



数学思维的学习与教学(下)

郑毓信

五、算术应用题的思维教学功能

促使笔者提出这一论题的主要原因,是现实中传统的算术应用题已经被“问题解决”完全取代,从而,作为课改实践的必要总结与反思,我们也就应当深入地思考这一做法是否也有其一定的局限性,甚至还可能造成一定的消极后果。另外,由于我们突出地强调了方程方法相对于算术方法的优越性,因此,作为必要的补充,在此也就有必要清楚地指明防止这样一种片面性认识的重要性,即认为只要及早地引入所说的代数方法,所有的算术难题就都可以得到解决,从而我们在教学中也就根本不再需要要求学生认真地去求解任何一个较为复杂的算术应用题。

具体地说,这正是笔者在这方面的一个基本观点:尽管强调“问题解决”确有其一定的合理性,包括可以促使人们更加重视数学与日常生活之间的联系。但是,由于算术应用题具有重要的思维教学功能,因此,用“问题解决”完全取代算术应用题也可能造成严重的消极后果。另外,由于算术应用题的这种思维教学功能不可能通过引入方程方法简单地得以实现,因此,即使我们不考虑提前引入方程方法是否符合学生的认知发展水平,也应更为深入地思考小学数学教学究竟如何才能促成学生思维的发展。

以下就对算术应用题的思维教学功能做出具体分析。

首先,正如人们普遍了解的,算术应用题的教学

往往与“问题的适当分类”密切相关。因为所谓的“模式识别”正是人们用以解决问题最为基本的一个策略。

然而,也正是在这一点上,我们可看到一般思维与数学思维的一个重要区别:初学者往往会按照事实性内容对问题进行分类,并由此决定采取什么样的解题方法,数学家则更加倾向于超越问题的“表层结构”(即“事实性内容”),并按照其“深层(数学)结构”对此进行分类。

进而,又如以下的实例所清楚表明的,即使就小学的数学教学而言,我们仍然可以帮助学生具体地学习这样一种思维方式,即使我们在此尚且不能明确地提及问题的“表层结构”与“深层结构”这样一些概念。

[例]水池问题的求解(祝中录)。

“学生在解决水池问题时,往往会认为水池一边开进水管,一边开出水管,不论经过多长时间都不会注满水池。在教学时,教师可以不急于讲解,而是引导学生寻找生活中类似的实例。(1)追及问题。客车每小时行40千米,小汽车每小时行50千米。现在客车在小汽车前25千米的地方,同时沿笔直的公路行驶,多长时间小汽车能追上客车?(2)储蓄问题。爸爸每月工资420元,妈妈每月工资300元,每月平均支出450元,余下的钱存在银行,几个月后能买一台价格1350元的电视机?通过这些实例,学生就容易弄明白只要进水量大于出水量,经过一段时间水池就一定能注满水。”

由此可见,尽管在现实中有些教师同样采取了“按问题的事实性内容进行归类”这样一个做法,但这恰又是算术应用题教学的一个重要功能,即有助于学生逐步学会如何超越问题的表层结构,并从更为深入的层次认识其内在的数学结构。当然,这里的关键恰又在于教师应不断增强自身在这方面的自觉性,从而在教学中有意识地加以引导。

除了所说的思维教学功能(可称为“结构性思维”)以外,算术应用题对于学生学会“整体性思维”也具有特别重要的作用。对此,由多步应用题的教学就可清楚地看出。

具体地说,正如人们广泛认识到了的,这正是一部分学生对多步应用题感到特别困难的主要原因,即他们尚未学会用相互联系的观点看待问题中所涉及的各个数。这也就是指,为了解决问题,我们不仅应当清楚地界定问题中所涉及的各个已知数和未知数,也应注意分析这些数之间的相互关系(这往往是与问题中的各个命题直接相对应的),包括不同关系式中所涉及到的数的同一性。在此要强调的是,后者事实上也就意味着我们已由对各个命题的分别理解过渡到了对问题的整体性把握。当然,这里所说的“整体性思维”还包含这样一个涵义,即对于“序”的很好把握,我们应当按照怎样的顺序逐步地解决所面临的问题。

由法国著名科学家、数学家彭加莱的以下论述我们可以更好地理解“序”的把握对于数学的特殊重要性:“一个数学证明并不是若干三段论的简单并列,而是众多三段论在确定的序之中的安置。这种使元素得以安置其中的序要比元素本身重要得多。一旦我感觉到,也可以说,直觉到这个序,以至于我一眼之下就领悟了整个推理,我就再也不必害怕会忘掉任何一个元素,因为每个元素都将在序中各得其所,而这是不需要我付出任何记忆上的努力的。”(彭加莱,《科学的价值》,光明日报出版社,1988,第376页)

综上所述,算术应用题的教学就具有十分重要的思维教学功能。也正因此,如果我们对此缺乏清楚的认识,未能采取恰当的措施加以补救,那么,用“问题解决”完全取代算术应用题就很可能在这方面造成严重的后果。

进而,我们又应特别强调这样一点:尽管方程方法与算术方法相比具有明显的优点,但如果教师在教学中只是突出地强调了利用方程方法求解问题的有效性,却未能对上述的“结构性思维”和“整体性思维”予以足够的重视,包括采取适当的措施予以强化,那么,即使学生已经很好地掌握了与方程直接相关的各

个数学知识与技能,却很可能仍然不能取代算术应用题的思维教学功能。因为,在利用方程方法求解问题时,上述的各种思维特征已在很大程度上被淡化了,因而我们就不可能由实际的解题活动深切地感受到这样一些思维方式的重要性,自然也就不可能在这一方面取得切实的进步。毋宁说,代数方法的学习在这方面事实上只是起到了“掩盖矛盾”或“推滞发展”的作用。

更为严重的是,又如前一节中已提及的,如果缺乏足够自觉性的话,方程的学习还可能造成新的问题,即进一步强化了原先在学生中就已存在的机械学习的倾向,后者既是指完全按照问题的事实内容对此进行分类并由此决定相应的解题方法,也包括对于所谓的“关键词”的不恰当强调以致部分学生往往就只是依据“关键词”判定究竟应当采取什么样的运算以求得解答。当然,从根本上说,学生之所以会出现上述的错误,主要是由不恰当的教学方式造成的。

最后,笔者以为,上面的分析事实上也可被看成十分清楚地表明了这样一点:对于课程改革,我们应当持十分慎重的态度。特别是,这更应被看成促进课程改革深入发展的关键,即我们应当对过去10多年的课改实践做出认真的总结与反思,这样就既可以通过发现问题、解决问题不断取得新的进步,也能通过“做细、做实、做深”更好地发扬成绩。(对此并可见另文郑毓信,《数学课程标准(2011)》的另类解读,《小学教学》,2013年第3、4期)

当然,就本文的论题而言,这又更为清楚地表明了这样一点:这正是摆在我们面前十分紧迫的一项任务,即我们应对基础教育的各个阶段究竟应当帮助学生掌握哪些数学思想和数学思想方法做出清楚界定,包括依据学生的认知发展水平对此做出合理定位。

六、聚焦数感与符号意识

在新课标提到的10个核心概念中,数感和符号意识应当说与小学数学有着最为密切的联系。以下就从数学思维的角度对如何促进学生的数感与符号意识做出简要的分析。

就学生数感的发展而言,首先可以提及曹培英老师的这样一个观点:数感是数出来的;数感是读出来的;数感可以算出来、估出来;用出数感。(曹培英,《数学课程标准核心词的实践解读之一》,《小学数学教师》,2012年第12期)由此可见,小学数学教师事实上就一直在从事这方面的工作。进而,当前最需要的就是我们如何进一步增强自身在这方面的自觉性,包括清楚地认识究竟什么是发展学生数感的具体内涵。

以下就是新课标中的相关论述:“数感主要是指关于数与数量、数量关系、运算结果估计等方面的感悟。”由此可见,数感主要涉及到了“数与数量”和“数量关系”,包括具体的运算和估算。

笔者以为,我们可依据从无到有、从粗糙到精确、由简单到复杂、由单一到多元这样一种认识,更为深入地把握发展学生数感的准确涵义。

例如,就“数与数量”而言,这首先就涉及到了数的概念的不断扩展,特别是小数和分数的引入。另外,就每种数的认识而言,又都涉及到了适当的心理表征的建构,即我们不仅应当让学生通过数数去认识各个具体的自然数,也应通过记数法的学习,使学生有可能接触到现实生活中很难直接遇到的各种大数,直至初步认识数的无限性,还应通过引入直观表示帮助学生建立数的视觉形象,从而发展起更为丰富的心理表征。

同样地,“数量关系”显然也具有多样性的特征,包括运算的多样性以及相等与不相等等多种关系。另外,就各种运算的具体实施而言,又都有一个不断优化的过程。例如,对于“单位数的加法”我们就可区分出三种不同的水平,这直接反映了主体对于数量关系认识的不断深化:第一,从头数起(count all);第二,“简化的计数程序”:从第一个加数“继续往后数”(count on);第三,已知事实的应用,如 $9+7=(9+1)+6=10+6=16$ 。

在此,我们还应特别强调这样一种意识的形成,即将数看成一个独立的存在,后者构成了数学研究的直接对象。

当然,就这方面的具体思维活动而言,我们又应首先肯定任一数学对象都是抽象思维的产物。然而,这恰又正是数学思维的特殊性所在,数学研究并不局限于客观事物和现象数量属性与规律的正确反映,而是具有明显的建构性质,我们正是通过自身的思维活动创造出了相对独立的数学对象。

例如,正如上面所提及的,各种大数就很难被看成是客观事物和现象的直接反映,而是主要依赖于思维的自由创造。另外,我们事实上也可从同一角度去理解学生为什么常常会对分数的学习表现出较大的困难。因为,在此所需要的正是由过程(如 $3 \div 7$)向结果($\frac{3}{7}$)的转化(凝聚),即在无法实际实施运算的情况下学会将相应的结果看成真正的数,我们可进一步研究它的各种性质,特别是各个分数之间的相互关系。

当然,我们在教学中仍然应当清楚地指明各种数

(包括所谓的大数与分数)的现实意义。但在笔者看来,这恰又正是发展学生的数感十分关键的一步,即帮助他们慢慢地习惯于从数的相互关系去认识数、把握数,直至逐步地学会如何对这样一个由各种各样的数组成的数学世界做出客观的研究。

显然,就只有在这样的意义上,我们才能真正谈及对于数和数量关系的感悟,乃至逐步养成与此直接相关的情感、态度与价值观,如对于事物和现象数量方面的敏感性,乐于计算,乐于数量分析,而不是对此感到恐惧,甚至更以“数盲”感到自豪。

其次,由第四节中关于代数思想的论述,我们即可看出,尽管学生在小学阶段已经接触到了各种数学符号,包括数字符号、运算符号、关系符号等,但又只有从更高的层次进行分析、理解,我们才能真正掌握数学符号的本质,包括如何通过自己的教学帮助学生形成正确的符号意识。

具体地说,先前关于“应当将文字符号看成直接的数学对象而无需始终关注它们的指称意义”的论述显然即是与以上关于数感的分析十分一致的。当然,与后者相比,符号的认识与把握又应说已在很大程度上超出了单纯感悟的范围,主要表现为一种自觉的认识。

也正因此,新课标中将原来的符号感改成符号意识应说是较为合理的。当然,我们在教学中又应更为明确地强调对于数学符号基本性质的清楚认识。例如,正如前面已提及的,后者事实上也正是数学中发展各种算法(例如,分数除法的颠倒相乘)的必要前提。因为,这正是后者的一个主要特征,即我们在此完全不考虑对象(符号)的意义,而只是按照确定的法则对此进行运作。

当然,这又是符号意识进一步发展的一个重要涵义,即将字母看成变量。应当指出的是,后者事实上也正是代数思想的一个重要发展:“代数不仅仅成为关于方程和解方程的研究,也逐步发展成涵盖函数(及其表征形式)和变换的研究。”(基兰,关于代数的教和学研究,载古铁雷斯、伯拉主编,《数学教育心理学研究手册:过去、现在与未来》,广西师范大学出版社,2009,第17页)

最后,正如数感的理解一样,我们在此也应联系数学教育的“三维目标”更为深刻地理解符号意识的内涵。特别是,由于文字符号的应用可被看成数学语言的主要特征,因此,我们在此也就特别强调这样一点:学习一种语言就是进入了一种新的文化。特别是,我们应通过数学学习帮助学生更为清楚地认识超越

一、问题

人教版课标教材六年级下册安排的“数学广角”渗透的是有关抽屉原理的一些基本思想方法。抽屉原理最先由 19 世纪德国数学家狄利克雷提出来,所以又称狄利克雷原理,或称鸽巢原理。教材安排的教学内容介绍的是第一抽屉原理。第一抽屉原理总共有三个原理,分别可以表述为:

原理 1:把多于 n 个的物体放到 n 个抽屉里,则总有一个抽屉里至少有 2 个物体。

原理 2:把多于 mn 个的物体放到 n 个抽屉里,则总有一个抽屉里至少有 $m+1$ 个物体。

原理 3:把无穷多个物体放入 n 个抽屉,则至少有一个抽屉里有无穷个物体。

根据学生的年龄特点和认知水平,一般只将原理 1 和原理 2 供给学生学习,而教材如此有意识地编排三个例题对抽屉原理进行阐述,其目的很明确:通过例 1 介绍较简单的抽屉问题,用枚举法、反证法、假设法等思考方法解释这一现象,学生初步经历数学证明的过程,并用这些方法进行比较,逐步类推,理解抽屉问题的基本模型;通过例 2 的由简单理解过渡到算式说理,学生进一步建立抽屉问题的一般模型;通过例 3,学生进一步理解抽屉原理,进行逆向思维训练,培养反向推理能力。

从上述对教材的剖析可以看出,本内容教学难度大,专业表述性强,学生难学会,教师易教错。

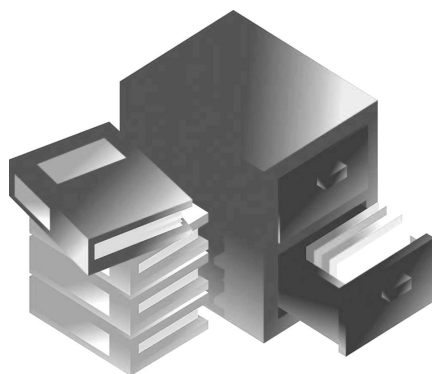
1. 教学实践中的问题

我们听过多位教师执教该内容,他们都不同程

抽屉原理教学研究报告

长沙市丁丽数学名师工作室

潇湘数学教育工作室



度地出现了对内容理解的偏差。更有甚者,在一次教师招聘试教环节,一位教师竟然将抽屉原理直接演绎成了有余数的除法。通过对 12 位教师的教学观摩、访谈及多位学生的面谈,我们了解了如下问题——

教之困

(1)教师对抽屉原理的认识决定了对该内容教学的深度与广度,那么抽屉原理的本质内容和意义是什么?它在数学领域有哪些应用?原理模型在实例应用中如何运用?

(2)抽屉原理是小学生第一次接触一种对存在性规律的论述形式。这其中的很多相关概念(如存在性、最值问题、数学语言的规范规则等)对他们来说

直接经验的重要性,并能乐于与抽象事物打交道,包括不断提高思维的精确性与简单性。

应当强调的是,尽管上述关于情感、态度与价值观的分析在形式上似乎已经超出了数学思维的范围,但在笔者看来,这恰又十分清楚地表明了这样一点:对于数学教育的“三维目标”,我们不应绝对地分割开来,而应更加注意它们的相互联系。就我们目前的论题而言,这也就是指,数学思维的教学作为一种规范性的行为,其本身就可被看成一定价值观念的体现。

进而,无论就数学思维还是与数学直接相关的情感、态度和价值观而言,它们又都应被看成数学文化的重要组成部分。正如齐民友先生所指出的:“历史已经证明,而且将继续证明,一个没有相当发达的数学的文化是注定要衰落的,一个不掌握数学作为一种文化的民族也是注定要衰落的。”(齐民友,《数学与文化》,湖南教育出版社,1991)显然,这事实上也就是我们在从事数学思维教学时所应坚持的一个基本立场。

(作者单位:南京大学哲学系)