**高三数学期初考试试题分析**

**第1题**

【试题情境】

以一元二次方程、一元二次不等式和集合为背景，引导学生关注相关运算．

【必备知识】

一元二次方程及一元二次不等式的解法；用不等关系刻画子集关系．

【关键能力】

本题主要考查学生含字母的一元二次方程与一元二次不等式的求解能力、以及用不等关系刻画子集关系的应用能力．

【学科素养】

本题综合考查了学生数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算等数学学科核心素养．本题要求学生会通过逻辑推理处理含字母的数学运算，会结合数轴通过数学抽象与直观想象得出子集关系对应的不等关系组．

【解题思路】

由A＝得

当时 ，

因为AB，所以解得；

当时 ，

因为AB，所以解得；

当时 ，不成立．

所以选D

【教学建议】

（1） 关注学生对一元二次方程以及一元二次不等式解法的理解与掌握，特别是含字母需要分类讨论的类型；

（2）关注学生集合的运算能力，以及对子集、真子集关系的转化能力，特别是数轴的运用能力．

**第2题**

【试题情境】

以复数为背景，引导学生关注复数的运算和几何意义．

【必备知识】

复数的四则运算；复数的几何意义．

【关键能力】

本题主要考查学生对复数四则运算以及复数几何意义的理解和应用能力．

【学科素养】

本题综合考查了学生直观想象、数学运算等数学学科核心素养．本题要求学生会用复数的四则运算法则进行数学运算，会根据复数的几何意义通过直观想象建立复数与复平面内点的对应关系．

【解题思路】

因为，所以对应的点为．

所以选A

【教学建议】

（1）关注学生复数的四则运算法则记忆与应用的准确性；

（2）关注学生对复数几何意义的理解与掌握；

（3）关注复数章节其他知识点的复习，比如模的运算等．

**第3题**

【试题情境】

判断“*a*≥*b*”与“*ac*2≥*bc*2”两个不等式之间的条件关系．

【必备知识】

理解充分条件、必要条件和充要条件的意义，并通过“若p则q”形式命题的真假，判断语句“p”与语句“q”之间的条件关系．

【关键能力】

理解充分条件、必要条件、充要条件的意义，会求(判定)某些简单命题的条件关系．

【学科素养】

数学抽象: 理解充分条件、必要条件、充要条件的意义；

逻辑推理: 对命题真假的判断；

数学运算: 对不等式性质的应用．

【解题思路】

将问题转化为两个命题：命题①“已知*a*，*b*，*c*是实数，若*a*≥*b*，则*ac*2≥*bc*2”；

命题②“已知*a*，*b*，*c*是实数，若*ac*2≥*bc*2，则*a*≥*b*”．然后分别判断两个命题是否成立，

因为命题①成立，所以“*a*≥*b*”是“*ac*2≥*bc*2”的充分条件．又因为命题②在的时候不成立，所以“*a*≥*b*”是“*ac*2≥*bc*2”的充分不必要条件．

【教学建议】

易出现的错误：一是不等式性质掌握不熟练，导致判断失误；二是不能灵活地应用“赋值法”，通过取的特殊值，从假设情况下推出合理结果或矛盾结果．

**第4题**

【试题情境】

函数的切线问题

【必备知识】

函数的导数，二元一次方程组的解法

【关键能力】

等价转化和数学计算

【学科素养】

将问题信息进行等价转化，构建等价方程组求解．

【解题思路】

通过函数切线的相关知识，构建函数的切线．将构造的切线与已知直线进行对比，使得对应的量相等．然后通过解二元一次方程求得问题中的参数．

【教学建议】

含参问题是高中数学的一类常见问题，需要学生准确辨识参数在题中的作用，进行针对性的求解．解方程过程中，学生常因一些机械计算的失误导致结果错误，产生不必要的失分．针对这种情况，平时的训练因注重基本知识和基本方法的提炼，同时还应重视带字母计算的准确率．

**第5题**

【试题情境】

以“染色问题”和古典概型等经典数学情境为主要背景，引导学生关注数学本质，利用模型化的思想解决问题．

【必备知识】

利用乘法原理探索排列问题，将具体的问题情境归结为分类和分步两类问题，掌握古典概型的基本计算方法．

【关键能力】

本试题主要考察学生对分步计数原理和分类计数原理的理解和应用能力，同时对基本概率的理解和应用．

【学科素养】

理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，获得运算结果，能够借助数学运算方法解决实际问题．

【解题思路】

要求概率的时间总数计算可以从任意一个三角形开始染色，方案有5种；之后再染与它相邻的三角形，只需与它颜色不同即可，有四种方案；其余三角形类似．而事件总数则为简单的分步乘法，最后利用古典概型公式算得概率．

【教学建议】

把两个计数原理的理解放在突出位置，加强学生对“基本事件”的理解，重视常见概率模型和计数模型的总结和应用，抓住数学本质，立足核心素养．

**第6题**

【试题情境】

线性回归方程求解

【必备知识】

线性回归方程的基本概念和相应性质．

【关键能力】

数学计算和数据处理

【学科素养】

理解线性回归方程的概念和性质，能准确使用相关性质进行概念辨析．

【解题思路】

首先求出平均值点，筛选出AD两个选项，然后通过带入点（1，2．2）进行对比，说明D选项更符合题意．

【教学建议】

抓住核心概念展开教学，让学生对概念有正确的认识．要用正反两方面的例子来帮助学生进行辨析，让学生能多角度，多层次的进行理解和掌握．要强调概念的应用，让学生能更深刻的理解概念的价值．

**第7题**

【试题情境】

二项式定理的应用

【必备知识】

二项式定理，组合数公式，导数

【关键能力】

逻辑推理

【学科素养】

能有效分次提取题中信息进行处理和等价转化，能主动使用相关公式进行变形．能通过逻辑推理找到问题与条件之间的逻辑链．

【解题思路】

方法一：结合问题形式，找到表达式变形的突破口：系数与项的对应是如何实现首尾转化的，进而联想到组合数公式．观察次数与系数的关系，结合导数的功能进行求导计算．

方法二：不完全归纳法．将次数改为2次和3次，观察问题的变化规律进行类比．

【教学建议】

让学生在解题过程中能灵活使用公式，创造性的使用公式一直是教学的难点，根本问题在于学生的知识体系中对公式的认识方式和程度，公式的价值在于形式化的呈现相关概念，突出应用性，所以在教学时应该设置多样化的情景，并着力突出公式各个方面的作用．让学生能够充分体验公式的应用价值．

**第8题**

【试题情境】

研究函数在区间的零点个数问题．

【必备知识】

了解函数的零点、方程的根与图象交点三者之间的联系．

【关键能力】

会借助零点存在性定理判断函数的零点所在的大致区间，能借助函数单调性及图象判断零点个数．

【学科素养】

数学抽象：函数零点的概念；

数学运算：运用零点判定定理确定零点范围；

直观想象：运用图形判定零点；

数学建模：通过由抽象到具体，由具体到一般的思想研究函数的零点．

【解题思路】

将函数在区间(﹣，)上的零点个数问题转化为两个函数与在区间(﹣，)上的交点个数，通过分类讨论，直观想象，解决问题．

【教学建议】

本题考查的知识点是函数零点及零点个数的判断，判断函数零点个数的方法主要有：(1)可以利用零点存在性定理来确定零点的存在性，然后借助函数的单调性判断零点的个数．(2)利用函数图象交点的个数判定函数零点的个数．为了便于限制零点个数或零点所在区间，通常要对已知条件进行变形，变形的方向是：(1)化为常见的基本初等函数；(2)尽量使参数与变量分离，实在不能分离，也要使含参数的函数尽可能简单．

**第9题**

【试题情境】

以平面向量相关知识为基础，重点突出考查以运算为主的工具性．

【必备知识】

本题考查了向量的线性运算、数量积运算，并结合圆的轨迹．

【关键能力】

本题考查学生的信息整理能力．要求学生有数学眼光发现问题，用数学的思想方法准确地把握平面向量处理的方法，合理地解决问题的能力．

【学科素养】

本题考查学生逻辑推理和数学运算的学科素养．要求学生运用演绎推理，有效的向量运算，去发现问题、分析问题、解决问题．

【解题思路】

本题中四个选项都可以用基向量法、几何法、坐标法等多种方法处理．纯用基向量运算相对难度较大些，用几何法解决前两个选项特别简单，后两个需要有轨迹意识，用坐标法比较直接，处理好运算即可，不过运算量略大．所以本题需要合理选择方法，最好还能结合多项选择题排除法的策略，对学生要求较高，也符合适应性考试体现出的难易无序，较好地考查学生的能力素养．属于中档题．

【教学建议】

（1）对向量运算处理的三种基本方法在教学中要讲全讲透，把握向量工具性的本质；

（2）教学中要注重一题多解，灵活运用多种方法解题，提升学生综合运用能力．

**第10题**

【试题情境】

以学生学习生活中的测验成绩为情境，结合正态分布相关知识，体现数学的应用性．

【必备知识】

本题考查正态分布定义，并能根据正态曲线求相应概率．

【关键能力】

本题考查学生对正态分布定义和正态曲线与概率关系的阅读理解能力．

【学科素养】

本题主要考查学生数学运算和数据分析的学科素养，要求学生准确掌握正态分布中期望和标准差的数据，并根据数据分析研究出对应概率．

【解题思路】

本题前三个选项只需根据正态分布定义式中期望和标准差的含义判断即可，是对适应性考试第16题的再巩固．第四个选项需要作出正态曲线，根据原则对应的范围判断．属于简单题．

【教学建议】

（1）教学中要注重基本知识、基本方法，全面细致地掌握好高中内容；

（2）加强变式与综合，比如适应性考试与基本不等式结合．

**第11题**

【试题情境】

以斐波那契数列（黄金分割数列）这一经典数列为背景，要求学生能探究相关的简单性质．

【必备知识】

归纳推理能力和一般数列的地推公式的研究方法．

【关键能力】

本题考查学生信息整合和逻辑推理的能力．要求学生能掌握基本的处理线性递推数列的方法，并考查学生猜想与论证能力、数据分析和预测能力．

【学科素养】

本题主要考查学生逻辑推理和数学运算．要求学生会从特殊到一般的推理，引导学生主动思考，主动探求新规律，获得数学结论，形成主动探究意识．坚持探索创新，推进高考改革．

【解题思路】

前两个选项根据线性递推列举即可获得答案，后两个选项从策略上可以选择列举猜想的方法，严密推导需要将线性递推的“和式”化为“差式”，通过累加法推导证明．属于中难题．

【教学建议】

（1）重视数学文化和数学经典问题，尽量消除学生面对试题的“陌生感”；

（2）教学中从问题探究题要求看需要加强猜想与递推论证能力．

**第12题**

【试题情境】

以双变量定义数学新情境，要求学生理解既有“任意”、又有“存在”的命题的等价条件．

【必备知识】

本题考查学生逻辑思维能力、函数值域以及值域间关系处理问题．

【关键能力】

本题考查数学阅读和理解能力．“人们证明正是用逻辑，人们发明正是用直觉”．在数学阅读理解中，要充分发挥逻辑与直觉的作用，从而增强学生对问题的认识与思考能力．

【学科素养】

本题主要考查学生数学抽象和逻辑推理的学科素养，学生要能提炼数学概念，提出命题的等价条件，形成等价转化的思想方法．

【解题思路】

根据独立变量的处理方法，可将变量为的函数变形到等式右边，然后使变量对应的值域是变量对应值域的子集．这样处理，前两个选项简单就辨析出了正误，后两个选项可以通过两个不等式“夹逼”出等式求出参数的值．

当然，从选择题角度来说，可以通过前两个选项中更具体函数的值域定值的正误看出，本命题的等价条件是需要保证“最大值与最小值互为倒数”，这样轻松判断后两个选项的正误．而且从选择题策略角度来说四三个选项错误，那答案必为AD．属于难题．

【教学建议】

（1）从选择题角度看需要大力加强解题策略教学，特别是最后一个多项选择题．策略一是前两个选项是已知的具体函数，很容易判断正误，选个A即可，事实上大部分学校均分低于2分．策略二是如果学生有能力判断选项C错误，立即就可出正确答案的5分；

（2）加强对双变量问题的研究，帮助学生理解掌握获得其等价条件的方法，就本题而言，可以实现两种变式教学：一是将“积式”改为“和式”；二是将“任意”“存在”交叉变式．

**第13题**

【试题情境】

以圆柱和球的综合为背景，考查空间几何体的表面积与体积，注重知识间的融合．

【必备知识】

知道球体的体积公式；理解圆柱的侧面积与侧面展开图面积的关联；知道圆柱的表面积包括侧面积和底面积；理解简单几何体外接球球心的位置的求法．

【关键能力】

本试题主要考查学生对圆柱的外接球、圆柱的侧面积等核心知识的理解和应用能力；通过该试题考查学生的空间想象能力和一定的数学运算能力．该试题体现了研究立体几何的通法即化空间为平面的思维方法．

【学科素养】

本题主要考查学生的直观想象、逻辑推理和数学运算核心素养，要求学生能够具备研究立体几何问题的思维方法即化空间为平面的降维的方法．学生应该能直观想象出圆柱的外接球的球心的位置和圆柱侧面展开图；能够用联系的眼光看待数学知识间的联系；在解题中进一步体会降维和转化的思维方法在立体几何研究中的作用．

【解题思路】

根据球体的体积公式，计算出球的半径为5；根据圆柱的特征，得到其外接球的球心为圆柱的中心；结合圆柱和球面的两个以球心为中点的公共点确定出直径的位置，利用底面直径为8，运用勾股定理求出圆柱的母线长为6；利用圆柱的侧面展开图为矩形，矩形的长为圆柱底面圆的周长，宽为圆柱的母线长，从而求出侧面积为；进一步算出上下两个底面积的和为，从而得到表面积为

【教学建议】

注重数学学科知识间的联系，是新课程标准对学生能力的较高要求．在教学中，要关注数学模块内部的关联，也要注重模块与模块间的联系，帮助学生用联系的、发展的眼光看问题．教学中关注通性通法的渗透，让学生在解题中不断感悟通法，积累数学解题活动经验．

**第14题**

【试题情境】

以三角函数和绝对值函数的综合为背景，考查函数的周期性．

【必备知识】

理解函数周期性的定义；知道的周期；理解图象的翻折变换；会熟练使用诱导公式化简三角函数．

【关键能力】

本试题主要考查学生对三角函数的图象和三角函数的周期性等核心知识的理解和应用能力；通过该试题考查学生利用定义研究函数性质的能力．

【学科素养】

本题主要考查学生的直观想象、逻辑推理和数学运算核心素养．李邦河院士说过“数学是玩概念的”，本题要求学生结合三角函数的图象和图象变换的知识，借助直观想象，通过图象的叠加可感知出最小正周期．也可利用定义研究最小正周期，提升逻辑推理的能力．在诱导公式的使用中提升数学运算能力．在解题中进一步提高用定义分析研究问题的能力．

【解题思路】

1．形的角度：根据辅助角公式，可将原函数化为，将看成和的和；利用三角函数的周期知和的周期为，利用图象的翻折变化，知和的图象为，借助两个函数的图象叠加得的图象，可得的周期为

2．数的角度：根据周期性的定义，显然，则是一个周期．接着验证，则是一个周期．进一步验证

若再进一步缩小就不能满足周期的定义，则为最小正周期．

【教学建议】

华罗庚先生说过“数缺形时少直观，形少数时难入微”．研究函数应从形和数两个方面入手，让学生在解题的过程中体会数形结合的思想．教学中要重视对概念的理解和运用，同时加强考试策略的指导，如特殊化去猜周期，然后结合定义验证．

**第15题**

【试题情境】

以椭圆和抛物线的综合为背景，考查圆锥曲线的基本量，注重知识间的融合．

【必备知识】

知道椭圆和抛物线的焦点坐标和基本量的关系；理解椭圆和抛物线的定义，并会简单应用；知道椭圆的离心率与基本量的关系．

【关键能力】

本试题主要考查学生对椭圆和抛物线的基本量与常见几何性质的理解和应用能力；考查学生利用定义研究圆锥曲线的能力．在解题中体会转化的思想方法．

【学科素养】

本题主要考查学生的逻辑推理和数学运算核心素养．利用已知椭圆的右焦点坐标，得抛物线的焦点坐标，从而求出抛物线的方程．利用抛物线的定义求出交点的坐标，从而得到椭圆上一点的坐标，进一步求出椭圆的方程．学生需要在解答的过程中，设置一个思路清晰的推理方式，并正确运算求解．利用一些图形的公共特征进行转化，体会“算两次”的思想．

【解题思路】

根据椭圆的方程求出右焦点的坐标为从而得抛物线的焦点坐标；利用焦点的横坐标是抛物线标准方程前面系数的求得n的值；由抛物线的定义知抛物线上的点到焦点的距离等于点到准线的距离，求出交点的横坐标；利用点在抛物线上，求出交点的坐标；紧接着将交点的坐标带入椭圆方程求出或利用椭圆的第一定义交点到两个焦点的距离之和为，最后利用离心率与基本量的关系解出答案．

【教学建议】

课程标准指出考试应关注学科间的综合和跨学科知识间的综合，体现考试命题的综合性是新高考的要求．教学中应关注模块内部知识间的关联，还要关注不同模块知识间的关联．圆锥曲线的教学应关注解析法的理解和运用，同时因为解析法的运算量较大，教学中要让学生在自主体验中感受算法不同带来的运算的难易，积累一些如定义法、几何特征如对称性等简化运算的方法．

**第16题**

【试题情境】

以函数与不等式的综合为背景，考查利用函数思想解不等式，注重模块间的融合．

【必备知识】

知道对数函数的定义域；理解二次函数和对数函数的图象和性质；理解函数的奇偶性和单调性的性质；能通过研究函数的图象和性质解不等式．

【关键能力】

本试题主要考查学生对函数的图象和性质、解不等式等核心知识的理解和应用能力；通过该试题考查学生整体研究问题的能力；能把研究基本初等函数的图象和性质的方法，迁移到复杂函数的图象和性质的研究中；能从函数的角度解不等式，体会不同模块知识间的关联，培养学生用联系的整体的眼光看问题的能力．

【学科素养】

本题主要考查学生的直观想象、逻辑推理和数学运算核心素养，要求学生能够具备研究一般函数的图象与性质的能力，并会结合函数图象和性质解不等式．在运算求解的过程中，能将某些对象看成一个整体来研究，培养整体的眼光看问题的能力．利用函数的图象来解不等式，体现了数形结合的思想方法，利用图象直观理解问题，增强直观想象素养．

【解题思路】

研究函数问题定义域优先考虑，得到的定义域为则不等式括号内的两个整体都不为0；观察函数的结构，把看作一个整体，探究看成整体后的函数；利用先整体后局部的方法，先研究奇偶性后研究单调性，发现把看作整体后的函数是偶函数，而且轴右侧减左边增，从而得到原函数关于对称，且在对称轴右侧减左侧增；画出函数的草图，发现离对称轴越近值越大，列出关系式，两边平方计算即可．

【教学建议】

注重数学不同模块知识间的联系，是新高考命题综合性的体现，同时还要关注数学知识与其他学科的交叉融合，增强知识的理解和运用能力．新课程提出“大观念、大主题、大单元”的核心观念，在平时的教学中要重视对整体思维的培养，提升学生从整体的系统的角度看问题的能力．在运算的过程中提升把某些对象看作整体进行整体运算的能力，提升数学运算的核心素养．

**第17题**

【试题情境】

以等比数列的数学模型为背景，考查数列的项和和的求解问题．

【必备知识】

知道等比数列的通项公式和求和公式；理解等比数列的项和项之间的关系并会互相转化；理解等比数列的和和和之间的关系并会互相转化；理解等比数列的基本量法并会熟练使用．

【关键能力】

试题主要考查等比数列中项和项、和与和之间的关系的理解和应用能力；通过该试题让学生体会基本量法在等比数列中的应用，增强用基本量思考问题的能力，体会知识的本质；

在解题的过程中，体会转化的思想方法，培养用联系的眼光看问题的能力．

【学科素养】

本题主要考查学生的逻辑推理和数学运算核心素养，要求学生能够具备基本量法研究等比数列问题的能力．在运算求解的过程中，能预判算法的难易，设计简便的算法处理问题．同时，在运算的过程中能将某些对象看成一个整体来处理消去，达到简化运算的目的，提升整体运算的能力．

【解题思路】

1．本题第一问直接利用求和公式算出等比数列的公比，也可以利用项和项的关系即求出公比，然后利用通项公式算出要求的项；

2．本题第二问利用等比数列项与项的关系，在第一个方程两边同时除以，结合题目条件求得；接着借助第二个方程用求和公式得到的方程，也可以利用与的关系即得到的方程；在求解方程的过程中如果两边同除以一个数要说明为什么不为0，才可以两边消去该数，防止出现漏解；或者把要求的方程看成关于的一元二次方程或设后将原方程转化为的一元二次方程求解．

【教学建议】

数学解题关注三方面，即怎么想、怎么算、怎么写．就本题而言，怎么想指的是关注基本结论如数列求和和求项的公式要熟练掌握，基本方法如基本量法要熟练使用；怎么算指的是在解题中灵活选择运算策略，提升整体运算的能力，如整体消去；怎么写指的是教学中关注审题的指导，如题目中同时计算中不能省去必要的演算步骤，如作除法要交代是否为0．

**第18题**

【试题情境】

三角问题作为高中知识的重要组成部分，是历年高考重点考察的内容，同时也是解决实际问题重要的工具．

【必备知识】

需要学生掌握解三角形的基本知识，正弦定理、余弦定理，以及对公式的选择和灵活应用．掌握解决三角问题的基本思路和方法，熟练完成边和角的互化．

【关键能力】

本题主要考察学生对正弦定理和余弦定理的掌握和应用，以及解决三角问题时清晰的解题思路，从角入手和从边入手两个不同的方向．

【学科素养】

本题主要考察学生逻辑推理和数学运算能力，要求学生能够理解相应的三角公式，并对问题所给的条件加以分析，选择恰当的途径解决问题．要求学生形成清晰的解题思路，并且对于问题的阐述有严密的逻辑性．

【解题思路】

本题的解决主要有两个路径，一个是从边的角度，一个是从角的角度．

1．用角做



，，．

也有同学选择消去角，，

进而求出，再利用来求解．

2．用边做

，有正弦定理得，，进而有正弦定理得到关系，，利用余弦定理得到，，所以

，．

有部分同学在得到，后，利用正弦定理先求，再利用，求出，进而求出．

【教学建议】

（1）对于三角中出现的范围及正负取舍问题，在平时的教学中要求能讲清楚原因，让学生写清楚，写准确，防止变为一中模式．

（2）在三角的解题过程中，尽可能呈现出过程的完整性．公式的呈现，应用，带入等等环节，一个都不要少．

（3）对三角的解题方法，在教学中，要着重帮助学生理清思路、判断选择，优化解题．

**第19题**

【试题情境】

以生活中的射击情景问题为载体，考查学生对古典概型概率的理解和求值，用符号语言和数表语言来表达射手总得分X的分布列和数学期望．

【必备知识】

互斥事件、相互独立事件概率的计算，随机变量X的分布列和数学期望的求解．

【关键能力】

本题主要考查学生运用概率的有关知识，来解决生活中以射击为背景的概率型实际应用问题的能力．考查学生用符号语言和数表语言来表述数学问题的能力，以及分类讨论、求解运算的能力．

【学科素养】

通过对互斥事件、相互独立事件概念的理解和认识，初步形成分类和分步解决概率型数学实际问题的数学思想和解题方法．通过数学抽象完成从实际生活问题到数学建模的核心素养的形成过程．在概率求解的过程中，注重数学建模思想的渗透，关注学生逻辑思维能力的培养，提高学生发现问题、分析问题和解决问题的能力．在本题第二小问中，突出体现了用数学语言来表达数学问题，以及学生对数学运算能力、数据的分析和处理的能力．

【解题思路】

通过把所求事件分解成两个互斥事件，而每个互斥事件又同时分解成若干个相互独立事件，最后通过相互独立事件同时发生的概率公式，来计算出所求事件的概率．通过合理的分类和分步完成射手总得分X的分布列的呈现和数学期望的求解．

【教学建议】

（1）进一步强化对互斥事件、相互独立事件等数学概念的理解．能熟练运用相关的概率公式，来求解运算不同事件的概率；

（2）进一步完善数学文字语言、符号语言、图表语言的表达功能；

（3）进一步提升对数字的运算能力和数据的处理能力；

（4）进一步加强“概率型”实际应用问题的合理表述和规范作答．

**第20题**

【试题情境】

以四棱锥为载体，考查学生理解空间点、线、面的位置关系，用数学语言表述面面垂直和线面垂直的性质和判定．结合空间角的求法，突出综合法和向量法在立体几何中的应用．

【必备知识】

面面垂直的性质定理，线面垂直的判定定理，直线和平面所成的角和二面角

【关键能力】

本题主要考查学生运用直观感知、操作确认、推理论证等认识和探索空间图形的性质，建立空间概念，考查学生空间想象能力，逻辑推理能力和数学抽象素养．

【学科素养】

通过空间点、线、面之间位置关系的教学，培养学生空间想象能力，体现由直观想象到数学建模的核心素养的形成过程．本题在考查垂直关系的证明中，渗透数学建模的思想，培养学生逻辑推理的能力，培养学生发现问题和解决问题的能力．本题第二小问，也突出学生对数学运算能力和数据的分析、处理的能力

【解题思路】

（1）通过面面垂直的性质定理，得出线面垂直，由线面垂直得出线线垂直，准确找出二面角的平面角，从而通过判定定理证明出线面垂直

（2）法一：综合法

法二：坐标法

法三：等积法

【教学建议】

（1）进一步强化立体几何的概念教学，尤其是定理的完整性的叙述；

（2）立体几何要重视综合法的教学；

（3）进一步强化立体几何的规范性书写；

**第21题**

【试题情境】

1．本题第一问借助函数的图象，了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件；并且在已知二元一次等式的情境下求解基本不等式的最值．

2．本题第二问用集合语言和常用逻辑用语梳理、表达学过的相应数学内容．学会用三种语言（自然语言、图形语言、符号语言）表达数学研究对象，并能进行转换；并且利用分类讨论处理不同情形下的函数最值．

【必备知识】

导数概念及其意义、导数运算、导数在研究函数中的应用．

（1）导数概念及其意义

①通过实例分析，经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道导数是关于瞬时变化率的数学表达，体会导数的内涵与思想．

②体会极限思想．

③通过函数图象直观理解导数的几何意义．

（2）导数运算

①能根据导数定义求函数*y*=*c*，*y*=*x*，*y*=*x*2，*y*=*x*3，*y*=，*y*=的导数．

②能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则，求简单函数的导数；能求简单的复合函数（限于形如*f*（*ax*+*b*））的导数．

③会使用导数公式表．

（3）导数在研究函数中的应用

①结合实例，借助几何直观了解函数的单调性与导数的关系，能利用导数研究函数的单调性；对于多项式函数，能求不超过三次的多项式函数的单调区间．

②借助函数的图象，了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件；能利用导数求某些函数的极大值、极小值以及给定闭区间上不超过三次的多项式函数的最大值、最小值，体会导数与单调性、极值、最大（小）值的关系．

【关键能力】

能在情境中抽象出数学概念、命题、方法和体系，积累从具体到抽象的活动经验；养成在日常生活和实践中一般性思考问题的习惯，把握事物的本质，以简驭繁；运用数学抽象的思维方式思考并解决问题．

能掌握逻辑推理的基本形式，学会有逻辑地思考问题；能够在比较复杂的情境中把握事物之间的关联，把握事物发展的脉络；形成重论据、有条理、合乎逻辑的思维品质和理性精神，增强交流能力．

能进一步发展数学运算能力；有效借助运算方法解决实际问题；通过运算促进数学思维发展，形成规范化思考问题的品质，养成一丝不苟、严谨求实的科学精神．

【学科素养】

本题主要考查了数学抽象、逻辑推理、数学运算等学科核心素养．

1．数学抽象

数学抽象是指通过对数量关系与空间形式的抽象，得到数学研究对象的素养．主要包括：从数量与数量关系、图形与图形关系中抽象出数学概念及概念之间的关系，从事物的具体背景中抽象出一般规律和结构，并用数学语言予以表征．

数学抽象是数学的基本思想，是形成理性思维的重要基础，反映了数学的本质特征，贯穿在数学产生、发展、应用的过程中．数学抽象使得数学成为高度概括、表达准确、结论一般、有序多级的系统．

数学抽象主要表现为：获得数学概念和规则，提出数学命题和模型，形成数学方法与思想，认识数学结构与体系．

本题中的极值点、存在性等问题的处理与转化，都体现了数学抽象，运用数学抽象的思维方式思考并解决问题．

2．逻辑推理

逻辑推理是指从一些事实和命题出发，依据规则推出其他命题的素养．主要包括两类：一类是从特殊到一般的推理，推理形式主要有归纳、类比，一类是从一般到特殊的推理，推理形式主要有演绎．

逻辑推理是得到数学结论、构建数学体系的重要方式，是数学严谨性的基本保证，是人们在数学活动中进行交流的基本思维品质．

逻辑推理主要表现为：掌握推理基本形式和规则，发现问题和提出命题，探索和表述论证过程，理解命题体系，有逻辑地表达与交流．

3．数学运算

数学运算是指在明晰运算对象的基础上，依据运算法则解决数学问题的素养．主要包括：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，选择运算方法，设计运算程序，求得运算结果等．

数学运算是解决数学问题的基本手段．数学运算是演绎推理，是计算机解决问题的基础．

数学运算主要表现为：理解运算对象，掌握运算法则，探究运算思路，求得运算结果．

本题第一问中，通过构造零次得到最小值；第二问中，通过分类讨论解决问题．学生能进一步发展数学运算能力；有效借助运算方法解决实际问题；通过运算促进数学思维发展，形成规范化思考问题的品质，养成一丝不苟、严谨求实的科学精神．

【解题思路】

思路一：含参讨论，见参考答案；

思路二：分离变量．

第一问，满分五分，大部分同学都分为三分或者四分．

1．第一问，只有极少数同学对函数在处取得极值进行了检验，绝大部分同学都没有验证；

2．对基本不等式等号成立的条件没有写出来，或者部分计算有误．

3．第二问，大部分同学利用分类讨论来处理，存在问题如下：

（1）没有写出函数在上的最小值小于零；

（2）分类时标准不清，有的同学比较繁琐；

（3）计算上出现错误．

4．第二问，也有少部分同学利用分参思想处理．存在问题如下：

（1）分参时没有考虑符号问题；

（2）有解问题分不清楚是取函数的最大值还是最小值；

5．书写不规范，写得多，但是得分点不多．

【教学建议】

1．强调基础知识点的规范书写，比如说对极值的检验，基本不等式等号成立条件等的书写规范问题；

2．语言的转化能力要加强．比如说，函数在区间上的最小值小于零，这句话很多同学没有写出来；

3．要加强常规方法，通性通法的训练，比如分类讨论、含参问题当中恒成立问题，存在性问题等；

4．计算错误很多．在平时训练当中，要加强相关方面的能力训练．

**第22题**

【试题情境】

以直线与双曲线的位置关系为背景，引导学生关注双曲线的几何性质，学会用变量分析动态问题．

【必备知识】

双曲线的几何性质；向量数量积；斜率公式；用方程组刻画直线与双曲线相交的位置关系；韦达定理；多项式恒成立．

【关键能力】

本题主要考查学生对双曲线的几何性质、用坐标刻画解析几何中的角和斜率，将探究型定值问题转化为多项式恒成立问题的理解及应用能力．

【学科素养】

本题综合考查了学生数学抽象、逻辑推理、数学建模、数学运算等数学学科核心素养．本题要求学生会选用恰当的模型通过数学抽象来刻画目标角以及斜率和，会进行比较复杂的代数运算和逻辑推理，考查了学生的数学综合能力．

【解题思路】

（1）解得；

（2）①说清楚直角，说清楚钝角，交代结论时取最小值．需要说明的是，说明直角和钝角的方法可以用余弦也可以用正切，但是直接判断时取最小值或者利用其他想当然的依据判断结论不得分．

②联立方程写出正确的完整的韦达定理，只写对一个式子不得分．本次阅卷中，本着鼓励学生的想法，对于，且本次未扣分，事实上是必须要写的，这是韦达定理的前提，也是研究曲线交点与方程组解之间关系的保证．根据多项式恒成立的得出三元方程组，最后的答案一组，或者仅两个点坐标对得1分．需要说明的是，未化简为多项式，而是直接通分，并采用对应系数成比例列式求解的方法，本次未扣分，但其中对于分母取到0的情况事实上是必须讨论的．

【教学建议】

（1）关注学生对基本量方程的建立与求解；

（2）关注学生解答解析几何题时的分析意识与选择能力的培养，切忌机械化惯性处理．比如点参与直线参的比较与选择，比如对目标函数的选择与定性分析等等；

（3）关注与提高学生处理多个字母的代数运算能力；

（4）提高学生克服困难的信心，加强学生对题型识别与转化的能力，比如本题最后一问就是椭圆中的一类常见的定值定点问题的变式．