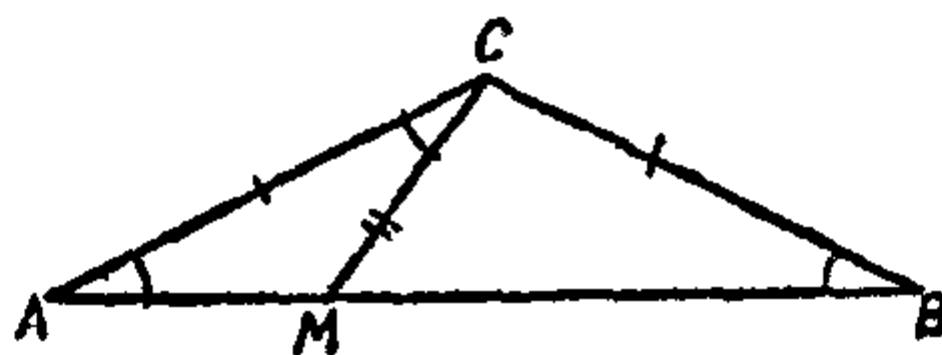


图7.31

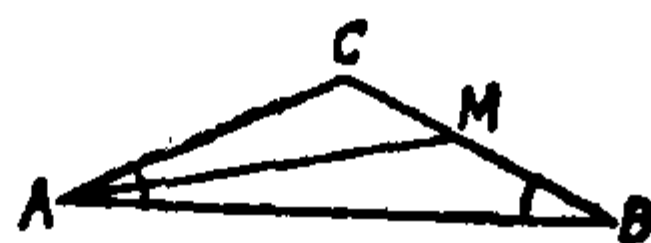


图7.32

4 研究等腰钝角三角形 ACB 。由图7.31和图7.32显而易见，在这种情况下问题无解。

5 作一不等腰钝角三角形 ACB ，其 $ACB > 90^\circ$ (图7.33)，线段 AM ($M \in [CB]$) 不能将三角形 ACB 分成它的相似三角形。因为 $\angle AMB > \angle ACB$ 。线段 CM 不是解，因为 $\angle MCB < \angle ACB$ 。线段 CP 也不能将三角形 ACB 分成它的相似三角形，因为 $\angle ACP < \angle ACB$ 。

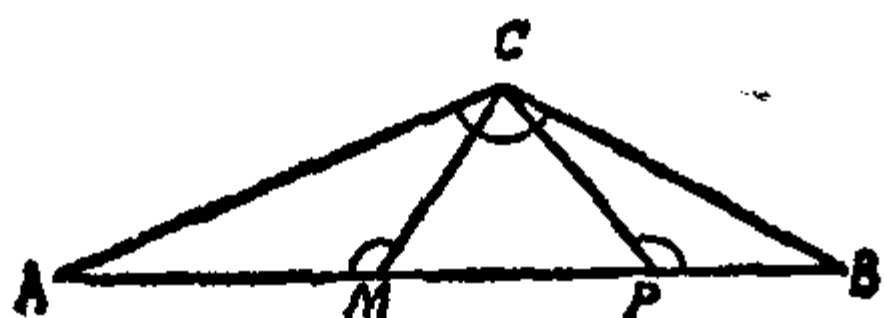


图7.33



图7.34



图7.35

这样，问题只对直角三角形才有解（见图7.30）。

例3 在一块尺寸为 4×100 方形木板上，放上一些矩形骨牌，使每个骨牌可以恰好完全遮盖住两块方格。任何两块决不重迭，任何方格也不空着。能否将木板按照在板上画的纵向直线和横向直线之一锯开，但要既不移动，也不锯到任何一枚骨牌。

1 如果第一排方木板按图7.34所示用骨牌遮盖，则问题显然有解。

2 如果头两排方木板用图7.35所示的用骨牌遮盖,则问题有解。

3 如果第一排方木板用骨牌按照图7.36方法遮盖,则随后的作图构成矩形(图7.37)或者是图7.38。前者问题有解。如按图7.38所指出的规则继续铺砌骨牌,我们得到能按照直线AB锯开木板的遮盖。

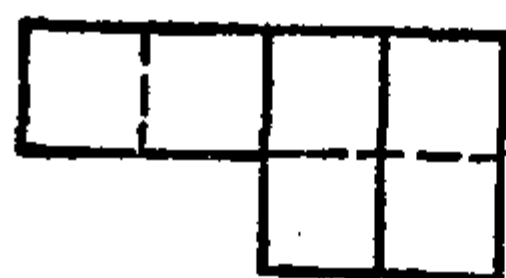


图7.36

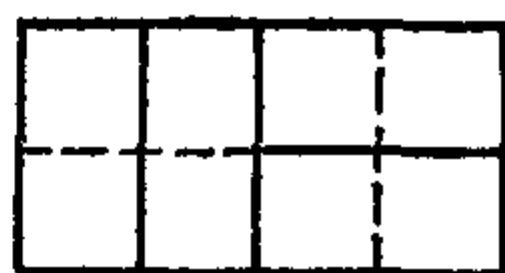


图7.37

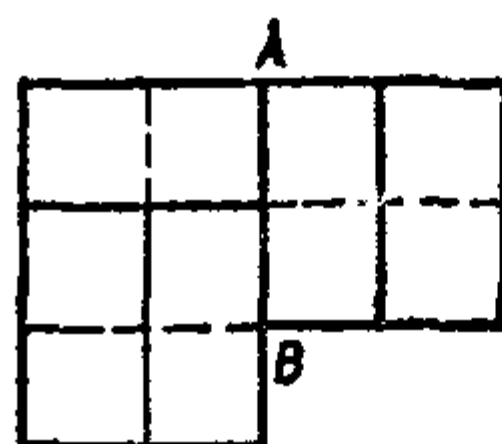


图7.38

4 设头一排方木板,按照图7.39所示用骨牌所遮盖.随后的作图可以作成或者是图7.40所示的情况(问题也有解!),或者是图7.41所示的情况。对于后一种情况,问题有两个解:直线MK和PF。



图7.39



图7.40

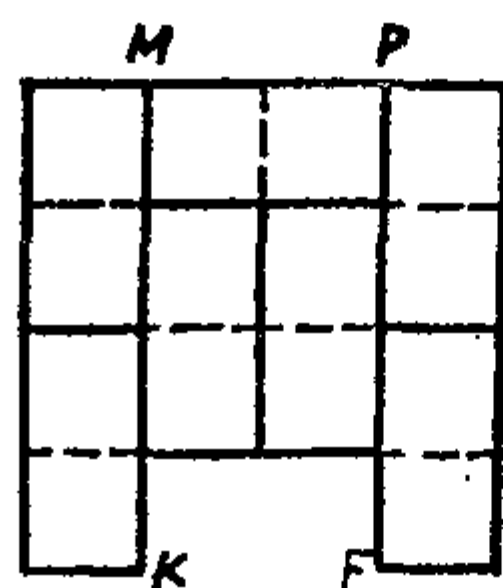


图7.41

这样一来,问题在给定木板用骨牌可能遮盖的任何一种情况下都有解。

例4 已给一钝角三角形 $\triangle ABC$ ($\angle ABC > 90^\circ$)。试作7条线段将此三角形分成锐角三角形。

显然,从角BAC和角BCA中的每一个角起,都可以截成三

角形 DPC 和 MKA (图7.42)。于是, 五边形 $MKPDB$ 所有的角为

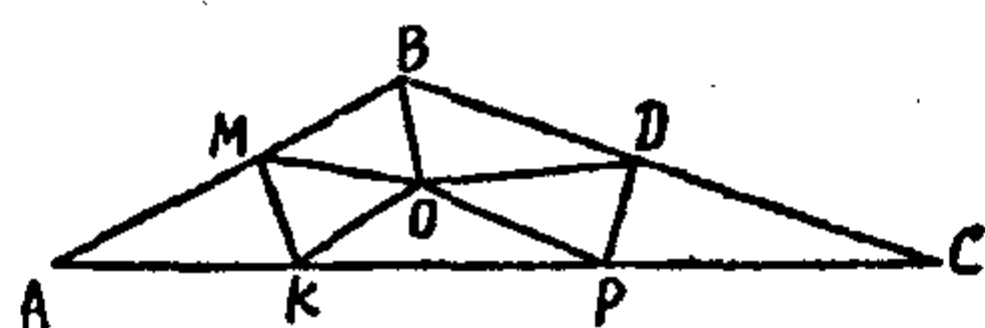


图7.42

钝角。但是否存在这样一点 O , 使三角形 OBM , OMK , OKP , OPP 和 DDB 成锐角呢? 若是存在点 O 的话, 那么怎样作出它呢? 怎样作 D , P , K 和 M , 才能使寻找点 O 的作图法得以简化?

当然, 可以试图将全等线段 DC 和 CP , AK 和 AM 放在三角形 ABC 的对应边上 (图7.43)。

可否再“改进”凸钝角五边形 $MKPDB$, 使 O 点的作图得以简化? 例如, 可否使之“接近”正五边形呢?

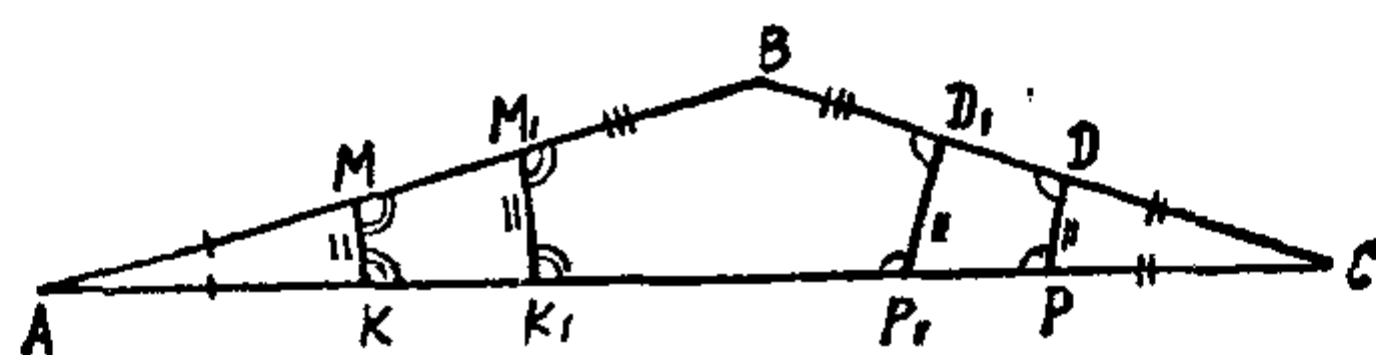


图7.43

我们将全等线段 BM_1 和 BD_1 放得使与之对应的线段 M_1K_1 和 D_1P_1 上而不相交 (图7.43)。在 $[AB]$ 上想必可以选出一一点 M_2 , 使 $[M_2K_2] \cong [M_2B]$, 并作出 $[D_2P_2] \parallel [DP]$ ($[BD_2] \cong [BM_2]$)。但是, 如果 $|M_2K_2| = |M_2B| = |BD_2|$, 则在三角形

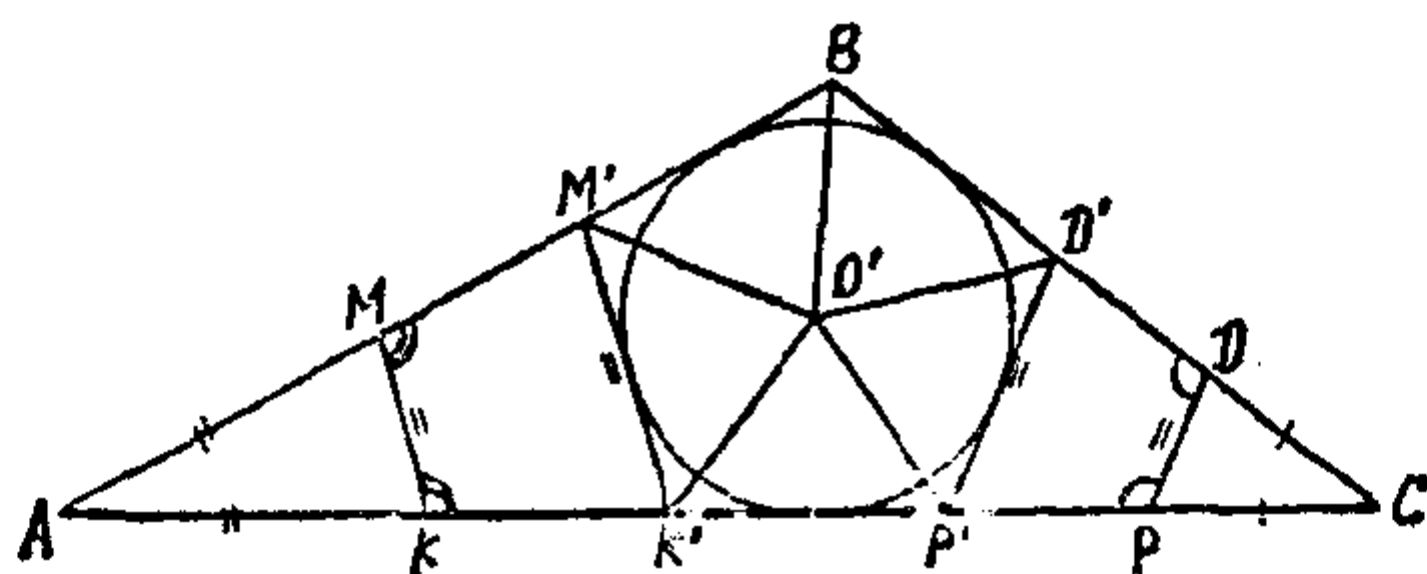


图7.44

ABC 内可作内接圆。于是，全等线段 M_2K_2 ， M_2B 和 BD_2 与此圆相切。此外， $[K_2P_2]$ 也与此圆相切。

这样一来，我们以 O 为中心作三角形 ABC 的内接圆（图7.44）。有 $[M'K'] \parallel [MK]$ 和 $[D'P'] \parallel [DP]$ 的五边形 $M'B'D'P'K'$ 的外接圆具有五个钝角。因为 $\widehat{BD'P'} > 90^\circ$ 和 $\widehat{K'P'D'} > 90^\circ$ ，则 $\widehat{O'D'P'} + \widehat{O'P'D'} > 90^\circ$ ，亦即 $\angle D'O'P' < 90^\circ$ 。同理证明：所有的三角形 $O'D'P$ ， $O'P'K'$ ， $O'K'M'$ ， $O'M'B$ 和 $O'BD'$ 为锐角三角形。这样， $O=O'$ 。

练习

1 试过凸四边形 $ABCD$ 的顶点 A 引一直线，将此四边形分成两个面积相等的图形。

2 用32个骨牌可以遮盖一64格大的象棋盘，使得每个骨牌遮盖两个位置（位置和骨牌尺寸彼此一致）。问能否用31个骨牌将62个位置的象棋盘遮盖住，使得棋盘的两对角位置为空白。

3 在三维空间里，能否作一个封闭五边形，使得所有边相等，所有角为直角？

4 每个钝角三角形，能否用作三角形各边并于其内某点相交的垂直线分成三个等积部分。

5 在三维空间里引出四条不平行且不相交的直线，使得任何第五条直线不交于所有的四条直线。

6 试将一立方体分成6个四面体，其中有三个四面体全等，剩下的三个四面体跟头三个四面体的镜象相符。

7 今给一矩形，能否将它分成 $n(n \geq 5)$ 个矩形，使得任何两个相邻的矩形都共同拼成矩形。

8 用全等四边形能否无空隙地遮盖住平面。

9 是否存在这样的五边形，用它的复制品可以铺成平面？

10 是否存在一五边形，它的任何两边都不平行，它的复制品能铺成平面？

11 用全等的凸七边形能否铺满平面？

12 一矩形小盒的底，用尺寸为 2×2 和 1×4 的方块镶砌而成。如将方块从小盒里倒出来，这时丢掉一块 2×2 的方块。欲用一块 1×4 的方块代替，问现在的盒底能否用方块镶砌而成？

13 给定一矩形，将它剪成两个梯形，使这些梯形中的每一个梯形都是全等四面体的展开图。

§ 7.8 杂 题

1 商店里有价格为每公斤 2 卢布和 3 卢布的糖果，它们的总重量相等。问这两种糖的什锦糖应定什么价格出售？

2 一班有 35 人，他们之中的每个人能否与同班的 11 位同学交朋友？

3 一次，有人在一个月里头一个星期二到了列宁格勒；在头一个星期一之后的头一个星期二到了里加；在下月的头一个星期二到了甫斯科夫；在头一个星期一以后的头一个星期二到了符拉基米尔。试问此人何月何日到了这些城市当中的每一座城市。

4 已给一 19×19 个方格的方形棋盘，将每枚棋子放在每个方格上。能否挪动棋子，使每枚棋子仍在相邻方格上（注意，棋子只能沿水平和垂直（竖）移动，不能沿对角线移动）。

5 今有不合乎规定的双秤盘称和随便多少个的不同规定的秤砣，用这种称怎样称出 1 公斤大米。

6 有花样溜冰运动员，在双人滑冰表演绕自身轴旋转时有 20 次使他们脸对脸，这个时间为 10 秒钟，绕花样溜冰运动员

旋转两次。试问在1秒钟内花样溜冰运动完成几次照面。

7 一列长为18米的电气列车,每9秒钟从公里标旁边过去,问该列车要用多少时间才能过一座36米长的桥?

8 一列火车用37秒钟过一座171米长的桥(设火车头进桥瞬时连末节车厢也包括在内,而一人以1米/秒的速度从火车迎面而过用9秒钟。请求出火车的速度和它的长度。

9 今平衡一不等臂天秤,在其中的一个秤盘上放一个不大的重物,试问用常规方法能否在这种称上称出重量。

10 今有15枚外表上一样的硬币,其中一枚是假的,而且不知道它比其余各枚硬币轻些还是重些。如果不用秤砣,那么,在天秤盘上怎样称两次才能认出它。

11 已给一方形纸片,怎样用线段将它截成四部分,使其中每一部分纸片都能组成边棱无论如何也不全等的三棱锥。

12 一群小学生购买各种画册,每个学生买一种形式且仅一种形式的画册。全体同学按照10戈比付款,每人收到找回的钱,但是这种找回的钱是任何两名学生之一都不一样。问怎样给学生找钱,这群学生最多能有多少人?

13 兄妹两人加在一起的年龄是26岁,已知:妹妹年龄的3倍比她和她兄弟年龄之和的五倍大些。现在问每个人的现龄。

14 彼得有1卢布,各硬币面值都小于10戈比;瓦夏向彼得按每种形式一个硬币索取。这时,彼得小于15戈比。请问彼此的每张票面值是多少?若是最大票面值比其余的票面值大4。

15 a) 圆桌上坐着50位客人。其中25人是女客。请证:有两个邻坐是女客。

(b) 设有女客26人,又设两位客人把自己的餐具打碎了。请证:可以将桌子转到使打碎餐具的两位客人是妇女。

16 一王走遍尺寸为 4×4 的象棋盘,再回到原处。而在每

处只经过一次。问此王应走怎样的最小数目直线（不准走对角线）才能做到？

17 将100枚筹码排成一排，凡是写有1的任何两个筹码可变换其位置。试问将筹码按照相反顺序布置行否？

18 一小孩从棋盘上锯掉尺寸为 3×3 的方格的两对角的正方形，剩下的部分能否使马跳过并回到原处。

19 骑马牧人德若顺便到酒吧间去，并请巴尔缅给一瓶3美元的威士忌酒，6美元的一条烟，不知价格的3包烟丝和9盒防潮火柴。巴尔缅要11美元80分。德若叫后让巴尔缅重新计算，纠正错误。请问德若是怎样猜出巴尔缅打算故意多要钱的。

20 今有一袋9公斤重的大米，怎样借助有50克和200克（按每个计）称砵的天秤盘把所有的大米分成两包：一包为2公斤，另一包为7公斤。在分米时，只许称3次重量。

21 草地长着青草，在草地上放9头母牛，4天内将草地毁之一空。若在草地上放8头母牛，则在6天内吃掉长出的全部青草。请问几头母牛才能使草地上长出的青草总是供得上喂牛。

22 今有双座摩托一辆，问三个人能否3小时走过60公里的距离。已知：步行速度为5公里/时，摩托速度为50公里/时。

23 今有两个容积各为3公升和5公升的容器，利用这些容器怎样从水管龙头灌进4公升的水。

24 桌面上放着15支铅笔，两个人轮流拿1支，2支或3支，玩到谁取最后一支铅笔。问开始玩时应该怎样取才能使自己拿到最后一支铅笔。

25 今有77台电话，能否这样成双地联系它们，使每台的联系正好是13。

26 试证：四个递增为1的连续整数之积是精确平方。

27 9本同样的书，值11卢布和几个戈比，13本这样的书，

值15卢布和几个戈比。请问一本书值多少钱？

28 有一弹簧秤(测力计)，其最大称量是200牛顿。今需将一只比弹簧秤约重1.5倍的皮箱称起，请问你能否做到？怎么办？

29 用票面值为3卢布和5卢布能否无找回地付清大于7的整数卢布的任何之和。

30 有100公斤新鲜浆果放在仓库里，浆果湿度为98%。经过一段时间之后，浆果湿度下降到96%，问现在的浆果有多重？

31 一辆汽车以100公里/小时的速度沿着公路奔驰，这时汽车相互行驶的汽车间距为15米，在比较狭窄地段，为保证安全行车，能否要求汽车速度降低到15公里/小时。

32 素数只有两个不同的除数——1和这个数本身。问：什么数有三个不同的除数呢？

33 一群八年级学生学年结束后决定乘车去列宁格勒参观。每人按月带相同的总钱数。在7个月内收集了640卢布1戈比。请问班里有多少学生？每人每月带钱的总数是多少？

34 三只箱子里放着核桃，第一只箱子里有6个核桃，它比另外两只箱子一起的核桃少，在第二只箱子里放10个核桃，它比第一、第二两箱一起的核桃少。请问：第三只箱子有多少核桃？

35 书上脱落一部分书页，其中的第一页号数为387，而以后的页号是由别的次序写成相同数码。请问从书上脱落几页？

36 中学足球冠军赛，金牌得7分，银牌得5分，铜牌得3分。问最后一名的球队得到多少分？有几个球队参加了比赛？(赢一场给2分，平一场给1分，败一场给0分，如果两个队得了完全相同的分数，就根据进球数和失球数来定分数)。

37 一个班不足50名学生，检查学生作业结果是： $\frac{1}{7}$ 的学生

得“五分”， $\frac{1}{3}$ 的学生得“四分”， $\frac{1}{2}$ 的学生得“三分”。剩下的作

业不及格。请问有多少人不及格？

38 七年级生的两个班学生购买737本教科书，每人买书的数量相同。问七年级生有多少？每人购买多少本书？

答案 提示与解答

第一章

§ 1.2

1 (1)显然, 如果 x 是偶数, 原 y 是奇数(反之亦然). 但若 $x=2k$, $y=2n+1$, 则 $4k^2+(2n+1)^2=1970$. 由此 $4k^2+4n^2+4n=1970$. 但1970不能被4整除.

5 若 $x=2k$ (k 是自然数), 则由给定方程得 $4k^2(2k+5)=13+a$. 现在须查明: 当 $a\in[-13, -1]$ 怎样时, 表达式能被4, k^2 和 $2k+5$ 整除. 类似地对 $x=2k+1$ 进行研究.

6 显然, $9(2x+3y)-2(9x+5y)=17y$.

第二章

§ 2.3

1 作出参数为某些值时函数 $\varphi(x)=|x-a|$, $\psi(x)=|x-b|$, $f(x)=|x-a|+|x-b|$ 的图象. 函数 $f(x)$ 的图象示于图1. 求出方程解的数字取决于分数 $|a-b|:c$ 之值.

2 方程 $y=2|x+6|-|x|+|x-6|$ 的图象, 如图2所示.

3 一个.

5 对 a 解方程, 作方程 $a=(x^3+32):(x-2)$ 的图象.

7 $(x^4-2x^2+1)^{0.5}=|x^2-1|$. 方程式的图象, 如图3所

示.

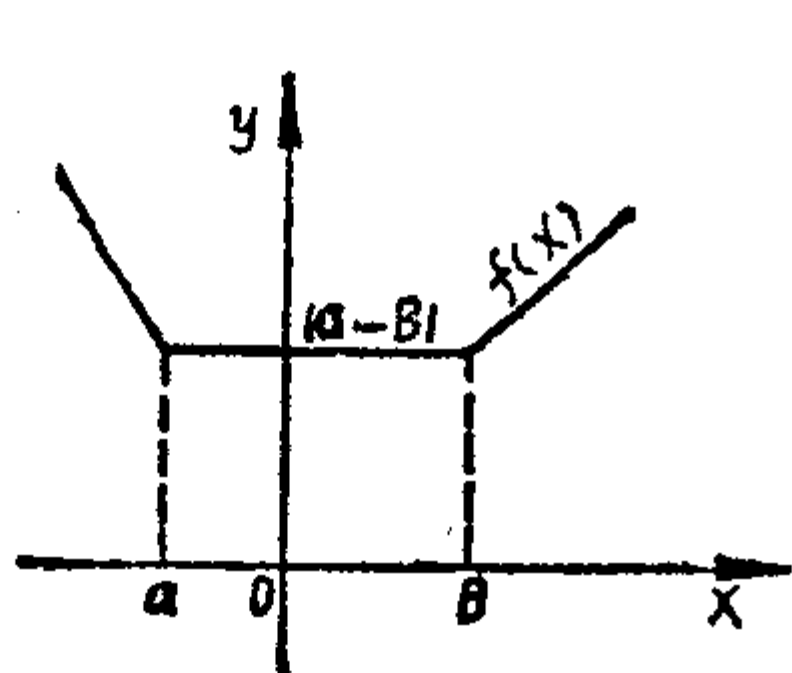


图1

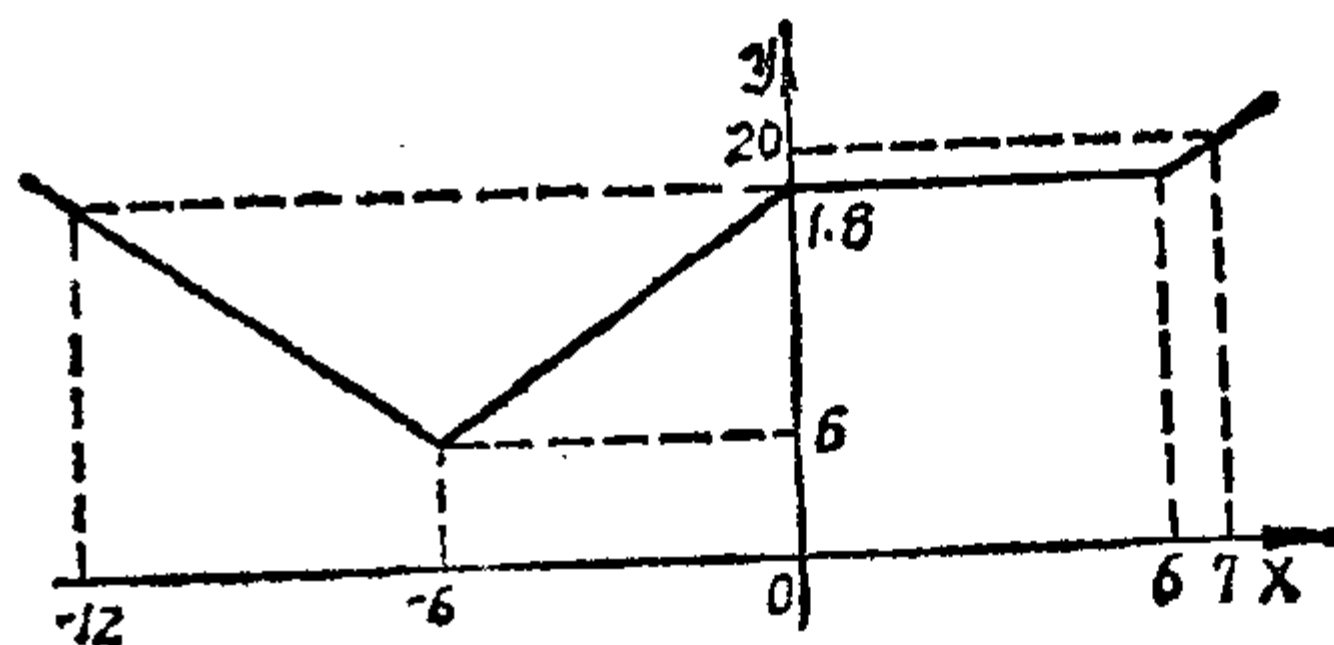


图2

8 用 $\sqrt{9-x} + \sqrt{4-x}$ 乘和除方程式的右边.

9 因为函数 $y = \sqrt{2x-6} + \sqrt{x+4}$ 单调.

13 方程式的图象, 如图 4 所示.

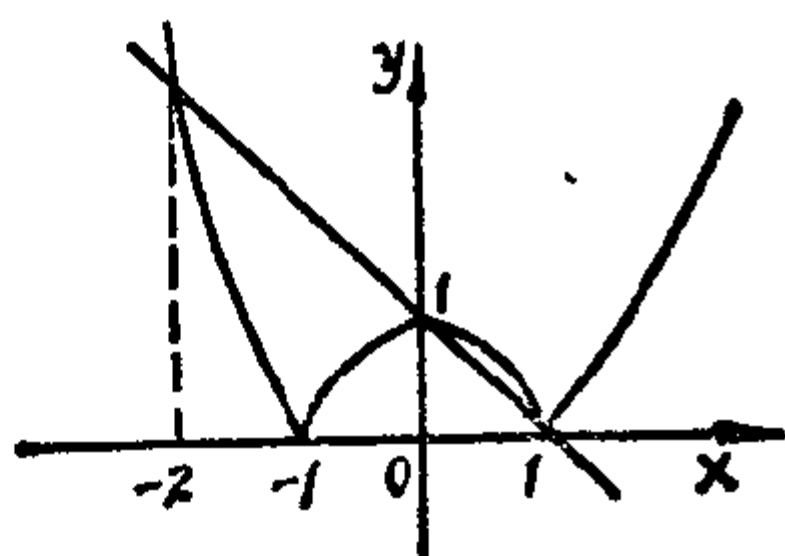


图3

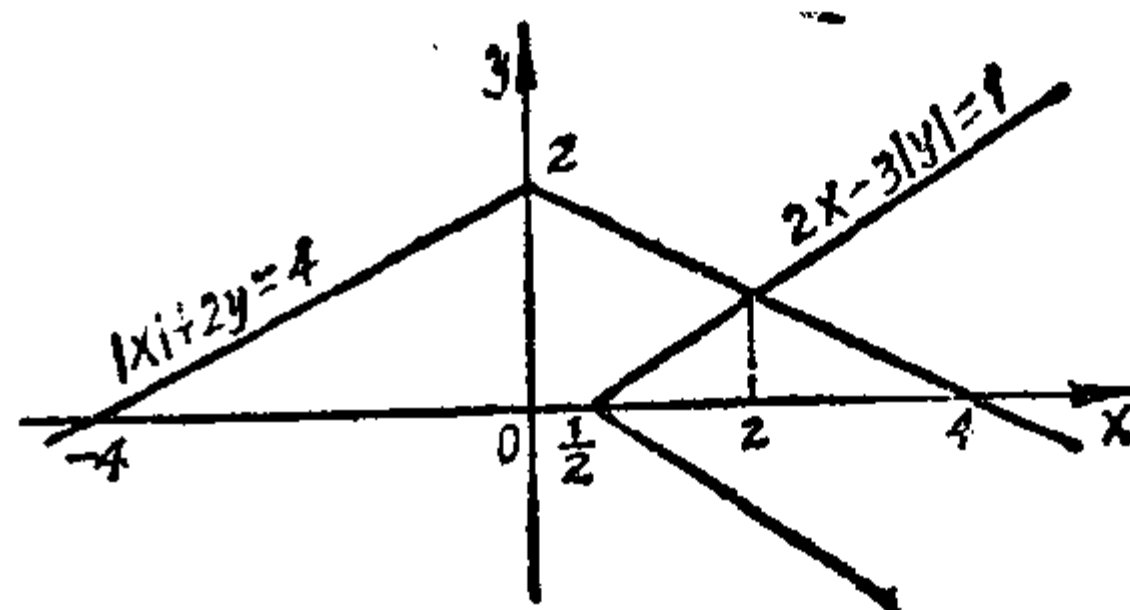


图4

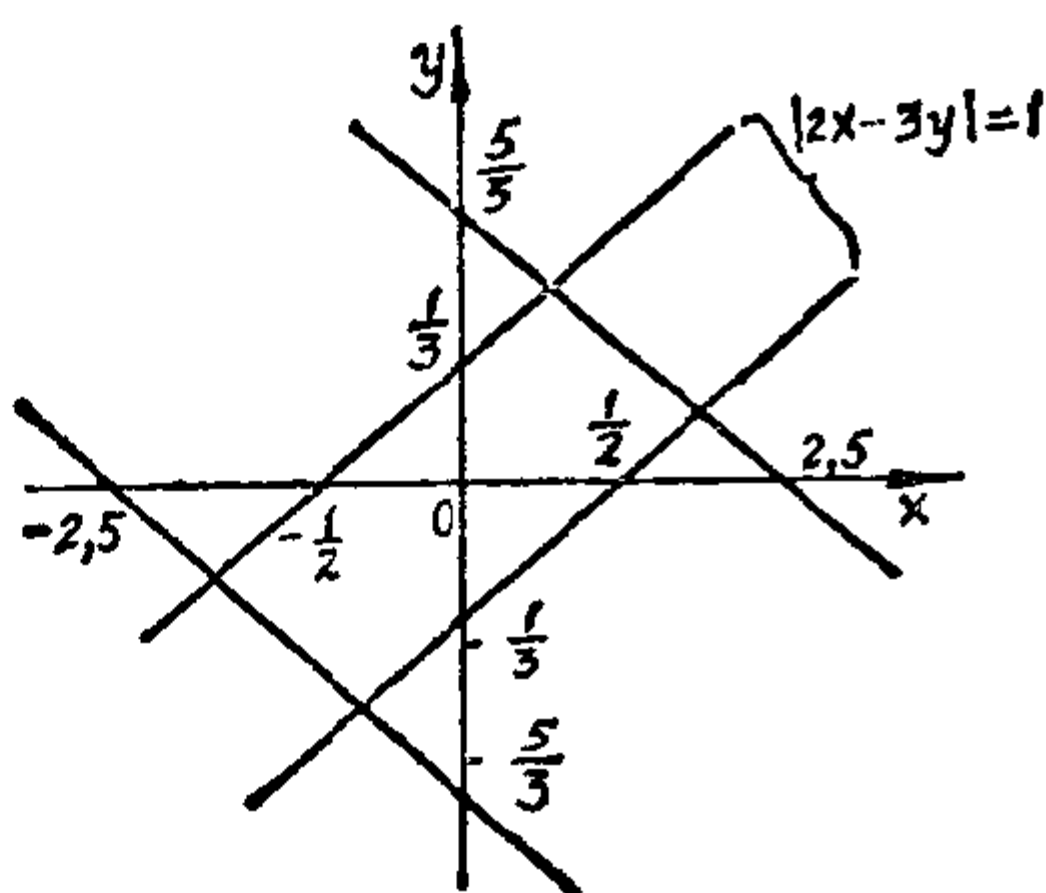


图5

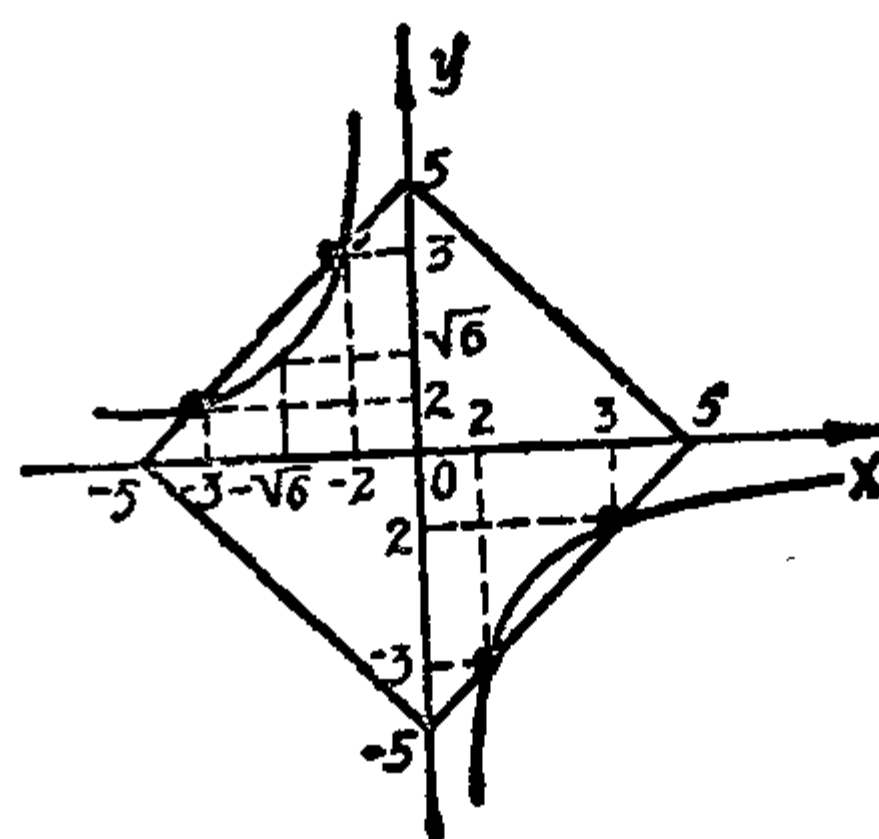


图6

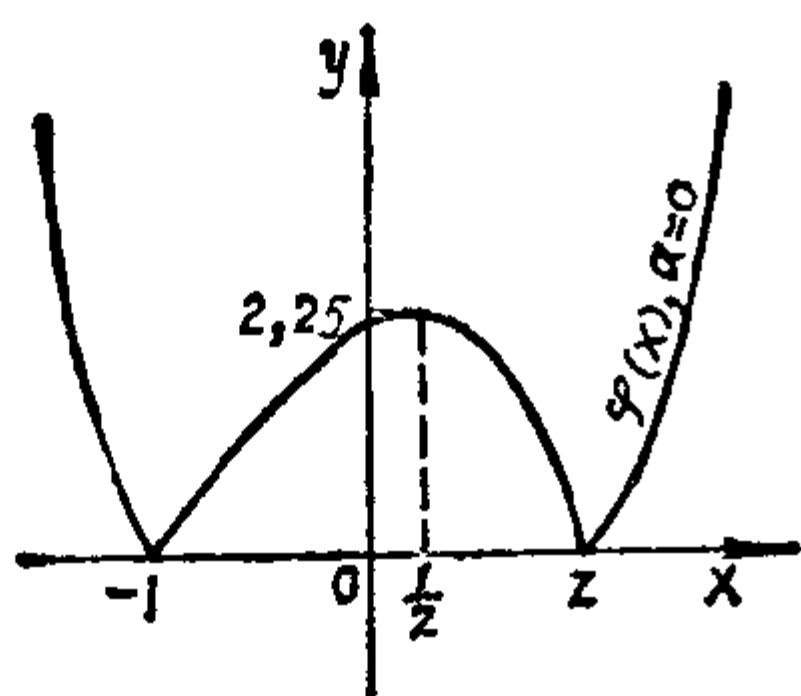


图7

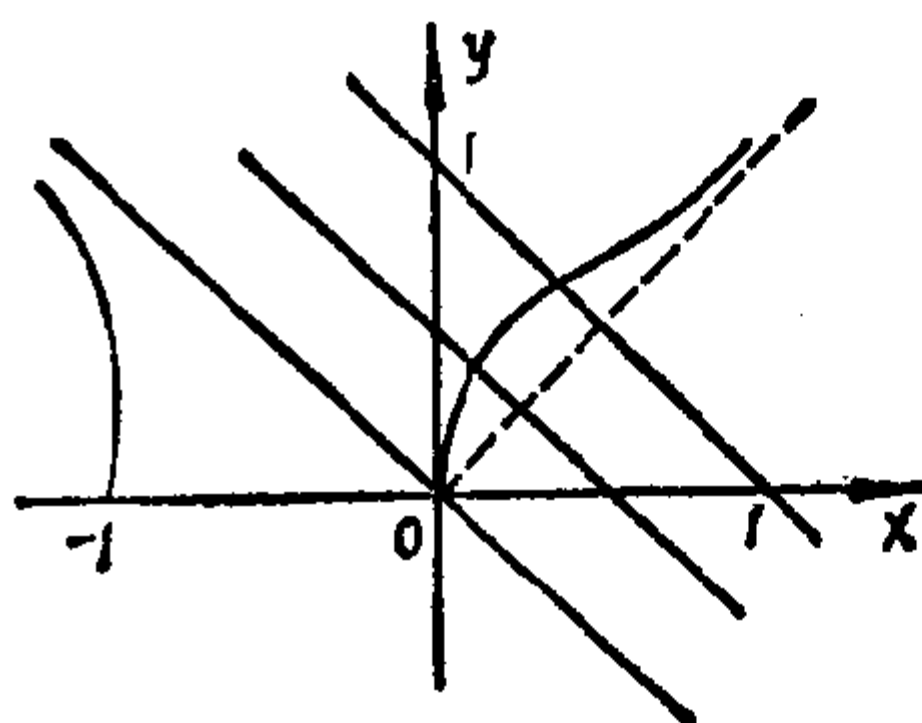


图8

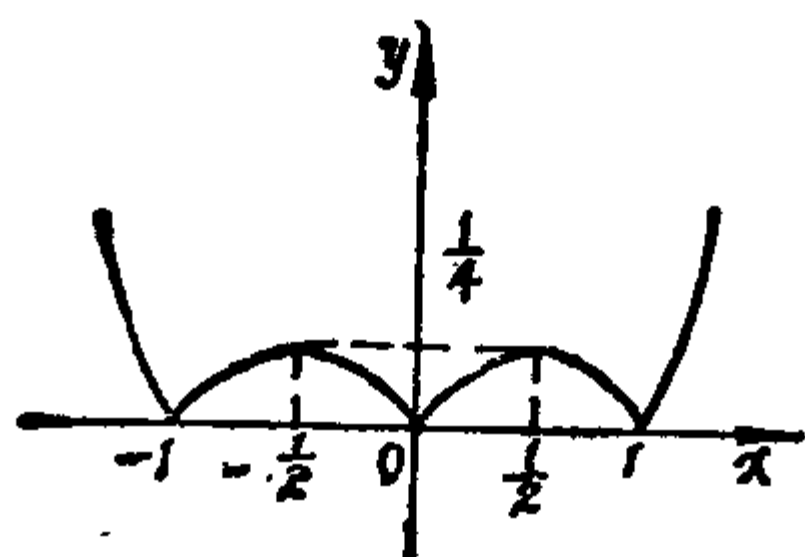


图9

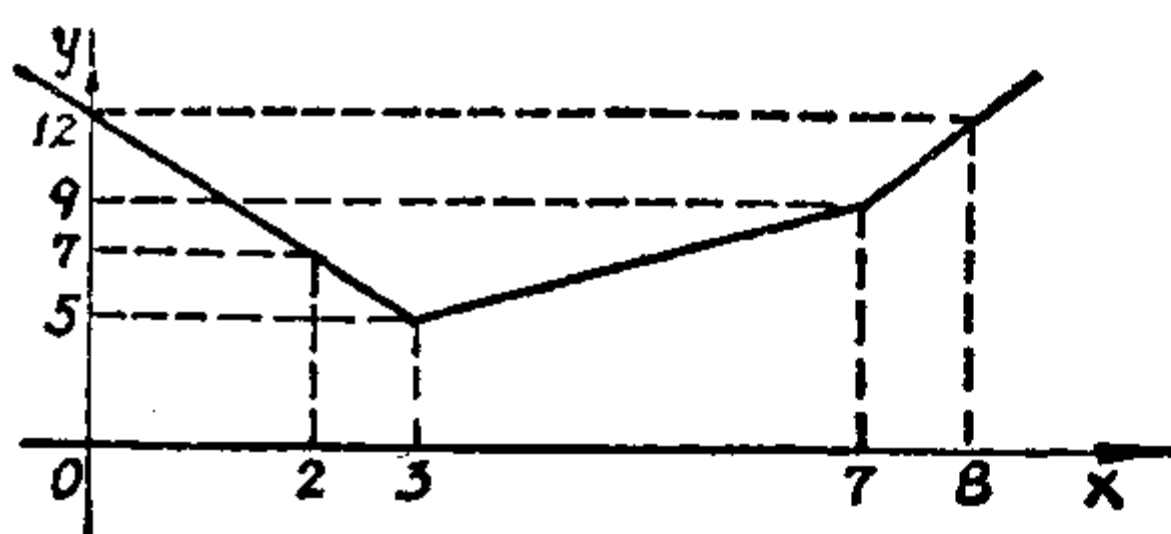


图10

14 方程 $f(x) = \varphi(x)$ 有根 $-4/3$, $1 + \sqrt{3}$.

15 方程式的图象, 如图 5 所示.

16 方程式的图象, 如图 6 所示.

17 见图 7.

18 见图 8.

19 方程式的图象, 如图 9 所示.

20 方程式的图象, 如图10所示.

第三章

$$\begin{aligned} 1 \quad x^5 - x^3 - x^2 + 1 &= x^3(x^2 - 1) - (x^2 - 1) \\ &= (x - 1)^2(x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

2 求出集合 $]-\infty; -2]$, $[-2; 1]$, $]1; +\infty[$ 中的每一个解.

- 3 应用克莱姆法则。
- 4 解与给定方程组等价的四个线性方程的集合。
- 5 见例 4 的提示。
- 6 求集合 $] -\infty; -2/3[$, $[-2/3; +\infty[$ 中的每一个解。
- 7 求集合 $] -\infty; -6[$, $[-6; 0]$, $]0; 6]$, $]6; +\infty[$ 中的每一个解。
- 8 显然, $x^2 + y^2 + xy = (x + y)^2 - xy$. 现记作: $x + y = t$, $xy = u$.
- 9 将方程组的第一个方程变换成形为 $(x^2 - y^2) \times (x + 2y) = 0$ 并解等价于给定方程组的两个方程组集合。
- 10 由第二个方程逐项减第三个方程, 第二个方程逐项减第四个方程后, 得 $(z + t)(y + x) = 0$ 和 $(x + t) \times (y + z) = 0$. 由此得 $z = -t$, $x = -y$, $x = -t$.
- 11 把第一个方程的两边平方, 并把得到的方程减去方程组的第二个方程, 从重新得到的方程式和方程组的第三个方程, 得 $yz = -4$. 由此方程和方程组的第三个方程得 $x(y + z) = 1$. 由此方程和方程组的第一个方程得出 x .
- 12 应用韦达公式, 得 $-3 < x_1 + x_2 < -1$; $-15 < x_1 x_2 < -8$.
- 13 讨论方程 $x^2 - (8a - 2)x + 15a^2 - 2a - 7 = 0$ 的判别式。
- 14 将方程组的所有各方程的左边部分分解因式。记作: $x + y + z = t$. 用 t 表示 $x + y - z$, $y + z - x$, $z + x - y$.
- 15 讨论 $x \geq 0$; $x < 0$ 的情况。
- 17 将第一个方程和第三个方程逐项乘 1, 第二个方程逐项乘 -1 , 逐项相加后, 求出 yz 等于什么值。类似地求出 xz 和 xy 等于什么值。
- 18 解集合 $] -\infty; 0.8a]$ 和 $]0.8a; +\infty[$ 的问题。

20 因为在一切实数的集合内 $x^2 + x + 1 > 0$, 所以 $-9 < (3x^2 + px - 6) : (x^2 + x + 1) < 6 \iff -9x^2 - 9x - 9 < 3x^2 + px - 6$

$< 6x^2 + 6x + 6 \iff \begin{cases} 3x^2 + x(6-p) + 12 > 0, \\ 12x^2 + x(p+9) + 3 > 0. \end{cases}$ 我们用 D_1 和 D_2 表示

相应于此方程组的不等式的方程的判别式. 为了求 p , 我们解不等式组: $D_1 > 0, D_2 < 0$.

21 将给定方程变换为形为 $(x^2 + x^{-2})(x + x^{-1} + 1) = 6$, $((x + x^{-1})^2 - 2)(x + x^{-1} + 1) = 6$. 我们表示 $x + x^{-1} = t$, 得 $(t^2 - 2)(t + 1) = 6$. 显然, $t_1 = 2$. 现在很容易求出后一方程的另外一个根.

23 将第二、第三两方程逐项连乘后, 得

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 6, \\ xyz &= 8, \\ yz + xz + xy &= 12, \end{aligned} \right\} \iff \begin{aligned} x &= 6 - y - z, \\ yz(6 - y - z) &= 8, \\ yz + (z + y)(6 - y - z) &= 12. \end{aligned} \right\}$$

记作: $yz = u$ 和 $z + y = v$.

24 将第一个方程和第二个方程逐项相加, 如果 $x:y > 0$, 则显然有 $x:y + y:x \geq 2$.

26 $(x^4 - 2x^2 + 1)^{0.5} = |x^2 - 1|$.

29 记作: $x^3 + x^2 - 1 = t^2$.

30 记作: $8 + x = t^4, x - 8 = u^4$.

31 首先解不等式组: $x(x-3) \geq 0, a-x \geq 0$.

32 首先证明: $a > 0$.

33 首先解出 a 取某值时的的问题.

34 方程左边非负. 因此 $1:\sqrt{1+2x} \geq 1$, 即: $-0.5 < x \leq 0$. 由此 $x = 0$.

35 5.

41 记作: $x - y = t, x + y - 2 = v$. 于是 $t = 0$ 或 $t = 1$, 即 $x = y$

或 $x - y = 11$. 将方程 $\sqrt[3]{v+2} = \sqrt{v-2}$ 两边自乘 6 次方后, 得 $v = 6$.

43 记作: $2^x = y$.

44 $(x^2 + x + 1)^x \cdot 1 \iff (x^2 + x + 1)^x \cdot (x^2 + x + 1)^0.$

45 $\log_2(\sqrt{x+3} - x - 1) \cdot 0 \iff \left. \begin{array}{l} x+3 \geq 0, \\ \sqrt{x+3} - x - 1 > 0, \\ \sqrt{x+3} - x - 1 \neq 1. \end{array} \right\}$

46 $\log_x \frac{2x-1}{x-1} \cdot \iff \left\{ \begin{array}{l} x > 1, \\ (2x-1):(x-1) > 0, \\ (2x-1):(x-1) \neq x, \\ 0 < x < 1, \\ (2x-1):(x-1) > 0, \\ -(2x-1):(x-1) \neq -x. \end{array} \right\}$

48 给定方程 (不等式) 恒等于 $\log_{0.5}(x^2 - 5x + 7) \cdot 0$.

49 $\log x^2(x+2) \cdot 1 \iff \left\{ \begin{array}{l} x^2 > 1, \\ 2+x > 0, \\ 2+x \cdot x^2 \neq 0, \\ 0 < x^2 < 1, \\ 2+x > 0, \\ -(2+x) \cdot (-x^2) \end{array} \right\}$

50 记作: $x^{(\lg x)^2 - 3\lg x + 1} = y$. 那么, $((\lg x)^2 - 3\lg x + 1)\lg x = \lg y$. 记作: $\lg x = t$.

51 $\log_x 2 = 1:\log_2 x$ ($0 < x < 1$ 或 $x > 1$); $\log_{2x} 2 = 1:\log_2 2x = 1:(1+\log_2 x)$, $0 < x < 0.5$ 或 $x > 0.5$, 进而, $\log_{4x} 2 = 1:\log_2 4x = 1:(2+\log_2 x)$, $0 < x < 0.25$ 或 $x > 0.25$.

$$52 \log_2(4^x+4) - \log_2(2^{x+1}-3) \cdot x \Leftrightarrow \log_2 \frac{4^x+4}{2^{x+1}-3} \cdot x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4^x+4}{2^{x+1}-3} \cdot 2^x. \text{ 记作: } 2^x = y.$$

53 求方程组每个方程两边取对数. 记作: $\lg x = t$.

54 对方程组的每个方程的两边取对数.

$$55 \left. \begin{array}{l} \sqrt{x+7y} = 3, (x \geq 2 \text{ 是自然数}) \\ (2x+14y)2^x = 72. \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x+7y = 3^x, \\ x+7y \geq 0, \\ 2(x+7y)2^x = 72. \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3^x \cdot 2^x = 36, \\ \Leftrightarrow x+7y = 3^x, \\ x+7y \geq 0. \end{array} \right\}$$

56 我们将方程组的第一个方程和第二个方程逐项连乘. 此后求出 z .

$$57 \text{ 显然, } x^2 - 3x - 4 = 0.$$

$$58 \log_2 x + \log_4 \frac{1}{y} = 3 \Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 \sqrt{\frac{1}{y}} = 3.$$

$$59 \log_2(y-x) = \log_8(3y-7x) \Leftrightarrow \log_8(y-x)^3 = \log_8(3y-7x).$$

第 四 章

§ 4.1

$$1 \quad 5.$$

$$3 \quad a^2 : (2a-3).$$

$$4 \quad a^2 : (1+2a).$$

§ 4.2

1 显然, $3a^2 + 15 \geq 2\sqrt{45a^2} \geq 6a\sqrt{5}$.

2 易知, $0.5(bc:a + ac:b) \geq \sqrt{\frac{bc \cdot ac}{ab}} \geq c$.

§ 4.6

1 不等式在 $[2; 3]$ 有定义.

2 不等式在 $] -\infty; 1[$ 上有定义, 其根为 $x_1 = 0$.

3 不等式在 $]0; 0.5[\cup]1; +\infty[$ 上有定义.

4 先解出 $\left. \begin{array}{l} x+3 \geq 0, \\ \sqrt{x+3} > x+1 \end{array} \right\}$

5 不等式在 $] -\infty; -2[\cup] -2; -1[\cup] -1; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$ 上有定义.

第 五 章

§ 5.1

1 函数(1), (2), (3)呈非周期, 因为它的根是有限数, 函数(4)呈非周期, 因为数1和 $\sqrt{3}$ 不能公约.

2 (1), (2), (4), (6)

§ 5.3

3 我们把不等式左边变换成形为 $(\sin x + \sin 3x) + (\sin 2x + \sin 4x)$, 用积代替每项之和.

4 用积代替不等式的左边部分. 显然, $\sin 3x = 2\sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2}$.

5 将给定方程变换成形为 $\cos 6x + \cos 2x \geq 1 + \cos 8x$. 将不

等式两边化积.

$$6 \quad \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x \geq \operatorname{tg} 3x \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x - (\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x \frac{\cos 3x \cos x - \cos 2x}{\cos x \cos 2x \cos 3x} \geq 0 \Leftrightarrow \sin 2x$$

$$\frac{0.5(\cos 4x - \cos 2x)}{\cos x \cos 2x \cos 3x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x \sin 2x \sin 3x}{\cos x \cos 2x \cos 3x} \leq 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x \leq 0.$$

§ 5.5

1 我们用 $\sin^2 x$ 表示 $\cos 2x$, 记作: $\sin x = t$.

2 我们用 $\sin^2 x$ 表示 $\cos^2 x$, 记作: $\sin x = y$.

4 显然, $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$ 和 $(1 + \operatorname{tg} x) : (1 - \operatorname{tg} x) = (\cos x + \sin x) : (\cos x - \sin x)$.

5 将 $\cos^3 x$ 项提到括号外.

6 将不等式两边平方.

7 将不等两边平方.

§ 5.6

1 显然, $\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x \cos x$, $\cos x + \cos 3x = 2\cos 2x \cos x$. 此后, 将不等式化成形为 $(2\cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) \leq 0$.

2 通过降它的阶数 ($\sin^2 x = 0.5(1 - \cos 2x)$) 变换不等式.

3 变换成形为 $\cos 2x + \cos 6x \geq 1 + \cos 8x$, 并且, 以积代和.

4 显然, $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$.

§ 5.9

1 用 x (从第二个方程得之)表示 y ,并把它代入第一个方程。

3 把方程逐项相加,得 $(\sin x + \cos x) + (\sin y + \cos y) = 0$,
 $2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos(\pi/4 - x) + 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - y) = 0$, $\cos(\pi/4 - x)$
 $= \cos(\pi - \frac{\pi}{4} + y) \cdot \pi/4 - x = \pm(\pi - \pi/4 + y) + 2k\pi$, 等等。

4 因为 $\cos x = 2\cos^2 x/2 - 1$,故给定方程组恒等于下列方程组:

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{y}{2} &= 1.5, \\ \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{y}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{2} - 1. \end{aligned} \right\}$$

现在记作: $\cos \frac{x}{2} = t$, $\cos \frac{y}{2} = u$.

5 由于合理变换的结果,得

$$\left. \begin{aligned} -2\sin x \cos y - \cos x \sin y &= -1, \\ \sin x \cos y + 3\cos x \sin y &= 0. \end{aligned} \right\}$$

记作: $\sin x \cos y = t$, $\cos x \sin y = u$. 求得 $u = -0.2$; $t = 0.6$. 因为 $\sin x \cos y + \cos x \sin y = t + u = 0.4$, 故 $\sin(x + y) = 0.4$. 同理可得 $\sin(x - y) = -0.8$.

§ 5.10

1 我们解方程: $\arcsin x - \arcsin 0.5x = \pi/3$; $\arcsin x = \pi/3 + \arcsin 0.5x$; $\sin(\arcsin x) = \sin(\pi/3 + \arcsin 0.5x)$; $x = \sqrt{3}/2 \cdot \sqrt{1 - 0.25x^2} + 0.25x$; $x^2 = 1$. 由此, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ (根 x_2 是增根). 用区间法求给定不等式的解。

2 应用公式: $\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2} \quad (x > 0)$.

4 利用等式: $\operatorname{arctg} x = 0.5\pi - \operatorname{arctg} x$.

5 应用区间法解不等式.

6 作函数 $y = \arcsin x$, $y = 2\arccos 0.5x$ 的图象.

9 应用区间法.

§ 5.11

1 作函数 $y = 2\sin x$, $y = 5x^2 + 2x + 3$ 的图象.

2 作函数 $y = \sin x$, $y = x^2 + x + 1$ 的图象.

3 讨论函数 $y = 2\cos \frac{x^2 + x}{6}$, $y = 2^x + 2^{-x}$ 的极值.

4 讨论函数 $y = \cos^7 x + \sin^4 x$ 的极值.

5 解方程组: $\sin x = 0$, $\cos x = -1$; $\sin^4 x = 1$, $\cos x = 0$.

6 因为 $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \geq 2$, 所以, $\sin^2 y = 1$

和 $\cos^2 z = 0$. 由此 $\operatorname{tg}^2 x = 1$.

7 因为 $\sin y + \cos y = \cos(0.5\pi - y) + \cos y = \sqrt{2} \cos(0.25\pi - y)$, 所以 $\cos(0.25\pi - y) = (-2 - \operatorname{tg}^2 x) : 2\sqrt{2} \operatorname{tg} x$. 现在讨论

函数 $f(x) = (-2 - \operatorname{tg}^2 x) : 2\sqrt{2} \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x \right)$ 的极

值.

8 对 $\sin x$ 解方程

§ 5.12

1 $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} 3x \geq 0 \iff \operatorname{ctg} x \geq \operatorname{ctg}(0.5\pi - 3x)$.

2 记作: $\operatorname{tg} x = y$.

3 用 $\sin x$ 表示 $\cos 2x$.

4 应用公式: $\sin 2x = 2\cos x \sin x$.

- 5 利用等式: $\cos 6x = 1 - 2\sin^2 3x$.
- 6 变换不等式形为 $(\cos^2 x - \sin^2 x) + (\cos x + \sin x) \leq (\cos x + \sin x)^2$
- 7 记作: $\operatorname{tg} 4x = t$, $\operatorname{ctg} y = u$.
- 9 将不等式变成形为 $\cos(0.5\pi - \pi \cos x) \leq \cos(\pi \sin x)$.
- 10 $\log_4(1 - \sin 2x) = \log_4(\cos x - \sin x)^2 = \log_2 |\cos x - \sin x|$.
- 12 应用公式: $\cos^2 x = 0.5(\cos 2x + 1)$; $\sin^2 x = 0.5(1 - \cos 2x)$.
- 14 应用公式: $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$.
- 15 变换不等式形为 $(\cos 3x + \sin 3x) + 2(\sin x - \cos x) \leq 0$. 用积代替每一项之和.
- 16 将不等式化为 $1 - 2\pi : \pi \geq \cos x$ 的形式. 作函数 $y = 1 - 2x : \pi$; $y = \cos x$ 的图象.
- 18 变换不等式形为 $\sin x(2\cos x + 1) \leq 0.5\sqrt{2}(1 + 2\cos x)$.
- 19 化不等式形为 $\cos x + 3\sin x \leq 1 + (\cos x + \cos 2x)$.
- 20 应用公式: $\operatorname{tg}^2 x = (1 - \cos 2x) : (1 + \cos 2x)$. 因为 $\cos 2x - 1 \leq 0$; $1 + \cos 2x > 0$, 所以给定的不等式 $\operatorname{tg} x \leq 0$. 因此, $\operatorname{tg} x = -\sqrt{(1 - \cos 2x) : (1 + \cos 2x)}$.
- 21 对参数解方程, 并考察函数 $a(\sin x)$.
- 22 对参数解方程.

第 六 章

§ 6.1

- 1 设 $O = (BK) \cap (AM)$. 证明 $s(AOB) = \frac{1}{3}s(ABC)$. 应用公式 $s(AOB) = 0.5|BO| |AO| \sin \widehat{AOB}$,

2 先作指定梯形(用平行移动法).

3 直线.

5 显然, $|BC| : |AD| = |BO| : |OD| = |OC| : |OA|$

$= \sqrt{n:m} \cdot$ 因此 $s(AOB) = \frac{n}{m} S(AOD)$, 等等.

§ 6.2

45 应用角的边过圆直径的端点, 角顶在此圆之外的性质.

48 作出给定四边形和《中间》四边形的对角线. 证明: 《中间》四边形的各顶点将各相对应的线段分为全等的部分. 证明: 《中间》四边形的对角线平行于给定四边形的相应对角线. 比较给定四边形和《中间》四边形的对角线.

§ 6.3

1 先求出 $|B, (AM)|$.

2 根据作图和测量查明: (XY) 将 $[BC]$ 分成什么样的比.

3 先证: $|AX|^2 = |AM| |AK|$ (X 是 $[AC]$ 与 ω 的切点).

§ 6.4

4 先用作图法解题.

5 记作: $|AD| = m$, $|DB| = n$, $|DM| = y$, $|MC| = 5y$. 由三角形 ADM 和 AHB , MDB 和 AKB , ADM 和 CDB 分别得到: $(m+n)m : \sqrt{m^2 + y^2} = 3$, $(m+n)m : \sqrt{y^2 + n^2} = 2\sqrt{2}$; $6y^2 = mn$. 将头两个方程逐项相除后, 用 n 表示 m , 等等.

§ 6.7

3 用同心圆 ω_1 和 ω_2 的半径之和的一半作半径, 画圆 ω' . 设 O 和 r 为圆 ω_2 的圆心和半径. 作圆 $(O; r+r')$ (r' 是圆 ω' 的半径).

4 作圆弧两端的弦 OK 和内接角 $\hat{A}$ 的值.

5 命 MK 是给定长度的弦, 点 A, K, M 属于同一射线 (割

线)。根据三边作等腰三角形 OMK 。进而，连接圆弧两端的弦 OA 和内接角 $(180^\circ - \widehat{OKM})$ 。

§ 6.8

- 1 见此节例6的解。
- 2 作线段 AB 和 DC 的平移($A \rightarrow M, D \rightarrow M$)。
- 3 采用本节例题找解的方法。
- 5 将平分线之一进行平移,考察对给定平分线两边全等的三角形。
- 6 将边 BA 和 CD 平移($B \rightarrow K, A \rightarrow A', C \rightarrow K, D \rightarrow D'$)。作三角形 KAD' (据中线 KP 和边 KA', KD')。
- 7 采用矢量代数分析手段。
- 10 研究三角形 ABC 和 $A_1B_1C_1$ 的互相位置原则上不同的三种情况。
- 11 用矢量法研究。
- 12 用坐标法研究。
- 13 用坐标法研究。
- 14 未知点 X 位于外接 ABC 的圆内, 四边形 $ABCX$ 对边长度之和是相同的。若 $P = S_l(C)$, 这里, l 是角 AXC 的平分线, 则 $|AP| = |AB| - |BC|$ 。已知角 AXC , 因此可作出 $\triangle APC$ (据边 AC, AP 和 $\angle APC$)。
- 15 作 $D' = S_{(AC)}(D)$ 。据三边作 $\triangle D'BC$ 。
- 17 先作 $[A_1B_1] = R_0^a([AB])$ 。
- 18 见例17。
- 19 作 $(A_1B_1) = R_{0,1}^a((AB))$ 和 $(A_2B_2) = R_{0,1}^b((A_1B_1))$ 。研究图上所得的三角形及其顶角的性质。
- 20 将给定圆绕 A 旋转 60° 。
- 21 对角线间的边与角之比, 由所求图形的形状定出。平行

四边形的公共中心取在转动中心上。

23 采用坐标法。

24 采用矢量法。

25 采用矢量法。

26 采用矢量法。

29 先作 $\triangle AB_1C_1$, 它的 $B_1\hat{A}C_1 = \hat{A}$, $|AB_1| = a$, $|AC_1| = a \frac{|AC|}{|AB|}$ (a 是一任意量)。

30 命 AH 和 BK 是给定 $\triangle ABC$ 的高, 直角三角形 AHC 和 BKC 相似。因此 $|KC| : |HC| = |BC| : |AC|$ 。

31 利用 $H_M^{2/3}$ 由角的一个边引射线。

32 取点 $M = (AB) \cap (CD)$ 作几何中心。

33 3) 绕 (D_1D) 旋转成 90° ; 4) 绕 (AC_1) 旋转 120° , 点 $D \rightarrow A_1$, $A_1 \rightarrow B$, $B \rightarrow D$, $D_1 \rightarrow B_1$, $B_1 \rightarrow C$, $C \rightarrow D$; 6) (AC_1) ; 8) 没有。

37 利用矢量法。

39 利用中心对称法。

40 利用轴对称法。

41 利用轴对称法。

§ 6.9

1 梯形底为 $1:2$. $3CK:KB = 3:5$ 。

4 过 A 作平行于 (BD) 的直线。

5 $|BK| \perp |KC|$, 作 $[KH_1] \perp (AC)$ (见例4)和 $[BH] \parallel [KH_1]$ 。

6 见例4和例5。

10 作 $H = (DB) \cap (KP)$; $(HX) \parallel (BM)$ 。

§ 6.10

15. $(XY) = (KM)$, 这里 $M = (BD) \cap (AC)$.

16 应用矢量法确定点X和Y的位置.

17 应用矢量法.

18 应用矢量法.

§ 6.11

3 (1) 例如, $\triangle BDM (\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA_1})$; (2) 四边形 DBB_1D_1 和 AA_1C_1C ; (3) 菱形 $BXD_1Y (\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{XA_1}, \overrightarrow{CY} = \overrightarrow{YC_1})$; (4) 用列方程法解.

§ 6.14

2 球心在线段AB的中间.

3 若O是绕 $\triangle ADB$ 的外接圆心, 则 $\overrightarrow{DO} = 2\overrightarrow{DM} (\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB})$.

§ 6.16

1 $0^\circ < \varphi < 90^\circ$.

2 $0^\circ < \alpha, \beta, \gamma < 180^\circ$, 若 $\gamma \geq \beta \geq \alpha$, 则 $\gamma < \alpha + \beta$.

3 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

4 $(90^\circ - \alpha) + (90^\circ - \beta) > 90^\circ$, 即 $\alpha + \beta < 90^\circ$.

5 $120^\circ < \varphi < 180^\circ$.

6 $45^\circ < \alpha < 90^\circ$

第 七 章

§ 7.2

1 在自然级数中, 不论离首项多远, 都有含零的子级数 n 的数. 因此可以假设循环小数只由零组成. 类似地可以断定循环小数是由1等组成. 因此给定的分数是非循环小数.

2 非一位数的数字之积比此数小。

3 1)数00000123450; 2)数99999785960。

4 不存在。

5 一个数和它的数字之和用9除时有相同的余数。现在请证：具有数字相等的和的两数之差能被9整除。

6 设：无论哪个和也不能用100整除。在用100除时能得到99个不同的余数。因此求两个相等余数之和，这些和之差用100整除。

7 这个数能用3整除而不能用9整除，因此它是不完全平方。

8 当用第一个数除第二个数时得余数1111（请证！）。试证：用1111除第一个数和第二个数。答案1111。

9 如果101数中的每一个数都是奇数（偶数），则在这种数中间至少有两个相等。

10 将所求数用300个1写出来。

11 因为乘积用1000除，则乘数之一可用125除，而第二个乘数可用8除。

12 这些数中的任何一个数，都不能用3整除，而这些数中的任何两个数之和都能用9整除。

13 平方可以用数字0, 1, 4, 5, 6或9结尾。此外，若给定的平方在一位数是6，则十位数是奇数。反之，相应的数为偶数。因此给定平方的所有数字彼此不重合，若不等于4，但 $\cdots 444 = 4(\cdots 111)$ 和数 $\cdots 111$ 在十位数是奇数。

15 记作： $f(x) = x^2 - x + a$, $\varphi(x) = x^{13} + x + 90$, 得： $f(0) = f(1) = a$, $\varphi(0) = 90$, $\varphi(1) = 92$ 。数2（最大公约数为90和92）能用 a 整除。但 $f(-1) = a + 2$, $\varphi(-1) = 88$, $f(-2) = a + 6$, $\varphi(-2) = -8104$ ，因此 $a = 2$ 。

16 含底 p 记数法的任何数可以写作： $a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n p^0$ 。这些被加项中的每一项的奇偶性跟相应的 a_k 奇偶性相一致。含奇数底的记数法中所写出的整数。奇数只是在它含有奇数数字的奇数那时候。

24 先请证：若第 n 年的1月1日是星期日（星期三、星期五），那么，星期日（星期三、星期五）也是第 $(n+28k)$ 年的1月1日（ k 是自然数）。

§ 7.3

1 数 $9 = (-3) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 3$ 。

2 因为 $(n^2 + n)^2 = n^4 + 2n^3 + n^2 < n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 1 < n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1 = (n^2 + n + 1)^2$ ，所以给定数包含在两个序列的平方之间。

3 任何整数可以表成形为： $4k$ ， $4k+1$ ， $4k+2$ 或 $4k+3$ （ k 是整数或零）。因此，可以把整数的平方写成 $4k$ 或 $4k+1$ 的形式。可以将两个这样的平方之和表为： $4k$ ， $4k+1$ 或 $4k+2$ 的形式。任何奇数有 $4k+1$ 或 $4k+3$ 的形式。

4 从 $(3 \times 2 - 1)^x + 2 = (3 \times 6 - 1)^y$ 得到 $(-1)^x + 2 = (-1)^y + 3k$ 。由此得出： y 是偶数。但由 $5^x + 2 = (5 \times 3 + 2)^y$ 易知， $2^y - 2$ 被5整除，即 $(y-1)$ 被4整除。因此给定方程无解。

7 如果人两次去工作的路上，而转回用第一种方法，那么，他两次乘车在家和工作之间的路上，两次步行总占用了3小时。因此，他在2.5小时（ $3 - 0.5 = 2.5$ ）内能步行去工作又转回原处。

8 因为 n 个不同的非负数 $0, 1, \dots, (n-1)$ 中的任何数都比 n 小，故问题的命题非真。如果要求在给定树林中间没有任何一颗光干的树木，则给定的命题为真。因为数 $1, 2, \dots, (n-1)$ 的集合包含比 n 元素小的元素。

9 设 k 是在 $x^2 + y^2 = 3^k (k > 0)$ 下的最小整数. 于是, $(3m)^2 + (3n)^2 = 3^k$ 和 $m^2 + n^2 = 3^{k-2}$, 即与数 n 的最小性相矛盾.

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名= 数学解题教学法

作者= () A . B . 瓦西列夫斯基著

页数= 2 5 8

S S 号= 1 0 0 7 1 6 8 2

出版日期=

目录
正文