

数学试题

注意事项：

1. 本试卷共 6 页，全卷满分 120 分。考试时间为 120 分钟。考生应将答案全部填写在答题卡相应的位置上，写在本试卷上无效。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。考试时不允许使用计算器。
2. 答题前，考生务必将自己的姓名、考试证号填写在试卷上，并填涂好答题卡上的考生信息。
3. 做图必须使用 2B 铅笔作答，并请加黑加粗，描写清楚。

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分。在每小题所给出的四个选项中，只有一项是正确的）

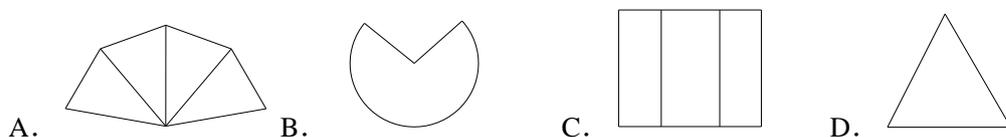
1. -4 的绝对值是（ ▲ ）

- A. -4 B. 4 C. ± 4 D. $\frac{1}{4}$

2. 李明看中一件原价 a 元的大衣，现在 4 折出售，降价后的大衣多少元？（ ▲ ）

- A. $4a$ B. $a-4$ C. $\frac{2}{5}a$ D. $\frac{3}{5}a$

3. 下列图形中，哪一个是棱锥的侧面展开图？（ ▲ ）



4. 在 2020 年新冠肺炎疫情期间的相关调查中，最适合采用普查方式的是（ ▲ ）

- A. 对全国生产的 N95 型口罩质量情况的调查
B. 对全国医务工作人员心理健康状况的调查
C. 对全国中小学生视力情况的调查
D. 对全国每日新增确诊病例的调查

5. 一个三阶魔方的体积约为 176cm^3 ，估计它的棱长的大小在（ ▲ ）

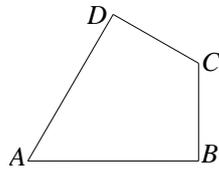
- A. 3cm 与 4cm 之间 B. 4cm 与 5cm 之间 C. 5cm 与 6cm 之间 D. 6cm 与 7cm 之间

6. 下列命题①对顶角相等；②若 $a=b$ ，则 $|a|=|b|$ ；③直径是弦；④无限小数是无理数。它们的逆命题是真命题的个数是（ ▲ ）

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

7. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=AD=6$, $\angle A=60^\circ$, $\angle B=90^\circ$, $\angle C=120^\circ$. 能够将四边形 $ABCD$ 完全覆盖的最小圆形纸片的直径为 (▲)

- A. 12 B. 7 C. 6 D. $4\sqrt{3}$



(第 7 题)

8. 在平面直角坐标系中, 点 $A(-1, 0)$, 点 P 是平面直角坐标系内一点, 线段 PA 与 x 轴正方向的夹角为 θ , 点 P 的横坐标是 $3\cos\theta - 1$, 当 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ 时, 点 P 经过的路径长为 (▲)

- A. 3π B. $3\sqrt{3}$ C. $\frac{3}{2}\pi$ D. $3\sqrt{2}$

二、填空题 (本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分. 不需写出解答过程, 请把答案直接填写在答题卡相应位置上)

9. 化简: $\sqrt{12} + \sqrt{3} =$ ▲ .

10. 要使分式 $\frac{3}{x-2}$ 有意义, 则实数 x 的取值范围是 ▲ .

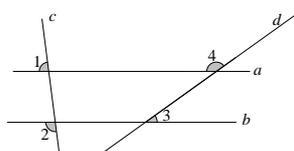
11. 分解因式: $-x^2 + 2x - 1 =$ ▲ .

12. 常州地铁 1 号线呈南北走向, 北起新北区森林公园站, 途经天宁区, 南至武进区南夏墅站, 全长大约 34240m, 则数据 34240 用科学记数法表示为 ▲ .

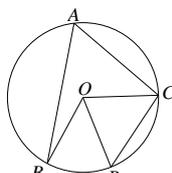
13. 平面直角坐标系中, 点 $P(12, 5)$ 关于 y 轴对称的点的坐标是 ▲ .

14. 已知圆锥的母线长为 4cm, 侧面积是 $12\pi\text{cm}^2$, 则圆锥的底面圆半径为 ▲ cm.

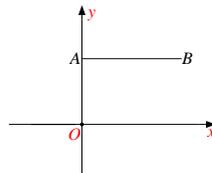
15. 如图, 已知直线 a, b 被直线 c, d 所截, $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补, $\angle 4=4\angle 3$, 则 $\angle 3=$ ▲ $^\circ$.



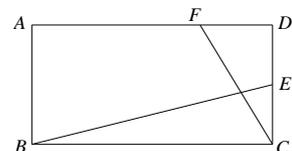
(第 15 题)



(第 16 题)



(第 17 题)



(第 18 题)

17. 扫地机器人能够自主移动并作出反应, 是因为它发射红外信号反射回接收器, 机器人在打扫房间时, 若碰到障碍物则发起警报. 如图, 若某一房间内 A, B 两点之间有障碍物, 现将 A, B 两点放置于平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(0, 4)$, 点 $B(6, 4)$, 扫地机器人沿抛物线 $y = ax^2 - 4ax - 5a$ 运动. 若扫地机器人在运动过程中只触发一次报警, 则 a 的取值范围是 ▲ .

18. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=8$, 点 E 为 CD 的中点, 点 F 在直线 AD 上运动, 连接 BE, CF , 当 $\angle DCF=2\angle CBE$ 时, 线段 AF 的长为 ▲ .

三、解答题（本大题共 10 小题，共 84 分。请在答题卡指定区域内作答，如无特殊说明，解答应写出文字说明、演算步骤或推理过程）

19.（本题满分 6 分）先化简，再求值 $(x-1)(x+1) - x(x-2)$ ，其中 $x = -\frac{1}{2}$ 。

20.（本题满分 8 分）解方程和不等式组：

$$(1) \frac{x}{x-1} = 2 - \frac{3}{1-x};$$

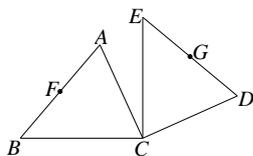
$$(2) \begin{cases} 2(x+1) > 6, \\ x+7 \geq 3x. \end{cases}$$

21.（本题满分 8 分）

如图，把 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得 $\triangle DEC$ ，点 F 、 G 分别是 AB 、 DE 的中点。

(1) 连接 CF 、 CG ，则 CF 与 CG 的位置关系是 ▲ ；

(2) 连接 FG ，判断 $\triangle CFG$ 的形状，并证明你的结论。



(第 21 题)

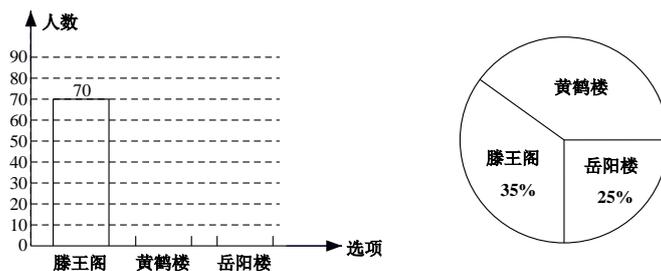
22.（本题满分 8 分）

江西南昌滕王阁、湖北武汉黄鹤楼、湖南岳阳岳阳楼，并称为江南三大名楼。王勃所作的《滕王阁序》，崔颢所作的《黄鹤楼》，范仲淹所作的《岳阳楼记》等文人雅士留下的不朽诗篇，令江南三大名楼享誉千海内外。文学社成员在校内对“你最喜欢的江南三大名楼”进行了抽样调查，并根据调查结果绘制成如下统计图。

(1) 本次抽样调查的样本容量是 ▲ ；

(2) 补全条形统计图；

(3) 该校共有 3000 名学生，请根据统计结果估计该校最喜欢黄鹤楼的学生人数。



(第 22 题)

23. (本题满分 8 分)

常州市对垃圾分类并未采取干垃圾、湿垃圾等垃圾分类的方式，而是结合本市具体情况，对生活垃圾按照规定实施分类投放。如图，在居民小区、单位，按照可回收物、有害垃圾、其他垃圾三类进行投放。假设 A 类指可回收物，B 类指有害垃圾，C 类指其他垃圾，住在同一小区的甲、乙两人下楼时各投放一袋垃圾。



(第 23 题)

- (1) 甲投放的垃圾恰好是 A 类的概率是 ▲ ；
 (2) 求甲、乙两人投放的垃圾是同种类的概率。

24. (本题满分 8 分)

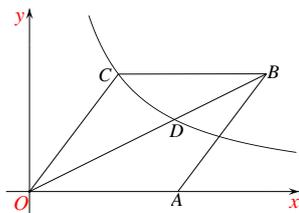
某商场销售一批裤子，平均每天可售出 60 条，每条盈利 35 元。为了积极响应常州“慈善一日捐”活动，商场决定降价义卖，义卖所得善款全部捐赠。经市场调研，裤子的单价每降 1 元，商场平均每天可多售出 4 条。如果降价后商场销售这批裤子每天盈利 2500 元，那么裤子的单价降了多少元？

25. (本题满分 8 分)

在菱形 ABCD 中，OA=5， $\sin \angle AOC = \frac{4}{5}$ ，点 A 在 x 轴上，点 D 在对角线 OB 上，反比例函数

$y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像经过点 C、D。

- (1) 求 k 的值；
 (2) 求点 D 的坐标。



(第 25 题)

26. (本题满分 10 分)

【阅读】

通过在正方形网格纸中构造图形，可以帮助我们形象直观地解决一些问题，体现数形结合的重要思想方法.

【理解】

(1) 在图 26-1 中，请尝试用构造图形的方法比较大小： $\sqrt{13} + \sqrt{5}$ ▲ $4\sqrt{2}$ (填“<”，“=”，“>”)，请说明理由；

(2) $\sqrt{a^2 + 4}$ ， $\sqrt{a^2 + 16}$ ， 6 ($a > 0$) 是三角形的三条边长，在图 26-2 中，请尝试用构造图形的方法求这个三角形的面积，请作必要说明；

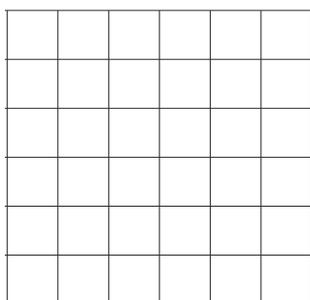


图 26-1

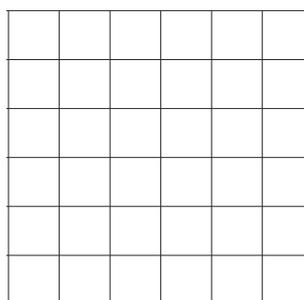


图 26-2

【运用】

(3) 在图 26-3 中，请尝试用构造图形的方法求代数式 $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(8-x)^2 + 9}$ 的最小值，请说明理由；

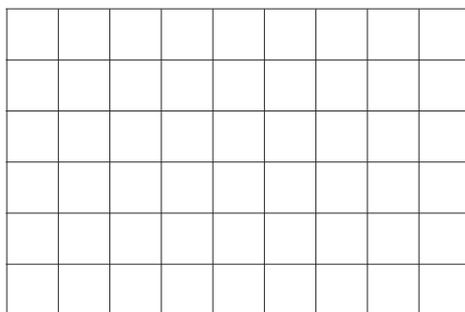


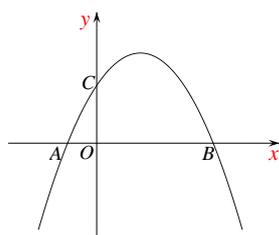
图 26-3

(4) 代数式 $\sqrt{y^2 + 18y + 181} - \sqrt{y^2 + 1}$ 的最大值为 ▲.

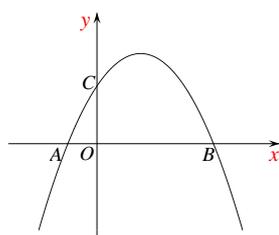
27. (本题满分 10 分)

如图, 二次函数 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + c$ 的图像与 x 轴相交于点 A 、 B , 与 y 轴相交于点 C , 点 B 的坐标为 $(4, 0)$, 点 P 在抛物线上.

- (1) $c = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$;
- (2) 连接 PB 、 PC , 否存在这样的点 P , 使得 $S_{\triangle BPC} = 2S_{\triangle BOC}$, 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由;
- (3) 若以 PB 为直径的圆与直线 BC 有另一个交点 Q , 且满足 $\triangle PBQ$ 与 $\triangle AOC$ 相似, 直接写出点 P 的坐标.



(第 27 题)



(备用图)

28. (本题满分 10 分)

如果三角形有一边上的中线长恰好等于这边的长, 那么称这个三角形为“好玩三角形”, 称这边的中线为“好玩线”.

- (1) 如图 28-1, 以线段 BC 为三角形的一边, 请用直尺和圆规画一个 $\triangle ABC$, 且 $\triangle ABC$ 是“好玩三角形” (保留作图痕迹, 不写作法);
- (2) 如图 28-2, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC < AC < AB$, $\angle C = 90^\circ$, 当 $\triangle ABC$ 是“好玩三角形”时, 求 $BC : AC : AB$ 的值;
- (3) 如图 28-3, 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(-3, 0)$ 、 $B(3, 0)$, $M(-5, 0)$, 点 D 是以点 M 为圆心 4 为半径的圆上一点, 且点 D 为 AC 的中点.

①请描述点 C 的轨迹: $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$;

②若点 D 不在 x 轴上, 且 $\triangle ABC$ 中有两条“好玩线”, 求出此时 $\triangle ABC$ 的面积.



图 28-1

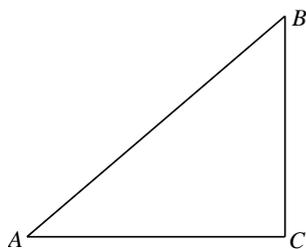


图 28-2

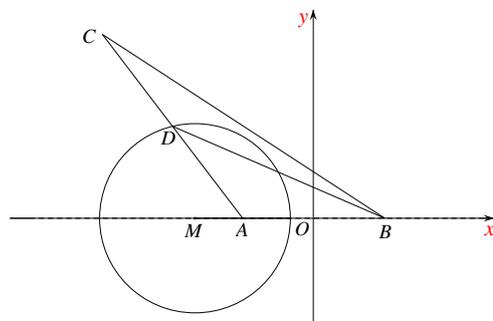


图 28-3

(第 28 题)

常州市二〇二〇年初中学业水平模拟考试

数学试题参考答案与评分标准

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	A	D	C	B	D	A

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

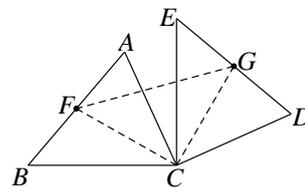
9. $3\sqrt{3}$ 10. $x \neq 2$ 11. $-(x-1)^2$ 12. 3.424×10^4 13. $(-12, 5)$
 14. 3 15. 36 16. 55 17. $a < -\frac{4}{5}$ 或 $a = -\frac{4}{9}$ 或 $a \geq \frac{4}{7}$ 18. $\frac{88}{15}$ 或 $\frac{152}{15}$

三、解答题（本大题共 10 小题，第 19 题 8 分，第 20 题 6 分，第 21~25 题每题 8 分，第 26~28 题每题 10 分，共 84 分）

19. 解：原式 $= x^2 - 1 - (x^2 - 2x)$ 2 分
 $= x^2 - 1 - x^2 + 2x$ 3 分
 $= 2x - 1$ 4 分
 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时，原式 $= 2 \times (-\frac{1}{2}) - 1 = -2$ 6 分
20. (1) 解：方程两边同时乘以 $x-1$ ，得 1 分
 $x = 2(x-1) + 3$ 2 分
 解得 $x = -1$ 3 分
 检验：当 $x = -1$ 时， $x-1 \neq 0$.
 $\therefore x = -1$ 是原方程的解. 4 分
- (2) 解：由 (1) 得 $x > 2$ 5 分
 由 (2) 得 $x \leq \frac{7}{2}$ 7 分
 \therefore 原不等式组的解集是 $2 < x \leq \frac{7}{2}$ 8 分

21. (1) 垂直（互相垂直或 $CF \perp CG$ 均可）. 2 分
 (2) $\triangle CFG$ 是等腰直角三角形. 3 分

证明： \because 把 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得 $\triangle DEC$ ，
 $\therefore \angle BCE = 90^\circ$ ， $\triangle ABC \cong \triangle DEC$.
 $\therefore BA = ED$ ， $BC = EC$ ， $\angle B = \angle E$ 4 分
 \because 点 F 、 G 分别是 AB 、 DE 的中点，
 $\therefore BF = \frac{1}{2}BA$ ， $EG = \frac{1}{2}ED$.
 $\therefore BF = EG$ 5 分



(第 21 题)

在 $\triangle BCF$ 和 $\triangle CEG$ 中，

$$\begin{cases} BC = EC, \\ \angle B = \angle E, \\ BF = EG, \end{cases}$$
 $\therefore \triangle BCF \cong \triangle CEG$ 6 分
 $\therefore CF = CG$ ， $\angle BCF = \angle ECG$.
 $\therefore \angle BCF + \angle FCE = \angle ECG + \angle FCE$ 7 分

即 $\angle BCE = \angle FCG$.
 $\therefore \angle FCG = 90^\circ$.
 $\because CF = CG, \angle FCG = 90^\circ$,
 $\therefore \triangle CFG$ 是等腰直角三角形.8分

22. (1) 200;2分
 (2) 画图略 (黄鹤楼 80, 岳阳楼 50);6分
 (3) 解: $3000 \times \frac{80}{200} = 1200$ (人).7分

答: 估计该校最喜欢黄鹤楼的学生人数有 1200 人.8分

23. (1) $\frac{1}{3}$;2分

(2) 解: 用表格列出所有可能出现的结果:

结果 甲 \ 乙	A	B	C
A	(A, A)	(A, B)	(A, C)
B	(B, A)	(B, B)	(B, C)
C	(C, A)	(C, B)	(C, C)

.....4分

由表格可知, 共有 9 种可能出现的结果, 并且它们都是等可能的. “甲、乙两人投放的垃圾是同种类” 记为事件 M , 它的发生有 3 种可能,6分

\therefore 事件 M 发生的概率 $P(M) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$7分

即甲、乙两人投放的垃圾是同种类的概率是 $\frac{1}{3}$8分

24. 解: 设裤子的单价降了 x 元.1分

根据题意, 得 $(35-x)(60+4x) = 2500$3分

整理, 得 $x^2 - 20x + 100 = 0$5分

即 $(x-10)^2 = 0$6分

解这个方程, 得 $x_1 = x_2 = 10$7分

答: 裤子的单价降了 10 元.8分

25. 解: (1) 过点 C 作 $CE \perp OA$, 垂足为点 E , 则 $\angle CEO = 90^\circ$.

\because 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore OA = OC = BC$.

$\because OA = 5$,

$\therefore OC = BC = 5$1分

在 $Rt\triangle CEO$ 中, $\angle CEO = 90^\circ$,

$CE = OC \cdot \sin \angle AOC = 5 \times \frac{4}{5} = 4$,2分

$OE = \sqrt{OC^2 - CE^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$3分

$\therefore C(3, 4)$.

\because 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像经过点 C ,

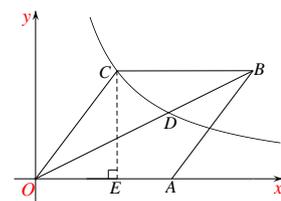
$\therefore k = 3 \times 4 = 12$.

即 k 的值为 12.4分

- (2) \because 由 (1) 得, $C(3, 4), BC = 5$,

$\therefore B(8, 4)$5分

\therefore 直线 OB 的表达式是 $y = \frac{1}{2}x$6分



(第 25 题)

∵点 D 在对角线 OB 上,

∴设点 $D(a, \frac{1}{2}a)$.

∵反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像经过点 D ,

∴ $a \cdot \frac{1}{2}a = 12$.

∴ $a = 2\sqrt{6}$ 或 $a = -2\sqrt{6}$ (舍).7分

∴点 D 的坐标为 $(2\sqrt{6}, \sqrt{6})$8分

26. 解: (1) >.1分

在图 26-1 中, $AB = \sqrt{13}$, $BC = \sqrt{5}$, $AC = 4\sqrt{2}$2分

∵在 $\triangle ABC$ 中, $AB + BC > AC$,3分

∴ $\sqrt{13} + \sqrt{5} > 4\sqrt{2}$.

(2) 在图 26-2 中, 点 G 在线段 EF 上, 且 $EG = 2$, 点 D 为点 G 正上方任意一点,

则 $DE = \sqrt{a^2 + 4}$, $DF = \sqrt{a^2 + 16}$, $EF = 6$4分

∴ $S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2}EF \cdot AG = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot a = 3a$.

∴这个三角形的面积是 $3a$5分

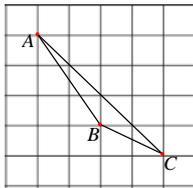


图26-1

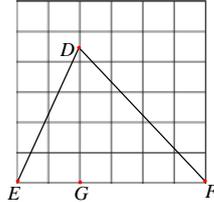


图26-2

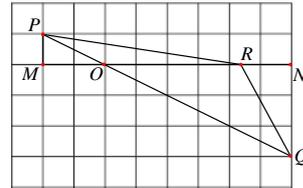


图26-3

(3) 在图 26-3 中, $MN = 8$, $PM = 1$, $QN = 3$, 点 R 是线段 MN 上任意一点,

则 $PR = \sqrt{x^2 + 1}$, $QR = \sqrt{(8-x)^2 + 9}$, $PQ = 4\sqrt{5}$6分

线段 MN 与线段 PQ 相交于点 O ,

则 $PR + QR \geq PQ$, 当且仅当点 R 与点 O 重合时等号成立.7分

∴ $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(8-x)^2 + 9} \geq 4\sqrt{5}$.

即代数式 $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(8-x)^2 + 9}$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$8分

(4) $9\sqrt{2}$10分

27. 解: (1) 2.2分

(2) 如图 (1), 过点 O 作 $OD \perp BC$, 垂足为点 D ; 过点 P 作 $PE \perp BC$, 垂足为点 E ; 过点 P 作 $PF \perp x$ 轴与直线 BC 相交于点 F .

在 $\triangle ODC$ 和 $\triangle PEF$ 中,

∵ $\angle ODC = \angle PEF$, $\angle OCD = \angle PFE$,

∴ $\triangle ODC \sim \triangle PEF$.

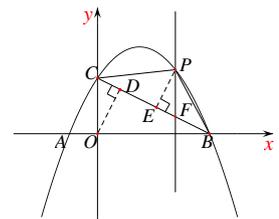
∴ $\frac{OD}{PE} = \frac{OC}{PF}$.

∵ $S_{\triangle BPC} = 2S_{\triangle BOC}$,

∴ $PE = 2OD$.

∴ $PF = 2OC$3分

∴ $B(4, 0)$, $C(0, 2)$,



(第 27 题图 1)

∴ 直线 BC 的表达式是 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 4 分

设点 $P(m, -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 2)$, 则点 $F(m, -\frac{1}{2}m + 2)$.

∴ $PF = \left| -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 2 - (-\frac{1}{2}m + 2) \right| = \left| -\frac{1}{2}m^2 + 2m \right| = 4$, 如图 (2).

① $-\frac{1}{2}m^2 + 2m = 4$ 时, 原方程无解.

∴ 此情况不成立. 5 分

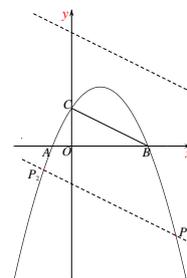
② $-\frac{1}{2}m^2 + 2m = -4$ 时,

$$m_1 = 2 + 2\sqrt{3}, m_2 = 2 - 2\sqrt{3}.$$

∴ $P_1(2 + 2\sqrt{3}, -3 - \sqrt{3}), P_2(2 - 2\sqrt{3}, -3 + \sqrt{3})$ 6 分

综上所述, $P_1(2 + 2\sqrt{3}, -3 - \sqrt{3}), P_2(2 - 2\sqrt{3}, -3 + \sqrt{3})$ 使得 $S_{\triangle BPC} = 2S_{\triangle BOC}$ 7 分

(3) $P_1(-1, 0), P_2(\frac{5}{3}, \frac{28}{9}), P_3(-\frac{5}{2}, -\frac{39}{8})$ 10 分



(第 27 题图 2)

28. 解: (1) 在图 28-1 中, $\triangle ABC$ 是“好玩三角形”.

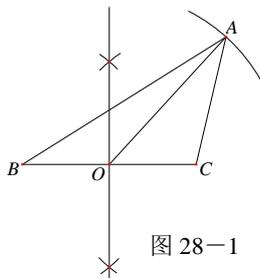


图 28-1

..... 1 分

(2) 由题意可得, 在图 28-2 中, 只能是 AC 边上的中线 BD 等于 AC.

设 $AC = BD = 2x$, 则 $CD = x$.

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $\angle C = 90^\circ$,

$$\therefore BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3}x. \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\angle C = 90^\circ$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(2x)^2 + (\sqrt{3}x)^2} = \sqrt{7}x. \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore BC : AC : AB = \sqrt{3} : 2 : \sqrt{7}.$$

即 $BC : AC : AB$ 的值是 $\sqrt{3} : 2 : \sqrt{7}$ 4 分

(3) ① 以 $(-7, 0)$ 为圆心, 8 为半径的圆. 5 分

② 在图 28-3-1 中, 连接 DM.

$$\therefore \frac{AM}{DM} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{DM}{BM} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AM}{DM} = \frac{DM}{BM}.$$

在 $\triangle AMD$ 和 $\triangle DMB$ 中,

$$\therefore \frac{AM}{DM} = \frac{DM}{BM}, \quad \angle AMD = \angle DMB,$$

∴ $\triangle AMD \sim \triangle DMB$.

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{DM}{BM} = \frac{1}{2}.$$

∴ 点 D 为 AC 的中点,

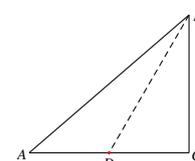


图 28-2

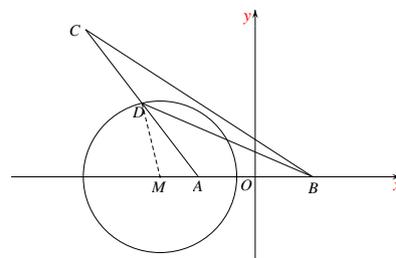


图 28-3-1

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AC.$$

$$\therefore AC = BD.$$

$\therefore \triangle ABC$ 是“好玩三角形”，且 BD 是“好玩线”。.....7分

设点 $C(m, n)$, $N(-7, 0)$, 在图 28-3-2 中, 连接 CN .

\therefore 点 D 为 AC 的中点, 点 M 为 AN 的中点,

$\therefore DM$ 是 $\triangle ACN$ 的中位线.

$$\therefore DM = \frac{1}{2}CN.$$

$$\therefore DM = 4,$$

$$\therefore CN = 8.$$

i. 若 CO 是“好玩线”，在图 28-3-3 中, 则 $CO = AB = 6$.

$$\therefore \begin{cases} m^2 + n^2 = 36, \\ (m+7)^2 + n^2 = 64. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} m_1 = -\frac{3}{2}, \\ n_1 = -\frac{3}{2}\sqrt{15}. \end{cases}, \quad \begin{cases} m_1 = -\frac{3}{2}, \\ n_1 = \frac{3}{2}\sqrt{15}. \end{cases}$$

$$\therefore C_1(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{15}), C_2(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{15}).$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot |n| = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{3}{2}\sqrt{15} = \frac{9}{2}\sqrt{15}. \quad \dots\dots 8 \text{分}$$

在图 28-3-4 中, 作 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中线 AE .

ii. 若 AE 是“好玩线”，则 $AE = BC$.

$$\text{法一: } \begin{cases} (\frac{m+3}{2} + 3)^2 + (\frac{n}{2})^2 = (m-3)^2 + n^2, \\ (m+7)^2 + n^2 = 64. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} m_3 = 0, \\ n_3 = -\sqrt{15}. \end{cases}, \quad \begin{cases} m_4 = 0, \\ n_4 = \sqrt{15}. \end{cases}$$

$$\therefore C_3(0, -\sqrt{15}), C_4(0, \sqrt{15}).$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot |n| = \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{15} = 3\sqrt{15}.$$

法二: 在图 28-3-5 中, 作 $\triangle ABC$ 关于 y 轴对称的 $\triangle ABC'$, 作 $\triangle ABC'$ 的中线 AE .

$\therefore \triangle ABC$ 是“好玩三角形”，且 BD 是“好玩线”，

\therefore 由对称性, $\triangle ABC'$ 是“好玩三角形”，且 AE 是 $\triangle ABC'$ 的“好玩线”.

\therefore 点 C 横坐标的取值范围是 $-15 \leq x_c \leq 1$,

\therefore 在 y 轴上一定有某个位置, 点 C 与点 C' 重合,

如图 28-3-4, 此时 AE 也是 $\triangle ABC$ 的“好玩线”.

\therefore 若 AE 是“好玩线”，此时点 C 一定在 y 轴上.

$$\therefore |n| = \sqrt{CN^2 - NO^2} = \sqrt{8^2 - 7^2} = \sqrt{15}.$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot |n| = \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{15} = 3\sqrt{15}. \quad \dots\dots 9 \text{分}$$

综上所述, 当 $\triangle ABC$ 中有两条“好玩线”时, $\triangle ABC$ 的面积是 $\frac{9}{2}\sqrt{15}$ 或 $3\sqrt{15}$10分

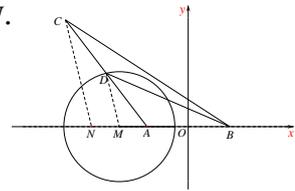


图 28-3-2

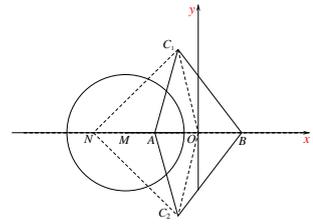


图 28-3-3

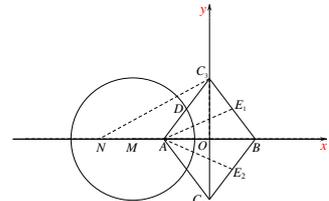


图 28-3-4

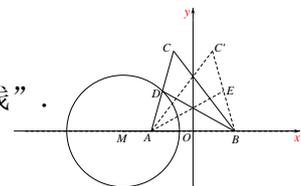


图 28-3-5

九年级数学命题细目表

考试内容		分值 (分)		百分比 (%)	
数 与 代 数	1. 有理数	2	54	1.7	45
	2. 实数	4		3.3	
	3. 代数式	8		6.7	
	4. 整式与分式	6		5	
	5. 方程与方程组	12		10	
	6. 不等式与不等式组	4		3.3	
	7. 函数	0		0	
	8. 一次函数	6		5	
	9. 反比例函数	4		3.3	
	10. 二次函数	8		6.7	
图 形 与 几 何	11. 点、线、面、角	2	48	1.7	40
	12. 相交线与平行线	2		1.7	
	13. 三角形	13		10.8	
	14. 四边形	4		3.3	
	15. 圆	5		4.2	
	16. 尺规作图	1		0.8	
	17. 定义、命题、定理	2		1.7	
	18. 图形的轴对称	4		3.3	
	19. 图形的平移	0		0	
	20. 图形的旋转	2		1.7	
	21. 图形的相似	7		5.8	
	22. 视图与投影	2		1.7	
	23. 图形与坐标	4		3.3	
统计与 概率	24. 统计	10	18	8.3	15
	25. 概率	8		6.7	
累计		120		100	

考点 题号	知识点描述	章节	分值	题目 能级	课标 要求
1	绝对值的意义	有理数	2	B	掌握
2	分析具体问题中的简单数量关系，并用代数式表示	代数式	2	B	掌握
3	几何体的侧面展开图	视图与投影	2	A	了解
4	利用统计的有关知识解决一些简单的实际问题 (普查和抽样调查的区别)	统计	2	C	掌握
5	用有理数估计无理数的大致范围	实数	2	C	掌握
6	逆命题的概念、识别两个互逆的命题， 原命题成立其逆命题不一定成立	定义、命题、 定理	2	B	理解
7	多边形内角和公式、圆周角定理的推论、 全等三角形的判定定理、 30° ， 60° 的三角函数值	四边形、圆、 三角形、图 形的相似	2	C	掌握
8	用锐角三角函数解决实际问题、 根据坐标描出点的位置、圆的概念	图形的相 似、图形与 坐标、圆	2	C	掌握
9	最简二次根式的概念及其加法运算法则	实数	2	A	了解
10	分式的概念	整式与分式	2	A	了解
11	提公因式法、公式法进行因式分解	整式与分式	2	C	掌握
12	用科学记数法表示数	整式与分式	2	B	理解
13	在直角坐标系中，以坐标轴为对称轴的轴对称 前后对应顶点坐标之间的关系	图形与坐标	2	B	理解
14	圆锥的侧面积	圆	2	B	理解
15	补角的概念、对顶角相等、 平行线的判定定理、平行线的性质定理	相交线与 平行线	2	C	掌握
16	圆周角定理、等腰三角形的性质定理、 三角形的内角和定理	圆、三角形	2	C	掌握
17	用二次函数解决问题	二次函数	2	D	运用
18	等腰三角形的判定定理、勾股定理、 利用图形的相似解决一些实际问题	三角形、 图形的相似	2	C	掌握
19	求代数式的值	代数式	6	C	掌握
20 (1)	解可化为一元一次方程的分式方程	方程与 方程组	4	C	掌握
20 (2)	用数轴确定由两个一元一次不等式组成的 不等式组的解集	不等式与 不等式组	4	B	理解
21 (1)	一个图形和它经过旋转后所得到的图形中， 两组对应点分别与旋转中心连线所成的角相等	图形的旋转	2	B	掌握
21 (2)	全等三角形的概念、三角形全等的判定定理	三角形	6	C	掌握
22 (1)	样本容量的概念	统计	2	A	了解
22 (2)	画频数分布直方图，解决简单的实际问题	统计	4	C	掌握
22 (3)	根据统计结果作出合理的判断和预测	统计	2	C	掌握

考点 题号	知识点描述	章节	分值	题目 能级	课标 要求
23 (1)	概率的意义	概率	2	A	了解
23 (2)	通过列表、画树状图等方法 计算简单随机事件发生的概率	概率	6	C	掌握
24	根据具体问题中的数量关系， 列出一元二次方程， 解决实际问题	方程与 方程组	8	C	运用
25 (1)	菱形的性质定理、用锐角三角函数解直角三角形、勾 股定理、由点的位置写出它的坐标、 确定反比例函数表达式	四边形、图 形的相似、 三角形、图 形与坐标、 反比例函数	4	C	掌握
25 (2)	用一次函数和反比例函数解决问题	一次函数、 反比例函数	4	C	运用
26 (1)	三角形的三边关系、勾股定理	三角形	3	C	掌握
26 (2)	勾股定理、三角形的面积	三角形	2	C	掌握
26 (3)	勾股定理、两点之间线段最短、 画出线段关于直线的轴对称图形	三角形、点 线面角、图 形的轴对称	3	C	掌握
26 (4)	乘法公式、勾股定理、两点之间线段最短	整式与分 式、三角形、 点线面角	2	C	掌握
27 (1)	确定二次函数表达式	二次函数	2	B	掌握
27 (2)	用一次函数解决问题、用二次函数解决问题	一次函数、 二次函数	5	C	运用
27 (3)	圆周角定理的推论、相似三角形的性质、 用一次函数解决问题、用二次函数解决问题	圆、三角形、 一次函数、 二次函数	3	D	运用
28 (1)	作线段的垂直平分线、利用基本作图作三角形	尺规作图	1	C	掌握
28 (2)	三角形中线的概念、用勾股定理解决问题	三角形	3	C	掌握
28 (3) ①	三角形中位线定理、圆的概念	三角形、圆	1	C	掌握
28 (3) ②	用图形的相似解决问题、用勾股定理解决问题、 轴对称的性质	图形的相似、 三角形、图形 的轴对称	5	C	掌握

原创和改编试题立意说明

一、原创

1. -4 的绝对值是 (▲)

- A. -4 B. 4 C. ± 4 D. $\frac{1}{4}$

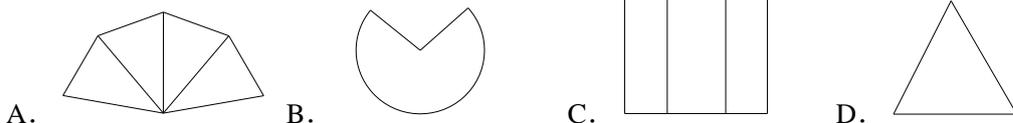
【命题立意说明】：本题主要考查了绝对值的意义，强调绝对值的非负性。绝对值规律总结：一个正数的绝对值是它本身；一个负数的绝对值是它的相反数； 0 的绝对值是 0 。选项 C 有一定的迷惑性，有同学可能会与“互为相反数的绝对值相等”发生混淆。

2. 李明看中一件原价 a 元的大衣，现在 4 折出售，降价后的大衣多少元？ (▲)

- A. $4a$ B. $a-4$ C. $\frac{2}{5}a$ D. $\frac{3}{5}a$

【命题立意说明】：本题主要考查分析具体问题中的简单数量关系，并用代数式表示。体现了将实际问题抽象为数学模型的过程，同时对折扣问题如何运用恰当的分数或者百分数表示，选项 A 有一定的迷惑性。培养学生用数学眼光发现世界，用数学思维思考世界，用数学语言表达世界的的能力。

3. 下列图形中，哪一个是棱锥的侧面展开图？ (▲)



【命题立意说明】：本题主要考查几何体的侧面展开图，常见立体图形的侧面展开图和侧面特征的准确把握是解决此类问题的关键。棱锥侧面都是三角形，选项 D 有一定的迷惑性，有学生可能在没审清题意的前提下，误以为选择棱锥侧面的形状。题目本身不难，考查学生由立体图形展开为平面图形的识图能力。

4. 在 2020 年新冠肺炎疫情期间的相关调查中，最适合采用普查方式的是 (▲)

- A. 对全国生产的 N95 型口罩质量情况的调查
B. 对全国医务工作人员心理健康状况的调查
C. 对全国中小学生视力情况的调查
D. 对全国每日新增确诊病例的调查

【命题立意说明】：本题主要考查抽样调查和全面调查的区别，反映学生对普查与抽样调查的理解能力以及在实际生活中的应用能力。选择普查还是抽样调查要根据所要考查的对象特征灵活选用，一般来说，对于具有破坏性的调查(如选项 A)、无法进行普查、普查的意义或价值不大(如选项 B、C)，应选择抽样调查，对于精确度要求高的调查，事关重大的(如选项 D)调查往往选用普查。本题以 2020 年全国新冠肺炎疫情重大事件为背景，结合社会生活中人文性的题材，四个选项紧扣社会关心的热点问题，发挥试题的育人功能。

5. 一个三阶魔方的体积约为 176cm^3 ，估计它的棱长的大小在 (▲)

- A. 3cm 与 4cm 之间 B. 4cm 与 5cm 之间 C. 5cm 与 6cm 之间 D. 6cm 与 7cm 之间

【命题立意说明】：本题主要考查用有理数估计无理数的大致范围，通常用夹逼法求得无理数的范围。本题将立方根的估算问题放在学生熟悉的三阶魔方背景中，学生首先将生活中的三阶魔方抽象为数学中的立方体，再通过立方体的体积探求棱长，让学生感受到数学与生活的联系。

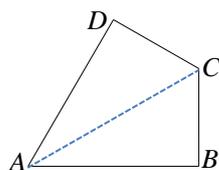
6. 下列命题①对顶角相等；②若 $a=b$ ，则 $|a|=|b|$ ；③直径是弦；④ 无限小数是无理数. 它们的逆命题是真命题的个数是 (▲)

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

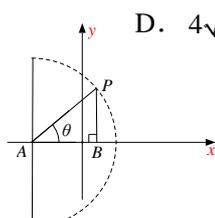
【命题立意说明】：本题主要考查将原命题转化为它的逆命题，对逆命题的真假进行判断，正确的命题叫真命题，错误的命题叫做假命题. 本题选项分别来源于相交线与平行线，有理数，圆和实数等知识点概念的考查，既有数与代数的内容也有图形与几何的内容，体现知识点的广泛性和易错点的集中性. 学生可能会忽视“逆命题”这个关键信息而产生错误.

7. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB=AD=6$ ， $\angle A=60^\circ$ ； $\angle B=90^\circ$ ； $\angle C=120^\circ$. 能够将四边形 $ABCD$ 完全覆盖的最小圆形纸片的直径为 (▲)

- A. 12 B. 7 C. 6 D. $4\sqrt{3}$



(第7题答图)



(第8题答图)

【命题立意说明】：本题主要考查图形的转化能力，综合运用多边形内角和公式、圆周角定理的推论、全等三角形的判定定理、 30° 、 60° 的三角函数值等知识，将四边形的问题转化为三角形问题来解决. 这些知识点不是简单的堆砌，而是环环相扣的有机融合. 三角形的外接圆半(直)径问题比较常见，学生已经形成了丰富的解题经验. 本题在此基础上创新，特殊四边形的外接圆半(直)径如何求解呢？利用这个四边形角的特征，发现四边形 $ABCD$ 在同一个圆上，连接 AC 转化为特殊的直角三角形进行计算.

8. 在平面直角坐标系中，点 $A(-1, 0)$ ，点 P 是平面直角坐标系内一点，线段 PA 与 x 轴正方向的夹角为 θ ，点 P 的横坐标是 $3\cos\theta-1$ ，当 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ 时，点 P 经过的路径长为 (▲)

- A. 3π B. $3\sqrt{3}$ C. $\frac{3}{2}\pi$ D. $3\sqrt{2}$

【命题立意说明】：本题主要考查用锐角三角函数解决实际问题、根据坐标描出点的位置、圆的概念等知识的综合灵活运用. 本题第一个创新的亮点是坐标与三角函数相结合，根据坐标描出点的位置的基本方法是过点作 x 轴或 y 轴的垂线段，画垂线段的过程中构造出直角三角形. 这里仅已知点 P 横坐标，过点 P 作 x 轴的垂线段 PB ，发现在 $Rt\triangle PAB$ 中， $AB=3\cos\theta$ ， $\angle PAB=\theta$ ，通过余弦的概念得到 $PA=3$. PA 的长是定值，可确定点 P 的运动轨迹是以点 $A(-1, 0)$ 为圆心，3 为半径的圆. 因为 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ ，所以学生会选择 C. 本题第二个创新的亮点是“犹抱琵琶半遮面”， $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ 有很强的迷惑性会影响学生的习惯性思维. 题干中仅已知点 P 横坐标，当确定点 P 轨迹后，点 P 的完整坐标是 $(3\cos\theta-1, 3\sin\theta)$ 或 $(3\cos\theta-1, -3\sin\theta)$ ，正确答案应该是 A. 作为选择的压轴题，培养了学生数形结合的能力和数学思维的严谨性，活而不难.

9. 化简： $\sqrt{12} + \sqrt{3} = \underline{\hspace{2cm}} \blacktriangle$.

【命题立意说明】：本题主要考查最简二次根式的概念和二次根式的加减，关键是掌握计算法则：二次根式相加减，先把各个二次根式化成最简二次根式，再把被开方数相同的二次根式进行合并，合并方法为系数相加减，根式不变. 没有繁复的计算，着眼基本概念和基本运算.

10. 要使分式 $\frac{3}{x-2}$ 有意义，则实数 x 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}} \blacktriangle$.

【命题立意说明】：本题主要考查分式有意义的条件，掌握分式有意义的条件是分母不等于零是解题的关键. 本题没有在分子或分母上叠加二次根式或其他影响实数 x 取值的条件，考查知识点指向明确，但可能个别同学仍然会受小学分数影响认为分母大于 0 才有意义.

11. 分解因式: $-x^2 + 2x - 1 = \underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$.

【命题立意说明】: 本题主要考查提公因式法、公式法进行因式分解. 首先确定基本结构是运用完全平方公式分解因式, 但二次项系数和常数项均为 -1 , 需要提公因式 -1 才能进一步分解, 在提公因式 -1 时, 注意每一项都要变号, 特别是一次项系数在提公因式时容易发生错误. 在简单问题的易错点处考查学生概念的掌握程度, 是本题的主要立意.

12. 常州地铁 1 号线呈南北走向, 北起新北区森林公园站, 途经天宁区, 南至武进区南夏墅站, 全长大约 34240m, 则数据 34240 用科学记数法表示为 $\underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$.

【命题立意说明】: 本题主要考查用科学记数法表示数. “常州地铁 1 号线”是常州近年来城市轨道交通的重大工程项目, 并于 2019 年 9 月 21 日开通运营, 这是常州交通史上一个新的里程碑, 也标志着常州的城市发展将进入一个崭新的时代! 以此为背景, 旨在让学生明白数学与实际生活密不可分, 在学习数学的同时, 要关心时事, 培养城市发展自豪感. 取材真实, 增强了数学的现实意义.

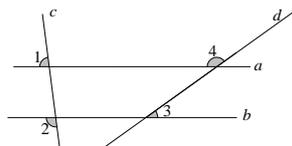
13. 平面直角坐标系中, 点 $P(12, 5)$ 关于 y 轴对称的点的坐标是 $\underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$.

【命题立意说明】: 本题主要考查关于 y 轴对称点的坐标特点, 关键是掌握点的坐标的变化规律. 学生容易将关于 y 轴对称点的坐标特点与关于 x 轴对称点的坐标特点发生混淆, 结合图形观察就非常清晰, 不需要死记硬背或者想当然. 关于 y 轴对称, 图形关于 y 轴左右对称, 所以横坐标变为原来的相反数, 纵坐标不变; 关于 x 轴对称, 图形关于 x 轴上下对称, 所以纵坐标变为原来的相反数, 横坐标不变. 教学时, 教师一定要坐标变化中数形结合的意识和方法讲透.

14. 已知圆锥的母线长为 4cm, 侧面积是 $12\pi\text{cm}^2$, 则圆锥的底面圆半径为 $\underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$ cm.

【命题立意说明】: 本题主要考查圆锥侧面积的运用. 已知圆锥的底面半径和母线长可以直接运用圆锥的侧面积公式 $S = \pi r l$ 求解, 但公式并不仅仅是从左往右或者从右到左的单向功能. 学生在初中对所有学习的公式都要建立函数思想和方程思想, 比如 $S = \pi r l$ 这个公式, π 是常量, 其他三个变量 S 、 r 、 l 已知任意两个就可以求第三个. 这样的例子在初中数学范围内比比皆是, 站在数学思想的高度看待日常教学中出现的问题, 许多问题就能迎刃而解. 如此一以贯之地教学, 学生方能以不变应万变, 将数学知识学通学活, 并且形成良好数学思维习惯.

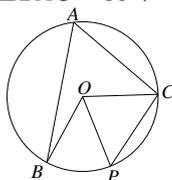
15. 如图, 已知直线 a 、 b 被直线 c 、 d 所截, $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补, $\angle 4 = 4\angle 3$, 则 $\angle 3 = \underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}^\circ$.



(第 15 题)

【命题立意说明】: 本题主要考查补角的概念、对顶角相等、平行线的判定定理、平行线的性质定理等相交线与平行线知识的综合应用. 从平行线的判定定理定性分析确定直线 a 、 b 平行的位置关系, 到通过平行线的性质定理“两直线平行, 同旁内角互补”, 结合已知条件, 利用一元一次方程或二元一次方程组定量计算. 充分体现本题设计层层递进, 水到渠成的特点. 定性分析和定量研究相结合是探究数学问题常用的研究方式, 对学生研究问题的方法进行潜移默化的渗透.

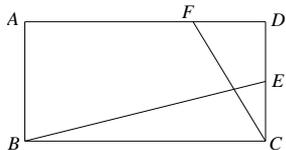
16. 如图, 在 $\odot O$ 中, \widehat{BC} 所对的圆周角 $\angle BAC=60^\circ$; 若 P 为 \widehat{BC} 上一点, $\angle BOP=50^\circ$, 则 $\angle OCP$ 的度数为 ▲ °.



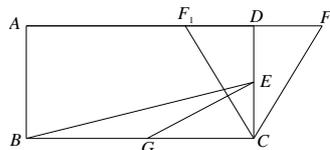
(第16题)

【命题立意说明】: 本题主要考查圆周角定理、等腰三角形的性质定理、三角形的内角和定理的综合应用. 在圆的背景中, 半径相等是隐含条件, 本题培养学生善于挖掘信息和整合已知条件解决问题的能力.

18. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=8$, 点 E 为 CD 的中点, 点 F 在直线 AD 上运动, 连接 BE 、 CF , 当 $\angle DCF=2\angle CBE$ 时, 线段 AF 的长为 ▲ .



(第18题)



(第18题答图)

【命题立意说明】: 本题主要考查等腰三角形的判定定理、勾股定理、利用图形的相似解决问题等知识的综合运用. 第一个创新的亮点是“ $\angle DCF=2\angle CBE$ ”, 两倍角关系如何转化? 这两个角既不在同一个图形中又不相等, 如何转化是本题的难点, 解题思路是将两倍角关系转化为相等关系. 借鉴通过 30° 的直角三角形, 将 30° 作为外角, 斜边为等腰三角形的一腰, 构造底角为 15° 等腰三角形得到 15° 的三角函数值的经验, 在 BC 边上取点 G , 构造等腰 $\triangle BGE$. 则 $\angle EGC=2\angle CBE$, 从而 $\angle EGC=\angle DCF$, 再通过勾股定理和相似三角形对应边成比例的计算即可解决. 第一个创新的亮点是“点 F 在直线 AD 上运动”, 点 A 和点 F 可能在点 D 的同侧也可能在点 D 的异侧, 所以有两解, 体现分类讨论的思想. 为了避免学生审题不清, 特意在直线下加着重号. 作为压轴填空题能较好地反映学生根据已知图形和条件的特征, 灵活运用所学知识创造性地构造图形建立联系突破难点的能力, 同时也培养了学生全面分析问题素养.

19. 先化简, 再求值 $(x-1)(x+1)-x(x-2)$, 其中 $x=-\frac{1}{2}$.

【命题立意说明】: 本题主要考查求代数式的值, 体现了重点知识重点考查的命题精神. 本题涉及平方差公式, 简单的整式加、减、乘运算, 实数运算等知识, 这些是初中数学最基本的基础知识, 充分体现考查基础知识和基本计算的掌握程度.

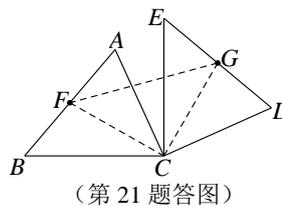
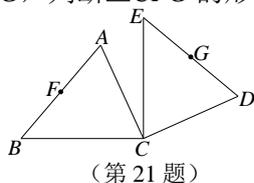
20. (1) $\frac{x}{x-1}=2-\frac{3}{1-x}$;

【命题立意说明】: 本题主要考查解可化为一元一次方程的分式方程. 分式方程在第一步去分母的时候, 方程两边乘以同一个整式, 有可能在后面转化为整式方程求出的解, 恰好使这个整式为 0 , 即出现增根, 使分母无意义. 所以分式方程的检验环节必不可少, 而且必须清楚的写出来. 有学生漏写检验的过程, 并不是简单的遗忘, 而是对增根产生的原因一知半解, 这也是本题着重考查的方面. 本题在去分母时, 方程两边同乘 $(x-1)$ 时, 分母 $(1-x)$ 是 $(x-1)$ 的相反数, 一定要注意符号的改变.

20. (2)
$$\begin{cases} 2(x+1) > 6, \\ x+7 \geq 3x. \end{cases}$$

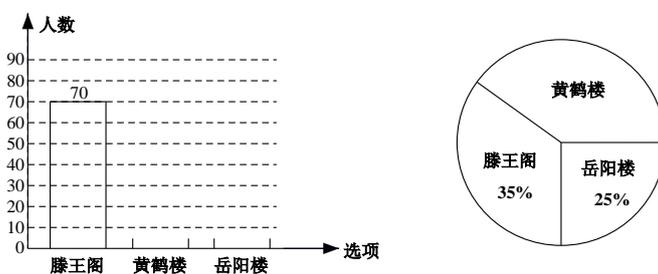
【命题立意说明】: 本题主要考查两个一元一次不等式组成的不等式组的解法. 学生要正确地解答每个不等式, 然后再借助数轴数形结合找出其解集. 在解第二个不等式的时候要注意不等式两边同时乘除一个负数, 不等号的符号的方向发生改变. 解不等式和解方程最大的区别就是在化系数的环节, 不等号的方向可能发生改变, 而等号只要满足等式的基本性质恒成立.

21. 如图, 把 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得 $\triangle DEC$, 点 F 、 G 分别是 AB 、 DE 的中点.
- (1) 连接 CF 、 CG , 则 CF 与 CG 的位置关系是 垂直;
- (2) 连接 FG , 判断 $\triangle CFG$ 的形状, 并证明你的结论.



【命题立意说明】: 本题是建立在图形的变化——旋转基础上的一道试题, 题目既基本, 又新颖, 看似常规但又不常规, 是一道考查图形旋转的基本性质和三角形全等的判定等基础几何知识的好题. 本题的第(1)小题依据“一个图形和它经过旋转后所得到的图形中, 两组对应点分别与旋转中心连线所成的角相等”, F , G 是一一对应点, 所以 $\angle FCG = \angle BCE = \angle ACD = 90^\circ$, 所以 CF 与 CG 的位置关系是垂直. 也有学生可能在第(1)小题就应用三角形全等的知识解决, 为第(2)小题做了非常好的铺垫. 第(2)小题先判断 $\triangle CFG$ 的形状, 再证明结论. 这是第(1)小题的延续, CF 与 CG 除了位置关系有没有数量关系呢, 体现问题设置的连续性和递进性. 在解答时, 有可能学生直接应用图形旋转的另一个性质“一个图形和它经过旋转后所得到的图形中, 对应点到旋转中心距离相等”, 直接得出等腰直角三角形. 因为这是一道几何证明题, 需要应用几何证明题的证明依据进行演绎推理. 而图形旋转的性质并不在几何证明依据范围之内, 关于这点学生一定要明确区分几何定理的应用场景和范围.

22. 江西南昌滕王阁、湖北武汉黄鹤楼、湖南岳阳岳阳楼, 并称为江南三大名楼. 王勃所作的《滕王阁序》, 崔颢所作的《黄鹤楼》, 范仲淹所作的《岳阳楼记》等文人雅士留下的不朽诗篇, 令江南三大名楼享誉千海内外. 文学社成员在校内对“你最喜欢的江南三大名楼”进行了抽样调查, 并根据调查结果绘制成如下统计图.
- (1) 本次抽样调查的样本容量是 100;
- (2) 补全条形统计图;
- (3) 该校共有 3000 名学生, 请根据统计结果估计该校最喜欢黄鹤楼的学生人数.



(第 22 题)

【命题立意说明】: 本题将条形统计图和扇形统计图相结合, 有效考查学生对统计基本概念的理解, 从两个数据统计图中获取信息的能力, 学会通过样本估计总体. 统计题取材来源于生活, 跨界语文、地理等学科, 体现学科融合性和试题的人文价值, 渗透应用意识, 增强学生对中华优秀传统文化的继承和发扬, 激发学生祖国大好河山的美好向往和民族自豪感.

23. 常州市对垃圾分类并未采取干垃圾、湿垃圾等垃圾分类的方式，而是结合本市具体情况，对生活垃圾按照规定实施分类投放。如图，在居民小区、单位，按照可回收物、有害垃圾、其他垃圾三类进行投放。假设 A 类指可回收物，B 类指有害垃圾，C 类指其他垃圾，住在同一小区的甲、乙两人下楼时各投放一袋垃圾。



(第 23 题)

- (1) 甲投放的垃圾恰好是 A 类的概率是 ▲ ；
 (2) 求甲、乙两人投放的垃圾是同种类的概率。

【命题立意说明】：本题主要考查概率的意义和通过列表、画树状图等方法计算简单随机事件发生的概率，关注学生解决两步等可能条件下概率问题答题的规范性。本题背景来源于中国政府大力推广的垃圾分类工作，也就是时下的热门话题“你是什么垃圾？”，常州市在垃圾分类工作方面已经全面启动并有效落实。（因为疫情的关系，出题本人在小区拍摄有关指示图，由于指示图材质问题反光，可能图片不太清晰。）在考查数学知识的同时，培养学生垃圾分类的意识，学习垃圾分类的方法，提高环保意识和责任意识。

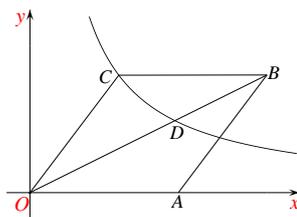
24. 某商场销售一批裤子，平均每天可售出 60 条，每条盈利 35 元。为了积极响应常州“慈善一日捐”活动，商场决定降价义卖，义卖所得善款全部捐赠。经市场调研，裤子的单价每降 1 元，商场平均每天可多售出 4 条。如果降价后商场销售这批裤子每天盈利 2500 元，那么裤子的单价降了多少元？

【命题立意说明】：本题主要考查列一元二次方程解决实际问题，审清题意找准等量关系是解题的关键。通过本题的求解使学生经历问题情境——数学抽象——建立模型——数学运算——应用解释的过程，考查解决实际问题的一般方法。在解一元二次方程时，到 $(x-10)^2=0$ 这一步，有学生可能会出现 $x=10$ 这样的错误。出现错误的根本原因是对一元二次方程解的认识不到位，一元二次方程若有实数根一定是两个，两个相等的或不等的。 $x=10$ 是一元一次方程 $x-10=0$ 的解，而 $(x-10)^2=0$ 的代数意义是 $(x-10)(x-10)=0$ ，即 $x-10=0$ 或 $x-10=0$ ，是两个一元一次方程的解。尽管这两个方程相同，所以正确的解应为 $x_1=x_2=10$ 。本题背景是常州“慈善一日捐”活动，常州人一次次用自己的实际行动验证常州是一个慈善之都，博爱之城，激发学生热爱常州的情感。本题对情感、态度、价值观正在形成的学生来说，具有重大的积极意义。虽然能力有大小，但是助人为乐、关心公益我们可以从身边力所能及的小事做起。只要人人都献出一点爱，社会将变成美好的人间！培养学生奉献爱心，回馈社会的使命担当，体现立德树人的教育理念。

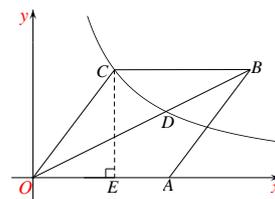
25. 在菱形 $ABCD$ 中, $OA=5$, $\sin \angle AOC = \frac{4}{5}$, 点 A 在 x 轴上, 点 D 在对角线 OB 上, 反比例函数

$y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像经过点 C, D .

- (1) 求 k 的值;
 (2) 求点 D 的坐标.



(第 25 题)



(第 25 题答图)

【命题立意说明】 本题为反比例函数、一次函数的综合应用, 涉及菱形的性质、三角函数的定义、勾股定理、待定系数法、由点位置确定它的坐标及方程思想. 在本题的第 (1) 小题中构造 $Rt\triangle CED$ 根据三角函数的定义和勾股定理, 求得 CE, OE 的长是解题的关键. 在本题的第 (2) 小题中, 点 D 是直线 OB 和反比例函数的交点, 所以应用方程思想列方程求解, 注意点 D 在第一象限, 对求出的值要取舍. 本题考查知识点较多, 综合性较强, 难度适中.

26. 【阅读】

通过在正方形网格纸中构造图形, 可以帮助我们形象直观地解决一些问题, 体现数形结合的重要思想方法.

【理解】

- (1) 在图 26-1 中, 请尝试用构造图形的方法比较大小: $\sqrt{13} + \sqrt{5}$ ▲ $4\sqrt{2}$ (填“<”, “=”, “>”), 请说明理由;
 (2) $\sqrt{a^2 + 4}$, $\sqrt{a^2 + 16}$, 6 ($a > 0$) 是三角形的三条边长, 在图 26-2 中, 请尝试用构造图形的方法求这个三角形的面积, 请作必要说明;

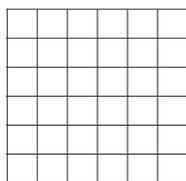


图 26-1

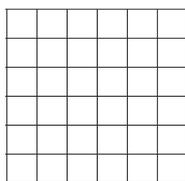


图 26-2

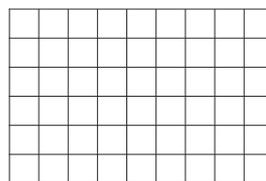


图 26-3

【运用】

- (3) 在图 26-3 中, 请尝试用构造图形的方法求代数式 $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(8-x)^2 + 9}$ 的最小值, 请说明理由;
 (4) 代数式 $\sqrt{y^2 + 18y + 181} - \sqrt{y^2 + 1}$ 的最大值为 ▲.

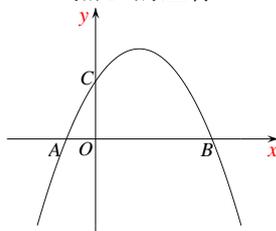
【命题立意说明】 本题主要考查学生运用数学结合的思想通过构造图形解决一些无理数的大小比较, 含有字母边长的图形面积计算, 代数式的最值问题. 本题的亮点是巧用网格背景, 在对难点问题的探究过程中, 渗透数形结合的意识和方法, 化难为易, 化繁为简. 在本题的第 (1) 小题中, 具体无理数可以通过观察, 直接找出一个三角形的三边分别是 $\sqrt{13}$ 、 $\sqrt{5}$ 、 $4\sqrt{2}$, 然后利用三角形三边关系比较大小. 在本题的第 (2) 小题中三角形的边长中出现了字母, 线段 $\sqrt{a^2 + 4}$, $\sqrt{a^2 + 16}$ 长度是个变量, 但仍可利用勾股定理的特征, 从第 (1) 小题的特殊到第 (2) 小题的一般, 构造出符合要求的图形轻松解决问题. 前两问为后面两问做了细致的铺垫工作, 第 (1) 小题给出了解决后面两问的解题思路, 第 (2) 小题给出了利用网格构造特殊二次根式的一般方法. 本题的第 (3)、(4) 小题均是灵活运用轴对称将相等线段转化到同一三角形中, 再根据三角形的三边关系和两点之间线段最短等知识求解. 第 (3) 小题利用三角形两边之和大于第三边, 当三边共线时, 两边之和有最小值 (两点之间线段最短) 即边长所对应代数式的和有最小值. 第 (4) 小题利用三角形两边之差小于第三边, 当三边共线时, 两边之差有最大值即边长所对应代数式的差有最大值. 本题极大地培养和锻炼了学生的直观想象和创新意识.

27. 如图, 二次函数 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + c$ 的图像与 x 轴相交于点 A 、 B , 与 y 轴相交于点 C , 点 B 的坐标为 $(4, 0)$, 点 P 在抛物线上.

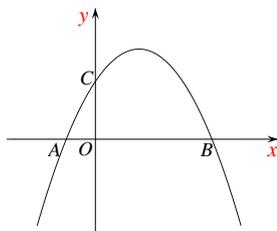
(1) $c = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 连接 PB 、 PC , 是否存在这样的点 P , 使得 $S_{\triangle BPC} = 2S_{\triangle BOC}$, 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由;

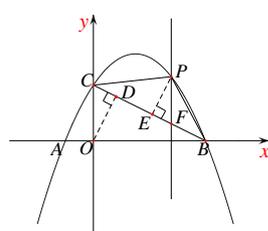
(3) 若以 PB 为直径的圆与直线 BC 有另一个交点 Q , 且满足 $\triangle PBQ$ 与 $\triangle AOC$ 相似, 直接写出点 P 的坐标.



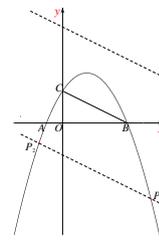
(第 27 题)



(备用图)



(第 27 题图 1)



(第 27 题图 2)

【命题立意说明】: 本题是典型的以二次函数为背景, 点的运动型问题. 本题集二次函数、一次函数、方程、相似三角形、圆等诸多知识于一体, 综合性非常强. 三个小问的设置由浅入深, 梯度清晰, 层次分明, 较好地体现了数学课程标准中“不同的人在学习上得到不同的发展”的理念. 本题的第 (1) 小题考查学生用待定系数法确定二次函数表达式, 这问门槛很低, 所有学生都能轻松解决, 但要确保计算的正确性, 特别是心浮气躁的学生, 否则影响下面两问的正确解决. 本题的第 (2) 小题, 学生稍加分析就会发现, 这两个三角形有一条公共边, 将这条公共边 BC 作为底边, 面积两倍的关系就转化为同一底边 BC 上高的两倍关系. 画出两条高后发现, 这两条高是倾斜的, 利用相似化斜为直, 即铅锤高 $PF=2OC$. PF 可利用函数坐标的关系表示, OC 是定值, 借助方程 $PF=2OC$ 求解即可. 也会有基础比较扎实的学生发现面积关系中蕴含的函数特征, 将直线 BC 分别向上或向下平移 $2OC$ 长, 得到一次函数 $y = -\frac{1}{2}x + 6$ 和 $y = -\frac{1}{2}x - 2$, 与二次函数表达式分别联立方程组求解. 本题的第 (3) 小题看上去比较复杂, 问题涉及圆、二次函数和相似三角形等图形, 如果按题目意思都画出来必定眼花缭乱, 抓不住重点. 经过分析发现 $\triangle PBQ$ 与 $\triangle AOC$ 都是直角三角形, $\triangle AOC$ 是确定的, $\triangle PBQ$ 中只需研究 $\angle PBQ$ 与 $\triangle AOC$ 中两个锐角分别相等的关系, 分类讨论, 用边的关系确定角相等. 因为整张试卷计算量比较大, 所以这道小题设置为写出结论即可, 节约学生的答题时间.

二、改编

28. **母题:** 如果三角形有一边上的中线长恰好等于这边的长, 那么称这个三角形为“好玩三角形”.

(1) 请用直尺和圆规画一个“好玩三角形”(保留作图痕迹, 不写作法);

(2) 如图 1, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $BC < AC < AB$, $\angle C = 90^\circ$, 当 $\triangle ABC$ 是“好玩三角形”时, 求 $BC : AC : AB$ 的值;

(3) 如图 2, 所示直角坐标系中, $A(-3, 0)$, $B(3, 0)$, $M(-5, 0)$, 点 D 是以点 M 为圆心 4 为半径的圆上除 x 轴外的任意一点, 且 D 为 AC 中点. 求证: $\triangle ABC$ 是好玩三角形;

(4) 如图 3, 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 a , 点 P , Q 从点 A 同时出发, 以相同速度分别沿折线 $AB-BC$ 和 $AD-DC$ 向终点 C 运动, 记点 P 经过的路程为 s . 若 $\triangle APQ$ 是“好玩三角形”,

试求 $\frac{a}{s}$ 的值.

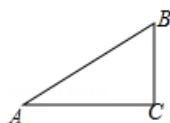


图 1

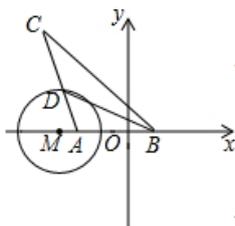


图 2

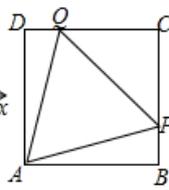
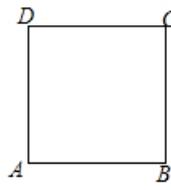


图 3



备用图

改编：如果三角形有一边上的中线长恰好等于这边的长，那么称这个三角形为“好玩三角形”，称这边的中线为“好玩线”。

- (1) 如图 28-1，以线段 BC 为三角形的一边，请用直尺和圆规画一个 $\triangle ABC$ ，且 $\triangle ABC$ 是“好玩三角形”（保留作图痕迹，不写作法）；
- (2) 如图 28-2，在 $\triangle ABC$ 中， $BC < AC < AB$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，当 $\triangle ABC$ 是“好玩三角形”时，求 $BC : AC : AB$ 的值；
- (3) 如图 28-3，在平面直角坐标系中，已知点 $A(-3, 0)$ 、 $B(3, 0)$ ， $M(-5, 0)$ ，点 D 是以点 M 为圆心 4 为半径的圆上一点，且点 D 为 AC 的中点。
 - ① 请描述点 C 的轨迹： ▲ ；
 - ② 若点 D 不在 x 轴上，且 $\triangle ABC$ 中有两条“好玩线”，求出此时 $\triangle ABC$ 的面积。

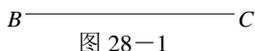


图 28-1



图 28-2

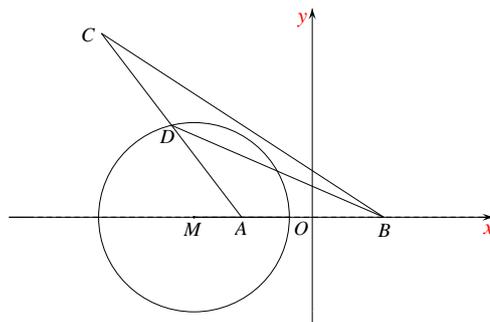


图 28-3

(第 28 题)

【改编立意说明】：本题是一道新定义问题（改编部分用红色以示区分），给出了“好玩三角形”的定义，我在此基础上又给这条中线增添了“好玩线”的定义。因为我发现原题中的第（3）小题还有继续探究的价值，果断舍弃了原题中的第（4）小题，保留原题中的第（1）、（2）小题，对第（3）小题进行如上改编，在直角坐标系背景下，三角形、圆、动点有机融合，在变化中蕴含着不变的关系和规律。下面，我重点谈一下改编后第（3）小题的价值。首先第（3）小题的第一问，将点 C 运动的轨迹清晰地勾勒出来。因为点 D 是线段 AC 的中点， DM 是定长 4，逆向思维联想到三角形的中位线，过添加辅助线，补出第三边 CN ，根据三角形中位线定理解决第（3）小题的第一问。这是常用辅助线的添加方法，学生应该比较容易解决，而第（3）小题的第一问对第二问的解决至关重要。第（3）小题的第二问包含了原题第（3）小题的过程，如果不能发现 $\triangle ABC$ 本身就是“好玩三角形”，这一问就很难。联系“好玩线”的定义，说明 $\triangle ABC$ 是“好玩三角形”势在必行，原图中有一条中线 BD ，不妨以此为突破口，利用边角说理得到。 $\triangle ABC$ 是“好玩三角形”证得后，中线 BD 一定是“好玩线”，所以只需要再找一条“好玩线”，下面接着分类讨论中线 CO 和 AE 是否为“好玩线”就顺理成章，体现了分类讨论的思想。在下面具体求解的过程中，方程思想与几何意义相结合，尽显数学的精妙绝伦。因为点 A 和点 B 关于 y 轴对称， $\odot M$ 关于 x 轴对称，在问题解决时充分利用对称关系可以四两拨千斤地解决复杂的计算问题，体现数学和谐的对称之美。解决数学问题的过程也是陶冶性情，感受数学美，发现数学美，创造数学美的过程。