主持人：申建春
Email:shenjch66@126.com

数学思维的学习与教学(上)

郑毓信

对大多数小学数学教师而言，数学思维这一论题应当说只是自新一轮数学课程改革开始才得到他们的普遍重视。但是,正如以下一些引言所清楚表明的(潇湘数学教育工作室,“数学思想方法:想说爱你不容易”,《湖南教育》,2008年第11期),就当时的情况而言,不仅大部分教师对“帮助学生初步地学会数学地思维”感到有较大难度,更有相当一部分人持怀疑和抵触的态度:

“小学数学不必提什么数学思想吧？那有什么意思呀？真的搞不懂,你们的学生个个是天才吗？对学生没有必要说这个事吧？”

“数学思想是很抽象的。”

“小学生没有一定的数学知识怎么能体验和理解那个东西(数学思想方法)呀？”

“对小学生谈数学思想是有点虚的感觉呀。”

“和小学生谈什么所谓的数学思想有一点拔苗助长的味道。”

相对于上述情况而言,这方面的总体形势已发生了根本性的变化：大多数教师现已接受了这样一个认识;不仅小学数学同样充满了数学思想,我们也完全可以在“帮助学生初步地学会数学地思维”这一方面做出切实的工作。对此,我们可以由人们对于诸多相关课例(“植树问题”“找次品问题”等)的普遍关注，以及解题策略等题材在各种数学教材中所占据的地位就可清楚地看出。

当然,就这方面的具体工作而言,仍有不少的问题或不足之处。从整体上说,这就是一个特别重要的任务：我们应对小学阶段究竟应当帮助学生学会哪些数学思想和方法作出清楚界定，还应根据小学生的认知发展水平对此作出合理定位，即应当具体地指明这些思想和方法在小学数学学习各个阶段的具体定位,或者说,在小学数学学习的各个阶段,在上述各个方面我们究竟应当帮助学生达到怎样的发展水平。另外,从教师的角度分析,我们显然又应特别强调加强学习和研究的重要性。因为,就现实而言,大多数小学教师还不能说已在这方面具有了较高的专业素养。再者,如何能够联系自己的教学有针对性地开展研究又应被看成切实改进这一方面工作的基本途径。

以下，我们首先提出关于数学思维学习与教学的两条建议；其次，通过一些课例对小学数学思维教学中若干较为重要的主题作出具体分析；最后，从数学思维的角度对“数感”与“符号意识”这两个核心概念作出解读。应当强调的是，所有这些论述

集中体现了笔者这样一个观点,即在当前我们应当特别重视“理论的实践性解读”与“教学实践的理论性反思”。

一、关于数学思维学习与教学的两点建议

以下就是关于一线教师如何从事数学思维的学习与教学的两点建议。

1.应将学习与教学工作更好地结合起来

上面已经提及,由于各种原因,大多数小学教师在这方面还不能说已经具有了较高的专业素养,因此,我们在当前就应特别重视这一方面的学习。进而,这又正是做好这方面学习的关键:不应求全,而应求用。这也就是指,我们应将这方面的学习与自身的教学工作很好地结合起来。因为,如果不能对自身的教学工作发挥积极的作用,那么,无论是所谓的数学思想方法或解题策略,还是更为一般的数学思想或数学基本思想等,就都只能说是纸上谈兵、空中楼阁,相应的学习也就毫无意义。

更为具体地说,这又正是笔者在这方面的一个基本思想:与数学思维的专门教学相比较,我们应当更加重视如何利用数学思想和数学思想方法的分析带动具体数学知识内容的教学。因为,这不仅有助于我们将数学课真正讲活、讲懂、讲深,让学生看到活生生的数学研究工作,而不是死的数学知识,并能真正理解有关的数学内容;不仅能够学到具体的数学知识,也能领会内在的思想和思想方法,还可具体地感受到数学思想和思想方法的力量,从而真正起到言传身教的作用。

在此,还可针对当前较为流行的一种观点,即对于数学思想“层次关系”的突出强调作一具体分析。以下就是对后一方面的一个具体论述(顾沛,“数学基础教育中的‘双基’如何发展为‘四基’”,《数学教育学报》,2012年第1期):

“数学的基本思想,主要可以有数学抽象的思想、数学推理的思想、数学模型的思想、数学审美的思想。”

“当然,由上述数学的基本思想演变、派生、发展出来的数学思想还有很多。例如由数学抽象的思想派生出来的有:分类的思想、集合的思想、变中有不变的思想、符号表示的思想、对应的思想、有限与无限的思想,等等。”

“由数学推理的思想派生出来的有:归纳的思想、演绎的思想、公理化思想、数形结合的思想、转换化归的思想、联想类比的思想、普遍联系的思想、逐步逼近的思想、代换的思想、特殊与一般的思想,等等。”

“由数学模型的思想派生出来的有:简化的思想、量化的思想、函数的思想、方程的思想、优化的思想、随机的思想、统计的思想,等等。”

又,“在用数学思想解决具体问题时,对某一类问题反复推敲,会逐渐形成某一类程序化的操作,就构成了‘数学方法’。数学方法也是具有层次的。”

“处于较高层次的,例如有:逻辑推理的方法、合情推理的方法、变量替换的方法、等价变形的方法、分情况讨论的方法,等等。”

“低一层次的数学方法还有很多。例如有:分析法、综合法、穷举法、反证法、抽样法、构造法、待定系数法、数学归纳法、递推法、消元法、除幂法、换元法、坐标法、配方法、列表法、图像法,等等。”

毋庸讳言,尽管相关作者已经按照“层次区分”的思想对各种数学思想和数学(思想)方法进行了分析、梳理,但大多数读者恐怕还是很难摆脱这样一个印象:数学思想和数学(思想)方法实在太多,更过于抽象,要想掌握实在不易!

与此相对照,笔者以为,我们不但应当坚持数学思维的学习,不应求全,而应求用;而且,相对于严格的层次区分而言,又应更加注重自己的独立思考,即应当通过具体与抽象、特殊与一般之间的辩证运动不断深化自己的认识。

例如,如果我们采用的是化归思想这样一个词语,这主要就是指这样一种普遍性的思想:数学中往往可以通过将新的、较为复杂和困难的问题转化成已经得到解决的、较为简单和容易的问题而求得解决。与此相对照,如果所强调的是化归的方法,则就意味着我们已将关注点转移到了如何去实现所说的转化,如分割法、映射法、求变法等就都是这样的实例。再则,所谓化归法的核心思想,则代表了相反方向上的运动,即由具体方法重新上升到了一般性的思想,包括联系的思想、变化的思想,等等。

2.无论是就学习还是教学而言,我们应突出重要的数学思想和思想方法,并很好地处理深度与广度的辩证关系

为了清楚地说明这一点,建议读者在此可以首先思考这样一个问题:数学教育究竟为什么要将“帮助学生学会数学地思维”列为基本目标之一?以下就是一些主要的论点——

第一,正如波利亚关于解题策略的论述所清楚表明的,与各种具体的数学知识和技能相比较,数学的思想方法应当说具有更为普遍的意义,即对于大

多数将来未必会从事任何与数学直接相关工作的学生也可能发挥一定的作用。

第二,"数学思想才是数学的核心。每一门数学学科都有其特有的数学思想，赖以进行研究（或学习）的导向,以便掌握其精神实质"(张奠宙等,《现代数学思想讲话》序言,江苏教育出版社,1991)。由此可见,数学思想的分析有助于具体数学知识的理解,即直接关系到了认识的深度。

也正是从后一角度去进行分析，我们应特别重视深度与广度之间的辩证关系。值得指出的是,这事实上也正是中国旅美学者马立平博士提出的"数学知识的深刻理解"这一概念的具体内涵:"我将'深刻地理解一个专题'定义为:将这个专题与该学科的更多的概念上很强大的思想联系起来。一种思想与学科的结构联系越紧密,它将越强大,结果,它就能支持更多的专题。"(马立平,《小学数学的掌握和教学》,华东师范大学出版社,2011,第 116 页)容易看出,"概念上很强大的思想"大致地相当于我们所说的"重要的数学思想和数学思想方法";进而,又只有从较为广泛的角度去进行思考，我们才能真正揭示出"概念上很强大的思想"。

容易想到，上面的分析在一定意义上也可被看成为 2011 年版的《数学课程标准》(以下简称新课标)何以突出强调数学基本思想提供了直接的论据,尽管后者所使用的是"数学基本思想",而非"重要的思想和思想方法"这样一个词语。但是,在笔者看来,我们在此又应注意防止这样一种倾向，即就每一节课、每一具体内容刻意地去寻找所说的"数学基本思想",以至于在不知不觉之中表现出了"贴标签"的倾向。恰恰相反,学科相关性应当被看成数学思想与数学思想方法的生命力,从而,在此真正需要的就是如何针对具体的教学内容去进行分析思考，包括通过采取较为广泛的分析视角清楚地揭示究竟什么是相关的重要数学思想和思想方法。

例如,只有将自然数、小数与分数的运算联系起来加以考察,我们才能很好地理解这样一点,即这些内容集中地体现了这样一些重要的数学思想和思想方法:(1)逆运算的思想,(2)不断扩展的思想,(3)类比与化归的思想,(4)算法化的思想,(5)客体化与结构化的思想。(对于后者可见第六节的论述)

最后,由于我们同时用到了数学思维、数学思想和数学思想方法等术语，在此就有必要对它们各自的具体含义，包括相互之间的区别与联系作出大致的说明(详见图 1)。应当强调的是,其中不仅直接涉及到了"过程"与"结果"这样一对在课改中经常被提到的范畴,也集中地反映了"知识"与"思想"之间的联系与区别。特别是,这两者事实上都可被看成思维活动的最终产物。另外,我们也可从同一角度去理解人们何以经常将一些具有较大普遍意义的数学思想方法称为数学思想。因为,尽管后者主要反映了对方法论的思考，但同样可被看成这些策略性思想的一个普遍特征,即相对于各个具体的解题策略而言,它们具有更大的普遍意义，从而也就达到了更大的思维深度。

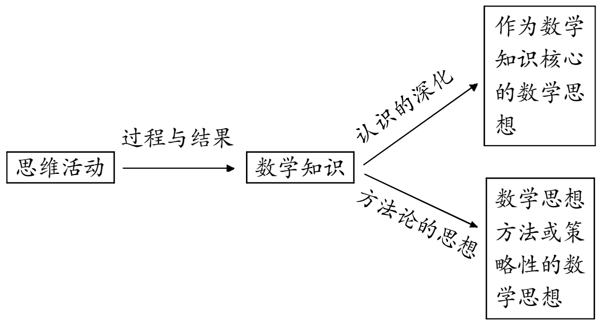

图 1

再者，针对新课标中对于数学基本活动经验的突出强调,笔者则愿提出这样一个建议:在现实中,我们事实上无需过分地强调数学活动经验与数学思想的区分。因为,相对于外部的操作性活动而言,数学显然主要涉及到了内在的思维活动。而且,从实践的角度看，重要的恰又在于我们如何针对具体的教学内容深入地去揭示其中究竟涉及到了哪些数学活动经验和数学思想，而不应片面地强调其中的某个或某些。在笔者看来,以下的现象或许也可被看成为上述主张提供了直接的佐证：一线教师的相关文章中常常包含有一些自创的概念,如数学思维经验、数学思想方法经验等，这事实上就是对数学思想与数学活动经验的一种综合。

最后，笔者也希望读者能够联系自己的教学认真地思考一下：究竟哪些数学思想或数学思想方法对于小学数学是特别重要的？这事实上也就意味着你已在数学思维的学习与研究这一方向上跨出了特别重要的一步。

以下就结合若干教学案例对数学思维的教学作出进一步的分析。应当再次强调的是,这集中地体现了"教学实践的理论性反思"这样一个立场。这也就是指,我们应以课例为背景,深入地去揭示普遍性的问题，包括通过深入的分析与思考引出相应的普遍性结论。

二、从学生的"规律性错误"看归纳思想的教学

这是新课标诸多解读的重要特点之一，即对于归纳思想(思维)的突出强调。如“在学生思维能力的培养上，我国以往的数学教育偏重演绎思维及其能力的训练,缺少归纳思维及其能力的培养。……(这)给创新型人才的成长带来了严重的障碍”(史宁中、马云鹏主编,《基础教育数学课程改革的设计、实施与展望》,广西教育出版社,2009,第4页)。

归纳思想与能力无疑十分重要,但要指出的是,这事实上又正是人类最为基本的一种思维倾向或能力。无论就哪一领域的工作或是实际生活而言,人们在面对各种不具有明确解答或解答方法的问题时常常会采取这样一个解决途径，即力图将已掌握的知识和方法推广应用于新的问题。更为一般地说,人们总希望能够揭示出隐藏于各种现象与个别事实背后的普遍性规律，而这当然也可被看成归纳思想与能力的具体应用，尽管在现实中这往往并非完全自觉的行为。

例如,主要地也就是在这样的意义上,归纳就常常被说成“对已有经验进行组织最为有效的一种手段”(Ben-Zeev 语)。当然,这又是这种行为更为深刻的原因,即希望通过发现规律,我们就能将已获得的知识和经验成功地应用于新的场合和对象。

在此还要特别强调这样一点：就小学生的数学学习活动而言，我们可经常看到归纳思想的渗透和应用。例如,自然数的认识(特别是,自然数的读法)显然就离不开规律的发现和应用,特别是,在很多学者看来，这更可被看成数学教育文化相关性的一个典型例子:由于与英文相比,中文在这方面表现出了更强的规律性(这特别体现于十位数的读法),因此给学生的数学学习带来了很大的便利。

数学学习心理学中关于学生“规律性错误”(如$3+(7\times6)=3\times7+3\times6$等)的研究也为上述断言提供了直接的论据。因为,“过度的一般化”正是造成此类错误最为重要的一个原因,从而也就是归纳思想的一种不恰当应用。(应当指出,尽管我们在此使用了“不恰当”这样一个字眼,但这又正是相关研究的一个主要结论,即我们应当清楚地看到这种错误有其一定的合理性,而这又是从思维方法的角度进行分析的结果。对此,例如可见 T. Ben-Zeev,“When Erroneous Mathematical Thinking is just as ‘Correct’: The Oxymoron of Rational Errors”,载 R. Sternberg and T. Ben-Zeev 主编,《The Nature of Mathematical Thinking》,Lawrence Erlbaum Associates,1996)

除此以外，我们还可特别提及应用题教学中经常可以看到的一种现象,即学生(甚至部分教师)往往倾向于按照问题的事实性内容去对此进行分类，而其主要目的同样在于通过发现规律（在此主要指“问题的求解方法”),将此直接应用于新的类似问题的求解。当然,从更为深入的角度分析,这也只能说是“过度的一般化”。因为,数学问题的求解方法并不是由它的事实性内容决定的，而是主要取决于其内在的数学结构。(对此可见第五节的论述)

综上可见,就当前而言,我们不应满足于对于归纳思想的一般性论述[1],而应更为深入地思考数学教学对学生更好地掌握归纳思想究竟应当发挥怎样的作用,从而切实增强自身在这一方面工作的自觉性。

以下就是这方面的一些具体建议——

1.由于归纳是一种普遍性的思维倾向,在数学中就具有十分广泛的应用。从而,相对于“找规律”此类的专门研究而言，我们应更加重视归纳思想在日常教学中的渗透。例如,各种运算法则的研究显然都是“找规律”的实例,即归纳思想的具体应用。

2.努力促成学生由对归纳思想的朴素应用向科学应用转变。

由以下的实例我们可具体地体会到归纳法科学应用的一些主要特点,特别是,我们究竟应当通过哪些实例的考察去发现规律。

例　加法交换律的教学（张齐华,《人民教育》,2006 年第 11 期）。

教师在此首先通过一个故事引出$3+4=4+3$这样一个等式,并提出这样一个问题:“观察这一等式,你有什么发现?”

一个学生回答道:“我发现,交换两个加数的位置,和不变。”

尽管这一结论正是教师所希望的,但他没有立即加以肯定,而是追问道:“其他同学呢?”而且,在没有获得直接回答的情况下,教师又写出了如下结论以供学生进行对照比较:

1　我们在此甚至还可看到一些过于简单化的认识,如“从思维方法的角度分析,与创新有关的思维和能力有两种:演绎思维及其能力和归纳思维及其能力”(《基础教育数学课程改革的设计、实施与展望》,同前,第4页)。例如,我们只需与彭加莱、阿达玛等人关于发明创造本质的论述作一对照就可清楚地看出这一论点的局限性。

“交换3和4的位置,和不变。”

作为必要的启发，教师还提了这样一个问题：“比较我俩给出的结论,你想说些什么？”

一个学生回答道:“我觉得您(教师)给出的结论只代表了一个特例，但他给出的结论能代表许多情况。”

另一学生紧接着补充道:“我也同意他的观点，但我觉得单就黑板上的这一个式子,就得出‘交换两个加数的位置,和不变’好像不太好。万一其他两个数相加的时候,交换它们的位置,和不等呢？……我觉得还是您(教师)的观点更准确、更科学一些。”

显然，这已清楚地表明了对相关结论进行验证的必要性。

其后,教师又组织学生对“怎么验证”进行了讨论,并通过适当的归纳(“我觉得是不是可以这样,我们每人都来举三四个例子,全班合起来那就多了。同时,大家也留心一下,看能不能找到交换加数的位置,和发生变化的情况”)引导学生进行了实际的举例和验证。然后,通过有意识地选取几位同学作全班汇报并加以适当的引导,教师使学生清楚地认识到了这样一点:“举例就应当这样,要考虑到方方面面。”(即所选取的数不应只是一位数，也应包括一位数加两位数、两位数加两位数,……乃至小数和分数的例子)

最后,作为全课的结束,教师又引导学生对“通过今天的学习有哪些收获”进行了讨论。由于这一课堂中“过程”与“结果”较好地得到了结合,因此,学生能谈出如下的感受和体会就不足为奇了:“我发现，有了猜想,还需要举很多例子来验证,这样得出的结论才准确。”“举例验证时,例子应尽可能多,而且,应尽可能举一些特殊的例子,这样,得出的结论才更可靠。”

与此相对照，以下的教学设计在这方面就应说表现出了明显的不足，即未能深入地思考我们究竟为什么要选择多个不同的实例，学生在此也可说处于完全被动的地位。

例　植树问题的教学。

在现实中,对于植树问题的教学,我们经常可以看到这样一种设计,即为了找出相应的规律(为了讨论的方便,在此仅限于“两端都种”这样一种情况,而且规定“每隔5米种1棵树”),教师要求学生分别就多个不同的情况进行研究,如道路全长20米、25米、30米、50米,……包括通过列表作出归纳。

具体地说，上述的做法从朴素的观点看应当说并没有错，但笔者在此所希望的恰又正是读者能够更为深入地思考这样一个问题：由于所说的各种情况十分类似,因此,我们在此是否真有必要让学生再三地重复所说的“研究”？

另外,在笔者看来,这也正是诸多“找规律”这样的课程所应努力避免的一个弊病：尽管我们希望学生能够积极、主动地进行探究,但在现实中所出现的却又往往是这样的情况:学生只是按照教师(或者说教材)的暗示、用教师(教材)指定的方法、按照教师(教材)指定的步骤去作出所谓的“发现”。

其次,又如上面所已提及的,这也应被看成科学应用归纳的又一重要内涵，即我们应当清楚地认识归纳的局限性，特别是，这主要只是一种发现的方法,并可能导致错误的结果。也正因此,我们不仅应当善于用归纳去作出发现，也应注意对相关结论进行检验,包括提供严格的逻辑证明,或是通过新的实例的考察对原来的猜想作出改进，甚至完全否定原来的猜想。

综上可见，数学中规律的发现主要可被看成围绕以下三个问题进行的:(1)什么看上去是真的？(猜测与表述)(2)它为什么是真的？(检验,包括改进与否定,以及如何对此作出证明)(3)它在怎样的范围内看上去也是真的？(详可见梅森等,《数学思考》,九章出版社[台湾],1998)

例如，就上述的植树问题而言，我们只需围绕“它为什么是真的？”这一问题进行思考,就可清楚地看出在此确实没有必要针对所说的各种情况要求学生再三地重复所说的“研究”。因为,这里的关键并不在于道路的实际长度（20米、25米、30米还是50米),而是一一对应这样一个思想。这也就是指,在此我们必须引导学生由单纯的计算(动手)转向更为深入的思考(动脑)。

另外,上述的第(3)个问题事实上也可被看成集中地体现了数学思维的这样一个内涵：我们不应满足于纯粹的“问题解决”,而应“求得解答,继承前进”(黄毅英语)。

最后,应当提及的是,归纳在数学中的应用也正是著名数学哲学家拉卡托斯的名著《证明与反驳——数学发现的逻辑》(上海译文出版社,1987)的直接主题。特别是,由这一著作我们可获得数学中究竟应当如何通过新的实例(特别是反例)的考察去对原来的猜想作出改进，包括最终发现证明思路的重要启示。当然,数学归纳法的创立也可被看成是在猜想与证明的有机结合这一方向上的重要进步。

(待续)