数学课就要“教数学”

——以《椭圆的标准方程》展示课为例

常州市教育科学研究院　孙福明

【摘　要】数学教学要抓数学的本质，坚持教逻辑、教思维、教推理、教规范，才能真正培养学生的数学素养。

【关键词】数学教学　逻辑　思维　推理　规范

新课程给高中数学课堂带来了新气象，新的教育理念也给数学课堂带来了很多新的元素，一时间可谓“乱花渐欲迷人眼”，然而随着课程改革的深度推进，广大数学教师们透过一些“伪情境”、“假探究”、“虚活动”，也产生了越来越多的困惑：数学新课程究竟要追求什么？数学课堂教学的形式究竟要为什么本质服务？我觉得，数学课就要“教数学”，不管课堂教学形式怎么变、元素怎么新，但培养学生讲逻辑、讲思维、讲推理、讲规范乃是数学教学追求的本质，也只有这样才能真正把提高学生的数学素养落到实处。本人以不久前执教的《椭圆的标准方程》（苏教版）为例，谈谈在设计及教学过程中如何围绕教数学展开教学的。

1　数学课要教逻辑

逻辑既是数学的基础，又是数学的本质特征之一，数学本身就是内在联系的逻辑整体．数学要教逻辑，必须培养学生按照一定的规则来进行思考、把握事物之间的因果关系的习惯。数学教学要从知识的内在联系着手，防止简单化、孤立化。在深度推进新课程实施过程中，仍然存在部分教师不能认识数学知识之间的逻辑关系，不能把握知识之间的有机联系，被模块所束缚，在教学中存在着简单地、形式地、孤立地传授知识的现象，常犯只见树木不见森林的错误。

古人云：良好的开端是成功的一半．优秀的引入设计是一节好课的重要环节之一。优秀的引入在于既能紧扣本节课的主题，不拖泥带水，又能有效勾连学生知识结构中的相关知识，自然不做作，合理不突兀，融情理之中与意料之外于一体。本节课的引入阶段，我主要是强调知识之间的本质、逻辑的联系，着重阐述研究方法的合理性与必要性。因此我着力在下面这几个问题上做了长时间的思考：为什么要研究的椭圆的标准方程，

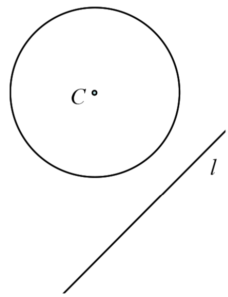
能否从数学知识内在联系的角度认识研究该课题的迫切性？义务教育阶段的平面几何知识与高中阶段必修2的解析法思想如何更紧密地结合起来，因为它们的研究对象都是图形？既然是解析几何，那么怎么把数形结合的思想方法作为课堂教学的主旋律？

在反复地学习、思考之后，本人采用螺旋递进的问题串的形式，从平面几何和解析几何处理图形问题的差异入手，引领学生逐层认识本节课的课题，同时一开场就凸显数形结合的思想。良好的问题既直指数学知识发生过程中的要害，又对学生思维发展起到推动作用。

第一层次预设目的：引进解析法的必要性及优越性

（课堂实录节选）

师：（展示几何图形：直线 l 与圆 C）提问：如何求圆心 C 到直线 l 的距离？



生1：用直尺测量.

师：很好，你用的是几何方法. 你觉得测量结果准确吗？还有更准确的方法吗？

生2：刚才的方法不够准确. 可以用点到直线的距离公式.

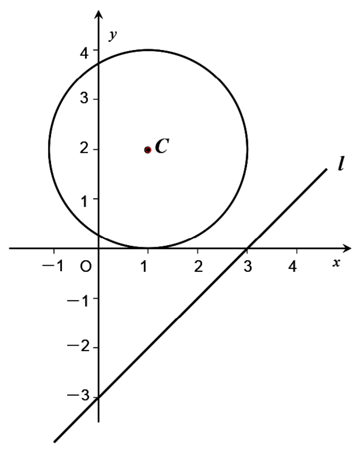
师：嗯，你提到点到直线的距离公式，该距离公式要具备什么条件才能使用？

生2：圆心坐标和直线方程.

师：我现在给出的条件中有这些量吗？还需要借助于什么工具才能求出这些量？

生2：平面直角坐标系.

师：很好，我想你刚才提圆心坐标和直线方程时，应该是默认已经建立了曲线和方程之间的对应关系，你看到圆和直线，马上就联想到它们的方程，进而用解析几何中的点到直线的距离公式求圆心到直线的距离. 你的解决问题的过程正好体现解析几何的两个基本问题：建立曲线与方程的对应关系，进而用解析几何的知识解决几何问题. 确实，用解析几何的方法求得的结果更准确.



（利用多媒体，在刚才的图形中给出平面直角坐标系 xOy. 该坐标系下的圆及直线方程分别为：圆 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=4$，直线 l：$x-y-3=0$.）

师：我再问你，这个过程体现了数学中的什么思想方法呢？

生2：数形结合的思想，先从形到数，通过坐标系的工具求出圆心坐标及直线方程，

后从数到形,利用平面解析几何中的点到直线的距离公式求出圆心 C 到直线 l 的距离.

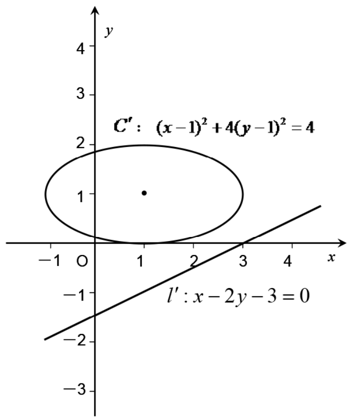
师:说的太到位了!华罗庚先生曾说:数缺形时少直观,形少数时难入微,数形结合百般好,隔离分家万事休.

(同时在黑板显眼位置板书罗庚华先生的话,因为整节课都是围绕数形结合思想展开的,所以要把这几句话写下来,既是强调,也是提示学生在后面解决问题时以此为指导思想.)

第二层预设目的:利用数形结合的思想,由数到形说明研究椭圆方程的必然性

师:我现在把上述坐标系连同曲线放进某个"特殊"空间——该空间有这样一种特殊功能,就是把该坐标平面上所有点的横坐标保持不变,纵坐标变为原来的一半.设原来的圆 C 和直线 l 经过这个空间作用后所得曲线分别为 C',l',求 C',l'的方程,并说明它们分别是什么曲线.

(学生思考、运算一段时间)



生3:我求出它们的方程了,C':$(x-1)^2+4(y-1)^2=4$,l':$x-2y-3=0$.

师:那么你知道它们是什么曲线吗?

生3:l'是直线,不知道 C'是什么曲线.

师:你是根据什么判断的呢?

生3:因为 l'的方程是二元一次方程,满足直线方程的特征,所以 l'是直线.

师:很好!该同学已经熟练建立了直线与二元一次方程之间的对应关系,由方程特征判断曲线类型,数形结合的思想掌握得相当到位呀!我很佩服!

那么我接着问你,你能否根据 C'方程特征来判断曲线 C'是什么类型的曲线呢?(明确的问题指向中,蕴含数形结合的思想!)

学生(普遍感到困难)

师:大家可能觉得困难,那么我们一起来判断一下曲线 C'是还是圆吗?为什么?

生3:C'肯定不是圆了,因为它对应的方程不满足圆的方程的特征.

师:很好,C'的方程特征不满足我们前面已经学过的曲线方程特征.那么大家想不想知道这种特征的方程所表示的曲线是什么呢?

生(齐声):想!

(教师演示几何画板)

师:从几何画板演示看,C'对应的曲线似乎是椭圆.既然直线和圆可以通过对应的方程特征来判断,而且利用方程可以方便地解决一些问题,那么自然地,我们应该提出

问题:能否根据方程的特征判断椭圆呢?这就是本节课我们要探究的问题:椭圆的方程特征是什么样的?

(教师板书课题)

上面的设计利用问题解决的模式,从几何中的问题出发,由形到数,从几何的方法到代数的方法,代数方法的优越性得到凸显。利用变换,求出变换后的曲线对应的方程,让学生自然而然想到要利用曲线的方程特征来判断曲线类型,进而产生探求椭圆标准方程的迫切性!整个设计顺应数学之间内在的、本质的、必然的联系,同时提升了学生的思维水平,凸显了数形结合的思想方法在培养学生思维能力过程中的重要性。

2 数学课要教思维方式

培养和发展学生的数学思维能力是发展智力、全面培养数学能力的主要途径,也是数学教育的基本目标之一。问题解决的方法、数形结合的思想方法等是培养学生思维方式的重要载体,尤其是问题解决的过程,对培养学生灵活而深刻、敏锐而机智的思维品质有着非常大的锤炼作用,对培养学生的创造性思维能力是大有裨益的。

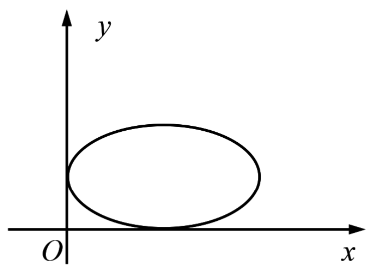
2.1 整节课的设计体现学习圆锥曲线方法的典型性和示范性

数学的教学不应满足于特殊情况的结果,而是通过类比等方法寻求解决问题的一般办法,探索、研究各种对象的一般规律。本节课内容的重点固然是推导椭圆的标准方程,但倘若仅仅满足于告知学生椭圆标准方程的特征并让学生记忆,显然是不够的,也没有充分发挥本课题的重要价值,这个重要价值就是研究过程方法的示范性。“椭圆的标准方程”是解析法的进一步运用,与推导圆的方程相比,椭圆方程的推导过程更具有典型性,完整展示了解析法求动点轨迹方程的一般步骤;另一方面,研究椭圆标准方程的推导过程具有典型的问题解决的模式,它为后面研究双曲线、抛物线这两种圆锥曲线提供了基本模式,提供了思想和方法的保障。因此在教学过程中,我有意识地渗透方法论的思想,把研究过程的示范性作为一条线索贯穿整节课,这个线索就是一个问题解决的模式,即围绕“为什么要求椭圆的标准方程……如何求椭圆的标准方程……椭圆方程的简单运用”这样一个典型的问题解决模式,体现椭圆在圆锥曲线同构性中的示范性。

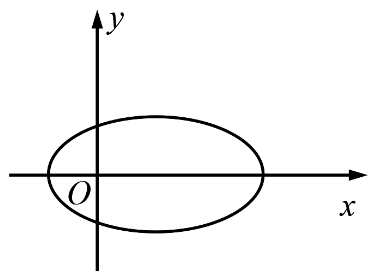
培养学生的思维方式,要在提高学生的思维品质如深刻性、敏捷性等方面下功夫,这就要求深刻挖掘知识中所蕴含的思维价值。正如上面分析,正因为研究椭圆思路的典型性,所以本节课要呈现给学生一个完整的逻辑结构,即为什么要研究椭圆的方程,如何建立椭圆的方程,建立之后的具备某些特征的方程是否一定表示椭圆,建立椭圆和方程之间的对应关系后,可以运用公式化的思想直接求椭圆方程,这其实也是问题解决模式的具体体现。

2.2 如何建立平面直角坐标系的设计突出观察发现、运算求解、反思与建构等思维过程

如何建立平面直角坐标系是本节课很有教育价值的环节之一，因为这个环节其实涉及到后面推导方程运算的简繁，也涉及到最后得到的方程结果是否最简单，能否最简洁体现该曲线对应的方程特征等。它蕴含了直观感知（椭圆的对称美）、观察发现（如何利用椭圆的对称美）、运算求解、反思与建构等思维过程。这样的思维过程是需要也值得花时间的。本人在本环节花费的时间较长，启发的环节较多，其目的在于让学生有更多的时间尝试、品味，激发更多学生的思维参与，激活学生的主体思维，在辨析、比较、讨论等互动活动中，深化学生的思维，不断提高学生的数学思维能力。



我在教学中增加了不同的建系方式对最后方程形式的评估，有意引导学生建立如图所示的其它坐标系。通过不同坐标系的建立、比较，让学生在感性认识的基础上，深入进行理性思考，进行比较、判断、选择。同时让学生在计算中不断反思坐标系建立的优劣、不断调整化简的思路。



其实也是体现计算也是一种推理的思想。在倡导有效课堂教学的理念下，课堂教学既要培养学生的思维发散能力，也要优化学生的思维品质，在发散中深入理性地思考，提高问题及思考问题的质量。我认为教师要把知识作为过程，作为载体，着力培养学生探究能力、思维品质，如果把简单的告知作为教学的最大任务，把知识作为静态的结论传授给学生，显然不利于学生数学素养的提高。

3 数学课要教推理

数学讲究的是严谨，严谨的要求之一就是数学的表达要确切，如结论的正确性需要靠逻辑的演绎证明，严密的推理正是学生思维的体操，是学生思维活动中的对思维要求最高的活动形式之一，严谨有理、落笔有据的推理既会加深对数学对象本质的认识，也同样会触动并完善学生自身的认知结构，学生长期地耳濡目染地接受严密推理的熏陶，思维品质才能不断“脱骨换代”，上新台阶，也才能不断培养学生的理性精神。正如爱因斯坦所说：“推理的这种可赞叹的胜利，使人类的理智获得了为取得以后成就所必需的信心。”本节课在化简推导椭圆方程过程中，出现了可能导致不等价的运算“平方”，进而会引起曲线与方程的纯粹性与完备性的话题，新课标对这个话题采取回避的态度，苏教

版教材中没有提及,但从数学课程的性质来说,这个话题决不能含糊带过,因此关于椭圆方程的纯粹性与完备性问题需要通过演绎推理来完成,我是这样设计的:

师:(展示 PPT)我们一起回顾刚才推导椭圆方程的过程,这个过程包含了很多的化简技术手段,这个化简过程等价吗?或者说最后所求的方程就是开始时的等式吗?

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$,

移项并平方:

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, ①

$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left[2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2$, ②

整理: $a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$, ③

再平方: $\left[a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2=(a^2-cx)^2$, ④

再整理: $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$. (下略)

生 4:第一次平方前后不等价,即等式①与等式②不等价,下面这个等式平方后也可以得到等式②:$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-\left[2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]$. ⑤

师:发现得好!真是火眼金睛呀!

生 5(迫不及待举手):老师,等式⑤不可能成立,我是用几何方法判断的,这个等式其实就是 $PF_1-PF_2=2a$,但利用三角形中边的不等关系,可以得到 $PF_1-PF_2\leqslant 2c<2a$,所以 $PF_1-PF_2=2a$ 不可能成立.

生 6:老师,我用代数方法也可以判断,因为 $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant b$,从而 $|x-c|\leqslant a-c<a$, $|y|\leqslant b<a$,所以 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}<\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a<2a$,故等式⑤不可能成立!

师:两位同学说得太好了!他们分别用形和数的知识证明了等式⑤不可能成立,这一方面表明大家对数学结合的思想有深刻认识和自觉运用的意识,另一方面也说明我们学习数学过程中,要学会用推理证明的方式证明我们的观点. 接下来,同学们能用类似的思想方法解决第二次平方会产生的问题吗?即等式③与等式④等价吗?

生 7:我仿照同学 4 的想法,发现下面等式 $a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=-(a^2-cx)$ ⑥平方时也会得到等式 4.

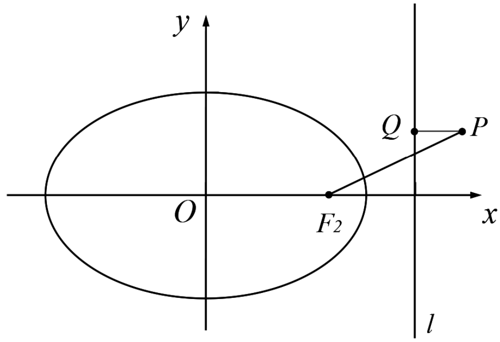
生 8:我用有界性来判断这个等式不可能成立:由$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$知, $-a\leqslant x\leqslant a$,从而 $cx\leqslant ca<a^2$, $a^2-cx>0$,故等式两边符号相异,等式不可能不成立!

师:很好!同学 8 利用不等式知识证明等式⑥不可能成立,有没有同学用几何方法来证明呢?

生 9:因为左边的无理式可以表示两点间的距离,所以我设法使得右边也与距离产

生联系，所以我把这个等式变形为 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=-(a-\frac{c}{a}x)$，即 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\frac{c}{a}(x-\frac{a^2}{c})$. ⑦

然后在坐标系中作出直线 $l: x=\frac{a^2}{c}$.



如果点 P 在直线 l 的左侧，此时 $x<\frac{a^2}{c}$，方程⑦右边 <0，方程⑦不可能成立；

如果点 P 在直线 l 的右侧，如图，作 $PQ\perp l$，Q 为垂足，则 $PQ=x-\frac{a^2}{c}$，则该等式的几何意义为 $PE_2=\frac{c}{a}PQ$. 因为 $PE_2>PQ$，$0<\frac{c}{a}<1$，所以方程⑦无解，即这样的点 P 根本不存在.

师：很好，这位同学利用构造的方法完成了几何思路的证明. 完成了上面这个过程，结合前面的推导过程，我们才可以说满足条件的点 P 的坐标都是该方程的解，同时以该方程的解 (x,y) 为坐标点都在椭圆上，从而最终才能正确完成本节课的任务，那就是我们可以放心大胆地说焦点在 x 轴上的椭圆的标准方程是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$. 数与形达到了完美的结合！（既是呼应引入，也是强化数学思想的主旋律！）

推理论证既是数学的基本思考方式，也是学习数学的基本功。教师在教学中需要有意识地对学生进行指导和训练。

4　数学课要教学生规范表达

课程标准明确提出，要培养和发展学生的数学表达和交流能力。学生在课堂中主体表现之一就是有更多的表达个体思维结果的机会。由于学生的认知是个不断成熟的过程，学生对数学概念的认识也是个由粗糙到精致的不断发展的过程，因此学生刚开始对数学的认识表述可能是自觉的、语言是生活化的，这就需要教师启发、培养学生用数学化语言交流的习惯。同时在不断纠正学生准确使用数学语言的过程中，也是在帮助学生思维精确化。

表达也是师生、生生之间交流的需要，学生在交流的过程中，可以更好地理解和使用数学语言和符号，教师有效的组织，可以强化和优化学生的思维，同时通过思考他人的想法和策略来丰富和扩展自己的知识和思维。交流其实就是同学间相互交换思维方式，借鉴同学的长处弥补自己的不足。教师在课堂上组织名副其实的互动和交流，鼓励

讨论和各种观点的真诚交锋,使学生对所学知识有自己的认识和思考,这是发展思维的最好途径。

总之,数学教学要真正把培养学生数学素养落到实处,就必须坚持教逻辑、教思维、教推理、教规范,通过教逻辑提高学生学好数学的基本素养,通过教思维来发展学生的智力、全面提高学生的能力,通过教数学推理培养学生说理、批判、置疑、求真求实的理性思维和理性精神,通过教规范使学生具有表达清晰、思考有条理等理性思维方式。

参考文献:

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(实验)[M].北京:人民教育出版社,2003,4

[2] 数学课程标准研制组.普通高中数学课程标准(实验)解读[M].南京:江苏教育出版社,2004,4

[3] 单墫.普通高中课程标准实验教科书.数学(选修2—1)[M].南京:江苏教育出版社,2008,6

本文发表于《新课程研究》2014年第7期