

数学思维的学习与教学(中)

郑毓信

三、认识面积与数学化的思想

相信大多数读者都曾听说过荷兰著名数学家、数学教育家弗赖登塔尔的这样一句名言:对学生而言,与其说学数学,不如说学习数学化。(弗赖登塔尔,《作为教育任务的数学》,上海教育出版社,1995,第124页)但是,究竟什么是这里所说的数学化的具体涵义?下面就联系小学三年级的一个课例对此作出初步分析。

[例] 认识面积的教学。

这是笔者新近听的一堂数学课。首先,正如课改以来所普遍提倡的,教师在此也采取了由物体引出图形的做法,即要求学生具体地指明一些物体(纸巾盒、篮球等)的各个表面。由于物体都有表面,显然这可以被看成一个常识,因此,这一活动对于大多数学生而言没有任何困难。

教师接着又安排了这样一个环节——要求学生摸一摸上面所提到的各个物体的表面,之后提问:“你感觉出了什么?”“这些表面有什么不同?”学生给出的解答可说是五花八门:“它们的形状不一样”“有的表面很粗糙,有的很光滑”“表面有大有小”……教师以此为基础引出了这样一个结论:物体表面的大小叫做它们的面积。

其后,教师又通过一些实例对什么是面积作了进一步的分析,特别强调了这样几点:只有封闭图形才有面积;即使是中空的图形(如玻璃瓶的瓶口)也有面积;我们必须清楚地区分图形的面积与周长。

这时教学转入了以下的环节——要求学生分组对事先准备好的一些平面图形的面积大小作出比较。学生表现出了很大的创造性。教师则通过适当的引导和概括,总结出这样一些方法,如观察、重叠、测量等。

笔者在此并不企图对这一课例作出具体点评,而是希望以此为背景,对我们应当如何帮助学生学习数学化,包括究竟什么是数学化的具体涵义作出分析。应当指出的是,这事实上也正是教学实践的理论性反思的一个基本涵义,即我们不仅应当高度重视对教学活动的自觉反思,也应从理论高度更为深

入地进行思考,跳出各个具体内容的教学这一范围以引出具有更大普遍性的问题,包括相应的普遍性结论等,以便对今后的工作发挥更大的启示与促进作用。

具体地说,我们在此可首先提及香港教育学院冯俊业先生关于数学化的这样一个解读:对学生而言,数学化就是“从无到有、从粗糙到精致”。就上述课例而言,大多数学生早已通过日常生活初步接触到了面积这样一个概念,因此,按照这一分析,这显然也就应当成为认识面积教学的主要关注,即我们如何帮助学生较好地实现对面积这一概念由粗糙向精致的理解的转化。

特殊地,这显然也可被看成上面所提到的这样一些教学设计的真正意义所在,即为了帮助学生很好地理解面积这样一个概念,我们在教学中应当特别强调这样几点:只有封闭图形才有面积,中空的图形也有面积,必须清楚地区分图形的面积与周长……

其次,从更为深入的角度分析,笔者以为,数学化又应被理解成像数学家那样去看待世界,发现问题,解决问题。显然,这一论述事实上可被看成为我们究竟如何实现“从无到有、从粗糙到精致”的发展指明了具体的方向。例如,在笔者看来,这也正是弗赖登塔尔的以下论述的核心所在:“科学一旦跨出单纯收集材料的阶段,它便将从事于经验的组织。算术与几何所应组织的经验是哪些,这是不难指出的。用数学方法把实际材料组织起来,这在今天就叫做数学化。”(弗赖登塔尔,《作为教育任务的数学》,上海教育出版社,1995,第45页)

也正是从上述角度分析,笔者以为,面对学生通过具体触摸所提出的各种不同感受,教师应清楚地指明:我们在数学中所关注的只是图形的大小和形状(当然,我们在此又将主要集中于面积的大小,而这事实上也正是数学家思维方式的一个重要表现,即我们应当按照由简单到复杂、由单一到多元的顺序逐次地开展研究),而完全不考虑对象的其他性质,如质地、质量等。(也正因此,我们在此还可直接

提出这样一个问题:这一内容的教学是否真有必要让学生实际地摸一摸各个物体的表面?)

进而,更为重要的是,我们在教学中又应帮助学生实际经历这样一个思维发展过程,即由单纯的大小比较(怎么比?),逐步过渡到精确的度量(到底有多大?怎么量?),直至最终发展起相应的计算方法(怎么算?)。“大小”这一词语本身已包含“比较”这样一个涵义,因此,这一过程事实上也就可以被看成从又一角度更为清楚地表明了“由粗糙到精致”的具体涵义。

当然,就认识面积这一堂课的教学而言,我们不可能完整地展示出上述的发展过程,但在笔者看来,这恰又十分清楚地表明了跳出具体内容的限制、并从更为广泛的角度进行分析思考的重要性。因为,只有这样,我们才能准确地把握住相关知识内容中所蕴涵的(重要)数学思想,并在教学中真正做到心中有数,包括如何依据具体的教学情境与学生的认知发展水平适当地予以显化。

最后,还应强调的是,我们在此事实上还可从更为一般的角度思考这样一个问题,即如果我们将视角进一步拓宽到度量这样一种数学活动(包括线段的度量、角的度量、面积与体积的度量与计算、平面图形的周长与物体表面积的计算,等等),那么,究竟什么是与此直接相关的、较为重要的数学思想(和数学活动经验)?或者说,我们在此究竟应当帮助学生通过实际参与掌握哪些数学思想(和数学活动经验)?

具体地说,笔者以为,度量的教学就整体而言,主要涉及到了这样一些数学思想和数学活动经验:度量单位的重要性,度量工具的重要性,实际度量的经验,维度的概念(区别与联系),类比的思想,逼近的思想,通过寻找规律以发现计算法则。

例如,在线段的度量与角的度量之间显然就存在明显的类比关系,我们可以通过与线段度量的类比去进行角的度量的教学。而且,后者事实上也可被看成帮助学生初步掌握类比这一方法的一个良好契机,特别是,帮助学生初步理解到这样一点:求同存异正是成功应用类比的关键。这也就是指,我们在教学中不仅应当清楚地指明在线段的度量与角的度量之间的各个共同点:我们在此都可通过大小的比较以引出度量(精确度量)的必要性,进而,精确度量的关键又在于度量单位的确定、度量工具的选择与使用等,也应更加重视两者之间的不同之处:例如,由于对象的不同,就角的度量而言,我们自然就应采用不同的度量单位、不同的度量工具与度量方法。同时,更为重要的是,由线段的度量向角的度量的过渡

意味着我们的研究对象已由一维扩展到了二维。

另外,也正是从同一角度分析,我们或许应当更为深入地思考这样一个问题:尽管将面积定义为物体表面的大小有其一定的合理性,但从思维发展的角度分析,这却体现了与维度的逐次增大(即由线段的长度逐次过渡到图形的面积和物体的体积)截然相反的方向,又由于后者在很大程度上可被看成人们在日常生活中所习惯的一种思维方式(可称为同向思维),因此,由三维的物体引出二维的图形(逆向思维)就会有较大难度。与此相对照,通过线段长度与图形面积的类比引出面积的概念可能更加可取。

由以下的实验读者可以更好地理解依据认识发展的规律组织教学的重要性:正如由物体引出图形一样,我们在教学中是否也可由物体(图形)引出线段,如将线段的长度定义为物体边缘的长度(或是封闭图形边缘的长度)。当然,后一路径也是与人们所习惯的逻辑顺序直接相对立的,而这恰又正是数学思维的又一重要表现:“数学家有这样的倾向,一旦依赖逻辑的联系能取得更快的进展,他就置实际于不顾。”(弗赖登塔尔,《作为教育任务的数学》,上海教育出版社,1995,第45页)

四、认识方程与代数思想的渗透

相对于上面所提到的各个内容而言,认识方程应当说并非小学数学的传统内容。也正因此,一线教师从事这一内容的教学时有不少困难和疑问也就十分自然了。例如,吴正宪老师在相关报告中就曾提到这样一些问题:学生能顺利辨认方程就是认识方程了吗?能流利地说出方程的定义就是理解方程了吗?另外,这也是很多教师十分关注的一个问题:现实中有很多学生似乎始终不愿接受利用方程求解问题这样一种方法,教师应如何帮助学生更好地认识方程方法相对于算术方法的优越性?

应当指出的是,上述的困难和疑问在一定程度上可被看成体现了小学数学教师的专业成长。因为,对于概念定义的高度重视正是人们区分初等数学思维与高层次数学思维的重要标志之一,而这恰又是中小学的严格划分对于我国小学教师专业成长所造成的一個严重束缚,即后者的专业素养往往局限于初等数学,并很少能够真正进入高层次数学思维的范围。从而,笔者也就很希望这一论题的讨论能够促进一线教师积极地突破由于中小学的严格划分所造成的思想桎梏,在教学中能够真正做到居高临下,包括很好地渗透更高层次的数学思想。

当然,这也正是这一论题的普遍意义,即我们应

当如何帮助学生很好地掌握数学概念的本质,真正做到理解学习,而不是停留于机械学习。例如,就方程的教学而言,这显然就可被看成机械学习的具体表现:尽管学生能够按照确定的算法正确地求解方程,但却不善于通过列方程、解方程去解决问题,甚至都未能清楚地认识方程方法相对于算术方法的优越性。

以下就首先围绕代数思想对方程方法与算术方法的区别作出具体分析,特别是,这是否就可归结为用字母表示未知量?

为了清楚地说明问题,在此特别提及“小数会成立30周年纪念活动”(2012,广州)上所展示的一个课例。

[例] 两步应用题的教学。

具体地说,这是牛献礼老师1999年所设计的一个课例。其中,教师首先向全班学生提了这样一个问题:“为了庆祝国庆50周年,班上学生做了25朵黄花,18朵紫花,问:他们做了多少朵红花?”大多数学生很快就意识到在所说的情况下这道题是不能做的,而如果补充了“他们所做的红花比黄花与紫花的总数少3朵”这样一个条件,这道题就可以做了。

由此可见,这就是算术方法与方程方法的一个共同之处:两者都是利用未知数与已知数之间的等量关系求出未知数。它们的区别则主要在于这样两点。第一,通过用字母表示未知量,代数中将解题过程分解成了两个相继的步骤,从而就使任务得到了一定的简化:(1)列方程,即对于等量关系的明确表述;(2)解方程,从而求得未知数。第二,在算术中,等量关系的分析与应用主要是通过内在的思维活动隐蔽地得以实现的;在代数中,相关的思维活动则已在很大程度上被外化了,后者为我们通过算法的创立与应用解决问题提供了直接基础。

应当强调的是,算法的创立可被看成代数方法相对于算术方法最为重要的优点。这也就如吴文俊先生所指出的:“四则难题制造了许许多多的奇招怪招。但是你跑不远、走不远,更不能腾飞……可是你只要一引进代数方法,这些东西就都变成了不必要的、平平淡淡的。你就可以做了,而且每个人都可以做,用不着天才人物想出许多招来才能做,并且他可以腾飞,非但可以跑得很远而且可以腾飞。”(吴文俊,《数学教育现代化问题》,载《21世纪中国数学教育展望》,北京师范大学出版社,1993,第19-20页)

也正因此,尽管用字母表示未知数确可被看成用方程方法求解问题的必要前提,但真正的关键恰又在于这样一种认识的形成:与具体数字一样,我们也可将文字符号看成直接的数学对象,而无需始终

关注它们的指称意义,这也就是指,我们应当同样地去看待未知数和已知数,包括按照一定的算法对此进行运算。

应当指出的是,在一些学者看来,后者正是代数思想的核心:“为了对未知数进行运算,人们需要进行分析性的思维……这种分析性的思维——其中未知数与已知数等同——将代数和算术进行了区分。”(拉弗德语,主要地也就是在这样的意义上,韦达常常被说成代数学的创造者。因为,尽管早在古希腊时代人们就已开始用字母代表数量,但正是韦达在历史上首先提出了这样的思想(他称为“逼真算法”):我们可以用字母表示已知量和未知量,并对此进行纯形式的操作)显然,这也就十分清楚地表明了联系代数思想理解方程方法的重要性。

以下再从同一角度对认识方程的教学作一些具体分析。

就现实而言,应当说大部分教师在这一内容的教学中都特别重视“方程是含有未知数的等式”这样一个定义,包括通过适当的变式突出地强调方程的这样两个要素:含有未知数,是一个等式。

上述的做法并没有错,但应指出的是,这又正是我国数学教育工作者早已提出的一个重要思想:数学教学应当“淡化形式、注重实质”。第一,不要把概念放在最前,教学不要从概念出发,要从实际出发,“先说后做”。第二,概念是人们对客观事物某方面本质属性的反映,不是那样百分之百的不可变动,神圣不可侵犯。第三,不要单纯在概念本身下工夫,概念要靠直观演示,具体操作,使学生对它有所实际领悟。(陈重穆等,“淡化形式,注重实质”,《数学教育学报》,1993年第2期)

由此可见,我们在教学中事实上就不应过分地强调方程的定义,如要求学生在课堂上集体地加以朗读,等等。与此相对照,以下的一些教学方法应当说更为可取,即要求学生用自己的语言说出对方程的理解,包括给出适当的比喻或其他形象化的描述。当然,在此必然地也有一个不断优化的过程。例如,尽管天平这一比喻对于学生理解等量关系十分有益,特别是,我们应当如何对方程进行变形才不会破坏两边的等量关系,但就方程本身的理解而言,“桥”或“网”的比喻又应说更为深刻,因为,方程正是联系未知数与已知数的一座桥梁,我们在此所做的又正是通过“搭桥”或“拉网”以最终求得相应的未知数。

另外,上面的分析显然也已为前面所提到的两个问题提供了直接解答,即“能够流利地说出方程的

定义”与“能够依据符号表达式的外在形式正确判断这是否为方程”并不能被看成理解方程的主要标志。

其次,我们在此又应清楚地认识到这样一点:方程的引入意味着观念的重要转变,即由操作性观念转向了结构性观念,后者可被看成算术思想与代数思想的又一重要区别。

由算术和代数中对于“=”的不同理解我们可大致地理解所说的观念转变。在算术中,我们主要是从操作的观点看待“=”的:等号的左边表明我们应当实施哪些计算,得出的结果则应写在右边。也正因此,等式的两边就是不对称的,或者说,这具有明确的方向性。与此相对照,代数中占据主要地位则是这样一种观念:“=”在此主要代表了一种关系:等量关系,其本身也不具有任何的方向性。

例如,在笔者看来,我们事实上也就应从后一角度理解这样一个观点:等价是代数中的一个核心观念,包括关于方程变形的这样一个要求:所说的变形不应破坏原来的等价关系。(基兰,关于代数的教和学研究,载古铁雷斯、伯拉主编,《数学教育心理学研究手册:过去、现在与未来》,广西师范大学出版社,2009,第16页)

综上可见,无论是就认识方程这一堂课的教学,还是帮助学生很好地掌握方程方法而言,我们都必须联系代数思想进行分析思考,这样才能真正做到居高临下,也可为学生未来的发展提供良好的基础。

例如,从上述的角度出发,我们可更好地理解在认识方程的教学中究竟应当如何设计各个实例,包括所谓的概念变式与非概念变式、标准变式与非标准变式。

具体地说,在给出了方程的定义以后,教师往往会引入这样一个练习,即要求学生具体地判断以下一些式子是否为方程:

$$6+x=14, \quad x \div 3=20, \quad 60-48=12, \\ 8+x, \quad y-28=35, \quad 5y+3>20, \quad \dots$$

但是,我们在此是否也应有意识地引入一些非标准变式?当然,为了对这一问题做出解答,我们首先应更为深入地思考:非标准变式的引入究竟能起到什么样的作用?因为,只有这样,相应的教学设计才能真正成为一种自觉的行为。

事实上,上面所提到的 $y-28=35$ 在一定意义上可被看成一种非标准变式。因为,在使用字母表示未知数时, x 显然是人们的首选。当然,与随意的变化相比较,以下又可说是一种更为自觉的行为,即教学中我们不仅应当用不同的字母替代原先所使用的字母,

如将 $4x+7=35$ 变形为 $4y+7=35$ 等,也可使用某些更为复杂的符号表达式,乃至一些特殊的符号,如将 $4x+7=35$ 变形为 $4(2r+1)+7=35$,乃至 $4^*+7=35$,等等。

显然,后一变化的主要作用是有助于学生超出外在形式的感知,更为深入地认识方程的本质。另外,这显然也可被看成为上述结论提供了进一步的论据,即学生能顺利辨认方程或能流利地说出方程的定义并不等同于理解了方程。

再则,我们在教学中还应有意识地引入另外一些非标准变式,如 $6=14-3x$, $6+x=14-7x$, $25+x=y-28$,等等。容易想到,这主要就是为了促进学生由程序性观念向结构性观念转变。

最后,方程方法对于算术方法的取代显然也可被看成一个优化的过程,而这又正是相关教学活动的真正难点,即我们如何使所说的优化(这不仅是指具体数学知识或技能的学习,也包括数学思维以及相应情感、态度与价值观的培养)真正成为学生的自觉行为,而不是外部的强制规范。因此,我们在此也就应当特别强调关于如何帮助学生实现优化的这样几点建议(详可见另著《数学教师的三项基本功》,江苏教育出版社,2011)。

第一,加强比较,教师应努力促进学生的反思与总结。具体地说,多元化即可被看成比较的必要前提,但又只有通过比较,我们才能清楚地认识到优化的必要性。当然,我们在教学中应积极地促进学生的反思与总结,学生才有可能自觉地实现所说的优化。

第二,除了合作学习在这一方面的积极作用以外,教师在必要时也应通过适当的举例与提问引发学生内在的思维冲突,帮助学生更为深切地感受优化的必要性。

第三,教师在这方面应有较大的开放性和容忍态度,即教学中应当允许一定的路径差与时间差,又应始终坚持优化这样一个目标。

由此可见,就方程的教学而言,我们不应期望学生从一开始就能清楚地认识方程方法相对于算术方法的优越性,应允许学生在一段时间内对此持保留的态度。当然,我们应通过自己的教学积极地促进相应的变化。例如,教师或许从一开始就可创设这样一个情境(问题),对此用算术方法求解即使不说不可能,至少也是十分困难的,从而让学生初步体会到改进方法的必要性;然后,随着教学的推进,我们又应重新回到这一问题,并让学生用新学到的方程方法进行求解,包括在顺利解决问题以后引导学生在这一方面认真地做出总结。

(待续)