



2011 年全国高中数学联合竞赛一试

试题参考答案及评分标准 (A 卷)

说明:

1. 评阅试卷时, 请严格按照本评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档; 解答题的评阅, 请严格按照本评分标准的评分档次给分, 不要增加其他中间档次.

2. 如果考生的解答方法和本解答不同, 只要思路合理、步骤正确, 在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分, 解答题第 9 题 4 分为一个档次, 第 10, 11 题 5 分为一个档次, 不要再增加其他中间档次.

一、填空题: 本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 共 64 分. 把答案填在横线上.

1. 设集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 若 A 中所有三元子集的三个元素之和组成的集合为 $B = \{-1, 3, 5, 8\}$, 则集合 $A =$ _____.

解 显然, 在 A 的所有三元子集中, 每个元素均出现了 3 次, 所以

$$3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = (-1) + 3 + 5 + 8 = 15,$$

故 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 5$, 于是集合 A 的四个元素分别为 $5 - (-1) = 6$, $5 - 3 = 2$, $5 - 5 = 0$, $5 - 8 = -3$, 因此, 集合 $A = \{-3, 0, 2, 6\}$.

2. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ 的值域为 _____.

解 设 $x = \tan \theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, 且 $\theta \neq \frac{\pi}{4}$, 则

$$f(x) = \frac{1}{\frac{\cos \theta}{\tan \theta - 1}} = \frac{1}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{2} \sin(\theta - \frac{\pi}{4})}.$$

设 $u = \sqrt{2} \sin(\theta - \frac{\pi}{4})$, 则 $-\sqrt{2} \leq u < 1$, 且 $u \neq 0$,

所以 $f(x) = \frac{1}{u} \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}] \cup (1, +\infty)$.

3. 设 a, b 为正实数, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2\sqrt{2}$, $(a-b)^2 = 4(ab)^3$, 则 $\log_a b =$ _____.

解 由 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2\sqrt{2}$, 得 $a+b \leq 2\sqrt{2}ab$.

$$\text{又 } (a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2 = 4ab + 4(ab)^3 \geq 4 \cdot 2\sqrt{ab \cdot (ab)^3} = 8(ab)^2,$$

$$\text{即 } a+b \geq 2\sqrt{2}ab. \quad \textcircled{1}$$

$$\text{于是 } a+b = 2\sqrt{2}ab. \quad \textcircled{2}$$

再由不等式①中等号成立的条件, 得 $ab=1$. 与②联立解得 $\begin{cases} a = \sqrt{2}-1, \\ b = \sqrt{2}+1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = \sqrt{2}+1, \\ b = \sqrt{2}-1, \end{cases}$

故 $\log_a b = -1$.

4. 如果 $\cos^5 \theta - \sin^5 \theta < 7(\sin^3 \theta - \cos^3 \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, 那么 θ 的取值范围是_____.

解 不等式 $\cos^5 \theta - \sin^5 \theta < 7(\sin^3 \theta - \cos^3 \theta)$ 等价于 $\sin^3 \theta + \frac{1}{7}\sin^5 \theta > \cos^3 \theta + \frac{1}{7}\cos^5 \theta$,

又 $f(x) = x^3 + \frac{1}{7}x^5$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数, 所以 $\sin \theta > \cos \theta$,

故 $2k\pi + \frac{\pi}{4} < \theta < 2k\pi + \frac{5\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$.

因为 $\theta \in [0, 2\pi)$, 所以 θ 的取值范围是 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$.

5. 现安排 7 名同学去参加 5 个运动项目, 要求甲、乙两同学不能参加同一个项目, 每个项目都有人参加, 每人只参加一个项目, 则满足上述要求的不同安排方案数为_____。(用数字作答)

解 由题设条件可知, 满足条件的方案有两种情形:

(1) 有一个项目有 3 人参加, 共有 $C_7^3 \cdot 5! - C_5^1 \cdot 5! = 3600$ 种方案;

(2) 有两个项目各有 2 人参加, 共有 $\frac{1}{2}(C_7^2 \cdot C_5^2) \cdot 5! - C_5^2 \cdot 5! = 11400$ 种方案;

所以满足题设要求的方案数为 $3600 + 11400 = 15000$.

6. 在四面体 $ABCD$ 中, 已知 $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 60^\circ$, $AD = BD = 3$, $CD = 2$, 则四面体 $ABCD$ 的外接球的半径为_____.

解 设四面体 $ABCD$ 的外接球球心为 O , 则 O 在过 $\triangle ABD$ 的外心 N 且垂直于平面 ABD 的垂线上. 由题设知, $\triangle ABD$ 是正三角形, 则点 N 为 $\triangle ABD$ 的中心. 设 P, M 分别为 AB, CD 的中点, 则 N 在 DP 上, 且 $ON \perp DP$, $OM \perp CD$.

因为 $\angle CDA = \angle CDB = \angle ADB = 60^\circ$, 设 CD 与平面 ABD 所成角为 θ , 可求得

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

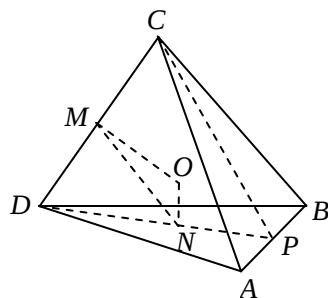
$$\text{在 } \triangle DMN \text{ 中, } DM = \frac{1}{2}CD = 1, DN = \frac{2}{3} \cdot DP = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 = \sqrt{3}.$$

$$\text{由余弦定理得 } MN^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 2,$$

$$\text{故 } MN = \sqrt{2}.$$

$$\text{四边形 } DMON \text{ 的外接圆的直径 } OD = \frac{MN}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}.$$

$$\text{故球 } O \text{ 的半径 } R = \sqrt{3}.$$



7. 直线 $x-2y-1=0$ 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A, B 两点, C 为抛物线上的一点, $\angle ACB=90^\circ$, 则点 C 的坐标为_____.

解 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(t^2, 2t)$, 由 $\begin{cases} x-2y-1=0, \\ y^2=4x, \end{cases}$

得 $y^2-8y-4=0$, 则 $y_1+y_2=8$, $y_1 \cdot y_2=-4$.

又 $x_1=2y_1+1, x_2=2y_2+1$, 所以

$$x_1+x_2=2(y_1+y_2)+2=18, \quad x_1 \cdot x_2=4y_1 \cdot y_2+2(y_1+y_2)+1=1.$$

因为 $\angle ACB=90^\circ$, 所以 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}=0$, 即有

$$(t^2-x_1)(t^2-x_2)+(2t-y_1)(2t-y_2)=0,$$

$$\text{即 } t^4-(x_1+x_2)t^2+x_1 \cdot x_2+4t^2-2(y_1+y_2)t+y_1 \cdot y_2=0,$$

$$\text{即 } t^4-14t^2-16t-3=0,$$

$$\text{即 } (t^2+4t+3)(t^2-4t-1)=0.$$

显然 $t^2-4t-1 \neq 0$, 否则 $t^2-2 \cdot 2t-1=0$, 则点 C 在直线 $x-2y-1=0$ 上, 从而点 C 与点 A 或点 B 重合.

所以 $t^2+4t+3=0$, 解得 $t_1=-1, t_2=-3$.

故所求点 C 的坐标为 $(1, -2)$ 或 $(9, -6)$.

8. 已知 $a_n = C_{200}^n (\sqrt[3]{6})^{200-n} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ ($n=1, 2, \dots, 95$), 则数列 $\{a_n\}$ 中整数项的个数为_____.

$$\text{解 } a_n = C_{200}^n \cdot 3^{\frac{200-n}{3}} \cdot 2^{\frac{400-5n}{6}}.$$

要使 a_n ($1 \leq n \leq 95$) 为整数, 必有 $\frac{200-n}{3}, \frac{400-5n}{6}$ 均为整数, 从而 $6|n+4$.

当 $n=2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, 56, 62, 68, 74, 80$ 时, $\frac{200-n}{3}$ 和 $\frac{400-5n}{6}$ 均为非负整数, 所以 a_n 为整数, 共有 14 个.

当 $n=86$ 时, $a_{86} = C_{200}^{86} \cdot 3^{38} \cdot 2^{-5}$, 在 $C_{200}^{86} = \frac{200!}{86!114!}$ 中,

$$200! \text{ 中因数 } 2 \text{ 的个数为 } \left[\frac{200}{2}\right] + \left[\frac{200}{2^2}\right] + \left[\frac{200}{2^3}\right] + \left[\frac{200}{2^4}\right] + \left[\frac{200}{2^5}\right] + \left[\frac{200}{2^6}\right] + \left[\frac{200}{2^7}\right] = 197,$$

同理可计算得 $86!$ 中因数 2 的个数为 82, $114!$ 中因数 2 的个数为 110,

所以 C_{200}^{86} 中因数 2 的个数为 $197-82-110=5$, 故 a_{86} 是整数.

当 $n=92$ 时, $a_{92} = C_{200}^{92} \cdot 3^{36} \cdot 2^{-10}$, 在 $C_{200}^{92} = \frac{200!}{92!108!}$ 中, 同样可求得 $92!$ 中因数 2 的个数为

88, 108! 中因数 2 的个数为 105, 故 C_{200}^{86} 中因数 2 的个数为 $197 - 88 - 105 = 4$, 故 a_{92} 不是整数.

因此, 整数项的个数为 $14 + 1 = 15$.

二、解答题: 本大题共 3 小题, 共 56 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9. (本小题满分 16 分) 设函数 $f(x) = |\lg(x+1)|$, 实数 $a, b (a < b)$ 满足 $f(a) = f(-\frac{b+1}{b+2})$, $f(10a+6b+21) = 4\lg 2$, 求 a, b 的值.

$$\text{解 } \because f(a) = f(-\frac{b+1}{b+2}), \therefore |\lg(a+1)| = |\lg(-\frac{b+1}{b+2} + 1)| = |\lg(\frac{1}{b+2})| = |\lg(b+2)|,$$

$$\therefore a+1 = b+2 \text{ 或 } (a+1)(b+2) = 1,$$

$$\text{又 } \because a < b, \therefore a+1 \neq b+2, \therefore (a+1)(b+2) = 1. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{又由 } f(a) = |\lg(a+1)| \text{ 有意义知 } 0 < a+1, \text{ 从而 } 0 < a+1 < b+1 < b+2,$$

$$\text{于是 } 0 < a+1 < 1 < b+2.$$

$$\text{所以 } (10a+6b+21)+1 = 10(a+1)+6(b+2) = 6(b+2) + \frac{10}{b+2} > 1. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{从而 } f(10a+6b+21) = |\lg[6(b+2) + \frac{10}{b+2}]| = |\lg[6(b+2) + \frac{10}{b+2}]|.$$

$$\text{又 } f(10a+6b+21) = 4\lg 2, \text{ 所以 } \lg[6(b+2) + \frac{10}{b+2}] = 4\lg 2,$$

$$\text{故 } 6(b+2) + \frac{10}{b+2} = 16. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } b = -\frac{1}{3} \text{ 或 } b = -1 \text{ (舍去).}$$

$$\text{把 } b = -\frac{1}{3} \text{ 代入 } (a+1)(b+2) = 1 \text{ 解得 } a = -\frac{2}{5}.$$

$$\text{所以 } a = -\frac{2}{5}, \quad b = -\frac{1}{3}. \quad \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

10. (本小题满分 20 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 2t - 3 (t \in \mathbf{R} \text{ 且 } t \neq \pm 1)$,

$$a_{n+1} = \frac{(2t^{n+1} - 3)a_n + 2(t-1)t^n - 1}{a_n + 2t^n - 1} \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $t > 0$, 试比较 a_{n+1} 与 a_n 的大小.

$$\text{解 } (1) \text{ 由原式变形得 } a_{n+1} = \frac{2(t^{n+1} - 1)(a_n + 1)}{a_n + 2t^n - 1} - 1,$$

$$\text{则 } \frac{a_{n+1} + 1}{t^{n+1} - 1} = \frac{2(a_n + 1)}{a_n + 2t^n - 1} = \frac{\frac{2(a_n + 1)}{t^n - 1}}{\frac{a_n + 1}{t^n - 1} + 2}.$$

$$\text{记 } \frac{a_n + 1}{t^n - 1} = b_n, \text{ 则 } b_{n+1} = \frac{2b_n}{b_n + 2}, \quad b_1 = \frac{a_1 + 1}{t - 1} = \frac{2t - 2}{t - 1} = 2. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

又 $\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{b_n} + \frac{1}{2}, \frac{1}{b_1} = \frac{1}{2}$, 从而有 $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b_1} + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$,

故 $\frac{a_n+1}{t^n-1} = \frac{2}{n}$, 于是有 $a_n = \frac{2(t^n-1)}{n} - 1$10 分

$$\begin{aligned} (2) \quad a_{n+1} - a_n &= \frac{2(t^{n+1}-1)}{n+1} - \frac{2(t^n-1)}{n} \\ &= \frac{2(t-1)}{n(n+1)} [n(1+t+\cdots+t^{n-1}+t^n) - (n+1)(1+t+\cdots+t^{n-1})] \\ &= \frac{2(t-1)}{n(n+1)} [nt^n - (1+t+\cdots+t^{n-1})] = \frac{2(t-1)}{n(n+1)} [(t^n-1) + (t^n-t) + \cdots + (t^n-t^{n-1})] \\ &= \frac{2(t-1)^2}{n(n+1)} [(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+1) + t(t^{n-2}+t^{n-3}+\cdots+1) + \cdots + t^{n-1}], \end{aligned}$$

显然在 $t > 0 (t \neq 1)$ 时恒有 $a_{n+1} - a_n > 0$, 故 $a_{n+1} > a_n$20 分

11. (本小题满分 20 分) 作斜率为 $\frac{1}{3}$ 的直线 l 与椭圆 $C: \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ 交于 A, B 两点 (如

图所示), 且 $P(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 在直线 l 的左上方.

(1) 证明: $\triangle PAB$ 的内切圆的圆心在一条定直线上;

(2) 若 $\angle APB = 60^\circ$, 求 $\triangle PAB$ 的内切圆的面积.

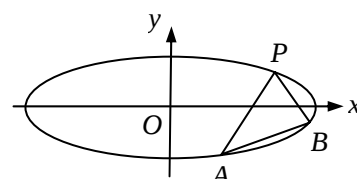
解 (1) 设直线 $l: y = \frac{1}{3}x + m, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

将 $y = \frac{1}{3}x + m$ 代入 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ 中, 化简整理得

$$2x^2 + 6mx + 9m^2 - 36 = 0.$$

于是有 $x_1 + x_2 = -3m, x_1 x_2 = \frac{9m^2 - 36}{2}$,

$$k_{PA} = \frac{y_1 - \sqrt{2}}{x_1 - 3\sqrt{2}}, k_{PB} = \frac{y_2 - \sqrt{2}}{x_2 - 3\sqrt{2}}.$$



.....5 分

$$\text{则 } k_{PA} + k_{PB} = \frac{y_1 - \sqrt{2}}{x_1 - 3\sqrt{2}} + \frac{y_2 - \sqrt{2}}{x_2 - 3\sqrt{2}} = \frac{(y_1 - \sqrt{2})(x_2 - 3\sqrt{2}) + (y_2 - \sqrt{2})(x_1 - 3\sqrt{2})}{(x_1 - 3\sqrt{2})(x_2 - 3\sqrt{2})},$$

$$\text{上式中, 分子} = \left(\frac{1}{3}x_1 + m - \sqrt{2}\right)(x_2 - 3\sqrt{2}) + \left(\frac{1}{3}x_2 + m - \sqrt{2}\right)(x_1 - 3\sqrt{2})$$

$$= \frac{2}{3}x_1 x_2 + (m - 2\sqrt{2})(x_1 + x_2) - 6\sqrt{2}(m - \sqrt{2})$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{9m^2 - 36}{2} + (m - 2\sqrt{2})(-3m) - 6\sqrt{2}(m - \sqrt{2})$$

$$= 3m^2 - 12 - 3m^2 + 6\sqrt{2}m - 6\sqrt{2}m + 12 = 0,$$

从而, $k_{PA} + k_{PB} = 0$.

又 P 在直线 l 的左上方, 因此, $\angle APB$ 的角平分线是平行于 y 轴的直线, 所以 $\triangle PAB$ 的

内切圆的圆心在直线 $x = 3\sqrt{2}$ 上.10 分

(2) 若 $\angle APB = 60^\circ$ 时, 结合 (1) 的结论可知 $k_{PA} = \sqrt{3}, k_{PB} = -\sqrt{3}$.

直线 PA 的方程为: $y - \sqrt{2} = \sqrt{3}(x - 3\sqrt{2})$, 代入 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ 中, 消去 y 得

$$14x^2 + 9\sqrt{6}(1 - 3\sqrt{3})x + 18(13 - 3\sqrt{3}) = 0.$$

它的两根分别是 x_1 和 $3\sqrt{2}$, 所以 $x_1 \cdot 3\sqrt{2} = \frac{18(13 - 3\sqrt{3})}{14}$, 即 $x_1 = \frac{3\sqrt{2}(13 - 3\sqrt{3})}{14}$.

所以 $|PA| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} \cdot |x_1 - 3\sqrt{2}| = \frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3} + 1)}{7}$15 分

同理可求得 $|PB| = \frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3} - 1)}{7}$.

所以 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \cdot |PA| \cdot |PB| \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3} + 1)}{7} \cdot \frac{3\sqrt{2}(3\sqrt{3} - 1)}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{117\sqrt{3}}{49}$20 分