

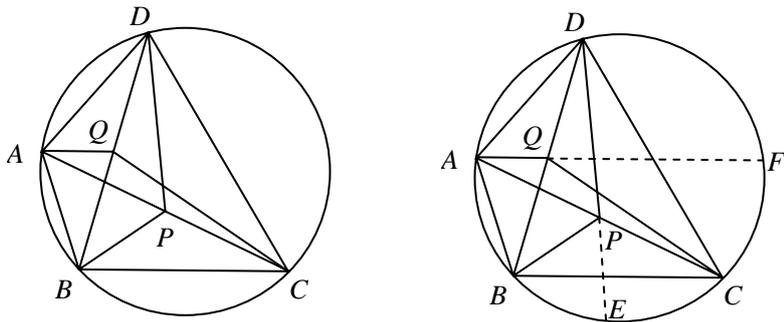
2011 年全国高中数学联合竞赛加试

试题参考答案及评分标准 (A 卷)

说明:

1. 评阅试卷时, 请严格按照本评分标准的评分档次给分;
2. 如果考生的解答方法和本解答不同, 只要思路合理、步骤正确, 在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分, 10 分为一个档次, 不要再增加其他中间档次.

一、(本题满分 40 分) 如图, P, Q 分别是圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 的中点. 若 $\angle BPA = \angle DPA$, 证明: $\angle AQB = \angle CQB$.



证明 延长线段 DP 与圆交于另一点 E , 则 $\angle CPE = \angle DPA = \angle BPA$, 又 P 是线段 AC 的中点, 故 $\widehat{AB} = \widehat{CE}$, 从而 $\angle CDP = \angle BDA$10 分

又 $\angle ABD = \angle PCD$, 所以 $\triangle ABD \sim \triangle PCD$, 于是 $\frac{AB}{BD} = \frac{PC}{CD}$, 即

$$AB \cdot CD = PC \cdot BD \quad \text{.....20 分}$$

从而有 $AB \cdot CD = \frac{1}{2} AC \cdot BD = AC \cdot (\frac{1}{2} BD) = AC \cdot BQ$,

即
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BQ}{CD}.$$

又 $\angle ABQ = \angle ACD$, 所以 $\triangle ABQ \sim \triangle ACD$, 所以 $\angle QAB = \angle DAC$30 分

延长线段 AQ 与圆交于另一点 F , 则 $\angle CAB = \angle DAF$, 故 $\widehat{BC} = \widehat{DF}$.

又因为 Q 为 BD 的中点, 所以 $\angle CQB = \angle DQF$.

又 $\angle AQB = \angle DQF$, 所以 $\angle AQB = \angle CQB$40 分

二、(本题满分 40 分) 证明: 对任意整数 $n \geq 4$, 存在一个 n 次多项式

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

具有如下性质:

- (1) a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 均为正整数;
- (2) 对任意正整数 m , 及任意 $k (k \geq 2)$ 个互不相同的正整数 r_1, r_2, \dots, r_k , 均有

$$f(m) \neq f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k).$$

证明 令

$$f(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+n) + 2, \tag{1}$$

.....10 分

将①的右边展开即知 $f(x)$ 是一个首项系数为 1 的正整数系数的 n 次多项式.

下面证明 $f(x)$ 满足性质 (2).

对任意整数 t , 由于 $n \geq 4$, 故连续的 n 个整数 $t+1, t+2, \dots, t+n$ 中必有一个为 4 的倍数, 从而由①知 $f(t) \equiv 2 \pmod{4}$

.....20 分

因此, 对任意 $k (k \geq 2)$ 个正整数 r_1, r_2, \dots, r_k , 有

$$f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k) \equiv 2^k \equiv 0 \pmod{4}.$$

但对任意正整数 m , 有 $f(m) \equiv 2 \pmod{4}$, 故

$$f(m) \not\equiv f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k) \pmod{4},$$

从而 $f(m) \neq f(r_1)f(r_2)\cdots f(r_k)$.

所以 $f(x)$ 符合题设要求.40 分

三、(本题满分 50 分) 设 a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 4$) 是给定的正实数, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. 对任意

正实数 r , 满足 $\frac{a_j - a_i}{a_k - a_j} = r$ ($1 \leq i < j < k \leq n$) 的三元数组 (i, j, k) 的个数记为 $f_n(r)$.

证明: $f_n(r) < \frac{n^2}{4}$.

证明 对给定的 j ($1 < j < n$), 满足 $1 \leq i < j < k \leq n$, 且

$$\frac{a_j - a_i}{a_k - a_j} = r \tag{①}$$

的三元数组 (i, j, k) 的个数记为 $g_j(r)$10 分

注意到, 若 i, j 固定, 则显然至多有一个 k 使得①成立. 因 $i < j$, 即 i 有 $j-1$ 种选法, 故 $g_j(r) \leq j-1$.

同样地, 若 j, k 固定, 则至多有一个 i 使得①成立. 因 $k > j$, 即 k 有 $n-j$ 种选法, 故 $g_j(r) \leq n-j$. 从而

$$g_j(r) \leq \min\{j-1, n-j\}. \quad \text{.....30 分}$$

因此, 当 n 为偶数时, 设 $n = 2m$, 则有

$$\begin{aligned} f_n(r) &= \sum_{j=2}^{n-1} g_j(r) = \sum_{j=2}^{m-1} g_j(r) + \sum_{j=m}^{2m-1} g_j(r) \\ &\leq \sum_{j=2}^m (j-1) + \sum_{j=m+1}^{2m-1} (2m-j) = \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} \\ &= m^2 - m < m^2 = \frac{n^2}{4}. \quad \text{.....40 分} \end{aligned}$$

当 n 为奇数时, 设 $n = 2m+1$, 则有

$$\begin{aligned} f_n(r) &= \sum_{j=2}^{n-1} g_j(r) = \sum_{j=2}^m g_j(r) + \sum_{j=m+1}^{2m} g_j(r) \\ &\leq \sum_{j=2}^m (j-1) + \sum_{j=m+1}^{2m} (2m+1-j) \\ &= m^2 = \frac{n^2}{4}. \quad \text{.....50 分} \end{aligned}$$

四、(本题满分 50 分) 设 A 是一个 3×9 的方格表, 在每一个小方格内各填一个正整数. 称 A 中的一个 $m \times n$ ($1 \leq m \leq 3, 1 \leq n \leq 9$) 方格表为“好矩形”, 若它的所有数的和为 10 的倍数. 称 A 中的一个 1×1 的小方格为“坏格”, 若它不包含于任何一个“好矩形”. 求 A 中“坏格”个数的最大值.

解 首先证明 A 中“坏格”不多于 25 个.

用反证法. 假设结论不成立, 则方格表 A 中至多有 1 个小方格不是“坏格”. 由表格的对称性, 不妨假设此时第 1 行都是“坏格”.

设方格表 A 第 i 列从上到下填的数依次为 $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2, \dots, 9$. 记

$$S_k = \sum_{i=1}^k a_i, T_k = \sum_{i=1}^k (b_i + c_i), k = 0, 1, 2, \dots, 9, \text{ 这里 } S_0 = T_0 = 0. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

我们证明: 三组数 $S_0, S_1, \dots, S_9; T_0, T_1, \dots, T_9$ 及 $S_0 + T_0, S_1 + T_1, \dots, S_9 + T_9$ 都是模 10 的完全剩余系.

事实上, 假如存在 $m, n, 0 \leq m < n \leq 9$, 使 $S_m \equiv S_n \pmod{10}$, 则

$$\sum_{i=m+1}^n a_i = S_n - S_m \equiv 0 \pmod{10},$$

即第 1 行的第 $m+1$ 至第 n 列组成一个“好矩形”, 与第 1 行都是“坏格”矛盾. $\dots\dots\dots 20$ 分

又假如存在 $m, n, 0 \leq m < n \leq 9$, 使 $T_m \equiv T_n \pmod{10}$, 则

$$\sum_{i=m+1}^n (b_i + c_i) = T_n - T_m \equiv 0 \pmod{10},$$

即第 2 行至第 3 行、第 $m+1$ 列至第 n 列组成一个“好矩形”, 从而至少有 2 个小方格不是“坏格”, 矛盾.

类似地, 也不存在 $m, n, 0 \leq m < n \leq 9$, 使 $S_m + T_m \equiv S_n + T_n \pmod{10}$. $\dots\dots\dots 30$ 分

因此上述断言得证. 故

$$\sum_{k=0}^9 S_k \equiv \sum_{k=0}^9 T_k \equiv \sum_{k=0}^9 (S_k + T_k) \equiv 0 + 1 + 2 + \dots + 9 \equiv 5 \pmod{10},$$

所以
$$\sum_{k=0}^9 (S_k + T_k) \equiv \sum_{k=0}^9 S_k + \sum_{k=0}^9 T_k \equiv 5 + 5 \equiv 0 \pmod{10},$$

矛盾! 故假设不成立, 即“坏格”不可能多于 25 个. $\dots\dots\dots 40$ 分

另一方面, 构造如下一个 3×9 的方格表, 可验证每个不填 10 的小方格都是“坏格”, 此时有 25 个“坏格”.

1	1	1	2	1	1	1	1	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	10	1	1	1	1	2

综上所述, “坏格”个数的最大值是 25. $\dots\dots\dots 50$ 分